Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta pedagogická

Katedra výpočetní a didaktické techniky

Klasické a počítačové sčítání číselných řad

Mgr. Hana Mahnelová

Disertační práce

Školitel: *doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.*

Doktorský studijní program: *Specializace v pedagogice*

Studijní obor: *Informační a komunikační technologie ve vzdělávání*

Plzeň 2013

Prohlášení

Prohlašuji, že předložená práce je mým původním autorským dílem, které jsem vypracovala samostatně. Veškerou literaturu a další zdroje, z nichž jsem při zpracování čerpala, v práci řádně cituji a jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Poděbradech ……………..

…………………………….

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala především svému školiteli, doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za odborné rady a připomínky. Poděkování náleží také celé mé rodině, kolegům a přátelům za jejich trpělivost a důležitou podporu.

Anotace:

Klasických způsobů stanovení součtu číselné řady existuje několik a každý řeší pouze specifické skupiny těchto řad. V mnoha případech je nutné vystačit s důkazem její konvergence, protože určení součtu je často obtížné. Objevení sumačních algoritmů ukázalo nový směr vedoucí k dosažení součtu řady a rozšířilo skupinu řad, ke kterým lze najít součet. Učivo sčítání číselných řad je zařazeno hlavně na střední a vysoké školy, přičemž se zde aplikují klasické postupy. Protože teorie počítačového sčítání je relativně nová, zatím ještě nemá zastoupení v žádných didaktických materiálech. Cílem této práce je především didaktický pohled na teorii sumačních algoritmů s myšlenkou vybrat nejvhodnější z nich pro zařazení do výuky a dokumentovat konkrétními příklady za účelem zpřístupnění nových výsledků vědeckého výzkumu ve společné oblasti matematiky a informatiky studentům a učitelům.

Systém poznatků ukázal teleskopickou vlastnost řady jako klíčovou pro vznik algoritmů počítačových sumací. Teorie vychází z antidiference (s diferenčním krokem 1), která je v konečném kalkulu ekvivalentem k integrování. Vznik sumačních algoritmů se datuje přibližně od 80. let dvacátého století a stále se vyvíjejí. Zdrojem inspirace se stala metoda nadané matematičky řádové sestry *Mary Celine Fasenmyer*, publikovaná v její disertační práci. Za první algoritmus je pak považován *Gosperův algoritmus*, kterým lze sečíst řady aritmetické, geometrické, aritmeticko-geometrické a mnoho jiných. Právě ten se ukazuje jako vhodný k prezentaci nadaným žákům středních a studentům vysokých škol. Práce obsahuje přehled nejpoužívanějších klasických metod sčítání číselných řad, který je doplněn o počítačový způsob. Zahrnuje několik desítek řešených příkladů, z nichž většinu lze použít ve výuce.

Klíčová slova:
sčítání řad, algoritmy počítačových sumací, teleskopické vlastnosti, antidiference, Gosperův algoritmus, metoda sestry Celine.

Annotation in English:

There exist several classical methods of determining the sum of series, and each of them addresses only specific groups of these series. In many cases it is necessary to make do with a proof of its convergence, since the determination of the sum is often difficult. Discovery of summation algorithms showed a new direction for achievement of a sum of a series and expanded the group of series, to which we can find a sum. Curriculum counting numerical series is included mainly to the middle schools and universities applying classical methods. Because the theory of computer summation is relatively new, it is not represented in any didactic materials yet. The aim of this work is primarily didactic view on the theory of summation algorithms with the idea to choose the most appropriate ones for their inclusion into teaching process and document specific examples in order to make accessible new research results in the common areas of mathematics and computer science to students and teachers.

System of knowledge showed telescoping series as a key feature for the development of algorithms for computer summation. The theory is based on antidiference (with differential step 1), which is in the finite calculus equivalent to integration. The emergence of summation algorithms dates back to approximately the 80ties of twentieth century and is still evolving. The method of mathematically gifted nun Fasenmyer Mary Celine, published in her dissertation, became a source of inspiration. As the first algorithm is considered the Gosper's algorithm, which can sum up arithmetic, geometric, arithmetic-geometric series and many more. This algorithm appears to be suitable for presentation to gifted students at secondary schools and universities. The work contains an overview of the most common classical methods for finding the sum series, which is complemented by computer methods. The work includes dozens of exercises, most of which can be used in teaching.

Keywords:

Sum of series, summation algorithms, telescoping properties, antidifference, Gosper's algorithm, method of Sister Celine.

OBSAH

1. Úvod

1.1. Motivace

Zavedení počítačů vyžaduje zautomatizování postupů řešení problémů, jež vycházejí ze známých matematických teorií. Proto se opět dostává do popředí matematika, v dané situaci jako nástroj tvorby algoritmů. Podnětem pro vznik disertační práce se stala myšlenka eventuálního seznámení žáků střední školy s novými pokrokovými poznatky matematiky v souvislosti s tvorbou algoritmů a poskytnutí možnosti nahlédnout tak do tajů moderní oblasti matematiky – počítačové algebry, která provádí výpočty symbolicky, tudíž přesně. S rozvojem algoritmů pak roste její význam. Ukazuje se, že na význačnosti nabývá teorie polynomů, protože práce s nimi patří mezi nejdůležitější směry tvorby algoritmů.

Oblastí zájmu se staly algoritmy počítačových sumací. Jejich objevení se datuje přibližně od 80. let dvacátého století a nejsou zatím vypracovány jednoduché ukázkové příklady obsahující takový postup řešení, jaký používá počítač. Sčítání konečného počtu sčítanců aritmetických řad nebo konečných i nekonečných geometrických číselných řad je poměrně jednoduché. Stačí např. použít správný vzorec. Již na střední škole se studenti seznamují s pojmy konečná a nekonečná řada, odvozují vztah a nutnou podmínku pro součet nekonečné geometrické řady. Při hledání nebo dokazování součtu jiné číselné řady aplikují také např. teleskopickou metodu, binomickou větu, matematickou indukci. Součty některých řad určují kombinatoricky. Ve všech případech řešení vyžaduje znalost a porozumění matematice, schopnost dávat věci do souvislostí a správné logické myšlení. Dnešní studenti středních a vysokých škol běžně používají k urychlení svých výpočtů kalkulátory nebo specializované počítačové softwary, a mají tak příležitost ověřit, že mnohé příklady vyřeší i programy počítačové algebry. Odpověď na otázku „Jak k výsledku dojde počítač?“ je zatím pro zvídavé studenty tajemstvím a jistě také podnětem k jeho odhalení.

1.2. Cíle a vlastní přínos

Na samém počátku autorčiny práce byla položena otázka, zda je možné srozumitelně vysvětlit a ukázat základ sumačních algoritmů studentům střední školy. K jejímu zodpovězení je potřeba podrobně analyzovat matematickou podstatu počítačové metody sčítání číselných řad a posoudit vhodnost zařazení do výuky na SŠ s cílem upoutat nejen žáky se zájmem o matematiku, ale také jejich učitele. Autorka více jak dvacet let vyučuje matematiku na gymnáziu, vychází ze svých praktických zkušeností a hledá možnosti, jak zatraktivnit a modernizovat výuku matematiky, zdůraznit mezipředmětovou spojitost, především s relativně mladým oborem – informatikou. Proto jsou formulovány cíle práce takto:

a) zmapování dosud používaných klasických metod sčítání číselných řad,
b) výběr vhodného sumačního algoritmu k prezentaci středoškolákům,
c) odborná analýza vybraného algoritmu,
d) didaktický pohled na eventuální zařazení tématu do výuky na SŠ,
e) vytvoření souboru úloh na sčítání číselných řad s ukázkami různých používaných „lidských“ metod řešení a přidání řešení „počítačového“.

Očekávaným výstupem je zjednodušená explanace a interpretace odborné teorie algoritmů počítačových sumací, komparace lidských a počítačových praktik sčítání číselných řad. Vytvořený materiál by mohl být metodickým pramenem pro učitele středních i vysokých škol. Disertační práce má charakter kvalitativního výzkumu a je zaměřena na interpretaci subjektivního didaktického pohledu na nové matematické teorie. Při její tvorbě bylo třeba uplatnit odborné znalosti především předmětu matematika, obecné pedagogické znalosti, znalost kurikula výuky matematiky, znalost edukačního kontextu a znalost edukačních cílů. Uvedené tradiční postupy sčítání číselných řad jsou výsledkem rozboru dnes nejpoužívanějších středoškolských (především gymnaziálních) učebnic a sbírek, elektronických volně dostupných výukových materiálů a rozhovorů s učiteli matematiky.

Hlavním přínos práce spočívá v odborném matematickém vysvětlení podstaty algoritmů počítačových sumací a příprava didakticko-metodického materiálu, díky kterému bude možné přiblížit posluchačům nový způsob sčítání číselných řad. Autorka vytipovala vhodné (známé i méně známé) příklady na Gosperův algoritmus a metodu sestry Celine tak, aby nebylo nutné pracovat s rezultantem polynomů. Celá didakticko-metodická část vychází z autorčiných bohatých zkušeností s výukou matematiky na gymnáziu, s přípravou talentovaných žáků na různé matematické soutěže a na studium na prestižních zahraničních vysokých školách. Při mnoha výpočtech autorka doporučuje používat (a sama je používá) nástroje výpočetní techniky, čímž reaguje na rozšířené možnosti, které v současné době žáci a studenti při určování součtů řad mají. Jsou to zejména kalkulátory, dostupné programy počítačové algebry a výpočetní engine *Wolfram Alpha*. Pokud je autorce známo, práce podobného charakteru zatím v České republice nebyla publikována.

1.3. Členění práce

Práce je rozdělena do deseti hlavních kapitol. Po úvodní části jsou v kapitole 2 řady rozčleněny podle typu tak, jak se s nimi setkáme ve středoškolských úlohách, a následně uveden přehled dosud nejpoužívanějších tradičních metod nalézání jejich součtů. Každá skupina řad obsahuje konkrétní příklady včetně několika způsobů jejich řešení. Třetí kapitola je zaměřena na rozbor matematické teorie důležité pro vznik počítačového sčítání řad. Popisuje souvislost sumace a integrace, zabývá se antidiferencí základních typů funkcí a zdůrazňuje význam polynomů při hledání antidiference. Kapitola č. 4 předkládá didakticko-metodickou analýzu vybraného Gosperova algoritmu, který se ukazuje pro středoškoláky jako nejvhodnější. Jednotlivé kroky algoritmického postupu jsou dokumentovány řešenými ukázkami. Na to navazuje v kapitole 5 několik řešených příkladů již dříve vyčleněných konkrétních typů číselných řad sčítaných tentokrát počítačovou metodou. Šestá kapitola představuje několik vybraných, na střední škole zatím méně známých, dle autorky však atraktivních příkladů nekonečných řad řešených klasicky a také Gosperovým algoritmem. V sedmé části se čtenáři seznámí s gosperovsky nesčitatelnými řadami. Osmá kapitola, by mohla být označena hvězdičkou. Je určena nadanějším jedincům, protože obsahuje řešené složitější příklady číselných řad, se kterými se zpravidla student setká až na vysoké škole. Mimo jiné jsou zde rovněž uvedeny ukázky takových řad, které člověk klasickými způsoby nedokáže sečíst. Použijeme-li však počítačovou metodu, součet vyřešíme. V předposlední části je stručně vysvětlena metoda sestry Celine, která inspirovala autory algoritmů počítačových sumací, a demonstrována na vybraných příkladech.

Proces počítačového sčítání řad bývá u složitějších řad náročný na rutinní úpravy a výpočty. Z tohoto důvodu a také pro ověření správnosti byly při řešení některých příkladů aplikovány následující programy počítačové algebry: *Derive6* (jeden z prvních komerčních programů, kterými jsou některé střední školy vybaveny); novější, dnes velmi populární interaktivní prostředí *Wolfram Alpha*; dále *Maple8* a *Maple14*, špičkové počítačové komerční softwary, kterými disponují především vysoké školy. Programy lze využít nejen na úpravu složitějších algebraických výrazů, řešení rovnic a jejich soustav, výpočet rezultantu polynomů či ověření výsledku součtu řady. Software *Maple8* a vyšší obsahují ve svých knihovnách funkcí balíčky (nazvané např. Tools, Sumtools) s několika sumačními algoritmy, včetně Gosperova, pomocí kterých je možné průběžně kontrolovat celý postup. Modelové obrázky byly vytvořeny za pomoci programu *CabriGeometry II Plus*.

2. Klasické způsoby sčítání číselných řad

Číselné řady rozdělujeme na konečné a nekonečné. K výpočtu součtu nekonečné konvergující řady je třeba umět počítat limity. Protože se základy diferenciálního počtu neučí na všech typech středních škol, zaměříme se především na řady konečné, i když, jak si na závěr ukážeme, počítačové sčítání nekonečné řady se od součtu řady konečné liší pouze výpočtem limity posloupnosti částečných součtů. Základním učivem teorie řad a posloupností je součet konečného počtu členů aritmetické a geometrické posloupnosti.

Klasických metod, které člověk dosud používá při sčítání číselných řad, je poměrně mnoho. Ne se všemi se ale žáci setkávají už na střední škole. V následujícím textu nejdříve připomeneme obecný princip alespoň těch nejpoužívanějších, poté uvedeme několik známých středoškolských příkladů vybraných skupin řad řešených různými klasickými způsoby.

Obecné školské metody sčítání konečných řad:

- Užití vzorců.
  Při sčítání aritmetických nebo geometrických řad aplikujeme známé vzorce.
- Odhad výsledku a důkaz matematickou indukcí.
  V některých jednoduchých případech je poměrně snadné a intuitivní formulovat hypotézu o součtu a následně ji dokázat matematickou indukcí.
- Metoda připomínající sčítací metodu řešení soustavy rovnic.
  Základní myšlenkou této metody sčítání řad je vhodné vynásobení vztahu pro posloupnost částečných součtů s_n a případná záměna pořadí sčítanců. Takto lze určovat součty řady aritmetické, geometrické, aritmeticko-geometrické a také některé kombinatorické identity.
- Užití binomické věty.
  Při řešení kombinatorických identit zpravidla využíváme binomický rozvoj výrazu

$(1+x)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} x^i$, kde x je proměnná v polynomu stupně k. Potom porovnáváme koeficienty ve zvolené mocnině x^i.

- Teleskopická metoda.

  Tato metoda spočívá v možnosti vyjádření některých řad ve tvaru $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$, přičemž součet pak vypočítáme podle vzorce $s_n = a_1 - a_{n+1}$.

  Více v části 2.5, která je věnována právě řadám s teleskopickými vlastnostmi.

- Využití vět o počítání se sumami a následná aplikace součtů známých řad.

  Nejčastější uplatnění mají pravidla $\sum_{k=m}^{n} ca_k = c\sum_{k=m}^{n} a_k$ a $\sum_{k=m}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=m}^{n} a_k \pm \sum_{k=m}^{n} b_k$, kde $c \in \mathrm{R}$, $k, m, n \in \mathrm{N}_0$, $k \le m \le n$.

- Jiný způsob.

  Existují součty, které lze najít např. nějakou šikovnou myšlenkou, nápadem. Inspiraci často napomůže případná geometrická interpretace.

2.1. Aritmetické řady

Snahou je najít obecný vzorec pro součet prvních n členů aritmetické posloupnosti $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, kde $a_n = a_1 + (n-1)\, d$.

a) Žáky můžeme navést k samostatnému odvození vzorce motivační úlohou např. nalezení součtu první stovky přirozených čísel[1]. Klíčovou myšlenkou je fakt, že v konečné aritmetické posloupnosti jsou si rovny součty

   $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$, obecně $\forall n, k \in \mathrm{N}, n \le k$ platí $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$. Symbolicky zapíšeme vyjádření pro součet prvních členů dvakrát pod sebe a to tak, že ve druhém řádku využijeme komutativnosti sčítání a uspořádáme sčítance v opačném pořadí než v řádku předcházejícím.

$$
\begin{aligned}
s_n &= \boxed{a_1} + \boxed{a_1 + d} + \ldots + \boxed{a_1 + (n-2)\, d} + \boxed{a_1 + (n-1)\, d} \\
s_n &= \boxed{a_1 + (n-1)\, d} + \boxed{a_1 + (n-2)\, d} + \ldots + \boxed{a_1 + d} + \boxed{a_1}
\end{aligned}
$$

[1] Známá úloha, kterou řešil mladý Carl Gauss již v r. 1787.

Sečteme-li oba řádky, pak každý vyznačený rámeček dává součet $2a_1 + (n-1)\,d$, přičemž počet rámečků je roven počtu členů původní posloupnosti, tedy *n*. Potom platí $2s_n = n[2a_1 + (n-1)\,d]$, s využitím vzorce pro *n*-tý člen aritmetické posloupnosti $a_n = a_1 + (n-1)\,d$, vychází $2s_n = n[a_1 + a_1 + (n-1)\,d]$, po úpravě levé strany $2s_n = n(a_1 + a_n)$ a po vydělení dvěma již dostáváme známý vzorec $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$.

b) Mnozí učitelé předkládají svým žákům vzorec $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ za účelem procvičení důkazu matematickou indukcí.

Důkaz:

V prvním kroku dokážeme platnost pro nejmenší možné přirozené číslo, pro $n = 1$:

$s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$, platí.

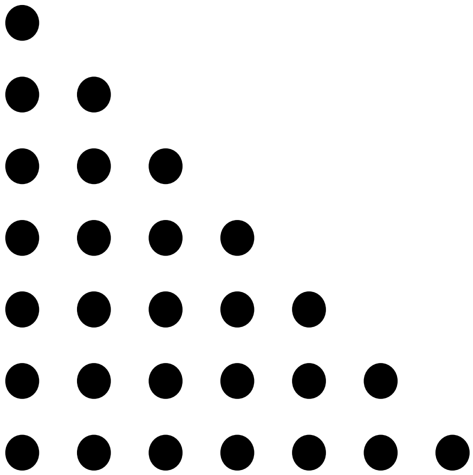
Ve druhém, tzv. indukčním kroku, dokazujeme platnost následující implikace $\forall k \in N:\ s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) \Rightarrow s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$.

Platí $s_{k+1} = a_1 + a_2 + \ ...\ + a_k + a_{k+1} = s_k + a_{k+1}$ a z indukčního předpokladu plyne $s_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1}$. Podle definice aritmetické posloupnosti je $a_{k+1} = a_k + d$, odtud $a_k = a_{k+1} - d$, a současně $a_{k+1} = a_1 + kd$, z toho plyne $d = \frac{a_{k+1} - a_1}{k}$. Dosazením za a_k a *d* do posledního vyjádření součtu s_{k+1} vychází $s_{k+1} = \frac{k}{2}\left(a_1 + a_{k+1} - \frac{a_{k+1} - a_1}{k}\right) + a_{k+1}$. Roznásobíme závorku a vhodně přeuspořádáme sčítance: $s_{k+1} = \frac{k}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{k}{2}a_{k+1} - \frac{1}{2}a_{k+1} + a_{k+1}$, z prvních dvou členů vytkneme a_1, z ostatních a_{k+1}: $s_{k+1} = a_1\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{2}\right) + a_{k+1}\left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2} + 1\right)$. Součet druhé závorky se rovná výrazu v první závorce, můžeme jej také vytknout a proto $s_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$, což jsme měli dokázat.

c) V některých případech lze k nalezení součtu konečné aritmetické řady využít geometrický model. Například při určení součtu prvních *n* přirozených čísel nebo prvních *n* lichých přirozených čísel (příklady 1, 2).

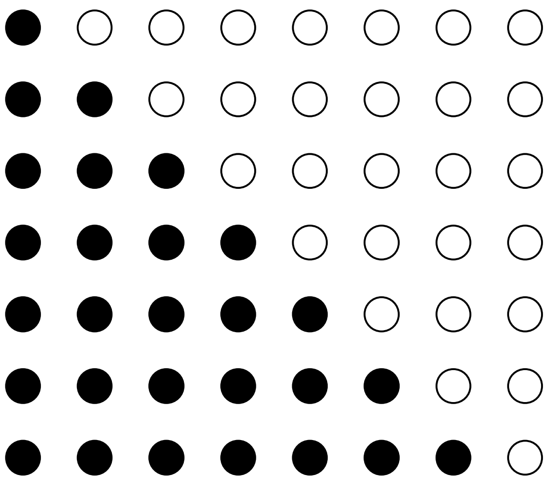
Příklad 1 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n \left(n+1\right)$

Model připomíná deskovou hru s černými a bílými kameny. Přirozená čísla jdoucí po sobě můžeme znázornit počtem černých kamenů uspořádaných do řádků (viz obr. 1).



Obr. 1 – *Trojúhelníkové uspořádání černých kamenů*

Takové řazení u pozorného čtenáře vyvolá automaticky myšlenku o symetrickém doplnění vzniklého rovnoramenného trojúhelníku stejným počtem kamenů a tudíž o souvislosti součtu prvních *n* přirozených čísel s obsahem pravoúhelníka. Doplňující kameny volíme bílé, abychom opticky rozlišily přidané (obr. 2). Všimněme si, že vzniklý útvar je obdélník.



Obr. 2 – *Obdélníkové uspořádání černých a bílých kamenů*

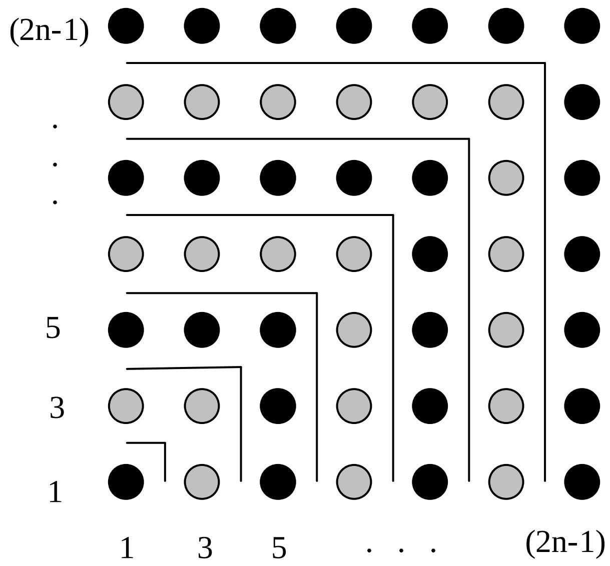
Jak vidíme, je v každém řádku n + 1 a ve sloupci právě n kamenů (bez ohledu na barvu). Počet všech v obdélníku je pak $n\,(n+1)$. Nás ale zajímá součet všech černých kamenů a ten je roven právě polovině celkového počtu, čili $\frac{1}{2}n\,(n+1)$.

V případě doplnění do čtverce by přepona trojúhelníka tvořila jeho úhlopříčku s počtem n kamenů jedné barvy, které však nemají protiklady doplňkové barvy. Proto celkový počet kamenů pak bude n^2 a hledaný součet vyjádříme ve tvaru $\frac{n^2-n}{2}=\frac{1}{2}n(n+1)$, takže dojdeme opět ke stejnému výsledku.

<u>Příklad 2</u> $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

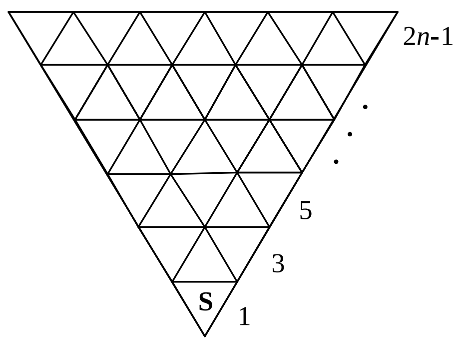
Počet kamenů, odpovídající lichým přirozeným číslům můžeme seřadit podle lomených čar jako na obrázku 3. Doplňujeme tak kameny do čtverce, jehož stranu tvoří vždy o jednu větší počet kamenů než je u předcházejícího. Pak zřejmě platí $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

Ukažme si ještě jiné geometrické znázornění téhož problému. Číslo 1 si představme, jako velikost strany zvoleného trojúhelníka o obsahu S. Další lichá čísla pak tvoříme pomocí vybraného jednotkového trojúhelníka a řadíme podle obrázku č. 4.

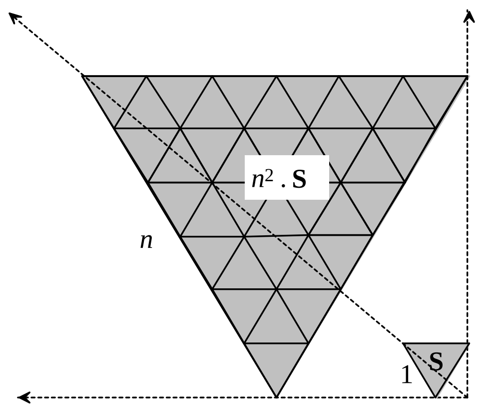


Obr. 3 – *Lomené čtvercové uspořádání kamenů*

Součet obsahů všech jednotkových trojúhelníků, které vyplní velký trojúhelník, pak bude $n^2 \cdot \mathrm{S}$, kde n vyjadřuje počet jednotkových stran tvořících danou stranu velkého trojúhelníka. Tedy $1 \cdot \mathrm{S} + 2 \cdot \mathrm{S} + 3 \cdot \mathrm{S} + \ldots + (2n-1) \cdot \mathrm{S} = n^2 \cdot \mathrm{S}$, obr. 5, a odtud nakonec plyne $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$.



Obr. 4 – *Uspořádání lichých čísel*



Obr. 5 – *Součet obsahů jednotkových trojúhelníků.*

2.2. Geometrické řady

Úkolem je objevit formuli pro součet prvních n členů geometrické posloupnosti

$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, kde $a_n = a_1 q^{n-1}, q \neq 0$.

a) Odvození součtu prvních n členů geometrické posloupnosti můžeme provést podobně jako v prvním případě hledání součtu aritmetické řady, řekněme tzv. sčítací metodou (připomíná jeden ze způsobů řešení soustavy rovnic), s tím rozdílem, že druhou rovnici z první dostaneme tak, že ji celou vynásobíme nenulovým číslem -q. Pak

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ \ldots \ + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \qquad (1)$$

$\underline{-qs_n = -a_1 q - a_1 q^2 - a_1 q^3 - \ \ldots \ - a_1 q^{n-1} - a_1 q^n}$, sečtením se většina členů vyruší a zbude $s_n - qs_n = a_1 - a_1 q^n$. Nyní je třeba na obou stranách rovnice použít vytýkání před závorku, čili $s_n(1-q) = a_1(1-q^n)$. Je zřejmé, že před další úpravou musíme provést diskusi. Jestliže bude $q = 1$, pak řada obsahuje stejné konstantní členy a její součet vyjádříme například $s_n = na_1$. V případě, kdy $q \neq 1$, můžeme poslední rovnici vydělit výrazem $q-1$, potom $s_n = a_1 \dfrac{1-q^n}{1-q}$. Jednoduchou úpravou zlomku dostaneme vzorec do podoby známé ze středoškolských učebnic $s_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q-1}$.

b) S nadanějšími žáky můžeme použít jiný způsob. Z pravé strany vyjádření (1) pro s_n vytkneme první člen posloupnosti a v závorce zbude součet, který je součástí známého vzorce vyjadřujícího rozdíl *n*-tých mocnin a najdeme ho také v tabulkách. $s_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ \dots\ + q^{n-1}\right)$ a platí $1 - q^n = (1-q)\left(1 + q + q^2 + \ \dots\ + q^{n-1}\right)$. Stačí za přípustných podmínek rozšířit pravou stranu vzorce (1) výrazem $\dfrac{1-q}{1-q}$, čitatele zlomku pak nahradit rozdílem $1-q^n$ a formule pro součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti je na světě.

c) Daný vzorec by také měli být schopni žáci střední školy dokázat matematickou indukcí. Důkaz:

Snadno ověříme platnost pro $n=1$, protože $s_1 = a_1 \dfrac{q-1}{q-1}$ a za předpokladu $q \neq 1$ pak $s_1 = a_1$. Druhý krok zahrnuje důkaz implikace

$\forall k \in \mathrm{N} : s_k = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} \Rightarrow s_{k+1} = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1}$. Následným využitím vztahu $s_{k+1} = a_1 + a_2 + \ \dots\ + a_k + a_{k+1} = s_k + a_{k+1}$, indukčního předpokladu a známé rovnosti $a_{k+1} = a_1 q^k$ pak vychází $s_{k+1} = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} + a_{k+1} = a_1 \dfrac{q^k - 1}{q-1} + a_1 q^k$. Vytknutím prvního členu posloupnosti a převedením na společného jmenovatele se q^k vyruší a dostaneme $s_{k+1} = a_1 \dfrac{q^{k+1} - 1}{q-1}$, což jsme chtěli dokázat.

2.3. Aritmeticko - geometrické řady

Ve sbírkách a učebnicích pro střední školy se také setkáme např. s řadami aritmeticko-geometrickými, tedy takovými, jejichž vzorec pro *k*-tý člen obsahuje součin *k*- tého členu aritmetické a *k*-tého členu geometrické posloupnosti. Na příkladu si ukážeme, že jejich součet lze taktéž vypočítat pomocí již uvedené „sčítací metody“, které předchází vhodné násobení a záměna pořadí sčítanců.

Příklad 3 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1)+2$

Uvedená řada patří mezi aritmeticko-geometrické řady. V našem případě k-tým členem aritmetické posloupnosti je výraz k a geometrické posloupnosti 2^k. Sumu přepíšeme jako nekonečný součet a další řádek získáme vynásobením toho prvního dvěma:

$$s_n = 1\cdot 2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \ldots + (n-1)\cdot 2^{n-1} + n\cdot 2^n \qquad /\cdot 2$$

$$2s_n = \qquad 1\cdot 2^2 + 2\cdot 2^3 + 3\cdot 2^4 + \ldots + (n-1)\cdot 2^n + n\cdot 2^{n+1}.$$

Od první rovnice odečteme druhou

$-s_n = 1\cdot 2 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + \ldots + 1\cdot 2^n - n\cdot 2^{n+1}$ a upravíme

$-s_n = \left(2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n\right) - n\cdot 2^{n+1}$. Výraz v závorce představuje součet konečné geometrické řady $\sum_{k=1}^{n} 2^k$ a $s = 2\cdot\frac{2^n - 1}{1} = 2\cdot\left(2^n - 1\right)$. Proto $-s_n = 2\cdot\left(2^n - 1\right) - n\cdot 2^{n+1}$ a po úpravách $s_n = 2^{n+1}(n-1)+2$, což bylo třeba dokázat.

2.4. Kombinatorické identity

Ve středoškolských učebnicích najdeme rovněž řady s kombinačními čísly a řady vyjadřující významné kombinatorické identity. Určení jejich součtu většinou vyžaduje dobré znalosti z oblasti teorie množin a diskrétní matematiky. Vzorce obvykle dokazujeme binomickou větou nebo matematickou indukcí (příklady 4, 5).

Příklad 4 Dokažte rovnost $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, kde $k, n \in N, k \le n$.

S danou sumou se žáci a studenti na střední škole setkávají hned několikrát. Proto uvádíme různé způsoby klasického řešení úlohy.

<u>1. způsob:</u> užitím binomické věty:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n.$$

Položíme-li $a = b = 1$, pak dostaneme

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}\cdot 1^n\cdot 1^0 + \binom{n}{1}\cdot 1^{n-1}\cdot 1^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}\cdot 1\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}\cdot 1^0\cdot 1^n \text{ tj,}$$

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots. + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

pravou stranu rovnice můžeme napsat jako $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ a platí $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$.

<u>2. způsob:</u> metodou matematické indukce

Nejdříve ověřme platnost pro nejmenší možné *n*, tedy pro $n=1$:

$\sum_{k=0}^{1}\binom{n}{k}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}=2=2^1$, čili platí.

Dále předpokládáme, že $\forall m\in N, k\le m\le n$, platí $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m$ a dokazujeme, že vztah platí i pro $m+1$, tj. $\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}=2^{m+1}$.

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}=\binom{m+1}{0}+\binom{m+1}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+1}{k-1}+\binom{m+1}{k}+\binom{m+1}{k+1} \qquad (2)$$

V důsledku vlastnosti kombinačních čísel $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$ platí

$$\binom{m+1}{1}=\binom{m+1}{0+1}=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}$$

$$\binom{m+1}{2}=\binom{m+1}{1+1}=\binom{m}{1}+\binom{m}{2}$$

....

$$\binom{m+1}{k-1}=\binom{m+1}{k-2+1}=\binom{m}{k-2}+\binom{m}{k-1}$$

$$\binom{m+1}{k}=\binom{m+1}{k-1+1}=\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}$$

Současně $\binom{m+1}{0}=\binom{m+1}{m+1}=1=\binom{m}{0}=\binom{m}{m}$, pak můžeme nahradit pravou stranu rovnice (2) vyjádřením

$$1+\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\binom{m}{2}+\ldots.+\binom{m}{k-2}+\binom{m}{k-2}+\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}+1=$$

$$=\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]+\left[\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m}{2}+\ldots+\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}=2^m+2^m=2\cdot 2^m=2^{m+1}$$ což bylo dokázáno.

3. způsob: a) kombinatoricky – intuitivně

Výraz $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ představuje počet všech *k*-prvkových podmnožin množiny o *n* prvcích.

Rozepišme všechny situace do tabulky:

	počet podmnožin						
počet prvků mno-žiny	0 - prvkových	1 - prvkových	2 - prvkových	3 - prvkových	4 - prvkových	k - prvkových	všech
$n = 0$	$\binom{0}{0}=1$	-	-	-	-	-	$1 = 2^0$
$n = 1$	$\binom{1}{0}=1$	$\binom{1}{1}=1$	-	-	-	-	$2 = 2^1$
$n = 2$	$\binom{2}{0}=1$	$\binom{2}{1}=2$	$\binom{2}{2}=1$	-	-	-	$4 = 2^2$
$n = 3$	$\binom{3}{0}=1$	$\binom{3}{1}=3$	$\binom{3}{2}=3$	$\binom{3}{3}=1$	-	-	$8 = 2^3$
$n = 4$	$\binom{4}{0}=1$	$\binom{4}{1}=4$	$\binom{4}{2}=6$	$\binom{4}{3}=4$	$\binom{4}{4}=1$	-	$16 = 2^4$
. . .							
$n = n$	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{k}$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$

V tabulce postupně vzniká Pascalův trojúhelník, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ vyjadřuje součet *n* čísel v $(n+1)$-ním řádku tohoto trojúhelníku.

3. způsob: b) kombinatoricky – výpočtem

Předpokládejme, že jsou všechny prvky dané množiny seřazeny v přesném pořadí. Každému můžeme přiřadit „+“ nebo „-„ podle toho, zda do vybrané podmnožiny patří či nikoliv. Pak vlastně hledáme počet uspořádaných *n*-tic vytvořených ze dvou prvků

$\{+,-\}$, čili dvojčlennou variaci s opakováním z *n* prvků. Z teorie o variacích s opakováním víme, že $V_n(2) = 2^n$, což jsme chtěli dokázat.

<u>Příklad 5</u> Dokažte rovnost $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = 3^n$, kde $k, n \in N$, $k \le n$.

<u>1. způsob</u>: užitím binomické věty:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n$$

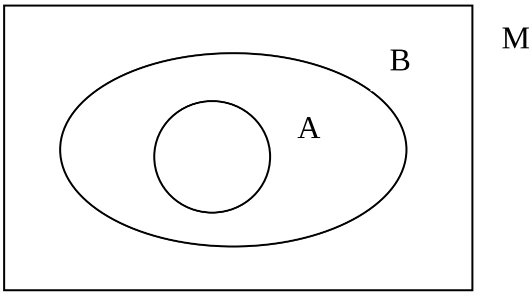
položíme-li $a = 1, b = 2$, pak dostaneme

$$(1+2)^n = \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n=1} \cdot 2^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 1 \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot 2^n, \text{ tj}$$

$3^n = \binom{n}{0} \cdot 2^0 + \binom{n}{1} \cdot 2^1 + \ldots + \binom{n}{n-1} \cdot 2^{n-1} + \binom{n}{n} \cdot 2^n$. Přepíšeme pravou stranu pomocí sumy a důkaz je hotov: $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$.

<u>2. způsob:</u> kombinatoricky (čerpáno z [10])

Nechť M je množina o *n* prvcích, množina B její podmnožina obsahující *k* prvků. Množinou A označme každou podmnožinu množiny B (obr. 6).



Obr. 6 – *Vztah množin A, B, M*

První úvaha:

Počet možností, jak vybrat *k*-prvkovou podmnožinu B množiny M o *n* prvcích je $\binom{n}{k}$.

Počet všech podmnožin A množiny B je $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Počet možností, jak vybrat dvojice (A, B) je v důsledku kombinatorického pravidla součinu $\binom{n}{k} \cdot 2^n$. Celkový počet všech dvojic (A, B) pak vyjadřuje suma $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k$.

Druhá úvaha:

Pro konkrétní prvek $m \in$ M platí následující možnosti:

a) prvek *m* patří do množiny A, $m \in$ A,

b) prvek *m* patří do množiny B, ale nepatří do množiny A, $m \in$ B \ A,

c) prvek *m* patří do množiny M, ale nepatří do množiny B, $m \in$ M \ B.

Proto počet možností jak pro každý prvek $m \in$ M vybrat dvojici (A, B) je 3^n.

Porovnáme-li výsledky obou úvah, dostaneme platnost identity $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = 3^n$.

2.5. Teleskopické řady

Významnou skupinou řad, s nimiž se mohou středoškoláci také setkat, jsou řady teleskopické. Jejich vlastnosti jsou důležitou součástí podstaty sumačních algoritmů. Teleskopickou řadou nazveme řadu, kterou je možné zapsat ve tvaru $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k+1})$. Při teleskopickém sčítání dochází k cílenému rozšíření, nejčastěji ke zdvojnásobení počtu členů řady, abychom využili skutečnosti, že 2*n*-2 sčítanců vytvoří *n*-1 dvojic, jejichž součet je roven 0. Poznamenejme, že u mnohých řad se k takové formuli dostaneme rozložením výrazu na parciální zlomky. Vyjádříme-li pak součet $s_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + (a_3 - a_4) + \ \dots \ + (a_{n-1} - a_n) + (a_n - a_{n+1})$, po odstranění všech závorek se vnitřní členy posloupnosti částečných součtů navzájem vyruší („složí do sebe“ - odtud přirovnání k teleskopické tyči) a zjistíme, že výsledek závisí pouze na prvním a posledním členu, čili $s_n = a_1 - a_{n+1}$. Mnohé teleskopické řady jsou typu $\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{q_k}$, kde p_k, q_k značí polynomy, přičemž polynom q_k je alespoň prvního stupně (nekonstantní polynom). V některých případech lze dokonce hledaný součet zapsat ve tvaru $s_n = \frac{f_n}{g_n}$, kde f_n a g_n jsou vhodné polynomy.

Příklad 6 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Snadno ověříme, že zlomek $\frac{1}{k(k+1)}$ můžeme zapsat ve tvaru $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$ a potom $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. Vypišme několik prvních členů posloupnosti částečných součtů: $s_1 = a_1 = 1-\frac{1}{2}$,

$s_2 = s_1 + a_2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3} = 1-\frac{1}{3}$,

$s_3 = s_2 + a_3 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4} = 1-\frac{1}{4}$, atd. Vidíme, že se vnitřní členy postupně vyruší a nakonec dostáváme $s_n = 1-\frac{1}{n+1}$ a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Příklad 7 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Jednoduchou úpravou převedeme vzorec pro k-tý člen na potřebný rozdíl. Přičteme-li a odečteme v čitateli jedničku, rozdělíme zlomek na dva, v prvním krátíme a máme potřebné vyjádření: $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$. Pro posloupnost částečných součtů platí $s_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+ \;\ldots\; + \left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = 1-\frac{1}{(n+1)!}$. To je rovněž výsledek příkladu 7.

Také následující řada vykazuje jisté teleskopické vlastnosti.

Příklad 8 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3+3k^2+2k}$

Abychom mohli použít rozklad na parciální zlomky, vyjádříme jmenovatele ve tvaru součinu: $\frac{2}{k^3+3k^2+2k} = \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$. Nyní hledáme taková čísla A, B, C, aby platilo $\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}$. Celou rovnici vynásobíme $k(k+1)(k+2)$

a položíme postupně $k = 0, -1, -2$. Dostaneme rovnice: $2 = 2A, 2 = -B, 2 = 2C$, odtud $A = 1, B = -2, C = 1$. Pak

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3 + 3k^2 + 2k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2}.$$

Pro další práci bude vhodné druhou a třetí sumu vyjádřit pomocí první. Zřejmě platí

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \quad \dots \quad + \frac{1}{n},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \quad \dots \quad + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1},$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \quad \dots \quad + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} = \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

a poté

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + 2 - \frac{3}{2} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}.$$

Sumy se navzájem vyruší a nakonec $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$.

Žádný z dosud známých způsobů, jak řady sečíst, není univerzálně použitelná metoda. Spousta dalších, které zde nebyly uvedeny, se opírá o nástroje moderní matematiky, jako například derivace, integrály, operátory, Fourierovu analýzu. O to zajímavější je objevení počítačových algoritmů schopných najít součet početné skupiny řad a to i nekonečných.

3. Teoretická východiska sumačních algoritmů

3.1. Vývoj sumačních algoritmů

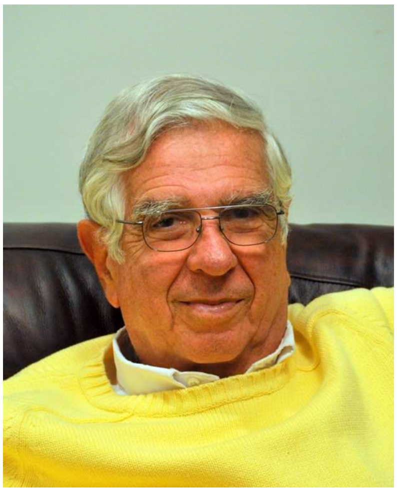
První sumační algoritmus byl objeven v roce 1970 americkým matematikem a programátorem **Ralphem Williamem Gosperem jr.**, známým jako **Bill Gosper** (obr. 8). Důležitou součástí *Gosperova algoritmu* je řešení rekurenční relace pro hypergeometrické polynomy. Ještě než se začaly používat počítače, zveřejnila nadaná matematička, řádová sestra **Mary Celine Fasenmyer** (dále jen *sestra Celine*, 1906–1996, obr. 7), výsledky své doktorské práce z roku 1946, kde objasnila postup, jak najít rekurentní relace pro částečné součty právě hypergeometrických řad. Její způsob umožňuje algoritmicky sčítat některé řady s kombinačními čísly a spolu s *Gosperovým algoritmem* se stal základem pro tzv. *Zeilbergerův algoritmus ct* („creative telescoping“) – vznik se datuje v rozpětí let 1982 - 1990. Původní teorie je podobná metodě *sestry Celine*, avšak rychlejší, a byla spoluprací dvou matematiků **Dorona Zeilbergera** (obr. 9) a **Herberta Saul Wilfa** (obr. 10) podrobněji rozpracována, rozšířena a zobecněna, a dnes je známa jako *WZ algoritmus* (1992). Objev *Hyper* algoritmu Slovincem **Marko Petkovšekem**, publikovaném v jeho disertační práci v roce 1991, znamenal další velký přínos v systému poznatků o počítačovém sčítání řad. Všechny algoritmy hledají jistým způsobem vhodné rekurentní zadání určitých vlastností, díky němuž je pak snadné najít součet řady. Základním a dostupným informačním zdrojem teorie vzniku sumačních algoritmů je on-line publikace PETKOVŠEK, Marko; WILF, Herbert S.; ZEILBERGER, Doron. *A=B* , z roku 1997, která je online dostupná z webových stránek: http://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.pdf . Dílo popisuje vývoj počítačových programů pro určování součtů řad a kromě teorie obsahuje ukázky řešených příkladů a úlohy na procvičení. Je to publikace značně odborná, vybrané úlohy jsou poměrně dost obtížné.

Nejvhodnějším sumačním algoritmem pro případné uplatnění na SŠ se ukazuje *Gosperův algoritmus*, a to především proto, že pracuje pouze s funkcemi jedné proměnné. S teorií funkcí dvou a více proměnných se studenti seznamují až na vysoké škole.

Obr. 7 - ***M. C. Fasenmyer***

Obr. 8 - ***R. W. Gosper jr.***

Obr. 9 - ***D. Zeilberger***



Obr. 10 - ***H. S. Wilf***

3.2. Diference, antidiference a součet řady

Mějme dánu posloupnost $\{a_k\}$. Pokusíme se ji diferencovat a přiblížit tak souvislost $\sum_{k=m}^{n} a_k$ s Newton-Leibnizovou formulí integrálu $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$. Zvolíme-li počáteční podmínku $s_1 = 0$, pak pro posloupnost s_k částečných součtů platí

$$s_2 = s_1 + a_1 \Rightarrow a_1 = s_2 - s_1$$

$$s_3 = s_2 + a_2 \Rightarrow a_2 = s_3 - s_2$$

$$\ldots$$

$$s_k = s_{k-1} + a_{k-1} \Rightarrow a_{k-1} = s_k - s_{k-1}$$

$s_{k+1} = s_k + a_k \Rightarrow a_k = s_{k+1} - s_k$, atd. a můžeme psát

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (s_{k+1} - s_k). \tag{3}$$

To znamená, že je třeba najít takovou funkci s_k, pro kterou platí $s_{k+1} - s_k = a_k$, přesněji $\Delta a_k = s_{k+1} - s_k$. Díky velké teorii infinitesimálního počtu víme, že hledaná funkce je primitivní funkcí k funkci a_k, budeme ji dále značit $F(k)$ a platí $\Delta a_k = F(k+1) - F(k)$. Operátor Δ nazýváme diference, v konečném kalkulu je protějškem operátoru derivování D v diferenciálním počtu, a v našem případě je diferenční krok roven 1.

Snadno ověříme, že řada (3) je teleskopická.

$\sum_{k=m}^{n}(s_{k+1}-s_k)=(s_{n+1}-s_n)+(s_n-s_{n-1})+...+(s_{m+1}-s_m)=s_{n+1}-s_m$, proto nakonec platí $\sum_{k=m}^{n}a_k = s_{n+1}-s_m$.

Vyzkoušejme si takový způsob sčítání na několika obecných příkladech známých řad.

Příklad 9 $\sum_{k=0}^{n}k^m$

Mezi populární číselné řady patří $\sum_{k=0}^{n}k, \sum_{k=0}^{n}k^2, \sum_{k=0}^{n}k^3,$ ... Pokusíme se konkretizovat předchozí myšlenky. Hledáme vyjádření pro Δk^m, $(m=1,2,3,...)$. Pracujeme v konečném počtu a využíváme diferenci (s diferenčním krokem 1). Jak už bylo řečeno, ta je sice analogií k derivaci v infinitesimálním počtu, avšak v daném prostředí, jak se následně přesvědčíme, s ní jako s derivací nemůžeme pracovat. Platí $k^/ = 1$ a také podle definice diference $\Delta k = k+1-k=1$. Počínaje druhou mocninou už ale rovnost diference a derivace neplatí, např.

$(k^2)^/ = 2k$, $\Delta k^2 = (k+1)^2 - k^2 = 2k+1$, nebo

$(k^3)^/ = 3k^2$, $\Delta k^3 = (k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$, atd.

Zdá se však, že diferencí polynomické funkce n-tého stupně bude polynom stupně o 1 nižšího. Z tohoto důvodu dále použijeme pro potřeby konečného kalkulu zavedené faktoriálové klesající a rostoucí m-té mocniny pro $m \geq 0$:

$k^{\underline{m}} = k(k-1)(k-2)\ ....\ (k-m+1)$ a $k^{\overline{m}} = k(k+1)(k+2)....(k+m-1)$, přičemž pro $m=0$: $k^{\underline{m}} = k^{\overline{m}} = 1$.

Vyjádříme diferenci

$$\Delta k^{\underline{m}} = (k+1)^{\underline{m}} - k^{\underline{m}} = (k+1)k(k-1)...(k-m+2) - k(k-1)...(k-m+1) =$$
$$= k(k-1)...(k-m+2)(k+1-k+m-1) = mk^{\underline{m-1}}.$$

Právě jsme ukázali, že v konečném kalkulu platí $\Delta k^{\underline{m}} = mk^{\underline{m-1}}$ jako ekvivalent k derivaci mocninné funkce $(k^m)^/ = mk^{m-1}$. Najít k ní primitivní funkci $F(k)$ pak znamená vyjádřit *antidiferenci*, analogii k určitému integrálu v nekonečném počtu. (Ověření bude provedeno později.) Součet klesajících mocnin můžeme následně psát jako $\sum_{k=0}^{n} k^{\underline{m}} = \left.\frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1}\right|_0^n = \frac{n^{\underline{m+1}}}{m+1}$. Jelikož $k^{\underline{1}} = k$, pak pro $m = 1$ snadno určíme primitivní funkci

$F(k) = \left.\frac{k^{\underline{2}}}{2}\right|_0^n = \frac{n(n-1)}{2}$ a následně součet

$\sum_{k=0}^{n} k = F(n+1) - F(0) = \frac{(n+1)n}{2} - \frac{0}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

Primitivních funkcí k dané funkci při antidiferencování stejně jako při integrování existuje nekonečně mnoho. Všechny se liší o aditivní konstantu, kterou v dané chvíli zanedbáváme, protože se při následné sumaci vyruší. Položíme-li $m = 2$, výpočet bude složitější. Víme, že $k^{\underline{1}} = k$, $k^{\underline{2}} = k(k-1)$. Potom platí $k^2 = k^{\underline{2}} + k^{\underline{1}}$ a pak $F(k) = \left.\left(\frac{k^{\underline{3}}}{3} + \frac{k^{\underline{2}}}{2}\right)\right|_0^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$ je hledaná primitivní funkce a můžeme pokračovat $\sum_{k=0}^{n} k^2 = F(n+1) - F(0) = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$.

S dalšími mocninami pracujeme podobně.

Intuice napovídá, že primitivní funkcí k funkci k^m bude polynomická funkce $(m+1)$-ního stupně. Položíme-li $F(k) = c_{m+1}k^{m+1} + c_m k^m + \ldots + c_1 k + c_0$, pak dostaneme vyjádření

$F(k+1) - F(k) =$

$= c_{m+1}(k+1)^{m+1} + c_m(k+1)^m + \ldots + c_1(k+1) + c_0 - \left(c_{m+1}k^{m+1} + c_m k^m + \ldots + c_1 k + c_0\right)$,

z rovnosti $k^m = F(k+1) - F(k)$ se poté pokusíme stanovit hodnoty koeficientů $c_{m+1}, c_m, \ldots c_1$ (metoda neurčitých koeficientů). Postup si ukážeme např. pro $m = 3$:

$F(k) = c_4 k^4 + c_3 k^3 + c_2 k^2 + c_1 k + c_0$,

$F(k+1) = c_4(k+1)^4 + c_3(k+1)^3 + c_2(k+1)^2 + c_1(k+1) + c_0$. K další úpravě a vyřešení soustavy rovnic využijeme počítač.

$F(k+1) - F(k) = 4c_4 k^3 + (3c_3 - 6c_4)k^2 + (4c_4 - 3c_3 + 2c_2)k + (c_1 - c_2 + c_3 - c_4)$, přitom rovnost $F(k+1) - F(k) = k^3$ nastane, právě když existuje řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned}1 &= 4c_4\\ 0 &= 3c_3 - 6c_4\\ 0 &= 4c_4 - 3c_3 + 2c_2\\ \underline{0} &\underline{= c_1 - c_2 + c_3 - c_4}\end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{4}, c_3 = \frac{1}{2}, c_4 = \frac{1}{4}.$$

Pak $F(k) = \frac{1}{4}k^4 + \frac{1}{2}k^3 + \frac{1}{4}k^2 + c_0$ a nakonec

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = F(n+1) - F(0) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

<u>Příklad 10</u> $\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)$

V důsledku platnosti distributivního a asociativního zákona při práci se sumami můžeme psát $\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k$ a užitím již známých vztahů dostaneme $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{k^2}{2}\Big|_1^n = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \left(\frac{k^3}{3} + \frac{k^2}{2}\right)\Big|_1^n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Pak zřejmě platí $\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = 2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$, po úpravě $\sum_{k=1}^{n} k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$.

Uvedený postup lze uplatnit ve všech případech, kdy posloupnost a_k je polynom. Podívejme se také na další typy funkcí.

3.3. Diferencování elementárních funkcí

Zkoumáním vlastností diferencování posloupností f_k, g_k odvodíme důležité vztahy, které pro diferenci v konečném kalkulu platí[2]:

a) Diference součtu (rozdílu) je rovna součtu (rozdílu) diferencí (tzv. komutativnost), protože $\Delta[f_k \pm g_k] = [f_{k+1} \pm g_{k+1}] - [f_k \pm g_k] = [f_{k+1} - f_k] \pm [g_{k+1} - g_k] = \Delta f_k \pm \Delta g_k$.

b) Násobící konstantu c můžeme vytknout před diferenci (tzv. distributivnost), jelikož platí $\Delta c \cdot f_k = c \cdot f_{k+1} - c \cdot f_k = c[f_{k+1} - f_k] = c \cdot \Delta f_k$.

c) Diferenci součinu určíme takto:

[2] Vztahy lze zobecnit pro libovolný diferenční krok, my pracujeme s jeho hodnotou 1.

$\Delta\left[f_k \cdot g_k\right] = f_{k+1} \cdot g_{k+1} - f_k \cdot g_k$, pro následné vytýkání je třeba odečíst a přičíst výraz $f_k \cdot g_{k+1}$:

$$f_{k+1} \cdot g_{k+1} - f_k \cdot g_{k+1} + f_k \cdot g_{k+1} - f_k \cdot g_k = g_{k+1} \cdot \left[f_{k+1} - f_k\right] + f_k \cdot \left[g_{k+1} - g_k\right] =$$
$$= \Delta f_k \cdot g_{k+1} + f_k \cdot \Delta g_k .$$

Zopakujeme odečtení a přičtení, tentokrát výrazu $g_k \cdot \Delta f_k$, načež dostáváme vyjádření $\Delta f_k \cdot g_{k+1} - g_k \cdot \Delta f_k + g_k \cdot \Delta f_k + f_k \cdot \Delta g_k = = \Delta f_k \cdot \left[g_{k+1} - g_k\right] + g_k \cdot \Delta f_k + f_k \cdot \Delta g_k$, to znamená, že $\Delta\left[f_k \cdot g_k\right] = \Delta f_k \cdot g_k + f_k \cdot \Delta g_k + \Delta f_k \cdot \Delta g_k$. A to je jistá analogie k derivaci součinu.

d) Pro diferenci podílu za předpokladu, že $g_k \neq 0$ platí

$\Delta \frac{f_k}{g_k} = \frac{\Delta f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta g_k}{g_{k+1} \cdot g_k} = \frac{\Delta f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta g_k}{g_k^2 + g_k \Delta g_k}$, protože

$\Delta \frac{f_k}{g_k} = \frac{f_{k+1}}{g_{k+1}} - \frac{f_k}{g_k} = \frac{f_{k+1} \cdot g_k - f_k \cdot g_{k+1}}{g_{k+1} \cdot g_k} - \frac{f_k \cdot g_k}{g_{k+1} \cdot g_k} + \frac{f_k \cdot g_k}{g_{k+1} \cdot g_k} = \frac{\Delta f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta g_k}{g_{k+1} \cdot g_k}$, současně $\Delta g_k = g_{k+1} - g_k$, odtud $g_{k+1} = \Delta g_k + g_k$ a $\frac{\Delta f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta g_k}{g_{k+1} \cdot g_k} = \frac{\Delta f_k \cdot g_k - f_k \cdot \Delta g_k}{g_k^2 + g_k \Delta g_k}$.

Nyní zobecníme diferencování následujících elementárních funkcí: konstantní, mocninné, polynomické, nepřímé úměrnosti, exponenciální, logaritmické a nakonec také funkcí goniometrických:

e) $\Delta c = c - c = 0 \ \forall c \in R$.

f) $\forall n \in N$ je diferencí Δx^n polynom (n-1)-ho stupně, protože s využitím binomické věty platí $\Delta x^n = (x+1)^n - x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} - x^n = x^n + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} - x^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}$.

g) Diferencí polynomické funkce n-tého stupně je polynom stupně n-1. Čili platí $\Delta P_n(x) = \Delta \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = Q_{n-1}(x)$, kde $P_n(x) = a_0 x^0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Tvrzení dokážeme na základě platnosti již odvozených vztahů a), b), f), protože pak dostaneme $\Delta \sum_{j=0}^{n} a_j x^j = \sum_{j=0}^{n} a_j \Delta x^j = \sum_{j=0}^{n} a_j R_{j-1}(x)$, kde $R_{j-1}(x)$ je opět polynom.

h) $\Delta \frac{c}{x} = \frac{c}{x+1} - \frac{c}{x} = \frac{cx - c(c+1)}{x(x+1)} = -\frac{c}{x(x+1)}$, pro $x \neq 0; 1$, kde $c \in R - \{0\}$.

i) $\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$, pro $a > 0$, $a \neq 1$.

j) $\Delta \ln x = \ln(x+1) - \ln x = \ln \frac{x+1}{x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, pro $x > 0$; analogicky

$\Delta \log_a x = \log_a\left(1+\frac{1}{x}\right)$, kde $a > 0, a \neq 1$.

k) $\Delta \sin x = \sin(x+1) - \sin x = 2\cos\frac{x+1+x}{2}\cdot\sin\frac{x+1-x}{2} = 2\cos\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\frac{1}{2}$.

l) $\Delta \cos x = \cos(x+1) - \cos x = -2\sin\frac{x+1+x}{2}\cdot\sin\frac{x+1-x}{2} = -2\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\sin\frac{1}{2}$.

Stejným způsobem, užitím vzorců pro součet a rozdíl goniometrických funkcí, můžeme zobecnit diferenci pro funkce $\sin nx, \cos nx$:

$$\Delta \sin nx = 2\cos\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\sin\frac{x}{2},\ \Delta\cos nx = -2\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\sin\frac{x}{2}\right].$$

3.4. Vlastnosti sumace a sumace základních funkcí

V příkladech 9 a 10 jsme ukázali, že nalezení primitivní funkce, která je v konečném počtu analogií k integrování, by mohlo významně pomoci při určování součtů některých řad. Antidiferenci, v našem případě inverzní operaci k diferenci s diferenčním krokem 1, dané posloupnosti $\{a_k\}$ budeme dále nazývat *sumací posloupnosti*, značit $\sum a_k$, a platí pro ni $\sum a_k = F_k \Leftrightarrow \Delta F_k = a_k\ \forall k \in N$.

Funkci F_k říkejme primitivní funkce k funkci a_k. Při následném odvození sumace známých funkcí vycházíme z jejich diference a příbuznosti antidiferencování s integrováním. Jelikož pracujeme s funkcemi v konečném kalkulu, proto vyjádření $\sum_{k=m}^{n} a_k = F(k)\big|_m^n = F(n) - F(m)$ připomíná zápis určitého integrálu.

Pro počítání se sumami platí známá pravidla (kde $c \in \mathrm{R}, k, m, n \in \mathrm{N}_0,\ k \le m \le n$), která nyní dokážeme na základě vlastností diference a definice sumace.

a) Asociativní zákon

Suma součtu (rozdílu) je rovna součtu (rozdílu) sum, čili $\sum_m^n (f_k \pm g_k) = \sum_m^n f_k \pm \sum_m^n g_k$,

protože označíme-li $\sum_m^n f_k = F_k \Leftrightarrow f_k = \Delta F_k, \sum_m^n g_k = G_k \Leftrightarrow g_k = \Delta G_k$, pak podle již dokázané vlastnosti o diferenci součtu a rozdílu platí $f_k \pm g_k = \Delta F_k \pm \Delta G_k = \Delta(F_k \pm G_k)$.

A odtud nakonec $\sum_m^n f_k \pm \sum_m^n g_k = F_k \pm G_k = \sum_m^n (f_k \pm g_k)$.

b) Distributivní zákon

Při sumaci můžeme násobící konstantu vytknout před sumu, $\sum_m^n ca_k = c\sum_m^n a_k$. Platí $cf_k = c\Delta F_k = \Delta cF_k$, to znamená $\sum_m^n cf_k = cF_k = c\sum_m^n f_k$.

c) Komutativní zákon nám umožňuje změnit pořadí sčítání tak, jak potřebujeme, protože platí $\sum_m^n f_k = \sum_{m+p}^{n+p} f_{k-p}$.

Rovněž s pomocí právě dokázaných vlastností se nyní pokusíme nalézt sumy některých známých funkcí, přičemž C značí sumační konstantu, analogii k integrační konstantě.

V některých jednodušších případech lze sumu odhadnout. Například pro konstantní posloupnost platí $\sum c = ck + C$, což snadno dokážeme na základě aplikace definice diference $\Delta F(k) = c(k+1) - c(k) = c$.

Obdobně při odvození $\sum \ln \frac{x+1}{x} = \ln x + C$ intuitivně využijeme větu o logaritmech, $\sum \ln \frac{x+1}{x} = \sum[\ln(x+1) - \ln x] = \sum \Delta \ln x = \ln x + C$, což bylo dokázáno.

Sumaci exponenciální posloupnosti můžeme rovněž lehce odhadnout. Víme, že $c^{k+1} - c^k = c^k(c-1)$, kde $c \neq 1, k \in N_0$, pak zřejmě antidiference bude mít tvar $\frac{c^k}{c-1}$.

Svůj odhad pochopitelně ověříme: $F(k+1) - F(k) = \frac{c^{k+1}}{c-1} - \frac{c^k}{c-1} = \frac{c^k(c-1)}{c-1} = c^k$, a to jsme chtěli dokázat. Zajímavá situace nastane pro $c = 2$, sumace exponenciální posloupnosti 2^k je rovna 2^k, proto tato funkce je v diskrétní matematice ekvivalentem funkce e^x v nekonečném infinitesimálním počtu. Shrnuto $\sum c^k = \frac{c^k}{c-1} + C$ a $\sum 2^k = 2^k + C$.

Nyní už můžeme ukázat jak stejným postupem sečíst geometrickou řadu.

Příklad 11 $\sum_{k=0}^{n} q^k,\ q \neq 1$

Platí $\sum_{k=0}^{n} q^k = \left.\frac{q^k}{q-1}\right|_0^n = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ a to je vzorec známý již ze středoškolských učebnic.

V příkladu 9 jsme intuitivně použili pro výpočet sumy mocninné funkce analogii z integrálního počtu. Je čas ověřit, že platí $\sum k^m = \frac{k^{m+1}}{m+1} + C$, kde $m \neq -1$, přesněji $\sum k^{\underline{m}} = \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1} + C$. Při důkazu vycházíme z definic diference a klesající faktoriálové mocniny.

$$\frac{(k+1)^{\underline{m+1}}}{m+1} - \frac{k^{\underline{m+1}}}{m+1} = \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k+1-m-1+1)}{m+1} - \frac{k(k-1)\ldots(k-m-1+1)}{m+1} =$$

$$= \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-m+1) - k(k-1)\ldots(k-m)}{m+1} = \frac{[k(k-1)\ldots(k-m+1)](k+1-k+m)}{m+1} =$$

$$= \frac{k^{\underline{m}}(m+1)}{m+1} = k^{\underline{m}}$$, což bylo dokázáno.

Jak bylo dříve prezentováno, diferencí polynomické funkce stupně *n* je polynom stupně *n*-1. To znamená, že sumací polynomu *n*-tého stupně je polynom stupně o 1 vyššího, čili $\sum P_n(x) = Q_{n+1}(x) + C$.

Odvození sumace goniometrických funkcí provedeme z jejich známé diference. Platí $\Delta \cos x = -2\sin\frac{1}{2}\cdot\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)$. Když proměnnou *x* nahradíme výrazem $x-\frac{1}{2}$, pak dostaneme $\Delta\cos\left(x-\frac{1}{2}\right) = -2\sin\frac{1}{2}\cdot\sin x$, celou rovnici vydělíme číslem $-2\sin\frac{1}{2}$ a protože se jedná o konstantu, podle vlastností diference můžeme psát $\sin x = \Delta\left(-\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right)$ a nakonec $\sum \sin x = -\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + C$. Analogicky provedeme pro funkci $\cos x$. Vychází $\sum \cos x = \dfrac{\sin\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + C$. Při ověřování využijeme znovu známé goniometrické vzorce.

$$\frac{\sin\left(x+1-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} - \frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{\sin\left(x+\frac{1}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{2\cos x\sin\frac{1}{2}}{2\sin\frac{1}{2}} = \cos x,$$ což jsme chtěli dokázat.

3.5. Sumace per partes

Pro antidiferencování dalších typů posloupností je třeba nahlédnout do některých speciálních metod integrování funkcí. Zkusíme zkoumat např. možnost sumace po částech, analogie integrační metody per partes.

$$\Delta(f_k g_k) = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_k = f_{k+1}g_{k+1} - f_k g_{k+1} + f_k g_{k+1} - f_k g_k =$$
$$= g_{k+1}(f_{k+1} - f_k) + f_k(g_{k+1} - g_k) = g_{k+1}\Delta f_k + f_k \Delta g_k,$$

odtud $f_k \Delta g_k = \Delta(f_k g_k) - g_{k+1}\Delta f_k$, a nakonec

$$\sum_m^n f_k \Delta g_k = f_k g_k - \sum_m^n g_{k+1}\Delta f_k .$$

Odvodili jsme vztah, pomocí nějž můžeme sumaci provádět také po částech. Vyzkoušejme na několika příkladech.

Příklad 12 $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$

Položme $f_k = k, \Delta g_k = 2^k$, potom $\Delta f_k = k+1-k = 1, g_k = 2^k, g_{k+1} = 2^{k+1}$. Užitím metody sumace po částech, známých pravidel pro počítání se sumami a antidiference funkce 2^k dostáváme

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = \left(k \cdot 2^k - \sum_{k=1}^{n} 2^{k+1}\right)\Bigg|_1^n = \left(k \cdot 2^k - 2\sum_{k=1}^{n} 2^k\right)\Bigg|_1^n = \left(2^k(k-2)\right)\Big|_1^n = 2^{n+1}(n-1)+2 .$$

Příklad 13 $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right)\cdot e^k$

V průběhu řešení zadaného příkladu použijeme sumaci po částech hned dvakrát za sebou. Označme $f_k = k^2 - k,\ \Delta g_k = e^k$, pak

$$\Delta f_k = (k+1)^2 - (k+1) - \left(k^2-k\right) = 2k,\ g_k = \frac{e^k}{e-1}.$$

Podle metody per partes

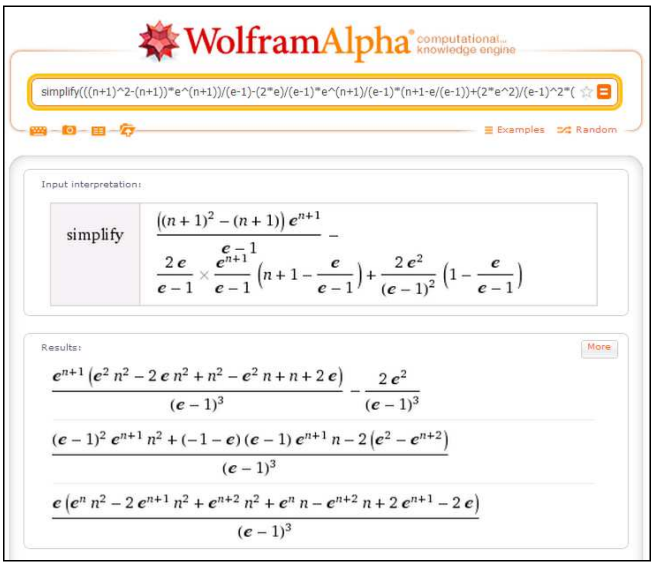
$\sum\left(k^2-k\right)\cdot e^k = \left(k^2-k\right)\frac{e^k}{e-1} - \sum\left(\frac{e^{k+1}}{e-1}\cdot 2k\right) = \left(k^2-k\right)\frac{e^k}{e-1} - \frac{2e}{e-1}\sum ke^k$. Pro výpočet poslední sumy opakujeme sumaci po částech. Položíme $u_k = k,\ \Delta v_k = e^k = \Delta g_k$, následně platí $\Delta u = k+1-k = 1$ a můžeme vyjádřit

$$\sum ke^k = \frac{ke^k}{e-1} - \sum\frac{e^{k+1}}{e-1} = \frac{ke^k}{e-1} - \frac{e}{e-1}\sum e^k = \frac{ke^k}{e-1} - \frac{e}{e-1}\cdot\frac{e^k}{e-1} = \frac{e^k}{e-1}\left(k - \frac{e}{e-1}\right).$$

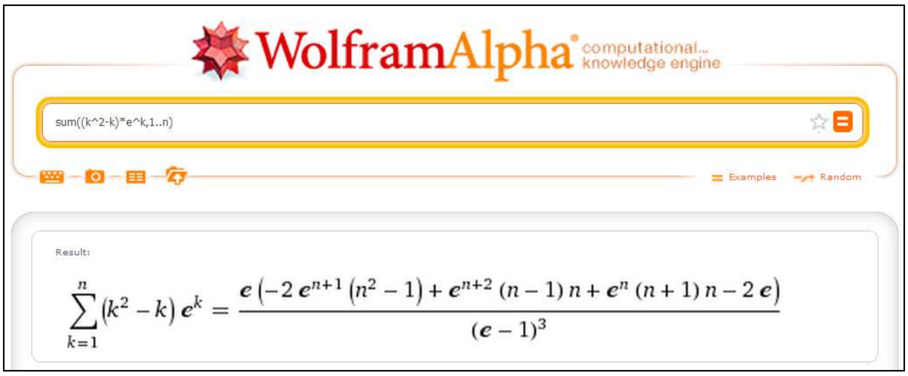
Vrátíme se k původní sumě $\sum_{k=1}^{n}\left(k^2-k\right)\cdot e^k = \left[\frac{\left(k^2-k\right)e^k}{e-1} - \frac{2e}{e-1}\cdot\frac{e^k}{e-1}\left(k-\frac{e}{e-1}\right)\right]\Bigg|_1^n$, po dosazení

$$\frac{\left((n+1)^2-(n+1)\right)e^{n+1}}{e-1} - \frac{2e}{e-1}\cdot\frac{e^{n+1}}{e-1}\left(n+1-\frac{e}{e-1}\right) - \left[\frac{\left(1^2-1\right)e^1}{e-1} - \frac{2e}{e-1}\cdot\frac{e^1}{e-1}\left(1-\frac{e}{e-1}\right)\right].$$

K další úpravě využijeme specializovaný program (obr. 11). Z nabízených zjednodušení vybereme poslední, ve kterém stačí v závorce čitatele vytknout mocniny čísla *e*, abychom získali výsledek sumy ve stejném tvaru, jaký nabízí počítač (obr. 12).



Obr. 11 – *Zjednodušení výrazu užitím Wolfram Alpha*



Obr. 12 – *Počítačové určení součtu řady*

<u>Příklad 14</u> $\sum_{k=1}^{n} k\cdot\sin k$

Také v tomto příkladu aplikujeme metodu sumace po částech, uplatníme dříve odvozenou sumu funkcí sinus a kosinus a ještě využijeme několik goniometrických vzorců známých ze střední školy. Především funkce součtu, polovičního a dvojnásobného argumentu.

Nechť $f_k = k,\ \Delta g_k = \sin k$, potom $\Delta f_k = 1,\ g_k = -\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$ a $g_{k+1} = -\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}$.

Následně

$$\sum k\cdot\sin k = -\frac{k\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} - \sum\left(-\frac{k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \frac{k\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}}\cdot\sum\cos\left(k+\frac{1}{2}\right).$$

Zjednodušíme

$$\sum\cos\left(k+\frac{1}{2}\right) = \cos\frac{1}{2}\sum\cos k - \sin\frac{1}{2}\sum\sin k = \cos\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)}{2}$$

a pokračujeme v hledání primitivní funkce $F(k)$.

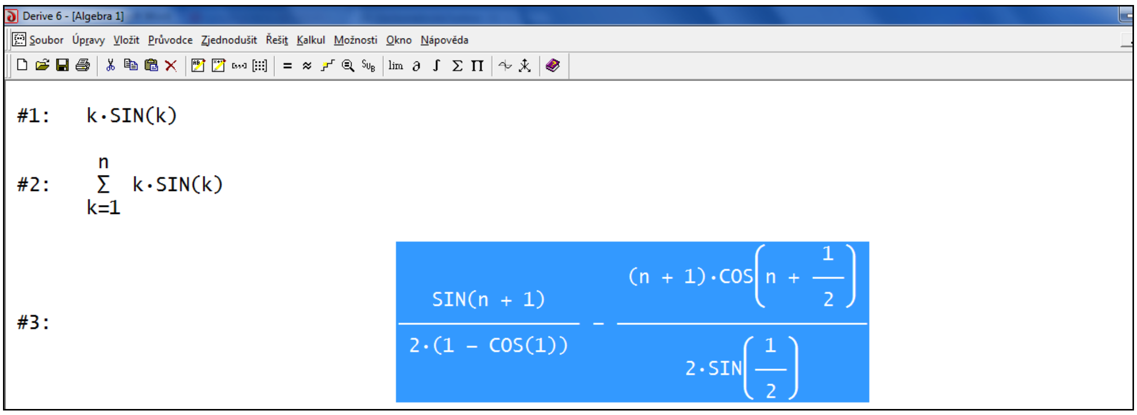
$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin k = \left[\frac{k \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\cos \frac{1}{2} \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)}{2} \right) \right] \Bigg|_{1}^{n},$$ výraz upravíme a dostaneme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin k = \left[\frac{k \cos\left(k - \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin k}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2} \right] \Bigg|_{1}^{n}$.

Pro výpočet konečného součtu zbývá určit $\displaystyle F(n+1) = -\frac{(n+1)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin(n+1)}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2}$

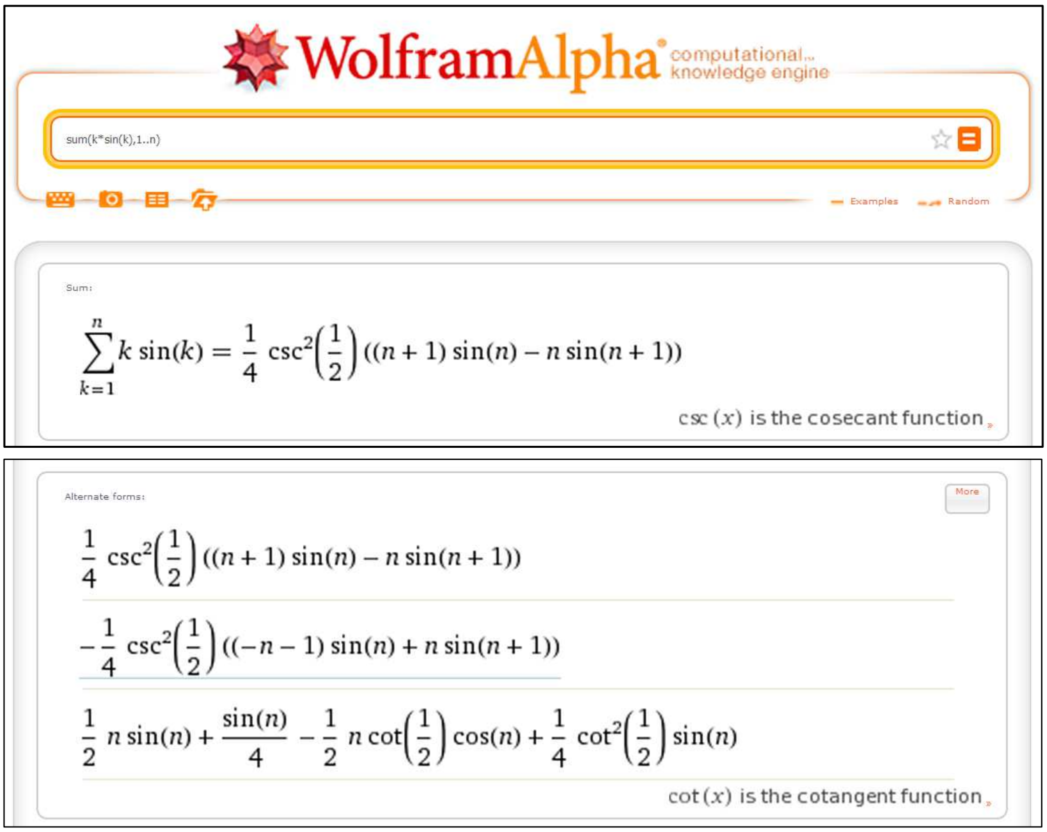
a $\displaystyle F(1) = -\frac{\cos \frac{1}{2}}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin 1}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-2 \cos \frac{1}{2} \sin \frac{1}{2} + \sin 1}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-\sin 1 + \sin 1}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2} = 0$. To znamená,

že $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin k = -\frac{(n+1)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}} + \frac{\sin(n+1)}{\left(2 \sin \frac{1}{2}\right)^2}$ a s využitím $\displaystyle\left(\sin \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1 - \cos 1}{2}$ je

výsledný součet $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin k = \frac{\sin(n+1)}{2(1 - \cos 1)} - \frac{(n+1)\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)}{2 \sin \frac{1}{2}}$, což ukáže také např. program *Derive 6* (obr. 13). Interaktivní *Wolfram Alpha* poskytne výsledek vyjádřený pomocí funkce kosekans případně kotangens (obr. 14).



Obr. 13 – *Řešení sumy užitím programu Derive6*



Obr. 14 – *Vyjádření součtu řady nástrojem Wolfram Alpha*

Pro další práci bude užitečné definovat rovněž záporné celočíselné mocniny $k^{\underline{-m}}, m > 0$:

$$k^{\underline{-1}} = \frac{1}{k+1},\; k^{\underline{-2}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}, \dots,\; k^{\underline{-m}} = \frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+m)}.$$

Už víme, že platí $\sum k^{\underline{m}} = \dfrac{k^{\underline{m+1}}}{m+1} + C$ pro všechna celá $m \neq -1$. Jak ale řešit součet $\sum k^{\underline{-1}}$? Podle definic $k^{\underline{-1}} = \dfrac{1}{k+1} = \Delta F_k = F(k+1) - F(k)$. Ověřme, že funkcí $F(k)$, jež splňuje uvedenou podmínku, je harmonická řada $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} \dots + \dfrac{1}{n}$, značíme H_n.

Patří mezi tzv. Riemannovy funkce zeta a v diskrétní matematice je analogickou funkcí k funkci přirozeného logaritmu.

$$F(k+1) - F(k) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k+1}.$$

Příklad 15 $\sum_{k=1}^{n} H_k$

Jestliže zvolíme $f_k = H_k$ a $\Delta g_k = 1$, potom $\Delta f_k = H_{k+1} - H_k$, $g_k = k, g_{k+1} = k+1$. Podle pravidla sumace po částech a s využitím platnosti vztahu $H_{k+1} - H_k = \dfrac{1}{k+1}$ dostáváme $\sum_{k=0}^{n} H_k = kH_k - \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k+1} \cdot (k+1) = \left(kH_k - \sum_{k=0}^{n} 1 \right)\Bigg|_0^n = (kH_k - k)\Big|_0^n = nH_n - n$. Našli jsme analogii k integraci per partes přirozeného logaritmu.

Integrace racionálních funkcí se zpravidla neobejde bez rozkladu na parciální zlomky. Také při hledání součtu číselných řad lze tuto úpravu využít.

Příklad 16 $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$

Uvedená suma již byla řešena jako příklad 6 v kapitole 2.5 Teleskopické řady. Nyní si ukážeme další způsob. Výraz rozložíme na parciální zlomky $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ a dále $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+1} = H_n - 1 + \dfrac{1}{n+1}$. Proto $\sum_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} \right) = H_n - \left(H_n - 1 + \dfrac{1}{n+1} \right) = \dfrac{n}{n+1}$.

Z uvedených příkladů je patrné, že antidiference hraje důležitou roli při sčítání řad $\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} (s_{k+1} - s_k)$, kde posloupnost částečných součtů je teleskopická. Avšak nalezení takové funkce $F(k)$, aby platilo $\Delta a_k = F(k+1) - F(k)$, jak jsme si ukázali, není vždy jednoduché. Přesto se podařilo objevit v 80. letech minulého století jeden z významných sumačních algoritmů, díky němuž dnes dovedou takovým způsobem sčítat řady i počítače. Autorem je americký matematik a programátor **Ralph William Gosper jr.** Jeho algoritmus řeší řady $\sum_{k=m}^{n} a_k = s_{n+1} - s_m$ v případech, kdy s_k je hypergeometrická posloupnost. V opačném případě dokonce prokáže, že takové vyjádření neexistuje.

Definice 1: Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá *hypergeometrická*, právě tehdy, když pro všechna $n \in N$ lze podíl po sobě jdoucích členů a_n, a_{n-1} této posloupnosti zapsat ve tvaru $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{u_n}{v_n}$, kde u_n a v_n jsou polynomy.

3.6. Od racionální funkce k polynomu

Před následujícími úvahami je třeba definovat další důležitý pojem a vyslovit věty, které tvoří teoretický základ Gosperova algoritmu.

Věta 1: Každou racionální funkci $\frac{u_n}{v_n}$ lze zapsat ve tvaru $\frac{u_n}{v_n} = \frac{p_n \cdot q_n}{p_{n-1} \cdot r_n}$, kde p_n, q_n, r_n jsou polynomy, které splňují podmínku $\mathrm{D}(q_n, r_{n+j}) = 1 \quad \forall j \in N_0$.

V důkazu věty 1 (je uveden např. v [25]) hraje významnou roli *rezultant polynomů*[3] a *Sylvesterovo kritérium*, což je však nad rámec středoškolského učiva.

Definice 2: Trojici polynomů p_n, q_n, r_n splňující vlastnosti ve větě 1 nazýváme *regulární reprezentací podílu* $\frac{u_n}{v_n}$.

Uvažujme hypergeometrickou posloupnost $\{a_k\}$, ve které platí $a_k = s_k - s_{k-1}$.

Jestliže $\frac{s_k}{s_{k-1}}$ je racionální funkce, pak musí být racionální také $\frac{a_k}{a_{k-1}}$, což snadno ověříme, protože $\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{s_k - s_{k-1}}{s_{k-1} - s_{k-2}} = \frac{s_k}{s_{k-1}} \frac{1 - \frac{s_{k-1}}{s_k}}{1 - \frac{s_{k-2}}{s_{k-1}}}$. Pak je ale možné podle věty 1 podíl

$\frac{a_n}{a_{n-1}}$ vyjádřit pomocí jeho regulární reprezentace, čili $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{p_n}{p_{n-1}} \frac{q_n}{r_n}$, (4)

kde p_n, q_n, r_n jsou polynomy, pro něž pro všechna $j \in N_0$ platí $D(q_k, r_{k+j}) = 1$. (5)

[3] Významná součást algoritmů programů počítačové algebry, např. *Maple*, *Mathematica*.

Věta 2: Nechť posloupnost $\{a_k\}$ je hypergeometrická a polynomy p_n, q_n, r_n tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Jestliže také posloupnost částečných součtů $\{s_k\}$, kde $s_n = \sum_{k=m}^{n} a_k$ je hypergeometrická, potom lze n-tý částečný součet s_n vyjádřit ve tvaru $s_n = \frac{q_{n+1}}{p_n} a_n f_n$, (6)

pro jistý polynom f_n splňující podmínku

$$p_n = q_{n+1} f_n - r_n f_{n-1}. \tag{7}$$

Podmínku (7) pro polynom f_n dokážeme snadno. Do vztahu $a_k = s_k - s_{k-1}$ dosadíme formule podle (6):

$a_k = \frac{q_{k+1}}{p_k} a_k f_k - \frac{q_k}{p_{k-1}} a_{k-1} f_{k-1}$, rovnici vynásobíme p_k a vydělíme a_k, pak dostaneme $p_k = q_{k+1} f_k - \frac{p_k}{p_{k-1}} \frac{a_{k-1}}{a_k} q_k f_{k-1}$. Dále za podíl $\frac{a_{k-1}}{a_k}$ dosadíme převrácenou hodnotu rovnosti (4):

$p_k = q_{k+1} f_k - \frac{p_k}{p_{k-1}} \frac{p_{k-1} r_k}{p_k q_k} q_k f_{k-1}$, některé členy se vykrátí a tím se vyjádření zjednoduší

$p_k = q_{k+1} f_k - r_k f_{k-1}$.

Z rovnosti (6) plyne $f_n = \frac{s_n p_n}{a_n q_{n+1}}$. (8)

Funkce f_n je racionální funkce, což velmi snadno ověříme, protože podle předpokladu $a_n = s_n - s_{n-1}$ a následně $f_n = \frac{s_n}{s_n - s_{n-1}} \frac{p_n}{q_{n+1}} = \frac{1}{1 - \frac{s_{n-1}}{s_n}} \frac{p_n}{q_{n+1}}$. Teorie algoritmu ale dokonce prokazuje, že f_n je polynom (autoři zdroje [25] toto nazývají *zázrakem*). Důkaz provedeme sporem (podle [8]). Vyjděme z předpokladu, že f_n je racionální funkce a nikoli polynom, to znamená, že existují nesoudělné polynomy x_n, y_n takové, že $f_n = \frac{x_n}{y_n}$.

Přepíšeme rovnici (7) ve tvaru $p_n = q_{n+1} \cdot \frac{x_n}{y_n} - r_n \cdot \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}}$, vynásobíme ji y_n, y_{n-1} a dostaneme

$$p_n y_n y_{n-1} = q_{n+1} x_n y_{n-1} - r_n x_{n-1} y_n \,. \tag{9}$$

Nechť $j \in N_0$ je největší možné celé číslo takové, že $z_n = D(y_n, y_{n+j}) \neq 1$, (10)

jinými slovy z_n je nekonstantní polynom, protože největším společným dělitelem polynomů y_n a y_{n+j} není číslo 1. Protože y_{n+j} musí být násobkem z_n a číslo j je maximální možné, pak zřejmě $D(y_{n-1}, y_{n+j}) = 1 = D(y_{n-1}, z_n)$. (11)

Nabývá-li n hodnot od $-(j+1)$ ve výrazu (7), pak zřejmě platí

$$D(y_{n-(j+1)}, y_{n-(j+1)+j}) = D(y_{n-j-1}, y_{n-1}) = z_{n-j-1} \neq 1 \,. \tag{12}$$

A jestliže n se pohybuje od $-j$ na levé straně vztahu (8), vychází

$$D(y_{n-j-1}, y_{n-j+j}) = D(y_{n-j-1}, y_n) = 1 = D(z_{n-j-1}, y_n), \tag{13}$$

protože y_{k-j-1} je násobek z_{k-j-1}.

Nyní se vrátíme k rovnici (6), kterou vydělíme výrazy z_n a z_{n-j-1}

$$\frac{p_n y_n y_{n-1}}{z_n z_{n-j-1}} = \frac{q_{n+1} x_n y_{n-1}}{z_n z_{n-j-1}} - \frac{r_n x_{n-1} y_n}{z_n z_{n-j-1}} \,. \tag{14}$$

Podle (4) polynom y_n je násobek z_n a z (11) vyplývá, že z_n a y_{n-1} jsou nesoudělné polynomy. A protože dle našeho předpokladu jsou nesoudělné x_n, y_n, musí být nesoudělné x_{n-1}, y_{n-1}, a také x_n, y_{n-1}. Proto v rovnici (14) q_{n+1} je násobkem z_n , tudíž $z_{n-1} | q_n$. Podobně podle (12) $z_{n-j-1} | y_{n-1}$. Na druhé straně podle rovnice (13) a nesoudělnosti polynomů x_n, y_n, je polynom z_{n-j-1} nesoudělný s polynomy x_{n-1} a y_n, proto v rovnici (14) musí být r_k násobkem z_{n-j-1} a tudíž z_{n-1} dělit r_{n+j}. Jestliže $j \in N_0$ je číslo, pro které mají polynomy q_n a r_{n+j} společného dělitele z_{n-1}, pak je to v rozporu s původním předpokladem (5). Proto y_n musí být konstanta a funkce f_n polynom.

4. Didaktický pohled na zavedení Gosperova algoritmu do výuky

V této části textu popíšeme předpokládané odborné nároky na matematické znalosti žáka střední školy pro možné zavedení Gosperova algoritmu jako další metody sčítání číselných řad, navrhneme mírné úpravy obsahu příslušného učebního tématu, představíme schéma Gosperova algoritmu, podrobně objasníme jeho jednotlivé kroky a doplníme ukázkovými příklady. Na závěr zanalyzujeme možné odborné způsobilosti žáka, k jejichž rozvoji metoda Gosperova algoritmu přispívá.

4.1. Předpokládané znalosti žáků a studentů

Jak už bylo řečeno, teorie sumačních algoritmů je postavena na práci s polynomy (v českých školách častěji užívaným názvem mnohočleny). S nimi se žáci poprvé setkávají už na základní škole. Z dokumentů RVP středních škol zakončených maturitní zkouškou vyplývá předpoklad, že žák vyššího ročníku takového vzdělávacího zařízení dokáže mnohočleny sčítat, odčítat, násobit a za přípustných podmínek také dělit, určí jejich stupeň. Absolutní člen, koeficienty kvadratického a lineárního členu používají např. při řešení kvadratické rovnice pomocí diskriminantu nebo při parametrickém zkoumání vlastností lineární a kvadratické funkce. Na školách zpravidla nebývá zvykem polynom označovat, je podceňován symbolický zápis polynomů stupně vyššího než 2. Proto procvičování operací s polynomy je třeba posílit a bude vhodné ho rozšířit o příklady typu: „Jsou dány polynomy p_n, q_n, zapište následující polynomy $p_{n+1}, p_{n-1}, p_{n+1} + q_n, p_{n+1} - q_n$." apod. V jednodušších případech středoškolák nalezne největší společný dělitel polynomů, rozumí termínu nesoudělné polynomy. Příklady na nalezení největšího společného dělitele dvou polynomů by si ale zasloužily větší pozornost. Důraz bývá kladen spíše na nejmenší společný násobek v souvislosti s návazností na sčítání a odčítání lomených výrazů. Přitom v obou případech se dobře procvičuje potřebný rozklad polynomů v součin. Přestože se při výuce na střední škole většinou nemluví o metodě neurčitých koeficientů, předpokládá se, že žák ví, kdy jsou si dva polynomy rovny. Řešení soustavy n lineárních rovnic o n, resp. $n-1$ neznámých se na střední škole také probírá, gymnazisté řeší i úlohy s parametrem. Z teorie funkcí jedné reálné proměnné by schopnost rozlišit racionální lomenou funkci od polynomické mělo být naprostou samozřejmostí.

Téma číselné řady a jejich součet je v základním učivu součástí kapitoly o posloupnostech, do rozšiřujícího učiva pro maturanty patří téma nekonečná geometrická řada. Tady se žáci seznamují se symbolem Σ, se vztahy pro počítání se sumami, s některými metodami řešení konečných i nekonečných sum. Zájemci o maturitu z matematiky by měli umět vypočítat limitu posloupnosti. To jim umožní dokonce určit Gosperovým algoritmem součty nekonečných řad.

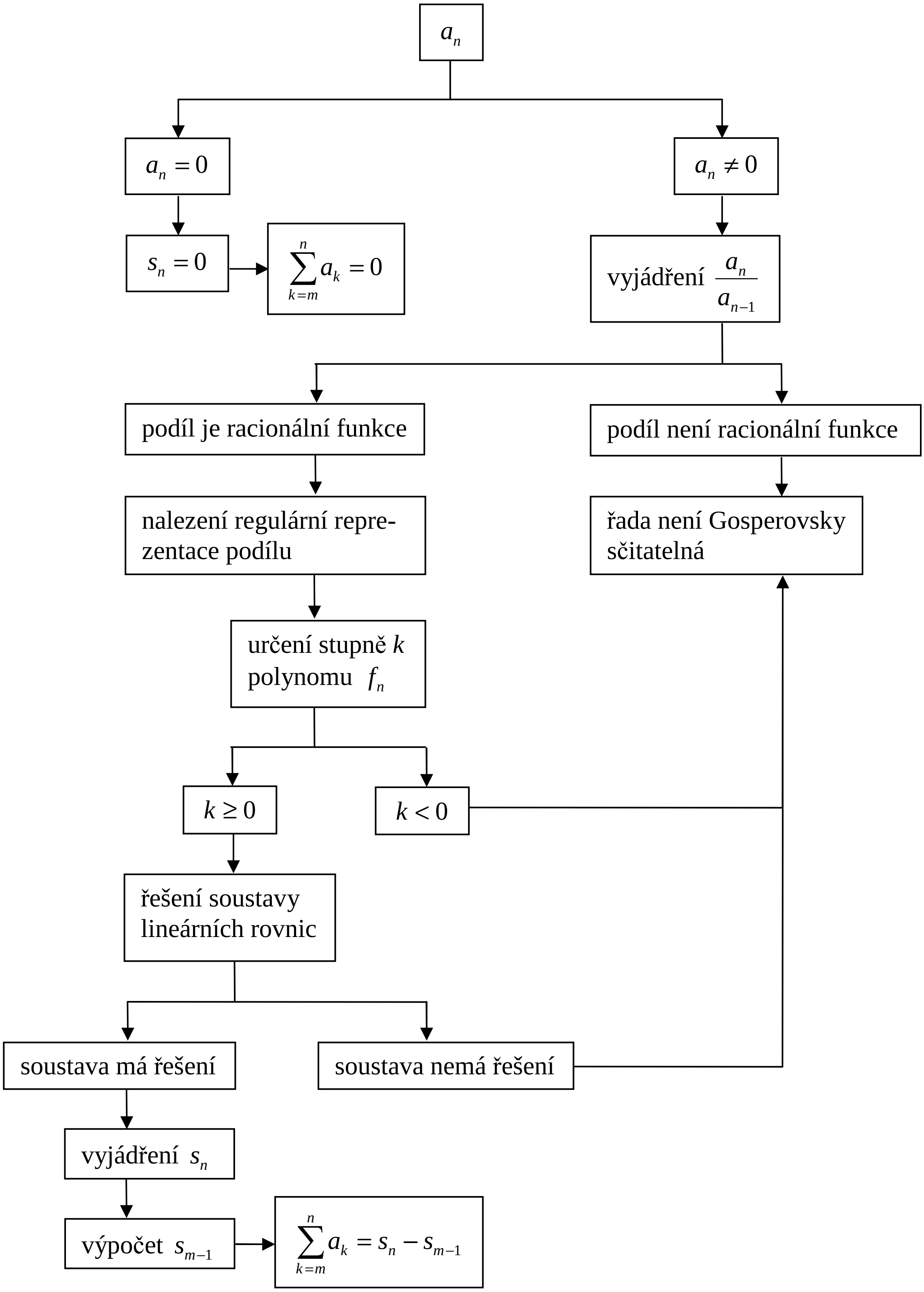
Uvedené znalosti je však pro aplikaci Gosperova algoritmu nezbytné rozšířit o následující dva nové matematické termíny: *hypergeometrická posloupnost*, *regulární reprezentace podílu*. V případě, že bychom se chtěli s nejnadanějšími žáky hlouběji ponořit do počítačové algebry, je vhodné zavést další pojmy, především *rezultant polynomů* a *Sylvesterovo kritérium*. Dodejme ještě, že pro účely Gosperova algoritmu v jistém okamžiku postupu definujeme stupeň nulového polynomu číslem -1. Na úrovni SŠ vystačíme s uvedenými definicemi 1 a 2 a větami 1, 2.

4.2. Postup při sčítání řady Gosperovým algoritmem

Celý algoritmus znázorňuje blokové schéma na str. 43. U některých jeho kroků se zastavíme podrobněji a doložíme ukázkou.

Vlastní nácvik užití Gosperova algoritmu můžeme rozdělit do tří etap. Nejdříve je třeba naučit žáky přepsat podíl polynomů v užitečné formě pomocí jeho regulární reprezentace. Začínáme jednoduchými příklady a postupně zkusíme také algoritmický postup. V další fázi, kdy stanovujeme stupeň k polynomu f_n , procvičujeme se studenty rozlišení stupně polynomu a koeficientů členů s odpovídající mocninou v mnohočlenu. Zde je kladen největší důraz na porozumění symbolickému značení. Řešitelé dosazují do jistého vzorce, kde je více symbolických zápisů, než je v běžných školních úlohách obvyklé. V tomto okamžiku pravděpodobně nastanou největší potíže. Ve třetím stadiu řešíme soustavy lineárních rovnic, nacvičujeme s žáky metodu neurčitých koeficientů, vyplývající z rovnosti polynomů, a také nutnou parametrizaci, pokud to bude potřeba. Při trénování druhé a třetí fáze dokonce odhalíme případy selhání Gosperova algoritmu.

Schéma Gosperova algoritmu pro součet řady $\sum_{k=m}^{n} a_k = s_n$



4.2.1. Nalezení regulární reprezentace podílu

Podle věty 1 musí mít polynomy q_n a r_{n+j} pro všechna $j \in N_0$ největšího společného dělitele číslo 1. V jednodušších příkladech největšího společného dělitele polynomů odhadneme. Zpravidla začínáme tak, že položíme $p_n = 1$.

Příklad 17 Najděte regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Platí $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{(n-1)n}} = \frac{n-1}{n+1}$. Položíme-li $p_n = 1$, pak $p_{n-1} = 1$ a snadno uhádneme, aby platilo $\frac{n-1}{n+1} = \frac{p_n q_n}{p_{n-1} r_n}$, musí $q_n = n-1$ a $r_n = n+1$. Zřejmě $D(q_n, r_{n+j}) = D(n-1, n+1+j) = 1\ \forall j \in N_0$ a proto regulární reprezentaci podílu $\frac{n-1}{n+1}$ tvoří polynomy $p_n = 1, q_n = n-1, r_n = n+1$.

V případě, že největším společným dělitelem nebude jednička, existuje algoritmus, jak polynomy p_n, q_n, r_n najít. Uvádíme jej pro zájemce a bez důkazu, protože je opět odvislý od porozumění pojmům rezultant polynomů a Sylvesterovo kritérium. Položíme $g_n = D(q_n, r_{n+j^*})$, kde $j^* \in N_0$ je hodnota, pro kterou je rezultant polynomů q_n, r_{n+j} roven nule. Potom přiřadíme původním polynomům p_n, q_n, r_n nové hodnoty: $p_n := p_n \cdot \prod_{k=0}^{j^*-1} g_{n-k}$, $q_n := \frac{q_n}{g_n}$, $r_n := \frac{r_n}{g_{n-j^*}}$. Celý postup můžeme několikrát opakovat až do okamžiku nalezení požadovaných polynomů. Stupně polynomů q_n tvoří konečnou klesající posloupnost přirozených čísel, v určitém okamžiku proces končí.

Příklad 18 Najděte regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$.

Vyjádříme podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n(n+3)}}{\frac{1}{(n-1)(n+2)}} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+3)}$. Zkusíme opět položit $p_n = 1$, následně $p_{n-1}=1,\ q_n=(n-1)(n+2)=n^2+n-2,\ r_n=n(n+3)=n^2+3n$. Zkoumejme největšího společného dělitele $D(q_n,r_{n+j})=D((n-1)(n+2),(n+j)(n+j+3))$. Zřejmě pro přirozené $j=2=j^*$ nastane situace, že největším společným dělitelem polynomů q_n,r_{n+j} bude výraz $n+2$, proto navržená trojice polynomů p_n,q_n,r_n netvoří (podle věty 1) regulární reprezentaci podílu.[4] K nalezení jiné vhodné trojice polynomů použijeme zavedený algoritmus. Nejdříve položíme $g_n=n+2$. Pak

$$p_n := p_n\cdot\prod_{k=0}^{j^*-1} g(n-k)=1\cdot g_n\cdot g_{n-1}=(n+2)(n+1),$$

$$q_n := \frac{q_n}{g_n}=\frac{(n-1)(n+2)}{n+2}=n-1,$$

$r_n := \dfrac{r_n}{g_{n-j^*}}=\dfrac{n(n+3)}{n}=n+3$. Znovu prověříme největšího společného dělitele a zjistíme, že $D(q_n,r_{n+j})=D(n-1,n+j+3)=1\ \forall j\in N_0$. Právě jsme nalezli regulární reprezentaci podílu $\dfrac{(n-1)(n+2)}{n(n+3)}$, kterou tvoří polynomy $p_n=(n+2)(n+1),\ q_n=n-1,\ r_n=n+3$. Pro ubezpečení ověříme vztah (4): $\dfrac{p_nq_n}{p_{n-1}r_n}=\dfrac{(n+2)(n+1)(n-1)}{(n+1)n(n+3)}=\dfrac{(n+2)(n-1)}{n(n+3)}=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

4.2.2. Určení stupně *k* polynomu *f_n*

Vraťme se k rovnici (7) ve větě 2, která vyjadřuje rovnost polynomů. Stupeň k polynomu f_n je zřejmě závislý na stupních polynomů p_n,q_n,r_n. Označme $l_p=st(q_{n+1}+r_n)$, $l_m=st(q_{n+1}-r_n)$. Jestliže stupeň polynomu vzniklého součtem bude menší nebo roven stupni polynomu vytvořeného rozdílem, čili $l_p\le l_m$, pak pro stupeň k polynomu f_n musí platit $k=st(p_n)-l_m$. V případě, že $l_p>l_m$ je třeba nejdříve vypočítat pomocné k_0. Zápisem $koef(p_n,i)$ budeme rozumět koeficient členu u mocniny n^i v polynomu p_n. Pro k_0 platí

[4] Podle Sylvesterova kritéria $D(q_n,r_{n+j})\neq 1$ právě když rezultant $res_n(q_n,r_{n+j})=0$.

$$k_0 = \frac{-l_p \cdot koef(q_n, l_p) - koef(q_n, l_p - 1) + koef(r_n, l_p - 1)}{koef(q_n, l_p)}. \tag{15}$$

Bude-li $k_0 \in Z$, pak stupeň k bude maximální z hodnot $k_0, st(p_n) - l_p + 1$. Vyjde-li $k_0 \notin Z$, položíme $k = st(p_n) - l_p + 1$. Když vyjde $k < 0$, pak teorie říká, že posloupnost s_n částečných součtů není hypergeometrická a řadu tímto způsobem nelze sečíst. Celý algoritmus můžeme zapsat takto:

l_p := stupeň $(q_{n+1} + r_n)$

l_m := stupeň $(q_{n+1} - r_n)$

když $l_p \le l_m$, pak k := stupeň$(p_n) - l_m$

jinak

$$k_0 := \frac{-l_p \cdot koef(q_n, l_p) - koef(q_n, l_p - 1) + koef(r_n, l_p - 1)}{koef(q_n, l_p)}$$

když $(k_0 \in Z)$ pak k := max$(k_0, st(p_n) - l_p + 1)$

jinak k := stupeň$(p_n) - l_p + 1$

konec

konec

když $k < 0$ pak FALSE

konec

Pro účely Gosperova algoritmu bylo zavedeno rozlišení označení nulového stupně polynomu a stupně nulového polynomu. Nenulovému polynomu nultého stupně přiřazujeme číslo 0, v případě, že vychází polynom nulový, přiřazujeme jeho stupni hodnotu -1.

Příklad 19 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = n$.

Nejprve najdeme regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$. Zřejmě ji tvoří polynomy $p_n = n, q_n = 1, r_n = 1$, protože splňují rovnosti (4) a (5). Potom $q_{n+1} = 1$ a součet $q_{n+1} + r_n = 2$, což je polynom nultého stupně, proto $l_p = 0$. Rozdílem $q_{n+1} - r_n = 0$ je nulový polynom, pro který v Gosperově algoritmu definujeme $l_m = -1$. Platí $l_p > l_m$ a hledáme pomocné číslo k_0. $koef(q_n, l_p) = 1$, koeficienty $koef(q_n, l_p - 1) = koef(q_n, -1)$ a $koef(r_n, l_p - 1) = koef(r_n, -1)$ nejsou definovány. Dosazením do (15) vypočteme k_0. $k_0 = \frac{-0 \cdot 1}{1} = 0 \in Z$, potom $k = \max(0, 1 - 0 + 1) = 2$ a hledaný polynom f_n bude druhého stupně.

Příklad 20 Určete stupeň polynomu f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 18.

Využijeme již nalezenou regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kterou tvoří polynomy $p_n = (n+2)(n+1) = n^2 + 3n + 2, q_n = n - 1, r_n = n + 3$. Zřejmě $q_{n+1} + r_n = 2n + 3$ a $q_{n+1} - r_n = -3$, to znamená $l_p = 1, l_m = 0, l_p > l_m$ a podle teorie musíme hledat pomocné k_0. Je $koef(q_n, l_p) = 1$, $koef(q_n, l_p - 1) = -1$ a $koef(r_n, l_p - 1) = 3$; $k_0 = \frac{-1 \cdot 1 - (-1) + 3}{1} = 3 \in Z$, pro číslo k platí $k = \max(3, 2 - 1 + 1) = 3$, proto polynom f_n bude třetího stupně.

Příklad 21 Určete stupeň polynomu f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, je-li regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ rovna $p_n = 2n - 1, q_n = 1, r_n = 2$.

Vyjádříme $q_{n+1} + r_n = 3, q_{n+1} - r_n = -1$. Výsledkem jsou nenulové konstantní polynomy, odtud $l_p = l_m = 0$ a stupeň k určíme bez pomocného čísla k_0. Stupeň polynomu $p_n = 1$, proto $k = 1$ a hledaný polynom f_n bude prvního stupně.

Příklad 22 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \frac{2^n}{n+1}$, je-li regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ rovna $p_n = 1, q_n = 2n, r_n = n+1$.

Platí $q_{n+1} + r_n = 2n + 2 + n + 1 = 3n + 3, q_{n+1} - r_n = 2n + 2 - n - 1 = n + 1$. Z toho plyne rovnost $l_p = l_m = 1$ a aniž bychom využili pomocné k_0, vyjádříme $k = 0 - 1 = -1 < 0$, tudíž řada $\sum \frac{2^n}{n+1}$ nebude gosperovsky sčitatelná.

4.2.3. Řešení soustavy lineárních rovnic

V předcházejícím kroku jsme našli stupeň k polynomu f_n (pokud existuje). Polynom f_n zapíšeme v obecném tvaru $f_n = c_k n^k + c_{k-1} n + \ldots + c_1 n + c_0$ a dosadíme do rovnice (7):

$$p_n = q_{n+1}\left(c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + \ldots + c_1 n + c_0\right) - r_n \left[c_k (n-1)^k + c_{k-1}(n-1)^{k-1} + \ldots + c_1 (n-1) + c_0\right] \tag{16}$$

Známe již trojici polynomů p_n, q_n, r_n a stanovení koeficientů $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$ bude možné porovnáním polynomů (metoda neurčitých koeficientů). Dva polynomy jsou si rovny, rovnají-li se odpovídající koeficienty. Tak sestavíme potřebnou soustavu lineárních rovnic s neznámými $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1, c_0$, která může mít nekonečně mnoho řešení, pak ale bude nutné parametrizovat, právě jedno řešení nebo žádné. Nemá-li daná soustava řešení, znamená, že původní řada není gosperovsky sčitatelná.

Příklad 23 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 18.

Řešením příkladu 20 jsme zjistili, že hledaný polynom bude třetího stupně: $f_n = c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0$. Ze závěru příkladu 18 víme, že platí $p_n = (n+2)(n+1),\ q_n = n-1,\ r_n = n+3$. Dosadíme do (7):

$$n^2 + 3n + 2 = n\left(c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0\right) - (n+3)\left[c_3(n-1)^3 + c_2(n-1)^2 + c_1(n-1) + c_0\right].$$

Pravou stranu umocníme, roznásobíme a vytkneme společné mocniny proměnné *n*. Práci nám může usnadnit některý ze specializovaných programů počítačové algebry.

$n^2 + 3n + 2 = n^2(6c_3 - c_2) + n(-8c_3 + 5c_2 - 2c_1) + (3c_3 - 3c_2 + 3c_1 - 3c_0)$ a důsledkem je

$$\begin{aligned} 1 &= 6c_3 - c_2 \\ 3 &= -8c_3 + 5c_2 - 2c_1 \\ 2 &= 3c_3 - 3c_2 + 3c_1 - 3c_0\ , \end{aligned}$$

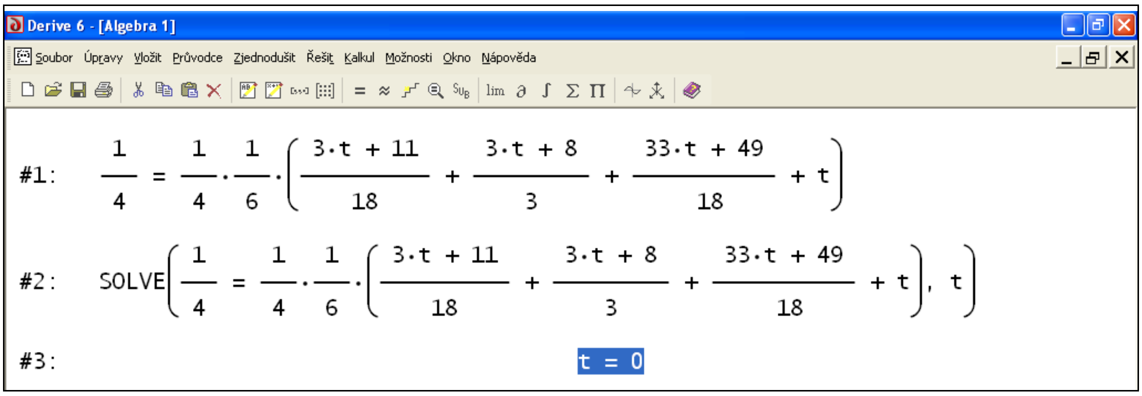
soustava tří rovnic o čtyřech neznámých, proto je třeba provést parametrizaci. S řešením soustavy opět může pomoci počítač. Zvolíme jednu proměnnou jako parametr, např. položme $c_0 = t$. Pak $c_1 = \frac{33t+49}{18}, c_2 = \frac{3t+8}{3}, c_3 = \frac{3t+11}{18}$. To znamená, že je třeba polynom ještě f_n doladit pomocí počátečních podmínek. Sčítáme řadu $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+3)}$, první sčítanec je $s_1 = \frac{1}{4}$. Dosazením f_n do vyjádření (6) dostaneme

$$s_n = \frac{n}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{1}{n(n+3)} \cdot \left(\frac{3t+11}{18}n^3 + \frac{3t+8}{3}n^2 + \frac{33t+49}{18}n + t\right)$$, po úpravě

$$s_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \left(\frac{3t+11}{18}n^3 + \frac{3t+8}{3}n^2 + \frac{33t+49}{18}n + t\right).$$

Nahradíme $n = 1$ a $s_1 = \frac{1}{4}$, pak z rovnice $\frac{1}{4} = \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \left(\frac{3t+11}{18} + \frac{3t+8}{3} + \frac{33t+49}{18} + t\right)$ vychází $t = 0$ (obr. 15), potom koeficienty $c_1 = \frac{49}{18}, c_2 = \frac{8}{3}, c_3 = \frac{11}{18}$ a hledaný polynom

$$f_n = \frac{11}{18}n^3 + \frac{8}{3}n^2 + \frac{49}{18}n.$$



Obr. 15 – *Výpočet parametru při řešení Příkladu 23*

<u>Příklad 24</u> Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 19.

Jak už víme, hledaný polynom bude prvního stupně. Označme $f_n = c_1 n + c_0$. S využitím regulární reprezentace podílu vztahující se k danému a_n sestavíme rovnici

$2n-1 = c_1 n + c_0 - 2[c_1(n-1)+c_0]$, po úpravě $2n-1 = -c_1 n + 2c_1 - c_0$. Odtud platí

$$\begin{aligned} 2 &= -c_1 \\ -1 &= 2c_1 - c_0 \, . \end{aligned}$$

Řešení soustavy najdeme snadno: $c_1 = -2,\ c_0 = -3$ a tedy $f_n = -2n-3$.

<u>Příklad 25</u> Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, je-li regulární reprezentací podílu $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ trojice polynomů $p_n = 1,\ q_n = n^2 - 2n + 1,$ $r_n = n^2$ a stupeň polynomu f_n je $k = 0$.

Neznámý polynom je konstantní, proto $f_n = c_0$ a dostáváme rovnici $1 = n^2 c_0 - n^2 c_0$, která nemá řešení. Proto řada $\sum \dfrac{1}{n^2}$ není gosperovsky sčitatelná.

4.3. Přínos nové metody sčítání řad pro rozvoj způsobilostí středoškoláka

Jestliže se učitel rozhodne použít novou metodu řešení úlohy, měl by nejen posoudit vhodnost její aplikace s ohledem na úroveň znalostí a vědomostí svých žáků, ale také si uvědomit, co užitečného, nového, motivačního tato metoda řešitelům přinese.
Rámcové vzdělávací programy, současné dokumenty školního vzdělávání, stanovují za jeden ze svých cílů posílení mezipředmětových, mezioborových přesahů. To znamená zdůraznit mezipředmětové propojení, neizolovat jeden předmět od druhého. A právě tady je příležitost ukázat, jaký význam má matematika pro informatiku a současně, jak důležitá je pomoc programů počítačové algebry při řešení např. rutinních, dlouhých a často nezáživných výpočtů. Je také dokonce možné ukázat takové příklady, kde lidské klasické metody a postupy selhávají a počítačový program řadu dokáže sečíst. Tím se posouvají hranice nemožného.

V průběhu studia jsou žáci seznamováni v souvislosti s důležitými objevy se jmény významných badatelů, ve většině případů dávno zesnulých. Nahlédnutí do relativně mladé historie vývoje sumačních algoritmů umožní jmenování současných žijících odborníků, kteří přispívají k rozvoji svých oborů a kteří se už zapsali do historie novými způsoby řešení úloh o číselných řadách. Matematika se tak představuje jako věda živá, inspirativní, ve vývoji.
Ze způsobilostí, které posílí matematické dovednosti žáků jmenujme především práci s polynomy, tj. např. ověřování, zda je posloupnost hypergeometrická, určení největšího společného dělitele při hledání regulární reprezentace podílu, řešení polynomiálních rovnic. Logické uvažování žák rozvíjí kupříkladu analýzou situací, kdy daný algoritmus nelze použít, nebo při vhodném využití parametru rovnice, či porozumění významu počátečních podmínek. Nemalý význam v rozvoji matematických dovedností žáků má symbolická matematika. Učí je preciznosti, přesnosti zápisů, jednoznačnosti vyjadřování, které jsou nezbytné pro vznik algoritmů.

Aplikací nové metody řešení úloh s náročnějšími výpočty se otevírá žákům prostor pro užitečné a efektivní využití některého z programů počítačové algebry. Nenásilnou formou se tak mohou seznámit s uživatelským prostředím a způsobem ovládání specializovaných softwarů.

5. Příklady sčítání konečných číselných řad Gosperovým algoritmem

Následuje kompletní řešení několika jednodušších příkladů sčítání řad Gosperovým algoritmem bez užití rezultantu polynomů. Řady jsou rozděleny do stejných kategorií jako v kapitole 2.

5.1. Aritmetické řady

<u>Příklad 26</u> $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

Označme $a_n = n$, pak $a_{n-1} = n-1$ a $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$. Podíl je racionální funkci, proto posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je hypergeometrická. Nalezneme regulární reprezentaci tohoto podílu. Položme $p_n = 1, q_n = n, r_n = n-1$. Platí $D(q_n, r_{n+j}) = D(n, n+j-1)$. Ale pro $j=1$ bude $D = n$, proto uvedená trojice polynomů nemůže být regulární reprezentací uvedeného podílu. Položíme tedy $g_n = D(q_n, r_{n+1})$ a dostáváme $g_n = D(n,n) = n$, pak $q_n = \frac{n}{n} = 1, r_n = \frac{n-1}{n-1} = 1$, a $p_n = n$. Trojice polynomů $p_n = n, q_n = 1, r_n = 1$ zřejmě tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n}{n-1}$.

Hledáme polynom f_n. Nejprve určíme jeho stupeň. Už víme, že pro účely Gosperova algoritmu definujeme v tomto kroku stupeň nulového polynomu číslo -1.

$q_{n+1} + r_n = 1+1 = 2 \Rightarrow l_p = 0$, $q_{n+1} - r_n = 1-1 = 0 \Rightarrow l_m = -1$, protože $l_p > \mathrm{l_m}$, je třeba ještě určit pomocné číslo k_0.

$$k_0 = \frac{\lfloor -l_p \cdot koef(q, l_p) - koef(q, l_p - 1) + koef(r, l_p - 1)\rfloor}{koef(q, l_p)} = \frac{0 \cdot 1}{1} = 0,$$

(čísla $koef(q,-1)$ a $koef(r,-1)$ nejsou definována).

Stupeň k polynomu f_n vypočítáme $k = \max(k_0, \mathrm{st}(p_n) - l_p + 1) = \max(0, 1-0+1) = 2$.

Pak $f_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$ a řešíme rovnici $n = 1 \cdot f_n - 1 \cdot f_{n-1}$, po dosazení

$n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0 - c_2 (n-1)^2 - c_1 (n-1) - c_0$.

Zjednodušíme pravou stranu a porovnáme polynomy na obou stranách rovnice. Protože $n = 2c_2 n + (c_1 - c_2)$, je $c_2 = c_1 = \frac{1}{2}$ a $c_0 = t, t \in R$, $f_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + t$. Částečný součet s_n pak můžeme psát ve tvaru

$s_n = \frac{q_{n+1}}{p_n} a_n f_n = \frac{1 \cdot n}{n}\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + t\right) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + t$ a z počáteční podmínky $s_0 = 0$ plyne $t = 0$. Proto $s_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ a $\sum_{k=1}^{n} k = s_n - s_0 = \frac{1}{2}n\,(n+1)$.

<u>Příklad 27</u> $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$

Jest $a_n = 2n-1, a_{n-1} = 2n-3, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n-3}$, posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je hypergeometrická. Položme $p_n = 2n-1, q_n = 1, r_n = 1$. Protože $D(1, 1+j) = 1\ \forall j \in N_0$, pak vybrané polynomy p_n, q_n, r_n tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2n-1}{2n-3}$.

Protože $q_{n+1} + r_n = 2 \Rightarrow l_p = 0$, $q_{n+1} - r_n = 0 \Rightarrow l_m = -1$, $l_p > l_m$, hledáme pomocné $k_0 = 0 : 1 = 0 \in Z$, a $k = \max(0, 1-0+1) = 2$. Polynom f_n bude druhého stupně a můžeme psát $f_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Dosazením do rovnice (7) dostaneme

$2n - 1 = c_2 n^2 + c_1 n + c_0 - \left[c_2(n-1)^2 + c_1(n-1) + c_0\right]$, z čehož vyplývá soustava rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= 2c_2 \\ -1 &= c_1 - c_2 \end{aligned}$$

a odtud $c_2 = 1, c_1 = 0, c_0 = t, t \in R$. Platí $s_n = \frac{1}{2n-1} \cdot (2n-1) \cdot (n^2 + t)$, z počáteční podmínky $s_0 = 0$ plyne $t = 0$, pak $f_n = n^2$, pak $s_n = \frac{1}{2n-1}(2n-1)n^2 = n^2$ a $\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = s_n - s_0 = n^2$

5.2. Geometrické řady

Příklad 28 $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$

Je $a_n = 2^n$, $a_{n-1} = 2^{n-1}$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{2^n \cdot 2}{2^n} = 2$. Protože podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ je vyjádřen jako polynom nultého stupně, posloupnost $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická. Položíme $p_n = 1, q_n = 2, r_n = 1$ a snadno ověříme, že trojice polynomů je regulární reprezentací výše uvedeného podílu. Platí totiž $D(2,1) = 1$.

Dále $q_{n+1} + r_n = 3 \quad \Rightarrow \ l_p = 0, q_{n+1} - r_n = 1 \quad \Rightarrow \ l_m = 0$, vidíme že $l_p = l_m$ a proto stupeň k polynomu f_n bude $k = 0 - 0 = 0$.

Nechť $f_n = c_0$, pak dosazením do rovnice (7) získáme $1 = 2c_0 - c_0$ a odtud plyne $c_0 = 1$ a polynom $f_n = 1$. Částečný součet je $s_n = \frac{2}{1} \cdot 2^n \cdot 1 = 2^{n+1}$, odtud $s_0 = 2$ a můžeme psát

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = s_n - s_0 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$

Příklad 29 $\sum_{k=1}^{n} (-2)^k = \frac{2}{3}\left[(-2)^n - 1\right]$

Označme $a_n = (-2)^n$, $a_{n-1} = (-2)^{n-1}$, pak $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(-2)^n}{(-2)^{n-1}} = -2$ a proto je posloupnost $\{(-2)^k\}_{k=1}^{n}$ hypergeometrická. Nechť $p_n = 1, q_n = -2, r_n = 1$, platí $D(-2,1) = 1$, proto uvedená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

$q_{n+1} + r_n = -1 \quad \Rightarrow \ l_p = 0, q_{n+1} - r_n = -3 \quad \Rightarrow \ l_m = 0 \ \ l_p = l_m$ a stupeň k polynomu f_n je $k = 0 - 0 = 0$. Potom $f_n = c_0$ a z rovnice (7) pak plyne $1 = -2c_0 - c_0$ a $c_0 = -\frac{1}{3}$. Součet $s_n = -\frac{2}{1} \cdot (-2)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \cdot (-2)^n$ a $s_0 = \frac{2}{3}$. Potom

$$\sum_{k=1}^{n} (-2)^k = s_n - s_0 = \frac{2}{3} \cdot (-2)^n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left[(-2)^n - 1\right].$$

Příklad 30 $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},\ |q| \neq 1$ (zobecnění konečné geometrické řady)

V předchozích úlohách jsme si ukázali, jak lze sčítat konečné geometrické řady. Zkusme celý problém zobecnit. Využíváme větu pro počítání se sumami $\sum a_1 \cdot q^{k-1} = \frac{a_1}{q} \cdot \sum q^k$. Jest $a_n = q^n, a_{n-1} = q^{n-1}$, pak $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{q \cdot q^n}{q^n} = q$ a proto je posloupnost $\{q^k\}_{k=1}^n$ hypergeometrická. Nechť $p_n = 1, q_n = q, r_n = 1$, pak platí $D(q,1) = 1$ a proto uvedená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

$q_{n+1} + r_n = q + 1 \Rightarrow l_p = 0, q_{n+1} - r_{(n)} n = q - 1 \Rightarrow l_m = 0,\ l_p = l_m$ a stupeň k polynomu f_n je $k = 0 - 0 = 0$. Potom $f_n = c_0$ a z rovnice (7) pak plyne $1 = qc_0 - c_0$. Rovnice má smysl pro $q \neq 1$ a $c_0 = \frac{1}{q-1}$ a $f_n = \frac{1}{q-1}$.

Součet $s_n = \frac{q}{1} \cdot q^n \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1}$ a dále hodnota $s_{-1} = \frac{1}{q-1}$. Nakonec $\sum_{k=0}^{n} q^k = s_n - s_{-1} = \frac{q^{n+1}}{q-1} - \frac{1}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Jak jsme poznali, Gosperovým algoritmem lze sečíst libovolnou konečnou geometrickou řadu, pro kterou platí $|q| \neq 1$.

5.3. Aritmeticko-geometrické řady

Příklad 31 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Jestliže $a_n = n \cdot 2^n, a_{n-1} = \frac{2^n(n-1)}{2}$, pak $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \cdot \frac{n}{n-1}$ a posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^n$ je hypergeometrická. Regulární reprezentaci posledního podílu tvoří zřejmě trojice polynomů $p_n = n, q_n = 2, r_n = 1$. Protože polynomy q_n, r_n jsou nultého stupně, pak čísla $l_p = l_m = 0$, koeficient $k = 1 - 0 = 1$ a $f_n = c_1 n + c_0$. Ze známé rovnice (7) dostáváme $n = 2 \cdot (c_1 n + c_0) - [c_1(n-1) + c_0]$, čili $n = c_1 n + c_1 + c_0$. Proto $c_1 = 1, c_0 = -1,\ f_n = n - 1$.

Dále pro součet s_n platí $s_n = \frac{2}{n} \cdot n \cdot 2^n (n-1) = 2^{n+1}(n-1)$. Určíme $s_0 = -2$ a nakonec $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = s_n - s_0 = 2^{n+1}(n-1) + 2$. A to jsme měli dokázat.

Příklad 32 $\sum_{k=0}^{n} k \cdot q^k, \quad |q| \neq 1$ (zobecnění konečné aritmeticko-geometrické řady).

Platí $a_n = n \cdot q^n$, $a_{n-1} = (n-1)\frac{q^n}{q}$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n \cdot q^n \cdot q}{(n-1) \cdot q^n} = \frac{nq}{n-1}$, posloupnost $\{k \cdot q^k\}_{k=0}^{n}$.

Intuice napovídá položit $p_n = n, q_n = q, r_n = 1$. Platí $D(q,1) = 1 \ \forall j \in N_0$, proto uvedená trojice polynomů je regulární reprezentace podílu.

Zřejmě $q_{n+1} + r_n = q + 1$, $q_{n+1} - r_n = q - 1$, pro koeficienty platí $l_p = l_m = 0, k = 1 - 0 = 1$, pak $f(n) = c_1 n + c_0$. Dosazením do (7) vznikne rovnice $n = q(c_1 n + c_0) - [c_1(n-1) + c_0]$, po úpravě $n = n(qc_1 - c_1) + c_1 + qc_0 - c_0$. Rovnost nastane právě, když existuje řešení soustavy

$$\begin{aligned} 1 &= c_1(q-1) \\ \underline{0} &\underline{= c_1 + c_0(q-1)} \end{aligned}$$

a to je $c_1 = \frac{1}{q-1}, c_0 = -\frac{1}{(q-1)^2}$. Proto $f_n = \frac{n}{q-1} - \frac{1}{(q-1)^2}$ a pro částečný součet dostáváme $s_n = \frac{q}{n} \cdot n \cdot q^n \cdot \left(\frac{n}{q-1} - \frac{1}{(q-1)^2}\right) = q^{n+1} \cdot \left(\frac{n}{q-1} - \frac{1}{(q-1)^2}\right)$. Počáteční podmínku zapíšeme $s_{-1} = -\frac{1}{q-1} - \frac{1}{(q-1)^2}$, protože sčítáme od nuly, nikoli od 1. Nakonec vyjádříme

$$s_n - s_{-1} = \frac{n \cdot q^{n+1}}{q-1} - \frac{q^{n+1}}{(q-1)^2} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{(q-1)^2} = \frac{n \cdot q^{n+1} \cdot (q-1) - q^{n+1} + q - 1 + 1}{(q-1)^2} =$$
$$= \frac{n \cdot q^{n+1} \cdot (q-1) - q^{n+1} + q}{(q-1)^2} = q \cdot \frac{n \cdot q^n (q-1) - q^n + 1}{(q-1)^2}.$$

Pak $\sum_{k=0}^{n} k \cdot q^k = q \cdot \frac{n \cdot q^n (q-1) - q^n + 1}{(q-1)^2}, \quad |q| \neq 1$ a to znamená, že Gosperovým algoritmem lze sečíst také každou aritmeticko-geometrickou řadu.

5.4. Kombinatorické identity

Příklad 33 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Označme $a_n = n \cdot n!,\ a_{n-1} = (n-1)(n-1)!$, potom $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2}{n-1}$ a to znamená, že posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{n}$ je hypergeometrická. Regulární reprezentace podílu je zřejmě $p_n = n,\ q_n = n,\ r_n = 1,$ neboť $D(n,1) = 1$. Dále $q_{n+1} + r_n = n + 2 \Rightarrow l_p = 1$, $q_{n+1} - r_n = n \Rightarrow l_m = 1$ a pro stupeň polynomu f_n platí $k = 1 - 1 = 0$, proto $f_n = c_0$. Z rovnice (7) pak vyplývá rovnost $n = (n+1)c_0 - c_0$ a tedy $c_0 = 1$. Dosadíme do (6), $s_n = \frac{n+1}{n} \cdot n \cdot n! = (n+1)!$ a $s_0 = 1$. Výsledný součet je $s_n - s_0 = (n+1)! - 1$.

Příklad 34 $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$

$a_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},\quad a_{n-1} = \binom{n-1}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, pak

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)} \cdot \frac{2}{2} = \frac{2}{n-2}$, to značí, že můžeme v postupu pokračovat.

Položme $p_n = 1,\ q_n = n,\ r_n = n-2$. Zřejmě $D(n, n+j-2) \neq 1\ \forall j \in N_0$, právě když $j = 2$. Proto podle uvedeného algoritmu hledáme novou trojici polynomů.

Nechť $g_n = D(n, n) = n$, pak $p_n = n(n-1),\ q_n = \frac{n}{n} = 1,\ r_n = \frac{n-2}{n-2} = 1$, nyní $D(1,1) = 1$.

Provedeme ověření zachování podílu: $\frac{n(n-1)\cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdot 1} = \frac{n}{n-2} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$. Regulární reprezentaci tvoří polynomy $p_n = n(n-1),\ q_n = 1,\ r_n = 1$.

Pokračujeme hledáním koeficientu k polynomu f_n, $q_{n+1} + r_n = 2,\ q_{n+1} - r_n = 0$, pro účely Gosperova algoritmu definujeme stupeň nulového polynomu -1, proto $l_p = 0,\ l_m = -1$. Hledáme pomocné k_0 : $k_0 = (0 \cdot 1) : 1 = 0$, $coef(q,-1), coef(r,-1)$ nejsou definovány. Pak $k = \max(2 - 0 + 1, 0) = 3$ a f_n bude třetího stupně: $f_n = c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Sestavíme rovnici

$n^2 - n = c_3n^3 + c_2n^2 + c_1n + c_0 - [c_3(n-1)^3 + c_2(n-1)^2 + c_1(n-1) + c_0]$, po úpravě $n^2 - n = 3c_3n^2 + (2c_2 - 3c_3)n + c_1 - c_2 + c_3$, odtud

$$\begin{aligned} 1 &= 3c_3 \\ -1 &= 2c_2 - 3c_3 \\ 0 &= c_1 - c_2 + c_3 \end{aligned}$$

a dostáváme řešení $c_3 = \frac{1}{3}, c_2 = 0, c_1 = -\frac{1}{3}$, pak $f_n = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n$. Vyjádříme částečné součty

$s_n = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n\right) = \frac{n^3 - n}{6}$ a $s_0 = 0$, potom

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = s_n - s_0 = \frac{n^3 - n}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} = \binom{n+1}{3}.$$

5.5. Teleskopické řady

<u>Příklad 35</u> $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

S touto konečnou řadou jsme se již setkali např. v části 2.5 a součet řešili rozkladem na parciální zlomky. Nyní si ukážeme počítačový postup nalezení jejího součtu. Zřejmě platí $a_n = \frac{1}{n(n+1)}, a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}$ a podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n-1}{n+1}$, proto je posloupnost hypergeometrická. Označíme-li $p_n = 1, q_n = n-1, r_n = n+1$, pak tato trojice polynomů tvoří regulární reprezentaci podílu, protože $D(n-1, n+j+1) = 1$ pro všechna $j \in N_0$. V dalších krocích podle algoritmu směřujeme ke zjištění stupně k polynomu f_n. $q_{n+1} + r_n = 2n \Rightarrow l_p = 1, q_{n+1} - r_n = -2 \Rightarrow l_m = 0$, vychází $l_p > l_m$, proto zprvu určíme pomocné $k_0 = (-1 - (-1) + 1) : 1 = 1$ a stupeň k je tou větší hodnotou z dvojice (1, 0), tedy $k = 1$, polynom f_n je prvního stupně. Nechť $f_n = c_1n + c_0$. Dosazením do rovnice (7) dostaneme $1 = n(c_1n + c_0) - (n+1)[c_1(n-1) + c_0]$, po úpravě $1 = c_1 - c_0$. Proto $c_0 = t, t \in R$ a $c_1 = t + 1$. Z počátečních podmínek $n = 1, s_1 = \frac{1}{2}$ spočteme hodnotu parametru t. $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}[(t+1) \cdot 1 + t] \Rightarrow t = 0$, proto $f_n = n$ a nakonec $s_n = \frac{n}{n+1}$.

Příklad 36 $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$

Teleskopickou metodou snadno zjistíme součet dané řady. Nejdříve výraz rozdělíme na parciální zlomky a následně vyjádříme posloupnost částečných součtů.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!}-\frac{1}{(k+1)!}\right]=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}\right],$$

$$s_1=1-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{(1+1)!}$$

$$s_2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{(2+1)!}$$

...

$$s_n=1-\frac{1}{(n+1)!}.$$

Ověříme, že také Gosperův algoritmus dá stejný výsledek. $a_n=\frac{n}{(n+1)!}$, $a_{n-1}=\frac{n-1}{n!}$,

$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{(n-1)(n+1)}$ a regulární reprezentaci tohoto podílu zřejmě tvoří polynomy $p_n=n, q_n=1, r_n=n+1$, protože $D(1,n+j+1)=1\,\forall j\in N_0$. Z toho dále vyplývá, že $q_{n+1}+r_n=2+n\Rightarrow l_p=1$ a $q_{n+1}-r_n=-n\Rightarrow l_m=1$, a protože obě hodnoty jsou si rovny, stupeň $k=1-1=0$ a můžeme psát $f_n=c_0$. Dosazením do rovnice (7) dostaneme $n=-nc_0$, z čehož plyne $c_0=-1,\ f_n=-1$. Součet $s_n=\frac{1}{n}\frac{n}{(n+1)!}(-1)=-\frac{1}{(n+1)!}$, odtud $s_0=-1$ a konečně $\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}=s_n-s_0=1-\frac{1}{(n+1)!}$.

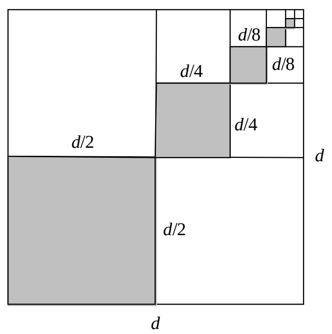
6. Gosperův algoritmus a nekonečné řady

Doposud jsme se zabývali součtem konečných řad. Maturant se ale v průběhu středoškolského studia setká také s nekonečnou řadou (především geometrickou) a limitou posloupnosti. Gosperův algoritmus tvoří základ rovněž pro sčítání vymezené skupiny nekonečných řad. Princip zůstává stejný, snažíme se najít formulaci (6) pro posloupnost $\{s_n\}$ částečných součtů a nakonec vyjádříme $\sum_{k=m}^{\infty}a_k=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{m-1})$. V této kapitole najdeme ukázky příkladů klasického a počítačového řešení nekonečných řad.

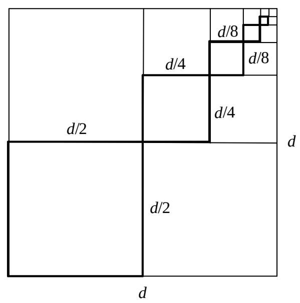
6.1. Nekonečné geometrické řady

Jak bylo již řečeno, na střední škole se nejčastěji pracuje s nekonečnou geometrickou řadou. Proto první příklady v této části jsou takto zaměřené úlohy. Ověření správnosti výsledku součtu je velmi jednoduché, stačí aplikovat známou větu o součtu nekonečné geometrické řady.

Příklad 37 Je dán čtverec o délce strany *d*, který rozdělíme na čtyři shodné čtverce a jeden z nich znovu na čtyři shodné čtverce atd. (viz obr. 16, 17). Vypočtěte součet obsahů a součet obvodů sjednocení nekonečného počtu vyznačených čtverců.



Obr. 16 – *Znázornění součtu obsahů čtverců*



Obr. 17 – *Znázornění součtu obvodů čtverců*

1) Součet obsahů všech čtverců vyjadřuje následující řada

$S=\left(\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2+\left(\frac{d}{8}\right)^2+\ldots= \;=\frac{d^2}{4}+\frac{d^2}{16}+\frac{d^2}{64}+\ldots=d^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$. Je zřejmé, že suma vyjadřuje součet nekonečné geometrické řady s prvním členem $a_1=\frac{1}{4}$ a kvocientem $q=\frac{1}{4}$. Dosazením do známého vzorce pro součet prvních *n* členů geometrické řady $s_n=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$, jestliže $|q|<1$, dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n-1}{\frac{1}{4}-1}=-\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n-1\right]=\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right].$$ Nakonec vyjádříme limitu s_n a zjistíme podle známých vět o limitách její hodnotu:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\right)=\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}1-\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}$. Pak součet $S=\frac{1}{3}d^2$.

Podívejme se, jak uvedenou sumu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ řeší Gosperův algoritmus. Jestliže $a_n=\frac{1}{2^{2n}}$, $a_{n-1}=\frac{1}{2^{2n-2}}=\frac{4}{2^{2n}}$, pak $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{4}$ a můžeme konstatovat, že posloupnost $\left\{\frac{1}{2^{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická. Hledáme regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Zvolme $p_n=1, q_n=1, r_n=4$. Zřejmě $D(1,4)=1$ a proto uvedená trojice polynomů tvoří regulární reprezentaci podílu $\frac{1}{4}$. Platí $q_{n+1}+r_n=5 \Rightarrow l_p=0$, $q_{n+1}-r_n=-3 \Rightarrow l_m=0$, $l_p=l_m$ a stupeň k polynomu f_n je $k=0-0=0$, proto položíme $f_n=c_0$. Dosazením do (7) a porovnáním dostaneme $1=c_0-4c_0$, odtud $c_0=-\frac{1}{3}$ a $f_n=-\frac{1}{3}$.

Pak $s_n=\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$. Počáteční podmínkou je $s_0=-\frac{1}{3}$, proto rozdíl $s_n-s_0=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n}}$ a $S=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-s_0)$, tedy $S=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^{2n}}\right)=\frac{1}{3}$. Došli jsme ke stejnému výsledku jako při užití vzorce pro nekonečnou geometrickou řadu.

2) Problém součtu obvodů všech takto vzniklých čtverců vyřešíme pouze Gosperovým algoritmem. Čtenáři jistě neunikne, že použitá řada je geometrická s kvocientem $q=\frac{1}{2}$, takže si správný výsledek může ověřit pomocí vzorce.

Pro součet obvodů všech čtverců platí $O=4\cdot\frac{d}{2}+4\cdot\frac{d}{4}+4\cdot\frac{d}{8}+\ldots=4d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

Označme $a_n=\frac{1}{2^n}$, $a_{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}=\frac{2}{2^n}$ a $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{2}$. Posloupnost $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická a regulární reprezentací posledního podílu je zřejmě trojice polynomů $p_n = 1, q_n = 1, r_n = 2$. Zřejmě $l_p = l_m = 0$, proto $k = 0 - 0 = 0$ a polynom f_n zapíšeme ve tvaru $f_n = c_0$. Z rovnice (7) pak vyplývá $1 = c_0 - 2c_0$, čili $c_0 = -1, f_n = -1$. Potom $s_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot (-1) = -\frac{1}{2^n}$, $s_0 = -1$ a $s_n = s_n - s_0 = 1 - \frac{1}{2^n}$. Sčítání zakončíme limitou $S = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$. Součet obvodů se pak rovná $O = 4d$.

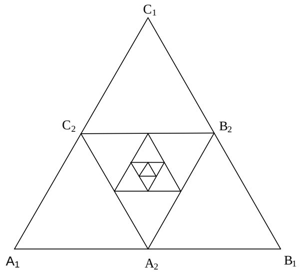
Příklad 38 Je dán rovnostranný trojúhelník[5]. Spojením středů jeho stran vznikne další trojúhelník, spojíme středy dalšího trojúhelníka atd. Vzniká tak nekonečná řada podobných trojúhelníků. Zabývejme se velikostí součtu obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků. Úlohu nám přiblíží její geometrické znázornění (viz obr. 18, 19).

Z geometrie víme, že střední příčky rozdělí každý trojúhelník na čtyři shodné trojúhelníky. To znamená, jestliže trojúhelník $A_1B_1C_1$ má obsah S_1, pak pro obsahy dalších trojúhelníků platí $A_2B_2C_2 = \frac{1}{4} A_1B_1C_1 = \frac{1}{4} S_1$, $A_3B_3C_3 = \frac{1}{4} A_2B_2C_2 = \frac{1}{16} S_1$, atd. Součet obsahů všech trojúhelníků pak vyjádříme $S_n = S_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = S_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$.

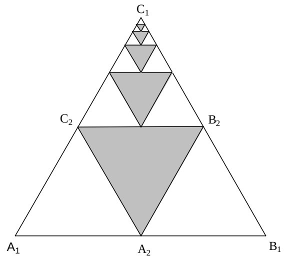
Obrázek 18 lépe ilustruje představu o konečném výsledku. Součet ploch všech prostředních trojúhelníků musí být stejný jako součet obsahů levé či pravé řady neobarvených trojúhelníků. Pokud obsah trojúhelníka $A_1B_1C_1$ je S_1, pak logicky součet vyznačených výplní musí být $\frac{1}{3} S_1$. Výsledný obsah pak bude $\left(1 + \frac{1}{3}\right) S_1 = \frac{4}{3} S_1$. Jedno z možných ověření je užitím součtu nekonečné geometrické řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}}$ s kvocientem $q = \frac{1}{4}$.

---

[5] Úlohu je možné zadat také pro obecný trojúhelník.



Obr. 18 – *Grafické znázornění Příkladu 36*

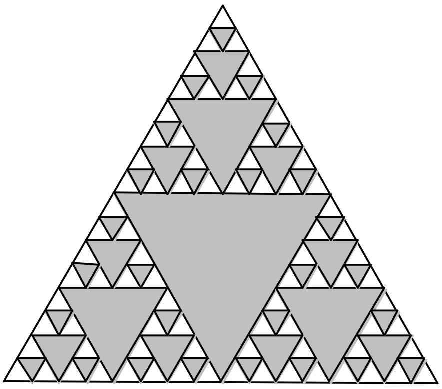


Obr. 19 – *Další možné znázornění Příkladu 36*

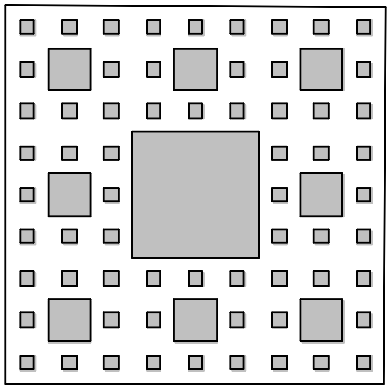
Demonstrujme správnost naší úvahy aplikací Gosperova algoritmu pro počítačové sčítání řad. Označme $a_n = \frac{4}{4^n}, a_{n-1} = \frac{16}{4^n}, \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{4}$, proto posloupnost $\left\{\frac{1}{4^{n-1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ je hypergeometrická a můžeme hledat regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Tou je zřejmě trojice polynomů $p_n = 1, q_n = 1, r_n = 4$, protože $D(1, 4) = 1$. Dále platí $q_{n+1} + r_n = 5$, $q_{n+1} - r_n = -3$, $l_p = l_m = 0$ a stupeň *k* polynomu f_n je také nulový. Nechť $f_n = c_0$, absolutní člen polynomu získáme z rovnice (7). Vychází $1 = c_0 - 4_0$, $c_0 = -\frac{1}{3}$. Pak $s_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{4^n} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3 \cdot 4^n}$ a $s_0 = -\frac{4}{3}$. Nakonec $S = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{4}{3 \cdot 4^n} + \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$, součet všech obsahů trojúhelníků je $S_n = \frac{4}{3} S_1$.

<u>Příklad 39</u> *Sierpińského trojúhelník a koberec*

Významný polský matematik 20. století *Waclaw Franciszek Sierpińsky* (14. 3. 1882 – 21. 10. 1969) v roce 1915 popsal svůj první fraktál, dnes zvaný *Sierpińského trojúhelník* (obr. 20), o rok později dnes možná ještě známější tzv. *Sierpińského koberec* (obr. 21). Podívejme se na obě množiny z pohledu nekonečných řad. Ze základního rovnostranného trojúhelníka vybíráme nekonečně mnoho podobných rovnostranných trojúhelníků tak, že původní rozdělíme středními příčkami na 4 shodné a celý proces v každém vzniklém trojúhelníku nekonečně-krát opakujeme. Jaký bude součet nekonečného počtu obsahů těchto trojúhelníků?



Obr. 20 - *Sierpińského trojúhelník*



Obr. 21 - *Sierpińského koberec*

Sierpińského koberec tvoříme následovně: základní čtverec rozdělíme čtyřmi úsečkami na devět shodných částí, opět čtverců, a obarvíme prostřední. Pak každý neobarvený čtverec dělíme znovu na devět shodných částí, označíme prostřední, atd. Jaký bude součet obsahů všech vybarvených čtverců, jestliže postup nekonečně-krát iterujeme?

Základní úvaha vede k tvrzení, že by oba součty mohly být jednotkové. Zda jsme se zmýlili, či nikoli, nám ukáže následující postup.

Označme obsah základního trojúhelníka S_Δ. Obsah největšího obarveného trojúhelníka je zřejmě $\frac{1}{4}S_\Delta$, obsah tří menších trojúhelníků $3\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}S_\Delta = 3\cdot\frac{1}{4^2}S_\Delta$, součet obsahů dalších $3^2\cdot\frac{1}{4^3}S_\Delta$ atd. Vzniká řada

$S_\Delta\left(\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{4^2}+3^2\cdot\frac{1}{4^3}+...\right)=\frac{1}{4}S_\Delta\left(1+\frac{3}{4}+\left(\frac{3}{4}\right)^2+...\right)$, kterou můžeme přepsat $\frac{1}{4}S_\Delta\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ je geometrická, s kvocientem $q=\frac{3}{4}\in\langle -1,1\rangle$, podle vzorce $s=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$. Součet obsahů nekonečného počtu vybraných trojúhelníku se rovná $S=\frac{1}{4}S_\Delta\cdot 4=S_\Delta$. To znamená, že hledaný součet je stejně velký, jako obsah základního trojúhelníka.

Dá nám stejný výsledek i počítačový postup? Pracujme s Gosperovým algoritmem. Je $a_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$, $a_{n+1} = \left(\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\right)$, pak $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3}{4}$. Posloupnost částečných součtů řady je tedy hypergeometrická. Regulární reprezentaci podílu tvoří trojice $p_n = 1, q_n = 3, r_n = 4$, neboť $D(3, 4) = 1$. Ze součtu a rozdílu polynomů q_{n+1}, r_n zjistíme, že $l_p = l_m = 0$ a polynom f_n je nulového stupně, $f_n = c_0$. Absolutní člen zjistíme s užitím (7) z rovnice $1 = 3c_0 - 4c_0$, proto platí $f_n = -1$. Dosadíme do vzorce (6) $s_n = \frac{3}{1}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot(-1) = -3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$, přičemž $s_{-1} = -3\cdot\frac{4}{3} = -4$. Pak rozdíl $s_n - s_{-1} = 4 - 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n$ a limita $S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4 - 3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 4.$ To je stejný výsledek, jaký jsme dostali užitím vzorce pro součet nekonečné geometrické řady.

Analogicky si ukážeme počítačové řešení sčítání řady, kterou používáme při hledání součtu nekonečného počtu obsahu čtverců v *Sierpińského koberci*. Opět uvažujme, že základní čtverec má obsah $S_\square$. Středový největší čtverec je zřejmě o obsahu $\frac{1}{9}\ S_\square$, skupina dalších stejně velkých čtverců zaujímá obsah $8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2$, následující $8^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3$ atd. Celkový součet pak vyjádříme

$$S_\square\left(\frac{1}{9} + 8\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + 8^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ .\ .\ .\ \right) = \frac{1}{9}S_\square\left(1 + \frac{8}{9} + \left(\frac{8}{9}\right)^2 + \ .\ .\ . + \left(\frac{8}{9}\right)^n\right) = \frac{1}{9}\ S_\square\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n.$$

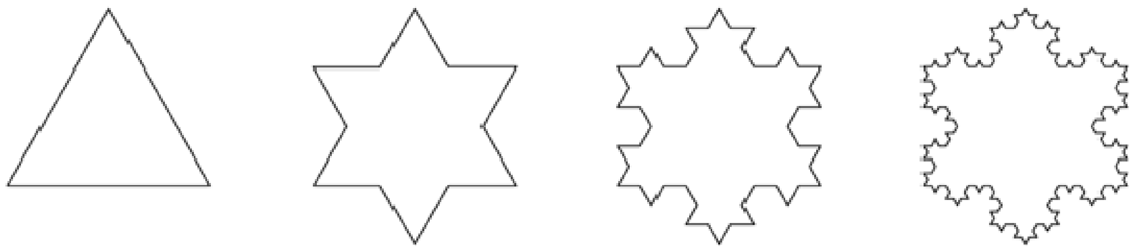
Zapsanou sumu řešíme Gosperovým algoritmem. Jestliže $a_n = \left(\frac{8}{9}\right)^n$, $a_{n-1} = \frac{9}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$, pak podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{8}{9}$ a posloupnost částečných součtů je hypergeometrická. Regulární reprezentací podílu je $p_n = 1, q_n = 8, r_n = 9$, neboť $D(8, 9) = 1$. Dále není problém ověřit, že $l_p = l_m = 0$ a polynom f_n je polynomem stupně 0. Položíme $f_n = c_0$ a číslo c_0 určíme pomocí (7), konkrétně $1 = 8c_0 - 9c_0$, odkud $c_0 = -1$. Následně $s_n = \frac{8}{1}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n\cdot(-1) = -8\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n$, $s_{-1} = -9$. A můžeme vyjádřit $S = \lim\limits_{n\to\infty}\left(9 - 8\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^n\right) = 9$.

A přesně takový výsledek jsme potřebovali, protože součet obsahů všech vybarvených čtverců je $\frac{1}{9}\ S_{\square} \cdot 9 = S_{\square}$, což přesně odpovídá našim počátečním úvahám. Součet řady lze ověřit i pomocí vzorce. Řada je nekonečná geometrická s kvocientem $\frac{8}{9}$.

<u>Příklad 40</u> *Kochova vločka*

Ukažme si ještě jeden zajímavý fraktál. Kolem roku 1904 jej publikoval ve své práci švédský matematik *Niels Fabian Helge von Koch* (25. 1. 1870 – 11. 3. 1924), po kterém se nazývá *Kochova vločka*.

Popišme, jak takovou křivku sestrojit. Základním útvarem je rovnostranný trojúhelník. Každou jeho stranu rozdělíme na třetiny a nad prostřední částí sestrojíme opět rovnostranný trojúhelník. Úsečku, nad kterou jsme sestrojili nový trojúhelník, odstraníme. Celý postup nekonečně-krát opakujeme. Obrázek 22 ukazuje několik iterací tvorby vločky.



Obr. 22 – *Vytvoření Kochovy vločky*

Je dokázáno, že křivka má nekonečnou délku, ale obsah plochy, který ohraničuje, je konečný. Uvažujme délku strany základního rovnostranného trojúhelníka *a*, jeho obvod $o_1 = 3a$. Postupujeme-li podle návodu, pak po prvním dělení má vzniklý útvar (židovská hvězda) 12 stran a každá délku $\frac{1}{3}a$, $o_2 = 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3}a = \frac{4}{3} \cdot 3a$. Po druhé iteraci je počet stran vzniklé vločky 48 a délka každé je $\frac{1}{9}a$, $o_3 = 4 \cdot 12 \cdot \frac{1}{9}a = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot 3a$. Pozorujeme, že každým dělením se počet stran předcházejícího útvaru čtyřikrát zvětší a délka třikrát zmenší. Po n iteracích dostáváme útvar s délkou hranice $o_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3a$. Posloupnost

$\left\{\frac{4}{3}\right\}_{n=0}^{\infty}$ je geometrická s kvocientem $q = \frac{4}{3} \notin \langle -1, 1 \rangle$ a proto diverguje a *Kochova vločka* má nekonečnou délku.

Předcházející poznatky využijeme při odvozování velikosti plochy, kterou křivka ohraničuje. Označme S_U obsah prvního útvaru, kterým je rovnostranný trojúhelník o délce strany *a*, obsah tohoto trojúhelníka pak vyjádříme $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Po první iteraci se plocha zvětší o obsahy tří shodných rovnostranných trojúhelníků s třetinovou délkou předcházející strany, čili $S_1 = S_U + 3 \cdot \frac{\left(\frac{a}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = S_U + 3 \cdot \frac{1}{9} S_U$, po druhém dělení připočítáváme k obsahu S_U dvanáct obsahů nově vzniklých shodných rovnostranných trojúhelníků, $S_2 = S_U + 12 \cdot \frac{\left(\frac{a}{9}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = S_U + 12 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 S_U = S_U + 3 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 S_U$, po třetím je obsah plochy, kterou ohraničuje křivka

$S_3 = S_U + 48 \cdot \frac{\left(\frac{a}{27}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = S_U + 48 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 S_U = S_U + 3 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 S_U$ atd., až po n - tém dělení dostaneme vzorec pro obsah

$S_n = S_U + 3 \cdot 4^{n-1} \cdot \frac{\left(\frac{a}{3^n}\right)^2}{4} = S_U + \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n S_U$. Abychom zjistili konečnou hodnotu obsahu po nekonečně mnoha iteracích, je třeba vypočítat součet konečného přírůstku obsahů, tedy součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n$. Řada je geometrická s kvocientem $\frac{4}{9} \in \langle -1, 1 \rangle$, je zřejmé, že ji lze sečíst. Součet najdeme Gosperovým algoritmem. Nechť $a_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n$, $a_{n-1} = \frac{9}{4} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$, potom $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{4}{9}$ a posloupnost částečných součtů je zřejmě hypergeometrická. Trojice polynomů $p_n = 1, q_n = 4, r_n = 9$ je regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, neboť $D(4, 9) = 1$. Velice snadno lze ověřit, že polynom $f_n = c_0$ bude nulového stupně. Určíme jeho absolutní člen z rovnice $1 = 4c_0 - 9c_0$, je $c_0 = -\frac{1}{5}$. Pak

$s_n = \frac{4}{1} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n$ a $s_0 = -\frac{4}{5}$. Součet S řady vypočítáme jako $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{5} - \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = \frac{4}{5}$. Ke stejnému výsledku dojdeme užitím součtu nekonečné geometrické řady.

Celkový obsah plochy, kterou ohraničuje *Kochova vločka* po nekonečném počtu iterací je $S_U\left(1 + \frac{3}{4} \cdot \sum_{n=}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right) = S_U\left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} S_U$ a dosadíme-li za S_U vzorec pro obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a, dostáváme velikost konečného obsahu $\frac{8}{5} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{5}$.

Obr. 23 - ***Waclaw Franciszek Sierpińsky***

Obr. 24 - ***Niels Fabian Helge von Koch***

<u>Příklad 41</u> $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = \frac{e^2}{1-e^2}$

Jest $a_n = e^{-2n}$, $a_{n-1} = e^{-2n} \cdot e^2$, $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{e^{-2n}}{e^{-2n} \cdot e^2} = \frac{1}{e^2}$, což je současně i kvocient řady. Posloupnost $\{a_n\}$ je hypergeometrická a můžeme pokračovat. Položme

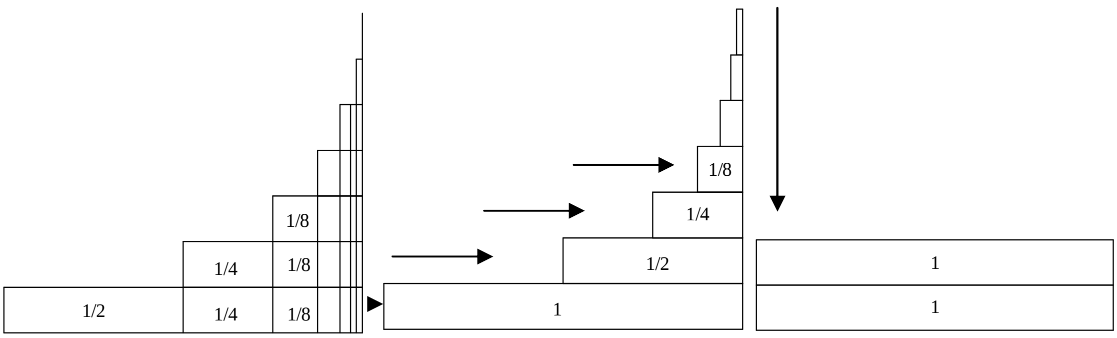
$p_n = 1, q_n = \frac{1}{e^2}, r_n = 1$. Protože $D\left(\frac{1}{e^2}, 1\right) = 1$, pak trojice polynomů je regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Dále $q(n+1) + r(n) = e^{-2} + 1, q(n+1) - r(n) = e^{-1} - 1$ a proto koeficienty l_p a l_m jsou nulové, tudíž $k = 0$ a $f_n = c_0$. Ze vztahu (7) vytvoříme rovnici $1 = e^{-2}c_0 - c_0$, po úpravě $1 = c_0\left(\frac{1}{e^2} - 1\right)$, odtud $c_0 = \frac{1-e^2}{e^2} = f_n$. Následně $s_n = \frac{1}{e^2} \cdot e^{-2n} \cdot \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{e^{-2n}}{1-e^2}$ a počáteční podmínka $s_{-1} = \frac{e^2}{1-e^2}$, pak $s_n - s_{-1} = \frac{e^{-2n}}{1-e^2} - \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{1}{e^{2n}(1-e^2)} - \frac{e^2}{1-e^2}$.

Nakonec $S = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2n}(1-e^2)} - \frac{e^2}{1-e^2}\right) = -\frac{e^2}{e^2-1} = \frac{e^2}{1-e^2}$, což je snadné ověřit pomocí známého vzorce.

6.2. Další nekonečné řady

<u>Příklad 42</u> Kolem roku 1350 řešil francouzský matematik *Nicole Oresme* (obr. 25) (přibližně 1323 – 1382), známý především díky důkazu divergence harmonické řady, součet následující nekonečné řady $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. K nalezení výsledku mu posloužilo geometrické znázornění (viz obr. 26).

Obr. 25 - ***N. Oresme***



Obr. 26 – *Geometrická interpretace součtu řady* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Oresme uspořádal posloupnost čísel nejdříve do sloupců, pak znázornil vodorovný součet každého jejich řádku a nakonec svislý součet od konce ke druhému členu. Došel tak k závěru, že $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=2$. To znamená, že konečná plocha se rozprostře do nekonečného počtu (v tomto případě) obdélníkových bloků.

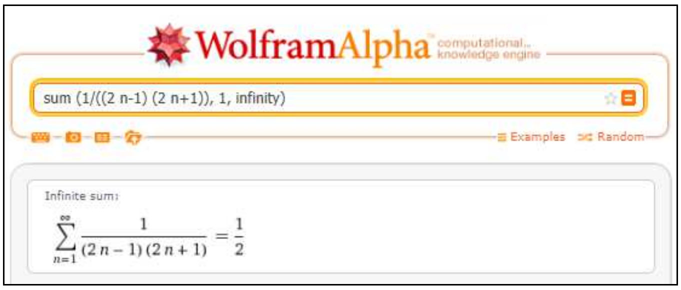
Ukažme si, jak obstojí Gosperův algoritmus.

Označme $a_n=\frac{n}{2^n}$, $a_{n-1}=\frac{n-1}{2^{n-1}}=\frac{2(n-1)}{2^n}$. Potom $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{2(n-1)}$, to znamená, že posloupnost je hypergeometrická a můžeme hledat regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Tou je zřejmě trojice polynomů $p_n=n, q_n=1, r_n=2$. Součet i rozdíl polynomů q_{n+1}, r_n je polynom nultého stupně a stupeň k hledaného polynomu f_n určíme takto $k=\mathrm{st}(p_n)-\mathrm{st}(q_{n+1}+r_n)=1-0=1$, pak $f_n=c_1n+c_0$. Dále dosadíme do rovnice (7) a dostaneme $n=c_1n+c_0-2[c_1(n-1)+c_0]$, po úpravě $n=-c_1n+2c_1-c_0$. Z rovnosti plyne $1=-c_1$, $0=2c_1-c_0$,odtud $c_1=-1, c_0=-2$. Pak $f_n=-n-2$. Doplníme rovnici (6) $s_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2^n}\cdot(-n-2)=\frac{-n-2}{2^n}$, dále $s_0=-2$ a nakonec $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_0)=$ $=\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{n+2}{2^n}\right)=2$, což jsme chtěli dokázat.

Příklad 43 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}}{\frac{1}{(2n-3)(2n+1)}}=\frac{2n-3}{2n+1}$ je racionální funkce, snažíme se jej přepsat v šikovnějším tvaru. Položíme $p_n=1, q_n=2n-3, r_n=2n+1$. Zkoumejme $D(2n-3, 2(n+j)+1)$. Ten bude roven jedné, právě když $2j+1=-3$ a to nastane pro $j=-2\notin N_0$, proto uvedená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu. Určíme stupeň k polynomu f_n. Platí $q_{n+1}+r_n=4n$, $q_{n+1}-r_n=-2$, proto $l_p=1, l_m=0, l_p>l_m$ a podle teorie musíme najít pomocné k_0. $k_0=[-1\cdot 2-(-3)+1]:2=1\in Z$, potom

$k = \max(1, 0-1+1) = 1$. Nechť $f_n = c_1 n + c_0$. Z rovnice (7) následně plyne $1 = (2n-1)(c_1 n + c_0) - (2n+1)[c_1(n-1) + c_0]$ a odtud $1 = c_1 - 2c_0$. Dále je třeba provést parametrizaci. Položme $c_0 = t, t \in R$, pak $c_1 = 1 + 2t$ a polynom $f_n = (1+2t)n + t$. Podle formule (6) dostaneme $s_n = \frac{2n-1}{1} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}[(1+2t)n + t] = \frac{(1+2t)n+t}{2n+1}$. Porovná-ním s počáteční podmínkou pro $n = 1$, kdy $s_1 = \frac{1}{3}$ vychází hodnota parametru $t = 0$. Potom koeficienty $c_0 = 0, c_1 = 1$ a hledaný polynom $f_n = n$, posloupnost částečných součtů $s_n = \frac{n}{2n+1}$ a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}(s_n - s_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$. K ověření výsledku použijeme např. volně dostupný interaktivní engine *Wolfram Alpha*.



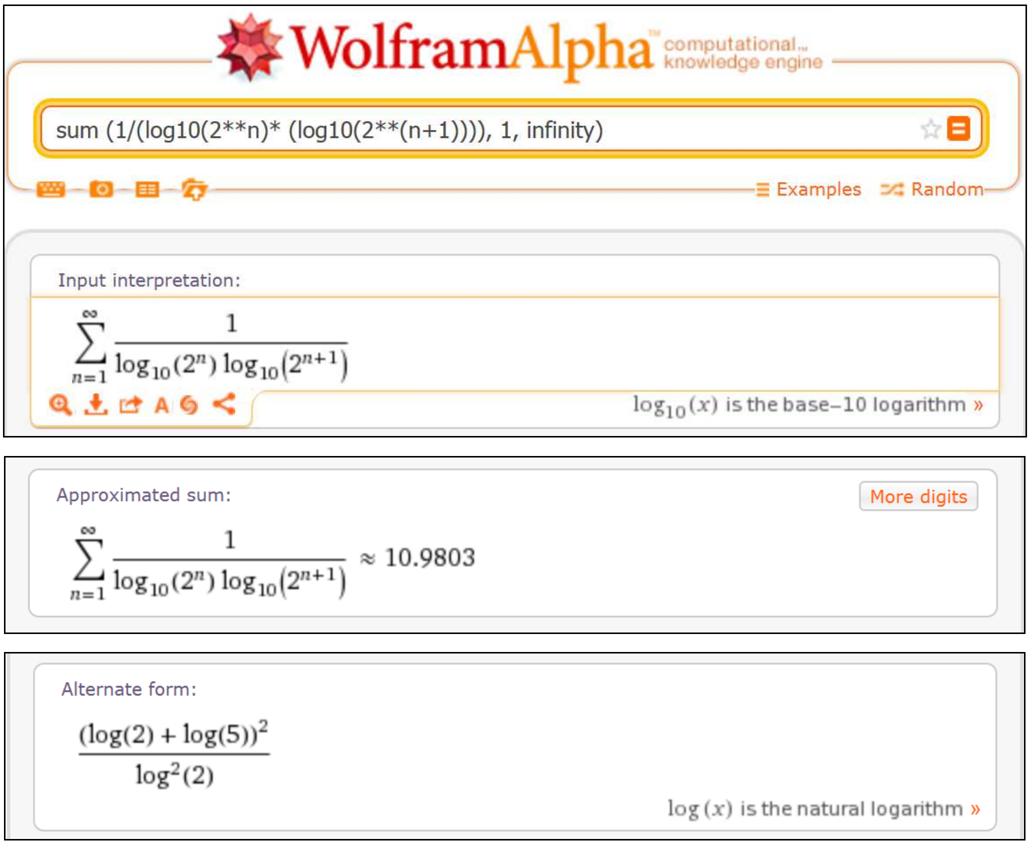
Obr. 27 – *Ověření součtu řady prostředím Wolfram Alpha*

<u>Příklad 44</u> $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}}$

Vyjádříme $a_n = \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)\log^2 2}$, $a_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)\log^2 2}$,

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n(n-1)\log^2 2}{n(n+1)\log^2 2} = \frac{n-1}{n+1}$, posloupnost $\{a_n\}$ je hypergeometrická. Položíme-li $p_n = 1, q_n = n-1, r_n = n+1$, potom $D(n-1, n+j+1) = 1 \Leftrightarrow j = -2 \notin N_0$, to je důkaz, že jsme našli regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Dále zřejmě platí $q_{n+1} + r_n = n + n + 1 = 2n+1, q_{n+1} - r_n = n - n - 1 = -1$, což znamená, že koeficienty $l_p = 1, l_m = 0$ a rovněž platí $l_p > l_m$, proto $k_0 = [-1 \cdot 1 - (-1) + 1] : 1 = 1$ a $k = \max(1, 0-1+1) = 1$. Polynom $f_n = c_1 n + c_0$. Substitucí do (7) vznikne rovnice

$1 = n(c_1 n + c_0) - (n+1)[c_1(n-1) + c_0]$, ze které vyplývá $1 = c_1 - c_0$. Řešením je $[c_1, c_0] = [1+t, t]$, kde $t \in R$. Pak $f_n = (1+t)n + t$. Dosadíme do (6) $s_n = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}} \cdot [(1+t)n + t] = \frac{(1+t)n^2 + tn}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}}$. Využijeme počáteční podmínku k určení parametru z rovnice $\frac{1}{2\log^2 2} = \frac{1+t+t}{\log 2 \cdot \log 2^2}$. Z ní vychází $t = 0$. Pak $c_1 = 1, c_0 = 0$ a polynom $f_n = n$, $s_n = \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n(n+1)\log^2 2} \cdot n = \frac{n}{(n+1)\log^2 2}$, $s_0 = 0$ a nakonec $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(n+1)\log^2 2} = \frac{1}{\log^2 2}$. Doložíme výsledek, ke kterému došel počítač.



Obr. 28 – *Alternativní výsledky součtu řady užitím Wolfram Alpha*

Zvolený program nám nejdříve nabídne aproximaci výsledku sčítání zadané řady, níže pak nabídne alternativní výsledek vyjádřený pomocí přirozeného logaritmu. Na základě vět pro počítání s logaritmy snadno dokážeme, že náš výsledek je ekvivalentní s počítačovým.

$$\frac{1}{\log^2 2} = \frac{1}{\left(\frac{\ln 2}{\ln 10}\right)^2} = \frac{\ln^2 10}{\ln^2 2} = \frac{[\ln(2\cdot 5)]^2}{\ln^2 2} = \frac{(\ln 2 + \ln 5)^2}{\ln^2 2}$$, což bylo dokázáno.

7. Gosperovsky nesčitatelné řady

V kapitole 4 jsme diskutovali možnosti výsledků jednotlivých kroků Gosperova algoritmu. Pokusme se shrnout případy, kdy může dojít k jeho selhání při hledání součtu řady. Hlavním předpokladem je, aby posloupnost $\{a_k\}_{k=m}^{n}$ byla hypergeometrická. Jak jsme si ukázali, v případě záporného výsledku při výpočtu stupně k polynomu f_n proces končí a řadu opět nelze takto sečíst. Je to proto, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ není hypergeometrická, což připouští i věta 2. Může nastat i případ, že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ není hypergeometrická a přesto vyjde $k \geq 0$. Pak se ale ukáže, že soustava rovnic vyplývající z porovnání koeficientů u $n^0, n^1, n^2, ...n^i$ v rovnici $p_n = q_{n+1} f_n - r_n f_{n-1}$ nemá řešení. Jednotlivé situace doložíme příklady.

Příklad 45 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k+1}$

Označme $a_n = \dfrac{2^n}{n+1}$, $a_{n-1} = \dfrac{2^{n-1}}{n-1+1} = \dfrac{2^n}{2n}$, zřejmě $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{2n}{n+1}$, řada je hypergeometrická. Položíme-li $p(n) = 1, q(n) = 2n, r(n) = n+1$, pak máme regulární reprezentaci podílu, neboť $D(2n, n+1+j) = 1\ \forall j \in N_0$.

$q(n+1) + r(n) = 2n + 2 + n + 1 = 3n + 3 \Rightarrow l_p = 1$

$q(n+1) - r(n) = 2n + 2 - n - 1 = n + 1 \Rightarrow l_m = 1$

Protože se obě poslední hodnoty rovnají, $k = 0 - 1 = -1 < 0$, polynom $f(n)$ neexistuje a řada není gosperovsky sčitatelná.

Příklad 46 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

Začínáme řadou, jejíž součet lze najít teleskopickou metodou. Pro ni je třeba vzorec pro n-tý člen posloupnosti rozložit na parciální zlomky.

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n^2}+\frac{C}{n+1}+\frac{D}{(n+1)^2}$$
$$2n+1=An^2(n^2+1)+B(n+1)^2+Cn^2(n+1)+Dn^2$$
$$2n+1=An^4+2An^3+An^2+Bn^2+2Bn+B+Cn^3+Cn^2+Dn^2$$
$$A=0$$
$$2A+C=0$$
$$A+B+C+D=0$$
$$2B=2$$

Odtud plyne, že $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. Sledujme posloupnost částečných součtů:

$$s_1=1-\frac{1}{4}=1-\frac{1}{(1+1)^2}$$
$$s_2=1-\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)=1-\frac{1}{(2+1)^2}$$
...
$$s_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

Hypoteticky odvozený vzorec pro s_n bychom dokázali matematickou indukcí. Nás ale zajímá, zda tuto teleskopickou řadu sečte Gosperův algoritmus.

Položme $a_n=\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, potom $a_{n-1}=\frac{2n-1}{(n-1)^2n^2}$, podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(n-1)^2(2n+1)}{(n+1)^2(2n-1)}$ a proto je posloupnost hypergeometrická. Položme

$p_n=2n-1, q_n=(n-1)^2, r_n=(n+1)^2$ a ukažme si, že uvedená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$. Potřebujeme zjistit

$D(q_n, r_{n+j})=D(n^2-2n+1, (n+j)^2+2(n+j)+1)$, po úpravě dostáváme

$D(n^2-2n+1, n^2+2n(j+1)+j^2+2j+1)=D\left((n-1)^2, n^2+2n(j+1)+j^2+2j+1\right)$. Je vidět, že největší společný dělitel bude různý od jedné právě tehdy, když $n-1$ dělí také druhý polynom, tj. číslo 1 je jeho kořenem (pro jisté j). Pro toto j ale platí $1+2(j+1)+(j+1)^2=0$, což nastane právě pro $j=-2$. Odtud plyne, že pro všechna $j\in N_0$ je $D(q_n, r_{n+j})=1$ a uvedená trojice polynomů skutečně tvoří regulární reprezentaci podílu.

Pokračujeme podle sčítacího algoritmu:

$q_{n+1} + r_n = 2n^2 + 2n + 1 \Rightarrow l_p = 2$

$q_{n+1} - r_n = -2n - 1 \Rightarrow l_m = 1$

$l_p > l_m$, pomocné $k_0 = (-2\cdot 1 - (-2) + 2) : 2 = 1 \in Z$, proto $k = \max(1, 1-2+1) = 1$. Nechť $f_n = c_1 n + c_0$. Z rovnice (7) plyne

$2n - 1 = n^2(c_1 n + c_0) - (n+1)^2[c_1(n-1) + c_0]$, po úpravě

$2n - 1 = -c_1 n^2 + n(c_1 - 2c_0) + c_1 - c_0$. Porovnáním koeficientů polynomů obou stran dostaneme soustavu tří rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} 0 &= -c_1 \\ 2 &= c_1 - 2c_0 \\ -1 &= c_1 - c_0 \end{aligned}$$

a snadno zjistíme, že nemá řešení. Z prvních dvou rovnic vychází $c_1 = 0, c_0 = -1$, ale po dosazení do třetí vyjde nesprávná rovnost $-1 = 1$. Proto řada není gosperovsky sčitatelná.

Příklad 47 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^{k-1}} = 5 \ln \frac{5}{4}$

Podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{5}{n\cdot 5^n}}{\frac{25}{(n-1)\cdot 5^n}} = \frac{n-1}{5n}$ je racionální funkcí, najdeme jeho regulární reprezentaci. Položíme-li $p_n = 1, q_n = n-1, r_n = 5n$, pak uvedená trojice polynomů je zřejmě hledanou regulární reprezentací podílu, protože platí $D(n-1, 5(n+j)) = 1\ \forall j \in N_0$. Pokračujeme určením stupně k polynomu f_n. Platí $q_{n+1} + r_n = 6n, q_{n+1} - r_n = -4n$, proto $l_p = l_m = 1$. Pak stupeň $k = 0 - 1 = -1 < 0$, to znamená, že polynom f_n požadovaných vlastností neexistuje, posloupnost částečných součtů $\{s_n\}$ není hypergeometrická a řadu nelze uvedeným algoritmem sečíst.

Příklad 48 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k!} = 15e$

Po zjednodušení dostáváme podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^4}{n(n-1)^4} = \frac{n^3}{(n-1)(n-1)^3}$, což potvrzuje, že je racionální funkcí. Snadno odhadneme a následně ověříme, že regulární reprezentací tohoto podílu jsou polynomy $p_n = n^3, q_n = 1, r_n = n-1$, platí $D(1, n-1+j) = 1\ \forall j \in N_0$. Následně určíme $q_{n+1} + r_n = n$, $q_{n-1} - r_n = 2-n$, z čehož plyne $l_p = l_m = 1$. Pak $k = 3-1 = 2$, to značí, že polynom f_n by mohl existovat a bude druhého stupně. Označme $f_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Dosadíme do rovnice (7):

$n^3 = n^2 + c_1 n + c_0 - (n-1)\left[c_2 (n-1)^2 + c_1 (n-1) + c_0\right]$, po úpravě

$n^3 = -c_2 n^3 + n^2 (4c_2 - c_1) + n(3c_1 - c_0 - 3c_2) + (2c_0 - c_1 + c_2)$, odkud sestavíme soustavu čtyř rovnic

$$\begin{aligned} 1 &= -c_2 \\ 0 &= 4c_2 - c_1 \\ 0 &= -3c_2 + 3c_1 - c_0 \\ \underline{0} &\underline{= c_2 - c_1 + 2c_0} \end{aligned}$$

a zjistíme, že z první trojice určíme hodnoty $c_2 = -1, c_1 = -4, c_0 = -9$, ale tyto nevyhovují té poslední, vychází $0 \neq 15$. Čili soustava nemá řešení a proto řada není gosperovsky sčitatelná.

V obou posledních příkladech jsou uvedeny také výsledky součtu řad a ty lze ověřit například pomocí počítače. Jak už bylo řečeno, Gosperův algoritmus není jediný, se kterým programy počítačové algebry pracují.

8. Složitější příklady sčítání číselných řad Gosperovým algoritmem

V této části uvádíme několik řešených složitějších příkladů sčítání řad, o jejichž konvergenci se můžeme přesvědčit buď aplikací vhodného kriteria, nebo rychleji užitím některého ze specializovaných programů. Kapitola obsahuje také řady, při jejichž sčítání klasické metody selhaly (u nich není v zadání uveden výsledek), jako ukázka situace, kdy počítač překonal lidské schopnosti. Při hledání největšího společného dělitele polynomů se zpravidla už neobejdeme bez rezultantu polynomů. Výpočty usnadní počítač.

8.1. Konečné řady

<u>Příklad 49</u> $\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot k!}{n^k}\binom{n}{k} = n$

Z užitečných důvodů budeme nejprve pracovat s *k*-tým a *k*-1-ním členem, a sice proto, že vzorec pro *k*-tý člen obsahuje horní mez součtu, tedy *n*, a při počítání by mohlo dojít k záměně.

$$a_k = \frac{k \cdot k!}{n^k}\binom{n}{k} = \frac{k \cdot k!}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{k}{n^k}\frac{n!}{(n-k)!},$$

$$a_{k-1} = \frac{(k-1)\cdot(k-1)!}{n^{k-1}}\binom{n}{k-1} = \frac{(k-1)\cdot(k-1)!}{n^{k-1}}\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{k-1}{n^{k-1}}\frac{n!}{(n-k+1)!},$$

$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{k \cdot n! n^{k-1} \cdot (n-k+1)!}{(k-1)\cdot n! n^k \cdot (n-k)!} = \frac{k}{k-1}\frac{(n-k+1)(n-k)!}{n(n-k)!} = \frac{k}{k-1}\cdot\frac{n-k+1}{n}$. Z takto vyjádřeného podílu se nabízí označit $p_k = k, q_k = n-k+1, r_k = n$. Zřejmě $D(n-k+1, n+j) = 1\ \forall j \in N_0$ a uvedená trojice je regulární reprezentací daného podílu. Následuje nalezení stupně polynomu f_k. Opět z jistých příčin označme stupeň tohoto polynomu *h*. Platí $q_{k+1} + r_k = -k + 2n + 1$ a číslo $l_p = 1$, $q_{k+1} - r_k = -k + 1 \Rightarrow l_m = 1$. A protože $l_p = l_m$, pak $h = 0$ a polynom $f_k = c_0$. Sestavíme analogickou rovnici k (7): $k = (n-k-1+1)c_0 - nc_0$, po úpravě $k = -kc_0$ a to znamená, že $c_0 = -1$. Vyjádříme podle (6) částečný *k*-tý součet

$s_k = \frac{n-k-1+1}{k}\cdot\frac{k \cdot k!}{n^k}\binom{n}{k}\cdot(-1) = \frac{n-k}{n^k}\cdot\frac{n!}{(n-k)!}\cdot(-1)$. Nyní dosadíme za $k = n$ a $k = 0$ a vyjádříme $s_n = \frac{n-n}{n^n}\frac{n!}{0!}(-1) = 0$, $s_0 = \frac{n}{n^0}\frac{n!}{n!}(-1) = -n$, a $\sum_{k=1}^{n}\frac{k \cdot k!}{n^k}\binom{n}{k} = s_n - s_0 = n$.

<u>Příklad 50</u> $\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2-2k-1}{k^2(k+1)^2}\cdot 2^k$

Platí $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}\cdot 2^n}{\frac{(n-1)^2-2(n-1)-1}{(n-1)^2 n^2}\cdot 2^{n-1}} = \frac{2(n-1)^2(n^2-2n-1)}{(n+1)^2(n^2-4n+2)}$ a to je racionální funkce.

Odhad napovídá položit $p_n = n^2-2n-1, q_n = 2(n-1)^2, r_n = (n+1)^2$. Vyjádříme rezultant polynomů

$$= res_n\left[2n^2-4n+2,(n+j)^2+2(n+j)+1\right]=\left[2n^2-4n+2,n^2+n(2j+2)+j^2+2j+1\right]=$$

$$=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2j+2 & j^2+2j+1 & 0 \\ 0 & 1 & 2j+2 & j^2+2j+1 \end{vmatrix}=4j^4+32j^3+96j^2+128j+64=4(j+2)^4$$

a platí $res_n=0 \Leftrightarrow j=-2\notin N_0$, proto uvedená trojice polynomů p_n, q_n, r_n tvoří regulární reprezentaci podílu $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$. Pokračujeme $q_{n+1}+r_n=3n^2+2n+1, q_{n+1}-r_n=n^2-2n-1$, proto $l_p=2, l_m=2$, $k=0$, položíme $f_n=c_0$. Dosadíme do (7)

$n^2-2n-1=(2n^2+4n+2-4n-4+2)c_0-(n^2+2n+1)c_0$, po úpravě

$n^2-2n-1=n^2c_0-2nc_0-c_0$. Rovnost nastane, právě když

$$\begin{aligned} 1&=c_0 \\ -2&=-2c_0 \\ -1&=-c_0 \end{aligned}$$

z čehož plyne $c_0=1$, pak $f_n=1$ je konstantní polynom. Dopočítáme $s_n=\dfrac{2n^2}{n^2-2n-1}\cdot\dfrac{n^2-2n-1}{n^2(n+1)^2}\cdot 2^n\cdot 1=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}$, sčítáme od $n=1$, takže $s_0=2$. Potom $s_n-s_0=\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^2}-2$ a jelikož poslední sčítanec řady není n-tý, ale (n-1)-ní, výsledný součet vyjádříme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^2-2k-1}{k^2(k+1)^2}\cdot 2^k=\frac{2^{n-1+1}}{(n-1+1)^2}-2=\frac{2^n}{n^2}-2$. Stejný výsledek poskytne i počítač.

Obr. 29 – *Výsledek sčítání provedeného počítačem*

Příklad 51 $\sum_{k=4}^{n} \frac{4(1-k)(k^2-2k-1)}{k^2(k+1)^2(k-2)^2(k-3)^2}$

Vyjádříme a_n, a_{n-1} a následně jejich podíl.

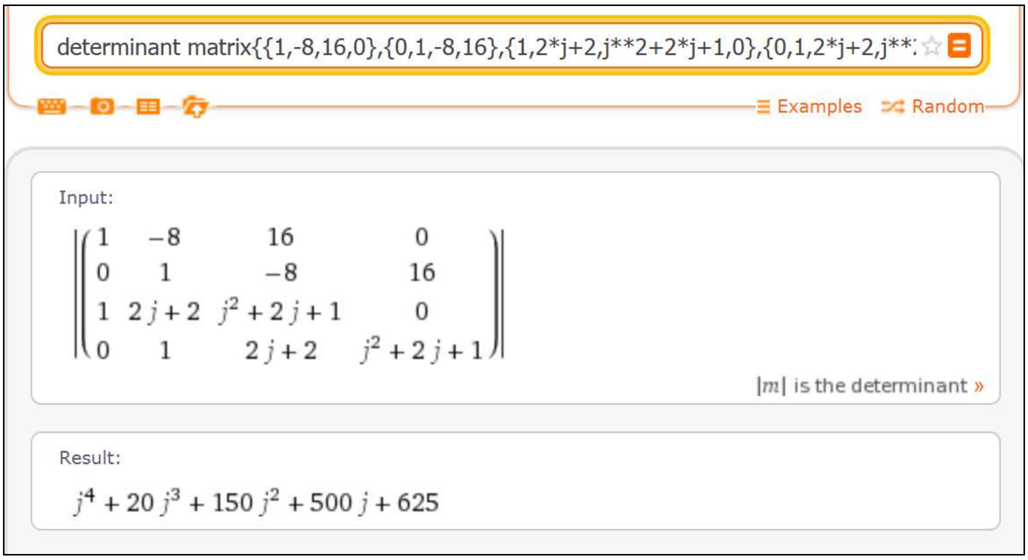
$$a_n = \frac{4(1-n)(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2(n-2)^2(n-3)^2} = \frac{-4(n-1)(n^2-2n-1)}{n^2(n+1)^2(n-2)^2(n-3)^2}$$

$$a_{n-1} = \frac{4(2-n)(n^2-4n-2)}{(n-1)^2 n^2(n-3)^2(n-4)^2} = \frac{-4(n-2)(n^2-4n-2)}{(n-1)^2 n^2(n-3)^2(n-4)^2}$$

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-4)^2(n-1)^3(n^2-2n-1)}{(n+1)^2(n-2)^3(n^2-4n-2)}$, to dokazuje, že posloupnost je hypergeometrická. Výše upravený podíl nám nabízí trojici polynomů $p_n = (n-1)^3(n^2-2n-1)$, $q_n = (n-4)^2$ a $r_n = (n+1)^2$ a můžeme vyzkoušet, zda tvoří jeho regulární reprezentaci. Chceme vyjádřit rezultant

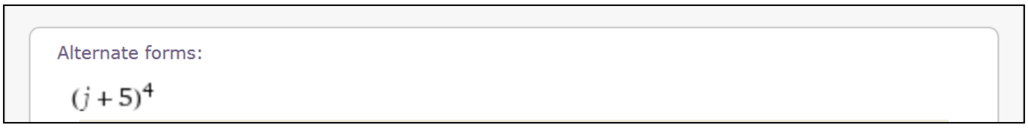
$$res\left(n^2-8n+16, (n+j)^2+2(n+j)+1\right) = res\left(n^2-8n+16, n^2+n(2j+2)+j^2+2j+1\right).$$

Sledujme dále počítačový postup řešení. Práci si zjednodušíme využitím interaktivního nástroje *Wolfram Alpha* a komerčního programu *Maple*. Rezultantem polynomů rozumíme determinant Sylvesterovy matice, obr. 30.



Obr. 30 – *Determinant vyjádřený nástrojem Wolfram Alpha*

Využijeme nabídky prostředí *Wolfram Alpha*, který hned nabídne alternativní formu výsledku. Automaticky faktorizoval výsledný polynom, obr. 31.



Obr. 31 – *Faktorizovaná podoba determinantu*

V tuto chvíli je jasné, že $res_n = 0 \Leftrightarrow j = -5 \notin N_0$ a proto původně zvolená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu.

Stanovíme koeficienty l_p a l_m. Platí

$q_{n+1} + r_n = (n-3)^2 + (n+1)^2 = 2n^2 - 4n + 10 \Rightarrow l_p = 2$, $q_{n+1} - r_n = -8n + 8 \Rightarrow l_m = 1$, $l_p > l_m$, proto stanovíme pomocné $k_0 = [-2 \cdot 1 - (-8) + 2] : 1 = 8$. Stupeň $k = \max(8, 5-2+1) = 8$, hledaný polynom bude osmého stupně. Nechť $f_n = c_8 n^8 + c_7 n^7 + c_6 n^6 + c_5 n^5 + c_4 n^4 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Dosadíme do (7) a opět s využitím softwaru rovnici zjednodušíme a soustavu vyřešíme pomocí programu *Maple* . Příkazem *expand* roznásobíme kořenové činitele polynomu, *sort* seřadí členy polynomu sestupně, rozložení polynomu na součin kořenových činitelů zajistí *factor* a nakonec zadáme programu soustavu řešit příkazem *solve*.

```
> expand(n^5-5*n^4+8*n^3-4*n^2-n+1=(n^2-6*n+9)*(c8*n^8+c7*n^7+c6*n^6+c5*n^5+c4*n^4+c3*n^3+c2*n^2+c1*n+c0)-(n^2+2*n+1)*(c8*(n-1)^8+c7*(n-1)^7+c6*(n-1)^6+c5*(n-1)^5+c4*(n-1)^4+c3*(n-1)^3+c2*(n-1)^2+c1*(n-1)+c0));
```

$$n^5 - 5n^4 + 8n^3 - 4n^2 - n + 1 = -4\,c8\,n^8 + c7\,n^7 - 2\,c6\,n^7 + 8\,c8\,n^7 + 5\,c6\,n^6 + 14\,c8\,n^6 + c4\,n^2 + c5\,n^2 - c3\,n - 3\,c5\,n^6 - 4\,c4\,n^5 + 8\,c5\,n^5 - 4\,c6\,n^5 + 14\,c7\,n^5 - 28\,c8\,n^5 - 5\,c3\,n^4 + 10\,c4\,n^4 - 5\,c5\,n^4 + 10\,c6\,n^4 - 14\,c7\,n^4 + 14\,c8\,n^4 - 6\,c2\,n^3 + 11\,c3\,n^3 - 4\,c4\,n^3 + 5\,c5\,n^3 - 4\,c6\,n^3 + 8\,c8\,n^3 - 7\,c1\,n^2 + 11\,c2\,n^2 - 2\,c3\,n^2 - 4\,c6\,n^2 + 8\,c7\,n^2 - 13\,c8\,n^2 - 8\,c0\,n + 10\,c1\,n + 2\,c4\,n - 3\,c5\,n + 4\,c6\,n - 5\,c7\,n + 6\,c8\,n - c7\,n^8 + c7 - c8 - c6 + c5 - c4 + c3 - c2 + c1 + 8\,c0$$

```
> sort(%);
```

$$n^5 - 5n^4 + 8n^3 - 4n^2 - n + 1 = -c7\,n^8 - 4\,c8\,n^8 - 2\,c6\,n^7 + c7\,n^7 + 8\,c8\,n^7 - 3\,c5\,n^6 + 5\,c6\,n^6 + 14\,c8\,n^6 - 4\,c4\,n^5 + 8\,c5\,n^5 - 4\,c6\,n^5 + 14\,c7\,n^5 - 28\,c8\,n^5 - 5\,c3\,n^4 + 10\,c4\,n^4 - 5\,c5\,n^4 + 10\,c6\,n^4 - 14\,c7\,n^4 + 14\,c8\,n^4 - 6\,c2\,n^3 + 11\,c3\,n^3 - 4\,c4\,n^3 + 5\,c5\,n^3 - 4\,c6\,n^3 + 8\,c8\,n^3 - 7\,c1\,n^2 + 11\,c2\,n^2 - 2\,c3\,n^2 + c4\,n^2 + c5\,n^2 - 4\,c6\,n^2 + 8\,c7\,n^2 - 13\,c8\,n^2 - 8\,c0\,n + 10\,c1\,n - c3\,n + 2\,c4\,n - 3\,c5\,n + 4\,c6\,n - 5\,c7\,n + 6\,c8\,n + 8\,c0 + c1 - c2 + c3 - c4 + c5 - c6 + c7 - c8$$

```
> factor(-c7*n^8-4*c8*n^8);
```

$$-n^8 (c7 + 4\ c8)$$

```
> factor(-2*c6*n^7+c7*n^7+8*c8*n^7);
```

$$-n^7 (2\ c6 - c7 - 8\ c8)$$

```
> factor(-3*c5*n^6+5*c6*n^6+14*c8*n^6);
```

$$-n^6 (3\ c5 - 5\ c6 - 14\ c8)$$

```
> factor(-4*c4*n^5+8*c5*n^5-4*c6*n^5+14*c7*n^5-28*c8*n^5);
```

$$-2\ n^5 (2\ c4 - 4\ c5 + 2\ c6 - 7\ c7 + 14\ c8)$$

```
> factor(-5*c3*n^4+10*c4*n^4-5*c5*n^4+10*c6*n^4-
14*c7*n^4+14*c8*n^4);
```

$$-n^4 (5\ c3 - 10\ c4 + 5\ c5 - 10\ c6 + 14\ c7 - 14\ c8)$$

```
> factor(-6*c2*n^3+11*c3*n^3-4*c4*n^3+5*c5*n^3-
4*c6*n^3+8*c8*n^3);
```

$$-n^3 (6\ c2 - 11\ c3 + 4\ c4 - 5\ c5 + 4\ c6 - 8\ c8)$$

```
> factor(-7*c1*n^2+11*c2*n^2-2*c3*n^2+c4*n^2+c5*n^2-
4*c6*n^2+8*c7*n^2-13*c8*n^2);
```

$$-n^2 (7\ c1 - 11\ c2 + 2\ c3 - c4 - c5 + 4\ c6 - 8\ c7 + 13\ c8)$$

```
> factor(-8*c0*n+10*c1*n-c3*n+2*c4*n-3*c5*n+4*c6*n-
5*c7*n+6*c8*n);
```

$$-n (8\ c0 - 10\ c1 + c3 - 2\ c4 + 3\ c5 - 4\ c6 + 5\ c7 - 6\ c8)$$

```
> :={0=-(c7+4*c8),0=-(2*c6-c7-8*c8),0=-(3*c5-5*c6-
14*c8),1=-2*(2*c4-4*c5+2*c6-7*c7+14*c8),-5=-(5*c3-
10*c4+5*c5-10*c6+14*c7-14*c8),8=-(6*c2-11*c3+4*c4-
5*c5+4*c6-8*c8),-4=-7*c1+11*c2-2*c3+c4+c5-4*c6+8*c7-13*c8,-
1=-(8*c0-10*c1+c3-2*c4+3*c5-4*c6+5*c7-6*c8),1=8*c0+c1-
c2+c3-c4+c5-c6+c7-c8};
```

$$\begin{aligned}
&soustava_rovnic := \{ -5 = -5\ c3 + 10\ c4 - 5\ c5 + 10\ c6 - 14\ c7 + 14\ c8, \\
&\quad -4 = -7\ c1 + 11\ c2 - 2\ c3 + c4 + c5 - 4\ c6 + 8\ c7 - 13\ c8, \\
&\quad -1 = -8\ c0 + 10\ c1 - c3 + 2\ c4 - 3\ c5 + 4\ c6 - 5\ c7 + 6\ c8,\ 0 = -c7 - 4\ c8, \\
&\quad 0 = -3\ c5 + 5\ c6 + 14\ c8,\ 0 = -2\ c6 + c7 + 8\ c8, \\
&\quad 1 = -4\ c4 + 8\ c5 - 4\ c6 + 14\ c7 - 28\ c8, \\
&\quad 1 = 8\ c0 + c1 - c2 + c3 - c4 + c5 - c6 + c7 - c8, \\
&\quad 8 = -6\ c2 + 11\ c3 - 4\ c4 + 5\ c5 - 4\ c6 + 8\ c8 \}
\end{aligned}$$

```
> solve(soustava_rovnic);
```

$$\{c0=0,\ c1=0,\ c2=-\frac{1}{4}+4\,c8,\ c3=\frac{1}{2}-4\,c8,\ c4=-\frac{1}{4}-7\,c8,\ c5=8\,c8,\ c6=2\,c8,\ c7=-4\,c8,\ c8=c8\}$$

Z výsledku je zřejmé, že bude nutná parametrizace. Položme $c_8=t, t\in R$, potom vychází $c_7=-4t, c_6=2t, c_5=8t, c_4=-\frac{1}{4}-7t, c_3=\frac{1}{2}-4t, c_2=-\frac{1}{4}+4t, c_1=c_0=0$. Sestavíme polynom $f_n=tn^8-4tn^7+2tn^6+8tn^5-\left(\frac{1}{4}+7t\right)n^4+\left(\frac{1}{2}-4t\right)n^3+\left(4t-\frac{1}{4}\right)n^2$ a opakovaně využijeme možnosti výpočetní techniky. Vyjádření f_n zjednodušíme a dosadíme do výrazu (6). Následuje substituce (příkaz *sub*) $n=4$ a určení počáteční podmínky, odkud plyne, že $t=\frac{1}{64}$. Dosazením hodnoty parametru do vzorce pro s_n zjistíme už výsledný součet *s*. Konečnou podobu výsledku zjednodušíme pomocí příkazu *simplify*. Na závěr ověříme náš výsledek s počítačovým určením sumy.

$$> fn := simplify\left(t\cdot n^8-4\cdot t\cdot n^7+2\cdot t\cdot n^6+8\cdot t\cdot n^5-\left(\frac{1}{4}+7\cdot t\right)\cdot n^4+\left(\frac{1}{2}-4\cdot t\right)\cdot n^3+\left(4\cdot t-\frac{1}{4}\right)\cdot n^2\right);$$

$$t\,n^8-4\,t\,n^7+2\,t\,n^6+8\,t\,n^5-\frac{1}{4}\,n^4-7\,t\,n^4+\frac{1}{2}\,n^3-4\,t\,n^3+4\,n^2\,t-\frac{1}{4}\,n^2$$

$$an := \frac{4\,(1-n)\,(n^2-2\,n-1)}{n^2\,(n+1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)^2};$$

$$\frac{4\,(1-n)\,(n^2-2\,n-1)}{n^2\,(n+1)^2\,(n-2)^2\,(n-3)^2}$$

$$sn := \frac{(n-3)^2}{(n-1)^3\cdot(n^2-2\cdot n-1)}\cdot an\cdot fn;$$

$$\frac{1}{(n-1)^3\,n^2\,(n+1)^2\,(n-2)^2}\Big(4\,(1-n)\,\Big(t\,n^8-4\,t\,n^7+2\,t\,n^6+8\,t\,n^5-\frac{1}{4}\,n^4-7\,t\,n^4+\frac{1}{2}\,n^3-4\,t\,n^3+4\,n^2\,t-\frac{1}{4}\,n^2\Big)\Big)$$

$$simplify(sn);$$

$$-\frac{4\,t\,n^4-8\,t\,n^3-12\,n^2\,t+16\,n\,t+16\,t-1}{(n+1)^2\,(n-2)^2}$$

```
subs(n=4, sn);
```

$$-4\,t+\frac{1}{100}$$

```
a4 := subs(n=4, an);
```

$$-\frac{21}{400}$$

```
solve(-21/400 = -4 t + 1/100);
```

$$\frac{1}{64}$$

```
s := subs(t = 1/64, sn);
```

$$\frac{1}{(n-1)^3\,n^2\,(n+1)^2\,(n-2)^2}\left(4\,(1-n)\left(\frac{1}{64}\,n^8-\frac{1}{16}\,n^7+\frac{1}{32}\,n^6+\frac{1}{8}\,n^5-\frac{23}{64}\,n^4+\frac{7}{16}\,n^3-\frac{3}{16}\,n^2\right)\right)$$

```
simplify(%);
```

$$-\frac{1}{16}\,\frac{n^4-2\,n^3-3\,n^2+4\,n-12}{(n+1)^2\,(n-2)^2}$$

$$\sum_{k=4}^{n}\frac{4\cdot(1-k)\cdot(k^2-2\cdot k-1)}{k^2\cdot(k+1)^2\cdot(k-2)^2\cdot(k-3)^2};$$

$$\frac{1}{(n+1)^2\,(n-2)^2}-\frac{1}{16}$$

```
simplify(%)
```

$$-\frac{1}{16}\,\frac{n^4-2\,n^3-3\,n^2+4\,n-12}{(n+1)^2\,(n-2)^2}$$

Příklad 52 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^4\cdot 4^k}{\binom{2k}{k}}$

$$a_n=\frac{n^4\cdot 4^n}{\frac{(2n)\,!}{n\,!\cdot n\,!}}=\frac{(n\,!)^2\cdot n^4\cdot 4^n}{(2n)\,!},$$

$$a_{n-1}=\frac{(n-1)^4\cdot 4^{n-1}}{\binom{2n-2}{n-1}}=\frac{(n-1)^4\cdot 4^{n-1}}{\frac{(2n-2)\,!}{[(n-1)\,!]^2}}=\frac{(n-1)^4\cdot[(n-1)\,!]^2\cdot 4^n}{4(2n-2)\,!},$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{4(2n-2)!(n!)^2 n^4 \cdot 4^n}{(2n)!(n-1)^4 \cdot 4^n [(n-1)!]^2} = \frac{4n^4 [n(n-1)!]^2}{2n(2n-1)(n-1)^4 [(n-1)!]^2} = \frac{2n^5}{(2n-1)(n-1)^4} =$$
$$= \frac{2n \cdot n^4}{(2n-1)(n-1)^4}.$$

Položme $p_n = n^4, q_n = 2n, r_n = 2n-1$, pak

$res_n(2n, 2n+2j-1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2j-1 \end{vmatrix} = 4j-2 = 2(2j-1)$ a bude nulový pro $j = \frac{1}{2}$, což není přirozené číslo, proto uvedená trojice polynomů představuje regulární reprezentaci daného podílu.

$q_{n+1} + r_n = 2n+2+2n-1 = 4n+1$, $q_{n+1} - r_n = 2n+2-2n+1 = 3$, odtud $l_p = 1, l_m = 0$, $l_p > l_m$, hledáme pomocné $k_{0,}$ $k_0 = [-1 \cdot 2 - 0 + (-1)] : 2 = -\frac{3}{2} \notin Z$, proto $k = 4-1+1 = 4$ a polynom $f(n) = c_4 n^4 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Výsledky dalšího postupu byly získány pomocí počítače. Z rovnice (7) vyplývá

$$n^4 = (2n+2)(c_4 n^4 + c_3 n^3 + c_2 n^2 + c_1 n + c_0) -$$
$$- (2n-1)\left[c_4 (n-1)^4 + c_3 (n-1)^3 + c_2 (n-1)^2 + c_1 (n-1) + c_0\right],$$ po úpravě
$$n^4 = 11c_4 n^4 + (-16c_4 + 9c_3)n^3 + (14c_4 - 9c_3 + 7c_2)n^2 + (-6c_4 + 5c_3 - 4c_2 + 5c_1)n +$$
$$+ c_4 - c_3 + c_2 - c_1 + 3c_0\ ,$$

odtud soustava

$$\begin{aligned} 1 &= 11c_4 \\ 0 &= -16c_4 + 9c_3 \\ 0 &= 14c_4 - 9c_3 + 7c_2 \\ 0 &= -6c_4 + 5c_3 - 4c_2 + 5c_1 \\ 0 &= c_4 - c_3 + c_2 - c_1 + 3c_0, \end{aligned}$$

kterou vyřeší počítač:

```
> soustava_rovnic:={1=11*c4,0=9*c3-16*c4,0=7*c2-9*c3+14*c4,0=5*c1-4*c2+5*c3-6*c4,0=3*c0-c1+c2-c3+c4};
```

$$soustava\_rovnic := \{0 = 9\,c3 - 16\,c4, 0 = 7\,c2 - 9\,c3 + 14\,c4, 0 = 5\,c1 - 4\,c2 + 5\,c3 - 6\,c4, 0 = 3\,c0 - c1 + c2 - c3 + c4, 1 = 11\,c4\}$$

```
> solve(soustava_rovnic);
```

$$\{c0 = \frac{1}{231}, c1 = \frac{-2}{63}, c2 = \frac{2}{77}, c3 = \frac{16}{99}, c4 = \frac{1}{11}\}$$

Řešením je $c_4 = \frac{1}{11}, c_3 = \frac{16}{99}, c_2 = \frac{2}{77}, c_1 = -\frac{2}{63}, c_0 = \frac{1}{231}$, parametrizace nutná není a $f(n) = \frac{1}{11}n^4 + \frac{16}{99}n^3 + \frac{2}{77}n^2 - \frac{2}{63}n + \frac{1}{231}$. Z (6) zjistíme vyjádření

$$s_n = \frac{2(n+1)\cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{11}n^4 + \frac{16}{99}n^3 + \frac{2}{77}n^2 - \frac{2}{63}n + \frac{1}{231}\right)}{\binom{2n}{n}}$$ a $s_0 = \frac{2}{231}$. Potom

$$s_n - s_0 = \frac{2(n+1)\cdot 4^n \cdot \left(\frac{1}{11}n^4 + \frac{16}{99}n^3 + \frac{2}{77}n^2 - \frac{2}{63}n + \frac{1}{231}\right)}{\binom{2n}{n}} - \frac{2}{231}$$ a po úpravě nakonec

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 \cdot 4^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{2(n+1)\cdot 4^n \cdot (63n^4 + 112n^3 + 18n^2 - 22n + 3)}{693\binom{2n}{n}} - \frac{2}{231},$$ což ověříme užitím počítače (obr. 32). Vidíme, že prostředí *Wolfram Alpha* uvádí výsledek v jiné podobě, proto je namístě prověřit, zda jsou si obě vyjádření rovna. Odečteme-li výrazy od sebe, v případě jejích rovnosti musí vyjít nula (obr. 33).

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4\, 4^k}{\binom{2k}{k}} = \frac{4^{n+1}\left(126\, n^5 + 287\, n^4 + 148\, n^3 - 26\, n^2 - 16\, n + 3\right) - 6\binom{2(n+1)}{n+1}}{693\binom{2(n+1)}{n+1}}$$

Obr. 32 - *Výsledek součtu řady prostředím Wolfram Alpha*

Input:

$$\left(\frac{2(n+1)\, 4^n\, (63\, n^4 + 112\, n^3 + 18\, n^2 - 22\, n + 3)}{693\binom{2n}{n}} - \frac{2}{231}\right) - \frac{4^{n+1}\left(126\, n^5 + 287\, n^4 + 148\, n^3 - 26\, n^2 - 16\, n + 3\right) - 6\binom{2(n+1)}{n+1}}{693\binom{2(n+1)}{n+1}}$$

$\binom{n}{m}$ is the binomial coefficient »

Result:

0

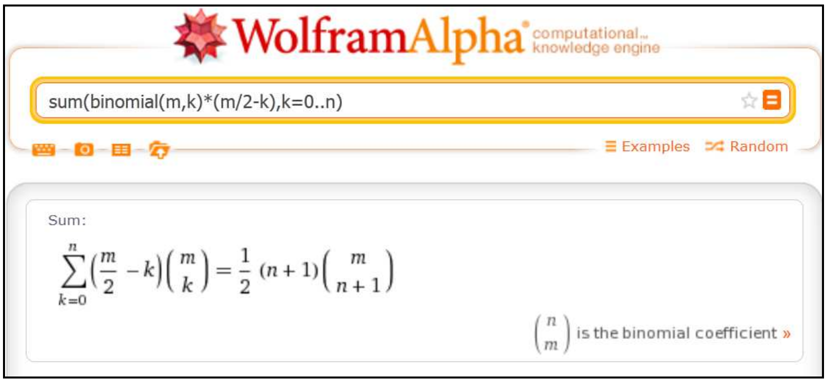
Obr. 33 – *Ověření shody lidského a počítačového výsledku součtu*

Příklad 53 $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\left(\frac{m}{2}-k\right)$

Řada bude zřejmě definována pro $k, m, n \in N_0, m \geq k$. Podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\binom{m}{n}\left(\frac{m}{2}-n\right)}{\binom{m}{n-1}\left(\frac{m}{2}-n+1\right)}$ upravíme na základě definice kombinačního čísla a zjednodušíme na tvar $\frac{m-2n}{m-2(n-1)} \cdot \frac{m-n+1}{n}$, posloupnost je hypergeometrická. Snadno se přesvědčíme, že regulární reprezentací podílu tvoří polynomy $p_n = m-2n, q_n = m-n+1, r_n = n$, protože rezultant polynomů $res(m-n+1, n+j) = 0$ právě když $j = -m-1$ a to není podle předpokladů přirozené číslo. Určíme stupeň polynomu f_n:

$q_{n+1} + r_n = m \Rightarrow l_p = 0, q_{n+1} - r_n = -2n + m \Rightarrow l_m = 1$, platí $l_p < l_m$ a stupeň $k = 1 - 1 = 0$, proto f_n bude konstantní polynom. Nechť $f_n = c_0$, dosazením do (7) určíme c_0:

$m - 2n = (m-n)c_0 - nc_0$, po úpravě $-2n + m = -2nc_0 + mc_0$, z čehož plyne $c_0 = 1$ a $f_n = 1$. Vyjádříme a zjednodušíme $s_n = \frac{m-n}{m-2n}\binom{m}{n}\left(\frac{m}{2}-n\right) = \frac{m-2}{2}\binom{m}{n}$. Protože nejmenší možné uvažované $n = 0$, všechny předcházející členy v řadě považujeme za nulové. Z tohoto důvodu $\sum_{k=0}^{n}\binom{m}{k}\left(\frac{m}{2}-k\right) = s_n - 0 = \frac{m-2}{2}\binom{m}{n}$. Počítač nám sice ukáže jinou podobu výsledku (obr. 34), lehce dokážeme, že se neliší od našeho. Stačí ten náš



Obr. 34 - *Počítačové řešení Příkladu 53*

rozšířit identitou $1 = \frac{n+1}{n+1}$. Potom $s_n = \frac{m!}{(m-n-1)!\,(n+1)!} \cdot \frac{n+1}{2} = \binom{m}{n+1}\frac{n+1}{2}$.

Příklad 54 $\sum_{k=1}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{m-k+1}\binom{\frac{1}{2}}{m+k}$

Zřejmě $k, m, n\in N : m\geq n\geq 1$. S využitím definice kombinačního čísla vyjádříme ve vhodném tvaru podíl

$$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{(m-n+2)\left(\frac{1}{2}-m-n+1\right)}{\left(\frac{1}{2}-m+n-1\right)(m+n)}=\frac{(n-m-2)(2n+2m-3)}{(2n-2m-1)(m+n)}=\frac{2n^2-7n-2m^2-m+6}{2n^2-n-2m^2-m},$$

posloupnost je hypergeometrická. Položme $p_n=1, q_n=2n^2-7n-2m^2-m+6,$ $r_n=2n^2-n-2m^2-m$. Pak pro rezultant polynomů platí

$$res(q_n, r_{n+j})=\begin{vmatrix}2 & -7 & -2m^2-m+6 & 0\\ 0 & 2 & -7 & -2m^2-m+6\\ 2 & 4j-1 & 2j^2-j-2m^2-m & 0\\ 0 & 2 & 4j-1 & 2j^2-j-2m^2-m\end{vmatrix}=$$

$$=4(2j+3)^2(j+2+2m)(j+1-2m)=0\Leftrightarrow j=-\frac{3}{2}\vee j=-2-2m\vee j=2m-1.$$

Zvolené polynomy tvoří regulární reprezentaci podílu.

Polynom q_{n+1} bude zřejmě druhého stupně, stejně jako polynom r_n a polynom vzniklý součtem $(q_{n+1}+r_n)$, proto $l_p=2$. Dále koeficienty členu s nejvyšší mocninou proměnné n, v našem případě kvadratického členu, jsou si rovny, při rozdílu se členy vyruší a stupeň polynomu $(q_{n+1}-r_n)$ je $l_m=1$. Vychází $l_p>l_m$, proto je nutné hledat pomocné $k_0=\frac{-2\cdot 2-(-7)-1}{2}=1\in Z$ a nakonec stupeň $k=\max(1, 0-2+1)=1$, polynom f_n bude prvního stupně. Položme $f_n=c_1n+c_0$ a podle (7) platí

$$1=\left[2(n+1)^2-7(n+1)-2m^2-m+6\right](c_1n+c_0)-\left(2n^2-n-2m^2-m\right)[c_1(n-1)+c_0],$$

po zjednodušení $1=-2nc_0+c_0-2m^2c_1-mc_1$. Porovnáním koeficientů dostaneme

$$\begin{aligned}c_0&=0\\ 1&=c_0-2m^2c_1-mc_1,\end{aligned}$$

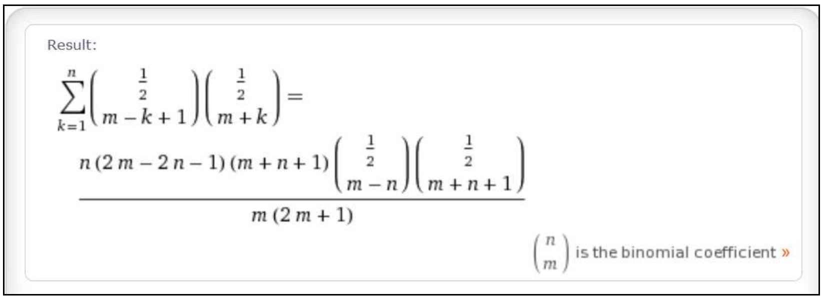
z druhé rovnice je $c_1=-\frac{1}{2m^2+m}$ a můžeme psát $f_n=-\frac{n}{m(2m+1)}$. Nalezený polynom dosadíme do (6):

$$s_n = -\frac{2(n+1)^2 - 7(n+1) - 2m^2 - m + 6}{1} \cdot \frac{n}{m(2m+1)} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m-n+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m+n} =$$

$$= \frac{2m^2 + m - 2n^2 + 3n - 1}{m(2m+1)} \cdot n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m-n+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m+n} =$$

$$= \frac{(m-n+1)(2m+2n-1)}{m(2m+1)} \cdot n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m-n+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m+n}$$ a $s_0 = 0$, proto nakonec

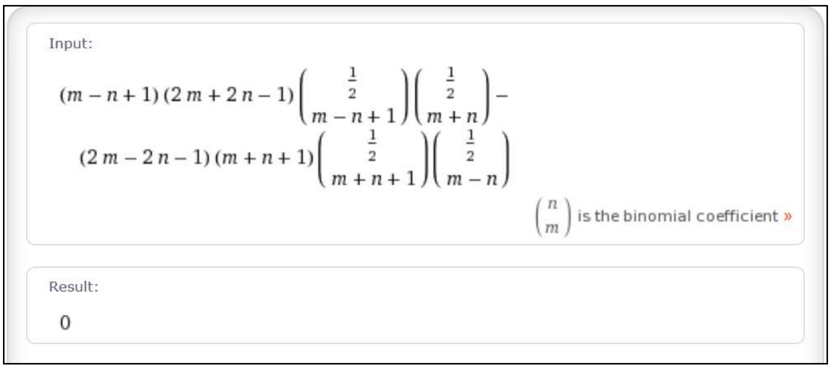
$$s = s_n = \frac{(m-n+1)(2m+2n-1)}{m(2m+1)} \cdot n \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m-n+1} \cdot \binom{\frac{1}{2}}{m+n}$$, to potvrdí také počítač, obr. 35.



Obr. 35 – *Řešení Příkladu 54*

Na první pohled není zřejmá shoda zjištěných výsledků. Oba výrazy obsahují činitele $\frac{n}{m(2m+1)}$, proto stačí prověřit (opět pomocí počítače, obr. 36) rozdíl výrazů

$$(m-n+1)(2m+2n-1)\binom{\frac{1}{2}}{m-n+1}\binom{\frac{1}{2}}{m+n} - (2m-2n-1)(m+n+1)\binom{\frac{1}{2}}{m+n+1}\binom{\frac{1}{2}}{m-n}.$$



Obr. 36 – *Ověření výsledků Příkladu 54*

8.2. Nekonečné řady

Příklad 55 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = 1$

Jest $a_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, pak $a_{n-1} = \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2}$. Potom

$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n^2(n-1)^2(2n+1)}{n^2(n+1)^2(2n-1)} = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{(n+1)^2(2n-1)} = \frac{2n^3-3n^2+1}{(n+1)^2(2n-1)}$. Nejdříve položíme

$p_n = 1,\ q_n = 2n^3 - 3n^2 + 1,\ r_n = (n+1)^2(2n-1)$, pak rezultant polynomů

$$res_n\left(q_n, r_{n+j}\right) = res_n\left(2n^3 - 3n^2 + 1, (n+j+1)^2(2n+2j-1)\right) =$$
$$res_n\left(2n^3 - 3n^2 + 1, 2n^3 + (6j+3)n^2 + (6j^2+6j)n + (2j^3+3j^2-1)\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 \\ 2 & 6j+3 & 6j^2+6j & 2j^3+3j^2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6j+3 & 6j^2+6j & 2j^3+3j^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6j+3 & 6j^2+6j & 2j^3+3j^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= 64j^9 + 576j^8 + 2016j^7 + 3264j^6 + 1764j^5 - 1764j^4 - 3264j^3 - 2016j^2 - 576j - 64 =$$
$$= 4(j-1)(j+2)(2j+1)^4.$$

Rezultant polynomů bude nulový pro číslo $j^* = 1 \in N_0$, proto musíme hledat novou trojici polynomů p_n, q_n, r_n. Položme podle algoritmu

$g_n = D\left(q_n, r_{n+j^*}\right) = D\left((n-1)^2(2n+1), (n+2)^2(2n+2-1)\right) = 2n+1$, pak vychází

$p_n = 1 \cdot g_n = 2n+1,\ q_n = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{2n+1} = (n-1)^2,\ r_n = \frac{(n+1)^2(2n-1)}{2n-2+1} = (n+1)^2$. Ověření zachování podílu $\frac{p(n)\cdot q(n)}{p(n-1)\cdot r(n)} = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ pro nové polynomy p_n, q_n, r_n:

$\frac{(2n+1)(n-1)^2}{(2n-2+1)(n+1)^2} = \frac{(n-1)^2(2n+1)}{(n-1)^2(2n-1)}$, platí. Zkoumejme rezultant těchto polynomů:

$$res_n(q_n, r_{n+j}) = res_n((n-1)^2, (n+j+1)^2) = res_n(n^2-2n+1, n^2+(2+2j)n+j^2+2j+1) =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2+2j & j^2+2j+1 & 0 \\ 0 & 1 & 2+2j & j^2+2j+1 \end{vmatrix} = j^4+8j^3+28j^2+36j+8 =$$

$$= (j+2)(j^3+6j^2+16j+4)$$

a součin $(j+2)(j^3+6j^2+16j+4)$ bude nulový pouze pro $j=-2 \notin N_0$, proto trojice polynomů $p_n = 2n+1, q_n = (n-1)^2, r_n = (n+1)^2$ je regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$.

Následující kroky směřují k určení stupně k polynomu f_n.

$$q_{n+1} + r_n = (n+1-1)^2 + (n+1)^2 = 2n^2+2n+1, l_p = 2$$

$$q_{n+1} - r_n = (n+1-1)^2 - (n+1)^2 = -2n-1, l_m = 1$$

a protože $l_p > l_m$, hledáme pomocné k_0: $k_0 = (-2\cdot 1-(-2)+2):1 = 2$, poté stupeň $k = \max\,(2, 1-2+1) = 2$. Hledaný polynom je zřejmě druhého stupně a má vyjádření $f_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$. Dosadíme do vztahu (7) a hledáme řešení pro koeficienty c_i.

$$2n+1 = n^2(c_2n^2+c_1n+c_0) - (n+1)^2\left[c_2(n-1)^2 + c_1(n-1) + c_0\right]$$

$$2n+1 = n^2(2c_2-c_1) + n(c_1-2c_0) + (-c_2+c_1-c_0)$$

Převedeme na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 0 &= 2c_2 - c_1 \\ 2 &= c_1 - 2c_0 \\ 1 &= -c_2 + c_1 - c_0 \end{aligned}$$

a jejím řešením je $[c_2, c_1, c_0] = [1+t, 2+t, t]$, kde t je reálný parametr. Pak $f_n = (1+t)n^2 + (2+t)n + t$. Počáteční podmínka je $s_1 = \frac{3}{4}$ a s její pomocí určíme konkrétní hodnotu parametru, posloupnost částečných součtů s_n a nakonec i její limitu. Práci usnadníme užitím specializovaného programu.

```
> fn := simplify((1 + t)·n^2 + (2 + t)·n + t);
                    n^2 + n^2 t + 2 n + n t + t
an := (2·n + 1)/(n^2 (n + 1)^2);
                    (2 n + 1)/(n^2 (n + 1)^2)
sn := n^2/(2·n + 1)·an·fn;
```

$$\frac{n^2+n^2\ t+2\ n+n\ t+t}{(n+1)^2}$$

```
subs(n=1, sn);
```

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ t$$

```
a4 := subs(n=1, an);
```

$$\frac{3}{4}$$

$$solve\left(\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\ t\right);$$

$$0$$

```
s := subs(t=0, sn);
```

$$\frac{n^2+2\ n}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to infinity} s;$$

$$1$$

Zbývá ověřit, zda se výsledek shoduje s tím, co nám nabídne počítač.

$$> \sum_{n=1}^{infinity}\frac{2\cdot n+1}{n^2\cdot(n+1)^2};$$

$$1$$

Příklad 56 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{n^2}{(n+1)(n+3)}$, posloupnost je hypergeometrická a můžeme pokračovat. Nechť $p_n=1, q_n=n^2, r_n=(n-1)(n-3)$, potom

$$res_n\left(n^2,(n+j-1)(n+j+3)\right)=res_n\left(n^2,n^2+(2j+2)n+j^2+2j-3\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2j+2 & j^2+2j-3 & 0\\ 0 & 1 & 2j+2 & j^2+2j-3\end{vmatrix}=\left(j^2+2j-3\right)^2=(j+3)^2(j-1)^2$$

a je zřejmé, že rezultant bude nulový pro přirozené $j=1$. Pomocí známého algoritmu hledáme jinou trojici polynomů.

Nechť $g_n = D(n^2, n(n+4)) = n$ potom $p_n = n, q_n = n, r_n = n+3$. Zkoumáme $D(n, n+j+3)$, ale ten roven jedné $\forall j \in N_0$. Nyní jsme našli regulární reprezentaci podílu.

$q_{n+1} + r_n = 2n+4 \Rightarrow l_p = 1, q_{n+1} - r_n = -2 \Rightarrow l_m = 0$ a hledáme

$k_0 = (-1 \cdot 1 - 0 + 3) : 1 = 2 \in Z$, $k = \max(2, 1-1+1) = 2$ a píšeme $f_n = c_2 n^2 + c_1 n + c_0$.

Z (7) vyplývá $n = -n(-c_1 + 5c_2) + 3c_1 - 2c_0 - 3c_2$, odtud $1 = 5c_2 - c_1, 0 = 3c_1 - 2c_0 - 3c_2$.

Položme $c_1 = t, t \in R$, pak $c_2 = \frac{1}{5}(1+t), c_0 = \frac{3}{10}(4t-1)$, $f_n = \frac{1}{5}(1+t)n^2 + tn + \frac{3}{10}(4t-1)$.

Vyjádříme $s_n = \frac{n+1}{n} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \frac{1}{5}(1+t)n^2 + tn + \frac{3}{10}(4t-1)$. Stanovíme počáteční podmínku $s_1 = \frac{1}{24}$ a zbytek dokončíme s pomocí počítače:

```
> fn := simplify(1/5 (1 + t)·n^2 + t·n + 3/10 (4·t − 1));
```

$$\frac{1}{5} n^2 + \frac{1}{5} n^2 t + t n + \frac{6}{5} t - \frac{3}{10}$$

```
an := n / ((n + 1)·(n + 2)·(n + 3));
```

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

```
sn := (n + 1)/n ·an·fn;
```

$$\frac{\frac{1}{5} n^2 + \frac{1}{5} n^2 t + t n + \frac{6}{5} t - \frac{3}{10}}{(n+2)(n+3)}$$

```
subs(n = 1, sn);
```

$$-\frac{1}{120} + \frac{1}{5} t$$

```
a4 := subs(n = 1, an);
```

$$\frac{1}{24}$$

```
solve(1/24 = -1/120 + 1/5 t);
```

$$\frac{1}{4}$$

```
s := subs(t = 1/4, sn);
```

$$\frac{\frac{1}{4} n^2 + \frac{1}{4} n}{(n+2)(n+3)}$$

Proto $c_1 = \frac{1}{4}, c_2 = \frac{1}{4}, c_0 = 0$ a $f_n = \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n$. Spočítáme $\lim_{n\to\infty} s = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{4}n}{n^2 + 5n + 6} = \frac{1}{4}$ a porovnáme s počítačovým výsledkem součtu řady.

$$> \sum_{n=1}^{infinity} \frac{n}{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(n+3)};$$

$$\frac{1}{4}$$

Příklad 57 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(2n-3)^2}{(2n-1)^2} = \frac{4n^2 - 15n + 9}{4n^2 - 4n + 1}$, to dokazuje, že daná posloupnost je hypergeometrická. Buď $p_n = 1, q_n = (2n-3)^2$ a $r_n = (2n-1)^2$. Pak

$$res_n\left(4n^2 - 12n + 9, 4(n+j)^2 - 4(n+j) + 1\right) =$$
$$= res_n\left(4n^2 - 12n + 9, 4n^2 + (8j-4)n + 4j^2 - 4j + 1\right) =$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & -12 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -12 & 9 \\ 4 & 8j-4 & 4j^2 - 4j + 1 & 0 \\ 0 & 4 & 8j-4 & 4j^2 - 4j + 1 \end{vmatrix} = 256(j+1)^4 = 0 \Leftrightarrow j = -1 \notin N_0$$

a uvedená trojice polynomů je regulární reprezentací podílu.

$q_{n+1} + r_n = 8n^2 - 8n + 2 \Rightarrow l_p = 2, q_{n+1} - r_n = 0 \Rightarrow l_m = -1$,

$k_0 = [-2\cdot 4 - (-12) + (-4)] : 4 = 0 \in Z$ a $k = \max(0, 0 - 2 + 1) = 0$, f_n bude konstantní polynom. Nechť $f_n = c_0$, podle (7) dostáváme $1 = (4n^2 - 4n + 1)c_0 - (4n^2 - 4n + 1)c_0$, což je ekvivalentní s $1 = 0$, avšak rovnost neplatí, rovnice nemá řešení, polynom f_n neexistuje, protože posloupnost částečných součtů řady není hypergeometrická. Řadu Gosperovým algoritmem nelze sečíst. Přesto většina specializovaných programů ukáže výsledek součtu, např. *Maple 14*.

$$> \sum_{n=1}^{infinity} \frac{1}{(2\cdot n - 1)^2};$$

$$\frac{1}{8}\pi^2$$

Uvedená řada je příbuzná s historicky velmi známým tzv. *Basilejským problémem*, tj. sčítání nekonečných řad převrácených hodnot druhých mocnin přirozených čísel, který vyřešil v první polovině 18. století švýcarský matematik Leonhard Paul EULER (a o kterém např. přednášel pro studenty středních škol a ostatní širokou veřejnost na PřF UJEP v Ústí nad Labem v únoru 2008 prof. RNDr. Ivan Netuka, DrSc. z MFF UK v Praze). Výsledkem Eulerovy práce byla nová numerická metoda sčítání řad a objevení tzv. Eulerova-Maclaurinova sumačního vzorce (k němuž došel ve stejné době nezávisle na Eulerovi také skotský matematik Colin MACLAURIN) porovnávajícího sumu $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ a určitý integrál $\int f(x)\,dx$. A právě tato idea se stala jednou z metod počítačového sčítání řad. Rozšiřování oblasti působnosti sumačních algoritmů je v současné době aktivní vědeckou činností.

9. Metoda sestry Celine

Za jeden z prvních pokusů o algoritmické sčítání řad se dá považovat metoda řádové sestry *Mary Celine Fasenmyer* (1906–1996). Nadaná matematička deset let po absolvování střední školy začala učit a studovat na Mercyhurst College ve městě Erie v Pensylvánii a vstoupila zde do řádu Sisters of Mercy. Přestože její způsob řešení problému byl vyvinut ještě dříve, než se začaly užívat počítače, teorie publikovaná v doktorské práci velkou měrou přispěla k vývoji dalších známých sumačních algoritmů a ukázala možný způsob počítačového dokazování některých sumačních identit.

Metoda sestry Celine pracuje s dvojnásobně hypergeometrickou funkcí dvou proměnných.

Definice 3: Funkce $F(n,k)$ se nazývá *dvojnásobně hypergeometrická*, právě když lze pro všechna přirozená *n*, *k*, $k \le n$ podíly $\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}$ a $\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$ zapsat racionálními funkcemi proměnných *n*, *k*.

Při hledání rekurentního vyjádření pro součet $f(n)=\sum_{k=m}^{n}F(n,k)$ využívá následující větu (více v [25]):

<u>Věta 3:</u> Nechť $F(n,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická a $f(n)=\sum_{k=m}^{n}F(n,k)$. Pro rekurentní formuli sčítanců $F(n,k)$ platí

$$\sum_{i=0}^{I}\sum_{j=0}^{J}a_{i,j}(n)F(n-j,k-i)=0\,, \tag{16}$$

kde koeficienty $a_{i,j}(n)$ jsou polynomy.

Vysvětlíme celý postup. Na začátku stanovíme výchozí zkušební hodnoty proměnných *I*, *J*. Dosadíme do poslední rovnice a hledáme koeficienty $a_{i,j}(n)$, pokud existují. Přitom provádíme algebraické úpravy tak, aby výrazy neobsahovaly faktoriály a zůstalo vyjádření v podobě podílu racionálních funkcí proměnných *n* a *k*. Převedeme na společného jmenovatele a upravíme jej do formy polynomu proměnné *k*. Nakonec řešíme soustavu lineárních rovnic, která vyplývá z nulovosti každého koeficientu proměnné *k* v čitateli. Pokud soustava nemá řešení, pak celý postup opakujeme pro větší hodnoty *I* a/nebo *J*, pracujeme s vyšší rekurencí. Takový postup je pro člověka velmi pracný a časově značně náročný. Pro srozumitelnější interpretaci volíme úlohy, kde vystačíme s první rekurencí, tj. $I = J = 1$. Celý postup si ukážeme na konkrétních příkladech, které většinou vybíráme ze středoškolských učebnic.

<u>Příklad 58</u> Dokažte rovnost $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, kde $k,n\in N, k\le n$.

Úlohu jsme řešili třemi klasickými způsoby v kapitole 2.4. Nyní provedeme sčítání užitím metody sestry Celine. Je-li *F* (*n*, *k*) dvojnásobně geometrická, tzn., že podíly $\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}$ a $\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}$ jsou racionální funkce proměnných *n* a *k*, pak se snažíme najít rekurentní vyjádření pro *f* (*n*).

Označme $F(n,k)=\binom{n}{k}$ a $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ pro *n* = 0, 1, 2, … Prověříme, zda $F(n,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická:

$$\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}=\frac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{n-k+1},\qquad \frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}=\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}=\frac{n-k}{k+1}.$$

Oba podíly jsou vyjádřeny racionálními funkcemi proměnných *n, k*. Pro další počítání bude vhodné přepsat ještě podíl $\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)}=\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n}{k}}=\frac{n+1}{k+1}$. Hledáme polynomy $a(n), b(n), c(n), d(n)$, které vyhovují rovnici

$$a(n)F(n,\ k)+b(n)F(n+1,\ k)+c(n)F(n,\ k+1)+d(n)F(n+1,\ k+1)=0 \qquad (17)$$

(pro zjednodušení zápisů budeme dále používat jen značení *a*, *b*, *c*, *d*). Po vydělení celé rovnice výrazem $F(n,k)$, dostáváme

$$a+b\frac{F(n+1,\ k)}{F(n,\ k)}+c\frac{F(n,\ k+1)}{F(n,\ k)}+d\frac{F(n+1,\ k+1)}{F(n,\ k)}=0$$

Nyní podíly nahradíme racionálními zlomky, čímž rovnice nebude obsahovat faktoriály.

$$a+b\frac{n+1}{n-k+1}+c\frac{n-k}{k+1}+d\frac{n+1}{k+1}=0$$

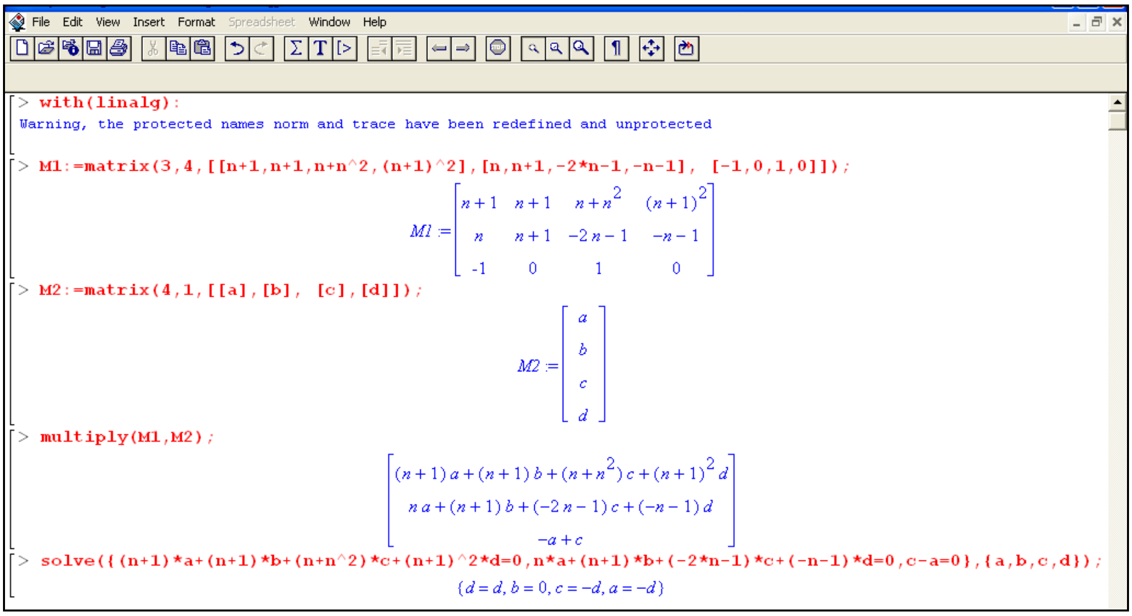
Převedením na společného jmenovatele, roznásobením závorek a vytknutím proměnné *k*, získáme rovnici ve tvaru

$$\left[a\,(n+1)+b\,(n+1)+c\,(n+n^2)+d(2n+1+n^2)\right]+$$
$$+k\,\left[an+b\,(n+1)+c\,(-2n-1)+d\,(-n-1)\right]+k^2(-a+c)=0$$

Vidíme, že koeficienty *a*, *b*, *c*, *d* jsou závislé pouze na proměnné *n*. Pak tedy hledáme řešení soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých. Tím je zaručeno, že existuje nenulové řešení.

$$\begin{bmatrix} n+1 & n+1 & n+n^2 & (n+1)^2 \\ n & n+1 & -2n-1 & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pro výpočet využijeme počítač, program *Maple* (obr. 37).



Obr. 37 - *Řešení soustavy pomocí Maple*

Je zřejmé, že na neznámou d můžeme nahlížet jako na parametr. Pak dostáváme $a = -d, b = 0, c = -d, d = d$, můžeme psát $[a, b, c, d] = d[-1, 0, -1, 1]$.

Dosadíme do (17):

$$-F(n,\ k) - F(n,\ k+1) + F(n+1,\ k+1) = 0\ .$$

Protože k je volná proměnná, platí

$-f(n) - f(n) + f(n+1) = 0$, odtud plyne rekurentní vyjádření $f(n+1) = 2f(n) + C$, kde C je aditivní konstanta (známe např. z integrálního počtu nebo diferenciálních rovnic), jejíž hodnotu zjistíme z počátečních podmínek $f(0) = 1,\ f(1) = 2$. Pro náš případ je $C = 0$.

Z rekurentního vyjádření nyní můžeme odvodit vztah pro $f(n)$:

$$f(n+1) = 2f(n) = 2^2 f(n-1) = 2^3 f(n-2) = \ldots = 2^n f(1), \text{ odtud}$$

$$2f(n) = 2^n \cdot 2$$

$$f(n) = 2^n.$$

Příklad 59 Dokažte rovnost $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = 3^n$, kde $k, n \in N,\ k \le n$.

Také tento příklad byl řešen několika klasickými metodami v kapitole 2.4. Ukažme, jak obstojí metoda sestry Celine.

Nechť $F(n,k)=\binom{n}{k}\cdot 2^k$ a $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k$ pro n = 0,1, 2, …

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}=\frac{\binom{n+1}{k}\cdot 2^k}{\binom{n}{k}\cdot 2^k}=\frac{n+1}{n-k+1},\ \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}=\frac{\binom{n}{k+1}\cdot 2^k\cdot 2}{\binom{n}{k}\cdot 2^k}=2\cdot\frac{n-k}{k+1},$$

to znamená, že $F(n, k)$ je hypergeometrická.

$\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}=\frac{\binom{n+1}{k+1}\cdot 2^k\cdot 2}{\binom{n}{k}\cdot 2^k}=2\cdot\frac{n+1}{k+1}$. Rovnici (16) pak můžeme přepsat a upravit takto $a+b\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)}+c\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)}+d\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)}=0$

$$a+b\frac{n+1}{n-k+1}+2c\frac{n-k}{k+1}+2d\frac{n+1}{k+1}=0$$

$$a(n-k+1)(k+1)+b(n+1)(k+1)+2c(n-k)(n-k+1)+2d(n+1)(n-k+1)=0$$

$$\left[a(n-1)+b(n+1)+c(2n^2+2n)+d(-2n-2)\right]+$$
$$+k\left[an+b(n+1)+c(-4n-2)+d(-2n-2)\right]+k^2(-a+2c)=0$$

Řešení hledáme pomocí matic

$$\begin{bmatrix} n+1 & n+1 & 2n^2+2n & 2n^2+4n+2 \\ n & n+1 & -4n-2 & -2n-2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Opět je zřejmé, že poslední rovnice bude mít nenulové řešení a např. číslo d zvolíme jako parametr. Čili $a=-2d, b=0, c=-d, d=d$; $[a,b,c,d]=d[-2,0,-1,1]$

$$-2f(n)-f(n)+f(n+1)=0$$

$$f(n+1)=3f(n)+C,\quad f(0)=1,\ f(1)=3$$

$$C=0$$

Je $f(n+1)=3f(n)=3^2 f(n-1)=...=3^n f(1)$, pak $f(n)=3^n$ a nakonec platí $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k=3^n$, což bylo dokázáno.

Příklad 60 $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1}$

Suma se dá lidským způsobem určit např. na základě užití definice kombinačního čísla. Vyjádření přepíšeme v podobě součtu a kombinační čísla nahradíme výrazy s faktoriály:

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = 0 \cdot \binom{n}{0} + 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \cdot \binom{n}{2} + \ldots + (n-1)\binom{n}{n-1} + n\binom{n}{n} =$$

$= 1 \cdot \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} + 2 \cdot \frac{n!}{(n-2)! \cdot 2!} + \ldots + (n-1) \cdot \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} + n \cdot \frac{n!}{0! \cdot n!}$, po vykrácení píšeme

$\frac{n!}{(n-1)! \cdot 0!} + \frac{n!}{(n-2)! \cdot 1!} + \frac{n!}{(n-3)! \cdot 2!} + \ldots + \frac{n!}{1! \cdot n!} + \frac{n!}{0! \cdot (n-1)!}$, vytkneme n

$n\left[\frac{(n-1)!}{(n-1)! \cdot 0!} + \frac{(n-1)!}{(n-2)! \cdot 1!} + \frac{(n-1)!}{(n-3)! \cdot 2!} + \ldots + \frac{(n-1)!}{1! \cdot n!} + \frac{(n-1)!}{0! \cdot (n-1)!}\right]$, to ale můžeme přepsat

ve tvaru sumy $n \cdot \sum_{n=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1-k)! \cdot k!} = n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}$ a platí $n \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = n \cdot 2^{n-1}$, což bylo dokázáno.

A jak obstojí metoda sestry Celine?

Nechť $F(n,k) = k\binom{n}{k}$ a $f(n) = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$ pro n = 0,1, 2, …

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{k\binom{n+1}{k}}{k\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n-k+1}, \qquad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(k+1)\binom{n}{k+1}}{k\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k},$$

to znamená, že funkce F (n, k) je hypergeometrická. Bude užitečné vyjádřit výraz

$\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(k+1)\binom{n+1}{k+1}}{k\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{k}$. Rovnice (17) má pak tvar

$$a + b\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d\,\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0$$

$$a + b\frac{n+1}{n-k+1} + c\frac{n-k}{k} + d\,\frac{n+1}{k} = 0$$

$$a(n-k+1)k+b(n+1)k+c(n-k)(n-k+1)+d(n+1)(n-k+1)=0$$

$$\left[c\left(n+n^2\right)+d\left(2n+1+n^2\right)\right]+k\left[a(n+1)+b(n+1)+c(-2n-1)+d(-n-1)\right]+k^2(-a+c)=0,$$

rovnost nastane právě když

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & n^2+n & n^2+2n+1 \\ n+1 & n+1 & -2n-1 & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Znovu nám s výpočtem pomůže počítač:

```
> M1:=matrix(3,4,[[0,0,n^2+n,n^2+2*n+1],[n+1,n+1,-2*n-1,-n-1], [-1,0,1,0]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & n^2+n & n^2+2\,n+1 \\ n+1 & n+1 & -2\,n-1 & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=matrix(4,1,[[a],[b], [c],[d]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

```
>
> M4:=multiply(M1,M2);
```

$$M4 := \begin{bmatrix} (n^2+n)\,c+(n^2+2\,n+1)\,d \\ (n+1)\,a+(n+1)\,b+(-2\,n-1)\,c+(-n-1)\,d \\ -a+c \end{bmatrix}$$

```
> solve({(n^2+n)*c+(n^2+2*n+1)*d=0,(n+1)*a+(n+1)*b+(-2*n-1)*c+(-n-1)*d=0,c-a=0},{a,b,c,d});
```

$$\{d=d,\, b=0,\, c=-\frac{(n+1)\,d}{n},\, a=-\frac{(n+1)\,d}{n}\}$$

Jak vidíme, výsledek vychází $a=-\dfrac{(n+1)}{n}d, b=0, c=-\dfrac{(n+1)}{n}d, d=d$, neboli $[a,b,c,d]=d\left[-\dfrac{n+1}{n}, 0, -\dfrac{n+1}{n}, 1\right]$ a platí $-\dfrac{n+1}{n}f(n)-\dfrac{n+1}{n}f(n)+f(n+1)=0$, odtud $f(n+1) = 2\dfrac{n+1}{n} f(n)$. To znamená, že $n \cdot f(n+1) = 2(n+1) \cdot f(n) + C$ a $f(0) = 0$, $f(n) = 1$. Z počátečních podmínek plyne $C = 0$.

Dostáváme $f(n+1) = 2\dfrac{n+1}{n} f(n) = 2^2 \dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{n}{n-1} f(n-1) = ... = 2^n (n+1) f(1)$ a potom

$2\dfrac{n+1}{n} f(n) = 2^n (n+1) \cdot 1$, po úpravě $f(n) = n \cdot 2^{n-1}$.

Příklad 61 Dokažte, že alternující součet všech čísel v řádku Pascalova trojúhelníku je 0.

Příklad ilustruje zajímavou identitu, která vychází v Pascalově trojúhelníku. Pro názornější představu zadání úlohy použijeme tabulkový zápis. Z něj je patrné, že úloha má smysl pro $k, n \in \mathrm{N}$ a $k \le n$, $n \ge 1$.

Pascalův trojúhelník	alternující součet	výsledek
1	-	-
1 1	1 – 1	0
1 2 1	1 – 2 + 1	0
1 3 3 1	1 – 3 + 3 – 1	0
1 4 6 4 1	1 – 4 + 6 – 4 + 1	0
1 5 10 10 5 1	1 – 5 + 10 – 10 + 5 – 1	0
. . .		
$\binom{n}{0}\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$	$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k}$	0

Nejobvyklejší způsob důkazu platnosti tvrzení je zřejmě užití binomické věty, kde dosadíme $a = 1, b = -1$. Podívejme se, jak se s úlohou vypořádá metoda sestry Celine.

Označme $F(n,k) = (-1)^k \cdot \binom{n}{k}$ a $f(n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k}$ pro n = 0, 1, 2, …

Zjistíme, zda $F(n,k)$ je dvojnásobně hypergeometrická:

$$\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} = \frac{(-1)^k \cdot \binom{n+1}{k}}{(-1)^k \cdot \binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n-k+1}, \qquad \frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(-1)^k \cdot (-1) \cdot \binom{n}{k+1}}{(-1)^k \cdot \binom{n}{k}} = -\frac{n-k}{k+1},$$

vidíme, že oba podíly jsou vyjádřeny racionálními funkcemi proměnných *n*, *k*. Pro další počítání bude vhodné přepsat ještě podíl $\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = \frac{(-1)^k \cdot (-1) \cdot \binom{n+1}{k+1}}{(-1)^k \cdot \binom{n}{k}} = -\frac{n+1}{k+1}$

Hledáme polynomy $a(n), b(n), c(n), d(n)$, které vyhovují rovnici (17)

Po vydělení celé rovnice výrazem $F(n,k)$, dostáváme

$$a + b\frac{F(n+1,k)}{F(n,k)} + c\frac{F(n,k+1)}{F(n,k)} + d\frac{F(n+1,k+1)}{F(n,k)} = 0\,.$$

Nyní podíly nahradíme racionálními zlomky, čímž rovnice nebude obsahovat faktoriály.

$$a + b\frac{n+1}{n-k+1} - c\frac{n-k}{k+1} - d\frac{n+1}{k+1} = 0\,.$$

Převedením na společného jmenovatele, roznásobením závorek a vytknutím proměnné *k* získáme rovnici ve tvaru

$$\left[a(n+1) + b(n+1) + c\left(n+n^2\right) + d\left(2n+1+n^2\right)\right] + k\left[an + b(n+1) + c(-2n-1) + d(-n-1)\right] +$$
$$+ k^2(-a+c) = 0$$

Vidíme, že koeficienty *a*, *b*, *c*, *d* jsou závislé pouze na proměnné *n*. Pak tedy hledáme řešení soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých. Tím je znovu zaručeno, že existuje nenulové řešení.

$$\begin{bmatrix} n+1 & n+1 & n+n^2 & (n+1)^2 \\ n & n+1 & -2n-1 & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A opět si zjednodušíme počítání užitím počítače.

```
> M1:=matrix(3,4,[[n+1,n+1,n^2+n,n^2+2*n+1],[n,n+1,-2*n-1,-n-1], [-1,0,1,0]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} n+1 & n+1 & n^2+n & n^2+2\,n+1 \\ n & n+1 & -2\,n-1 & -n-1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> M2:=matrix(4,1,[[a],[b], [c],[d]]);
```

$$M2 := \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

```
> M4:=multiply(M1,M2);
```

$$M4 := \begin{bmatrix} (n+1)\,a + (n+1)\,b + (n^2+n)\,c + (n^2+2\,n+1)\,d \\ a\,n + (n+1)\,b + (-2\,n-1)\,c + (-n-1)\,d \\ -a + c \end{bmatrix}$$

```
>solve({(n+1)*a+(n+1)*b+(n^2+n)*c+(n^2+2*n+1)*d=0,a*n+(n+1)*b+(-2*n-1)*c+(-n-1)*d=0,c-a=0},{a,b,c,d});
```

$$\{ d = d,\ b = 0,\ c = -d,\ a = -d \}$$

Vidíme, že $a = -d, b = 0, c = -d, d = d$, můžeme psát $[a,b,c,d] = d[-1,\ 0,\ -1,\ 1]$ a číslo d považovat za parametr. Dosadíme do původní rovnice

$$-F(n,k) - F(n,k+1) + F(n+1,k+1) = 0$$

Protože k je volná proměnná, platí

$$-f(n) - f(n) + f(n+1) = 0,$$

odtud plyne rekurentní vyjádření

$$f(n+1) = 2\,f(n) + C,$$

kde C je aditivní konstanta, jejíž hodnotu zjistíme z počátečních podmínek $f(1) = 0,\ f(2) = 0$ (pro n = 1, 2, …). Pro náš případ je C = 0.

Z rekurentního vyjádření nyní můžeme odvodit vztah pro $f(n)$:

$$f(n+1) = 2\,f(n) = 2^2\,f(n-1) = 2^3\,f(n-2) = ... = 2^n\,f(1), \text{ odtud}$$

$$2\,f(n) = 2^n \cdot 0$$
$$f(n) = 0$$

a tím je důkaz hotov.

10. Závěr

Disertační práce podala přehled dosud nejpoužívanějších lidských metod sčítání číselných řad, popsala rozpracování matematické teorie podstaty Gosperova algoritmu jako jedné z počítačových sumačních teorií a ukázala příbuznost s integrováním funkcí. Prezentovala význam polynomů jako nezbytného prostředku pro matematizaci problému a algoritmizaci. Gosperův algoritmus, první ze známých sumačních algoritmů, si poradí s velkou skupinou řad, ale není všemocný, jak demonstrovaly ukázky některých příkladů. Práce doložila funkčnost tohoto algoritmu pro nalezení nejběžněji se vyskytujících řad středoškolských učebnic, především aritmetických a geometrických, a to jak konečných, tak nekonečných. Práce také přinesla didakticko-metodický pohled na zavedení nového způsobu sčítání řad na střední školy. Ukázala, že za jistých okolností je tato metoda sčítání číselných řad vhodná pro zavedení do výuky na střední škole. Nácvik počítačového způsobu sumace podporuje u žáků rozvoj řady klíčových kompetencí a matematických dovedností, především z oblasti elementární algebry. Některé nezáživné rutinní výpočty a současně kontrolní výsledky je možné provádět s podporou počítače. A to dokonce užitím volně dostupných, nekomerčních programů. Zařazení nového, zatím ve školách téměř neznámého, způsobu řešení číselných řad by mohlo přispět ke zvýšení motivace žáků o takové předměty, jakými jsou matematika a informatika. V současné době toto nové téma může prozatím dobře posloužit už při podpoře nadaných středoškoláků v různých zájmových kroužcích a seminářích, zaměřených na matematiku a programování. Tady by byla také příležitost zajímavých námětů na práce SOČ. Dnešní trend oborových olympiád zahrnuje zpravidla úlohy izolované, zaměřené jen na daný předmět. Vzhledem k nárůstu významu mezipředmětových vztahů se možná v budoucnu změní tradice takových soutěží a pak i tady najdou úlohy o počítačových sumacích jistě své místo. Také mezi středoškolskými učiteli existuje skupina zájemců a pokrok v oblasti matematiky a informatiky. Studované téma by mohlo být přitažlivé při výměnách zkušeností v této komunitě, příp. vhodné pro publikování v odborných časopisech. V neposlední řadě bude možné získané zkušenosti využít při přípravě budoucích učitelů informatiky a matematiky. Je třeba ukázat nové směry vývoje algoritmů a zdůraznit novodobý význam matematiky, což je jednou z priorit oborových didaktik obou předmětů – zapracovávat aktuální poznatky oborů (tj. v daném případě matematiky a informatiky).

Vývoj sumačních algoritmů během posledních čtyřiceti let představuje obrovský kus práce a přináší očekávaný výsledek. Osmá kapitola práce představila historicky významnou metodu sčítání řad založenou na netradičním pojetí sčítání řad, ze které vycházejí dnes užívané sumační algoritmy. Ukázali jsme, že nový postup také umožňuje sčítání některých řad, kde lidský způsob selhává. Dnes je známo několik dalších sumačních algoritmů navazujících na Gosperův algoritmus (např. W-Z algoritmus) a rozšiřujících skupinu počítačově sčítaných řad. Kvalitní komerční programy, jako je např. *Maple*, obsahují balíček funkcí, kde je možné sledovat jednotlivé kroky počítačové sumace určitým algoritmem. Střední školy však takovým programem nedisponují. Do budoucna se předpokládá, že nové postupy sčítání řad najdou své místo přinejmenším ve výuce počítačové algebry na vysokých školách.

Seznam obrázků

Seznam příkladů

Příklad 1 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n \left(n+1\right)$

Příklad 2 $\sum_{k=1}^{n} \left(2k-1\right) = n^2$

Příklad 3 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}\left(n-1\right) + 2$

Příklad 4 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

Příklad 5 $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 2^k = 3^n$

Příklad 6 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)}$

Příklad 7 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\left(k+1\right)!}$

Příklad 8 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3 + 3k^2 + 2k}$

Příklad 9 $\sum_{k=0}^{n} k^m$

Příklad 10 $\sum_{k=1}^{n} k\left(2k-1\right)$

Příklad 11 $\sum_{k=0}^{n} q^k, \; q \neq 1$

Příklad 12 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k$

Příklad 13 $\sum_{k=1}^{n} \left(k^2 - k\right) \cdot e^k$

Příklad 14 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot \sin k$

Příklad 15 $\sum_{k=0}^{n} H_k$

Příklad 16 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

Příklad 17 Najděte regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

Příklad 18 Najděte regulární reprezentaci podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$, kde $a_n = \frac{1}{n(n+3)}$.

Příklad 19 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = n$.

Příklad 20 Určete stupeň polynomu f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 18.

Příklad 21 Určete stupeň polynomu f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \frac{2n-1}{2^n}$, je-li regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ rovna $p_n = 2n-1, q_n = 1, r_n = 2$.

Příklad 22 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \frac{2^n}{n+1}$, je-li regulární reprezentace podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ rovna $p_n = 1, q_n = 2n, r_n = n+1$.

Příklad 23 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 18.

Příklad 24 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro a_n z příkladu 19.

Příklad 25 Najděte polynom f_n splňující podmínku (7) věty 2 pro $a_n = \frac{1}{n^2}$, je-li regulární reprezentací podílu $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ trojice polynomů $p_n = 1, q_n = n^2 - 2n + 1$, $r_n = n^2$ a stupeň polynomu f_n je $k = 0$.

Příklad 26 $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n (n+1)$

Příklad 27 $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

Příklad 28 $\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1)$

Příklad 29 $\sum_{k=1}^{n} (-2)^k = \frac{2}{3}\left[(-2)^n - 1\right]$

Příklad 30 $\sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \ |q| \neq 1$

Příklad 31 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k = 2^{n+1}(n-1) + 2$

Příklad 32 $\sum_{k=0}^{n} k \cdot q^k, \quad |q| \neq 1$

Příklad 33 $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

Příklad 34 $\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$

Příklad 35 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$

Příklad 36 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Příklad 37 Je dán čtverec o délce strany d, který rozdělíme na čtyři shodné čtverce a jeden z nich znovu na čtyři shodné čtverce atd. (viz obr. 16, 17). Vypočtěte součet obsahů a součet obvodů sjednocení nekonečného počtu vyznačených čtverců.

Příklad 38 Je dán rovnostranný trojúhelník. Spojením středů jeho stran vznikne další trojúhelník, spojíme středy dalšího trojúhelníka atd. Vzniká tak nekonečná řada podobných trojúhelníků. Zabývejme se velikostí součtu obsahů všech takto vzniklých trojúhelníků.

Příklad 39 Sierpińského trojúhelník a koberec

Příklad 40 Kochova vločka

Příklad 41 $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n} = \frac{e^2}{1-e^2}$

Příklad 42 $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Příklad 43 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

Příklad 44 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}}$

Příklad 45 $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{k+1}$

Příklad 46 $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$

Příklad 47 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 5^{k-1}} = 5 \ln \frac{5}{4}$

Příklad 48 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{k!} = 15e$

Příklad 49 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot k!}{n^k} \binom{n}{k} = n$

Příklad 50 $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2 - 2k - 1}{k^2(k+1)^2} \cdot 2^k$

Příklad 51 $\sum_{k=4}^{n} \frac{4(1-k)(k^2-2k-1)}{k^2(k+1)^2(k-2)^2(k-3)^2}$

Příklad 52 $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^4 \cdot 4^k}{\binom{2k}{k}}$

Příklad 53 $\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} \left(\frac{m}{2} - k \right)$

Příklad 54 $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{\frac{1}{2}}{m-k+1}\binom{\frac{1}{2}}{m+k}$

Příklad 55 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$

Příklad 56 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}=\frac{1}{4}$

Příklad 57 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

Příklad 58 Dokažte rovnost $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$, kde $k,n\in N, k\le n$.

Příklad 59 Dokažte rovnost $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 2^k=3^n$, kde $k,\, n\in N,\, k\le n$.

Příklad 60 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$

Příklad 61 Dokažte, že alternující součet všech čísel v řádku Pascalova trojúhelníku je 0.

Zdroje

[1] ABRAMOV, S. A.; CARETTE, J. J.; GEDDES, K. O.; LE, H. Q. *Telescoping in the kontext of symbolic summation in Maple*. [online]. [cit. 2009-12-10]. Dostupné z WWW: <http://www.cecm.sfu.ca/~mmonagan/MITACS/papers/geddes.pdf>.

[2] BENDA, Petr, et al. *Sbírka maturitních příkladů z matematiky*. 9. Praha : SPN, 1986. 200 s. ISBN 14-067-86.

[3] BERMAN, G. N. *Sbornik zadač po kursu matěmatičeskovo analyza*. Moskva: Nauka, 1977. 416 s. UDK 517(076.1).

[4] BURJAN, Vladimír; MAXIÁN, Milan. *Opakování z matematiky*: *Pro třídy gymnázií se zaměřením na matematiku*. Praha : SPN, 1991. 279 s. ISBN 80-04-23916-1.

[5] BUŠEK, Ivan. *Řešené maturitní úlohy z matematiky*. 2. Praha: SPN, 1988. 528 s. ISBN 14-290-88.

[6] CALDA, Emil. *Matematika pro gymnázia – Kombinatorika, pravděpodobnost a statistika*. Praha: Prometheus, 1996. 163 s. ISBN 80-8549-10-0.

[7] DĚMIDOVIČ, B. P. *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analyzu*. Moskva: Nauka, 1977. 528 s. UDK 517.0(075.8).

[8] GOSPER, R. W., Jr.: *Decision procedure for indefinite hypergeometric summation*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA.Vol. 75, No. 1, pp. 40-42, January 1978.

[9] GRAHAM. R, KNUTH, D., E., PATASHNIK, O.: *Concrete mathematics*. [online]. [cit. 2009-02-20]. Dostupné z WWW: <http://www.matematica.net/portal/e-books/Graham%20-%20Knuth%20-%20Patashnik%20-%20%20Concrete%20Mathematics.pdf>.

[10] HANČL, Jaroslav. *Kombinatorické identity* [online]. [cit. 2010-05-08]. Dostupné z WWW: <http://mks.mff.cuni.cz/library/KombinatorickeIdentityJH/KombinatorickeIdentityJH.pdf>.

[11] HERMAN, J., KUČERA R., ŠIMŠA, J. *Metody řešení matematických úloh I*. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 278 s. ISBN 80-210-1202-1.

[12] HERMAN, J., KUČERA R., ŠIMŠA, J. *Metody řešení matematických úloh II*. Brno: Masarykova univerzita, 2004. 356 s. ISBN 80-210-3528-5.

[13] HORA, Jaroslav. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole - III. díl*. 1. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2001. 74 s. ISBN 80-7020-092-8.

[14] JIRÁSEK, F.; KRIEGELSTEIN, E.; TICHÝ, Z. *Sbírka řešených příkladů z matematiky*. Praha: SNTL, 1979. 820 s. ISBN 04-013-79.

[15] KAPLAN, Robert D.; KAPLANOVÁ, Elle. *Umění nekonečna*. Praha : Triton, 2010. 366 s. ISBN 978-80-7387-245-8.

[16] KOEPF, Wolfram. *Hypergeometric Summation. An Algorithmic Approach to Summation and Special Function Identities*. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1998. 230 s. ISBN 3-528-06950-3.

[17] KOEPF WOLFRAM. *Summation in Maple*. [online]. [cit. 2008-07-2]. Dostupné z WWW: <http://www.mathematik.uni-kassel.de/koepf/Publikationen/Koepf1996.pdf>.

[18] LISKA, R.; DRŠKA, L.; LIMPOUCH, J.; ŠIŇOR, M.; WESTER, M.; WINKLER, F. *Počítačová Algebra, Algoritmy, Systémy a Aplikace*. [online] . 1998. [cit. 2008-07-02]. Dostupné z WWW: http://kfe.fjfi.cvut.cz/~liska/poalg/>.

[19] MAHNELOVÁ, H.: *Sčítání číselných řad pomocí počítačových algoritmů*. In *Sborník doktorandské sekce konference Informační a komunikační technologie ve vzdělávání*. Konferenci uspořádala Pedagogická fakulta Ostravské univerzity ve dnech 13. - 16. 9. 2010. CD ISBN 978-80-7368-925-4.

[20] MAHNELOVÁ, H.; HORA, J. *Summation Problems of High School Mathematics Solved with Selected Algorithms of Computer Algebra*, příspěvek na mezinárodní konferenci CADGME 2010 (Computer Algebra and Dynamic Geometry Systems in Mathematics Education). 29. 6. – 1. 7. 2010 Hluboká n. Vltavou.

[21] MINORSKIJ, V. P. *Sbírka úloh z vyšší matematiky*. Z ruš. přel. Miroslav Fiedler. 2. Praha: STNL, 1964. 290 s.

[22] NELSEN ROGER, B.: *Proofs Without Words*.[online]. 2009 [cit. 2009–12-8]. Dostupný z WWW: <http://www.xiaoe.org/data/2009-10-06/prfwithout.pdf>.

[23] NEMES, István; PETKOVŠEK, Marco; WILF, Herbert S.; ZEILBERGER Doron. *How To Do MONTHLY Problems With Your Computer* [online]. [cit. 2008-07-10]. Dostupné z WWW: <http://www.math.upenn.edu/~wilf/NPWZ.pdf >.

[24] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. Praha: Prometheus, 1996. 126 s. ISBN80-85849-91-7.

[25] PETKOVŠEK, Marko ; WILF, Herbert S.; ZEILBERGER, Doron. *A=B* [online]. [s.1.] : [s.208], 17.4.1997 [cit. 2008-07-2]. Dostupné z WWW: <http://www.math.upenn.edu/~wilf/AeqB.pdf>.

[26] POLÁK, Josef. *Středoškolská MATEMATIKA v úlohách II*. Praha : Prometheus, 1999. 626 s. ISBN 80-7196-166-3.

[27] ŠTĚTINA, Tomáš. *Diferenciální versus diferenční počet* [online]. 2009 [cit. 2013-03-24]. Diplomová práce. Masarykova univerzita, Pedagogická fakulta. Vedoucí práce Pavel Řehák. Dostupné z: WWW: <http://is.muni.cz/th/105651/pedf_m/>.

[28] ŠVRČEK, Jaroslav. *O teleskopickych součtech a součinech*. MFI, roč. 20, 2010/11, č. 10, s. 577-585.

[29] TROJOVSKÝ, Pavel. *O fraktálech a úlohách vedoucích ke geometrické řadě. Rozhledy matematicko-fyzikální*. 2006, 81, 1, s. 1-8. Dostupný také z WWW: <class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=50>. ISSN 0035-9343.

[30] TURZÍK, D., PAVLÍKOVÁ, P. *Diskrétní matematika*. Praha: VŠCHT, 2007. ISBN 978-80-7080-667-8.

[31] VEJSADA, F.; TALAFOUS, F. *Sbírka úloh z matematiky pro gymnasia*. Praha: SPN, 1969. 688 s. ISBN 15-534-69.

[32] VOLDÁNOVÁ, Anna. *Lineární diferenční rovnice prvního řádu a její aplikace* [online]. [cit. 2013-03-24]. Dostupné z WWW: <http://is.muni.cz/th/150974/prif_m/Diplomova_prace.pdf>.

[33] WINKLER, F. *Polynomial Algorithms in Computer Algebra*, Springer Verlag Wien, 1996.