Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Srovnání evolučních dynamik

PLZEŇ, 2014

Václav Hasenöhrl

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 3. června 2014

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěl bych poděkovat RNDr. Petru Stehlíkovi, Ph.D. za konzultace, trpělivost a cenné rady při psaní této práce. Dále bych chtěl poděkovat rodině a své přítelkyni za jejich podporu.

Abstrakt

Cílem této práce je seznámit čtenáře s problematikou evoluční dynamiky z pohledu teorie her. První část práce obsahuje základní pojmy týkající se populačních her. V další kapitole představíme dvě evoluční dynamiky - replikátorovou dynamiku a Smithovu dynamiku. Na příkladech si demonstrujeme jejich rozdílné chování a popíšeme jejich základní vlastnosti. Jako poslední se podíváme na hry, kde bude užitek dán parametrem. V tomto případě nás budou zajímat změny v Nashových rovnováhách a stabilitě stacionárních bodů.

Klíčová slova: teorie her, populační hry, evoluční dynamika, replikátorová dynamika, Smithova dynamika, bifurkace

Abstract

This work's aim is above all to acquaint the reader with the issues connected to evolutionary dynamics from perspective of game theory. In the beginning of the thesis we introduce basic concepts regarding population games. In the next chapter we describe two evolutionary dynamics - replicator dynamic and Smith dynamic. We use a few examples to show differences in their behavior and to demonstrate their basic properties. In the end we add a parameter into the payoff matrix and we study changes in Nash equilibriums and stability of stationary points.

Keywords: game theory, population games, evolutionary dynamics, replicator dynamic, Smith dynamic, bifurcation

Obsah

1 Úvod **2**

2 Populační hry **3**
2.1 Jednopopulační hry 3

3 Evoluční dynamika **9**
3.1 Průměrová dynamika 9
3.2 Replikátorová dynamika 15
3.3 Smithova dynamika 24

4 Jednopopulační hry s parametrem **30**
4.1 Diskrétní přechod v hrách s parametrem 30
4.2 Spojitý přechod v hrách s parametrem 34

5 Závěr **37**

Kapitola 1

Úvod

Teorie her je širokou vědní disciplínou, která má své využití například v ekonomii nebo v biologii. Velké množství možností, které struktury daných her mohou mít, dává i nesčetné množství pohledů, jak lze na teorii her nahlížet. V této práci se zaměříme na klasické jednopopulační hry se třemi strategiemi. Základní pojmy této problematiky shrneme v rychlosti v Kapitole 2.

Nejdůležitější částí této práce je Kapitola 3. Jak už název bakalářské práce napovídá, v této kapitole nám půjde o srovnání základních evolučních dynamik. Jednou z nich bude replikátorová dynamika, která představuje Darwinovské pojetí evoluce a druhou bude Smithova dynamika. Na uvedených příkladech budeme demonstrovat jejich vlastnosti a chování. Budeme řešit hlavně stabilitu stacionárních bodů a to, zda odpovídají tyto body Nashovým rovnováhám.

Jako poslední v této práci nahlédneme do problematiky bifurkací. Konkrétně budeme řešit příklad, ve kterém bude užitek některých strategií určen parametrem. V závislosti na tomto parametru budeme řešit změnu v rovnováhách a stacionárních bodech.

Výpočty a simulace byly provedeny v programu Matlab, v jednom případě v Mathematice. Soubory se zdrojovými kódy jsou součástí přiloženého CD.

Kapitola 2

Populační hry

2.1 Jednopopulační hry

Na začátku si v rychlosti zadefinujeme základní pojmy vztahující se k populačním hrám. Uvažujme jednu populaci hráčů, jejichž počet je N. Tito hráči mají možnost volit si (čistou) strategii, kterou budou využívat při hraní. Množinu těchto strategií, která je pro všechny hráče stejná, označíme $S = \{1, ..., n\}$. Počet hráčů hrajících strategii $i \in S$ je n_i. Poměr jednotlivých strategií v populaci můžeme popsat vektorem $\mathbf{x}$, jež náleží stavovému prostoru $\mathbf{X}^n = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$. Jednotlivé složky (řádkového) vektoru $\mathbf{x}$ lze vyjádřit jako $x_i = \frac{n_i}{N}$. Jednopopulační hru budeme popisovat užitkovou maticí $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (pro vícepopulační hry bychom potřebovali více užitkových matic). Prvek $a_{i,j}$, $i, j \in S$ udává užitek, který získá hráč hrající strategii i, pokud se střetne se soupeřem hrajícím strategii j.

Definujme obecnou užitkovou funkci $\mathbf{F} : \mathbf{X}^n \to \mathbb{R}^n$. Složky $F_i(\mathbf{x})$ (zkráceně F_i) představují užitek pro hráče hrající strategii i, když rozdělení strategií v populaci je $\mathbf{x}$. Využitím prvků užitkové matice $\mathbf{A}$ dostáváme předpis $F_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j$. Vektorově

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}^T. \tag{2.1}$$

Příklad 1. Uvažujme jednopopulační hru se dvěma strategiemi $\{1, 2\}$ a s užitkovou maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Pro rozdělení populace $\mathbf{x}$ dostáváme užitkovou funkci $\mathbf{F} = \mathbf{A}\mathbf{x}^T$, tj.

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}.$$

■

Otázka, která přirozeně vyvstává z Příkladu 1, je, jaké strategie by měli hráči zvolit, aby jejich užitek byl co nejvyšší. Abychom byli schopni na tuto otázku odpovědět, musíme

nejprve přesně určit, jakým způsobem bude docházet k interakci jednotlivých hráčů z dané populace.

Definice 1. *(statická hra)* Střetnutí dvou nebo více hráčů, kteří si jednorázově zvolí svoji strategii, přičemž neví o volbách svých soupeřů, nazveme *statickou hrou*. [2, Kapitola 4]

Poznámka 1. Důležitým předpokladem ve statické hře je racionalita hráčů. To znamená, že jediným kritériem při volbě strategií je maximalizace svého užitku.

Hráči z dané populace spolu tedy hrají statickou hru. Pokud nebude řečeno jinak, omezíme se vždy na střetnutí pouze dvou hráčů. Nyní se podíváme, jak lze statickou hru dvou hráčů výhodně matematicky zapsat a poté se zaměříme na řešení této hry.

Příklad 2. Uvažujeme statickou hru dvou hráčů se třemi strategiemi $\{1, 2, 3\}$. Hráče si označíme písmeny α, β. Tito hráči patří do stejné populace, což znamená, že jejich užitky plynou z užitkové matice $\mathbf{A}$. Víme, že prvek $a_{i,j}$ udává užitek, který získá hráč hrající strategii i, když soupeř hraje strategii j. Odtud plyne, že soupeř získá užitek $a_{j,i}$. Aby toto bylo vidět hned na první pohled, vytvoříme tzv. *bimatici*. To je matice, která bude mít v každé buňce jak prvek $a_{i,j}$, tak prvek $a_{j,i}$. Tuto bimatici označíme $\mathbf{A_A}$ a budeme ji zapisovat do tabulky následujícím způsobem:

		β		
		1	2	3
α	1	$a_{1,1}; a_{1,1}$	$a_{1,2}; a_{2,1}$	$a_{1,3}; a_{3,1}$
	2	$a_{2,1}; a_{1,2}$	$a_{2,2}; a_{2,2}$	$a_{2,3}; a_{3,2}$
	3	$a_{3,1}; a_{1,3}$	$a_{3,2}; a_{2,3}$	$a_{3,3}; a_{3,3}$

Hráče α potom nazveme řádkovým hráčem a jeho užitky se řídí „levými“ prvky v jednotlivých buňkách. Hráč β je sloupcový hráč a využívá „pravé prvky“.

■

Přestože oba hráči v jednopopulační statické hře používají stejnou užitkovou matici $\mathbf{A}$, při bimaticovém zápisu je pro sloupcového hráče matice $\mathbf{A}$ transponovaná. Proto zavedeme nové označení

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{B},$$

kde $b_{i,j}$ $(i, j \in S)$ budou jednotlivé prvky matice $\mathbf{B}$. Potom bimatice z Příkladu 2 bude mít následující tvar:

		β		
		1	2	3
α	1	$a_{1,1}; b_{1,1}$	$a_{1,2}; b_{1,2}$	$a_{1,3}; b_{1,3}$
	2	$a_{2,1}; b_{2,1}$	$a_{2,2}; b_{2,2}$	$a_{2,3}; b_{2,3}$
	3	$a_{3,1}; b_{3,1}$	$a_{3,2}; b_{3,2}$	$a_{3,3}; b_{3,3}$

Položme si nyní otázku, jak budou hráči volit své strategie, aby pro ně byly optimální.

Jejich volba bude vycházet z řešení této hry. Podívejme se, jak lze k tomuto řešení dojít. Předpokládejme, že existuje strategie, která dává hráči vždy vyšší užitek než ostatní strategie bez ohledu na to, jakou strategii hrají soupeři.

Definice 2. *(dominantní strategie)* Řekneme, že strategie $i^* \in S$ *ostře*, respektive *neostře dominuje* strategii $i \in S$, pokud

$$a_{i^*,j} > a_{i,j} \quad \forall j \in S,$$

respektive

$$a_{i^*,j} \geq a_{i,j} \quad \forall j \in S.$$

[2, Kapitola 4]

Samozřejmě platí, že pokud strategie i^* dominuje strategii i pro hráče α, platí toto i pro hráče β.

Jak ale vyřešit statickou hru, ve které nebude existovat dominantní strategie? Odpověď na tuto otázku nám dá následující definice.

Definice 3. *(čistá Nashova rovnováha)* Řekneme, že dvojice (čistých) strategií (i^*, j^*) je *čistá Nashova rovnováha*, pokud

$$a_{i^*,j^*} \geq a_{i,j^*} \quad \forall i \in S$$

a

$$b_{i^*,j^*} \geq b_{i^*,j} \quad \forall j \in S.$$

[2, Kapitola 4]

Jinak řečeno, hráč nemá pobídku, změnou vlastní strategie, si polepšit. Nashova rovnováha je základním stavebním kamenem pro celou teorii her.

Příklad 3. Nechť $S = \{1, 2, 3\}$ je množina strategií v jednopopulační hře s užitkovou maticí

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Uvažujme statickou hru dvou hráčů z této populace. Naším záměrem je určit řešení této hry. Sestavme bimatici $\mathbf{A_A}$:

	1	2	3
1	1;1	2;2	3;5
2	2;2	4;4	7;6
3	5;3	6;7	8;8

„Levé“ prvky bimatice $\mathbf{A_A}$ porovnáme řádkově a podtrhneme si vždy nejvyšší prvek. To samé uděláme s „pravými“ prvky, ale porovnáváme sloupcově. Tedy

	1	2	3
1	1;1	2;2	3;$\underline{5}$
2	2;2	4;4	7;$\underline{6}$
3	$\underline{5}$;3	$\underline{6}$;7	$\underline{8}$;$\underline{8}$

Podle Definice 3 podtržení obou prvků na jedné pozici představuje *Nashovu rovnováhu*. V našem případě je rovnováhou kombinace strategií $(3, 3)$. Navíc snadno určíme, že strategie 3 je dominantní strategií.

■

V předchozím příkladu jsme si ukázali, jak lze nalézt Nashovu rovnováhu. Rozeberme ale ještě následující příklad.

Příklad 4. Mějme obdobné zadání jako v Příkladu 3, ale uvažujme jinou užitkovou bimatici. Rovnou si podtrhneme nejvyšší prvky v jednotlivých řádcích a sloupcích.

	1	2	3
1	0;0	$\underline{1}$;-1	-1;$\underline{1}$
2	-1;$\underline{1}$	0;0	$\underline{1}$;-1
3	$\underline{1}$;-1	-1;$\underline{1}$	0;0

Vidíme, že „podtrhávací“ metodou jsme rovnováhu nenašli, přesto tato hra rovnováhu má. Podívejme se tedy na následující definici.

Definice 4. *(smíšená strategie)* Nechť $S = \{1, ..., n\}$ je množina strategií, které hráč může používat. Řekneme, že vektor

$$\boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{P}(1), ..., \mathbb{P}(n))$$

je *smíšená strategie*, pokud $\mathbb{P}(1), ..., \mathbb{P}(n)$ označují pravděpodobnosti, s jakými hráč hraje jednotlivé strategie z množiny S. [2, Kapitola 2]

Množinu všech smíšených strategií označíme Σ (Pro jednopopulační hru máme opět pouze jednu matici Σ společnou pro všechny hráče). Snadno navíc odvodíme, že smíšená strategie je vlastně zobecněním čisté strategie. Čistou strategii i totiž lze zapsat jako smíšenou strategii, kde pravděpodobnosti $\mathbb{P}(j) = 0$ pro všechna $j \in S$, $j \neq i$ a $\mathbb{P}(i) = 1$, tj. $(0, ..., 1, ..., 0)$. Vztah mezi množinami S a Σ je tedy samozřejmě: $S \subset \Sigma$. Čistou strategii zapsanou ve smyslu smíšených strategií označíme $\mathbf{e}_i$.

Jelikož Definice 3 uvažuje pouze čisté strategie, je nutné ji rozšířit i na množinu smíšených strategií. Nejprve určeme, jak zjistit užitek hráče α hrajícího strategii $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$, když soupeř β hraje strategii $\boldsymbol{\sigma}_\beta$. Obecný užitek hráče α lze určit použitím užitkové funkce (2.1), kam za $\mathbf{x}$ dosadíme právě strategii $\boldsymbol{\sigma}_\beta$, tj. $\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_\beta)$. Konkrétní hodnotu užitku pro hráče α a jeho strategii $\boldsymbol{\sigma}_\alpha$ zjistíme jako

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}_\beta).$$

Definice 5. *(smíšená Nashova rovnováha)* Řekneme, že dvojice (smíšených) strategií $(\boldsymbol{\sigma}^*_\alpha, \boldsymbol{\sigma}^*_\beta)$ je *smíšená Nashova rovnováha*, pokud

$$\boldsymbol{\sigma}^*_\alpha \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^*_\beta) \geq \boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^*_\beta) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_\alpha \in \Sigma,$$

a

$$\boldsymbol{\sigma}^*_\beta \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^*_\alpha) \geq \boldsymbol{\sigma}_\beta \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}^*_\alpha) \quad \forall \boldsymbol{\sigma}_\beta \in \Sigma.$$

[2, Kapitola 4]

Poznámka 2. Definice 5 je zobecněním Definice 3. Proto v dalších částech tohoto textu budeme používat označení Nashova rovnováha, respektive pouze rovnováha ve smyslu Definice 5.

V tomto okamžiku umíme nalézt všechny Nashovy rovnováhy, které může statická hra obsahovat. Vraťme se tedy zpět k Příkladu 4. Víme, že rovnováhu pouze z čistých strategií tato hra nemá. Pokusme se nalézt rovnováhu mezi smíšenými strategiemi. Označme p, q respektive r pravděpodobnosti, se kterými budou hráči hrát strategie $1, 2$ respektive 3.

		p	q	r
		1	2	3
p	1	0;0	1;-1	-1;1
q	2	-1;1	0;0	1;-1
r	3	1;-1	-1;1	0;0

Poznámka 3. Hodnoty p, q a r představují pravděpodobnosti, proto $p + q + r = 1$, resp. $r = 1 - p - q$.

Řekli jsme, že kombinace určitých strategií je Nashova rovnováha, pokud si hráč změnou vlastní strategie nemůže polepšit. Z pohledu hráče α to znamená, že hledáme rozdělení strategií soupeře β tak, aby užitky F_i hráče α byly pro všechny strategie stejné (maximální). Hodnotu tohoto hledaného užitku si označíme u. Využitím vztahu (2.1), do kterého dosadíme za $\mathbf{x}$ pravděpodobnostní rozdělení $(p, q, 1 - p - q)$, dostaneme následující soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u &= q - 1 + p + q, \\ u &= -p + 1 - p - q, \\ u &= p - q. \end{aligned}$$

Kořeny této soustavy jsou $p = \frac{1}{3}, q = \frac{1}{3}$ a $u = 0$. Užitek samotný nás nezajímá, důležité jsou hlavně pravděpodobnosti p a q, pomocí nichž dopočteme pravděpodobnost r. Výsledkem je smíšená strategie $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Protože se jedná o jednopopulační hru, pro druhého hráče bychom dostali totožnou soustavu. Než ale řekneme, že kombinace $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ je

opravdu Nashova rovnováha, musíme provést následující úvahu. Vypišme si jednotlivé užitky F_i pro rozdělení $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$:

$$F_1 = 0,$$
$$F_2 = 0,$$
$$F_3 = 0.$$

Odtud jasně plyne, že druhý hráč si změnou vlastní strategie nemůže polepšit, a proto je kombinace $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ opravdu Nashova rovnováha této hry.

■

Aby nedošlo v následujících kapitolách k nedorozumění, udělejme malou odbočku. Hru v Příkladu 4 jsme řešili pomocí pravděpodobnostního rozdělení (p, q, r) namísto populačního rozdělení $\mathbf{x}$. V podstatě ale oba vektory představují tu samou věc. Rozdělení strategií (p, q, r), které představuje ve statické hře Nashovu rovnováhu, je zároveň optimálním rozdělením strategií v dané populaci, tj. $(p, q, r) = \mathbf{x}$, a proto je jedno, jaké (pravděpodobnostní) rozdělení vlastně použijeme k řešení konkrétní hry.

Kapitola 3

Evoluční dynamika

Na rozdíl od statického pojetí her, kde spolu hrají hráči pouze v jednom kole, v dynamickém pojetí mezi sebou hráči hrají vícekrát a mají možnost měnit svoji strategii. Motivací pro tento přechod je právě fakt, že hráči mohou během hraní změnit svoji strategii a nás zajímá, jakým způsobem se bude vyvíjet, respektive měnit rozdělení jednotlivých strategií v populaci a zda budou zachovány stejné rovnovážné stavy jako u statických her.

K popisu těchto dynamických her využíváme v praxi obvykle deterministické modely určené diferenciálními rovnicemi. Jelikož se jedná o nelineární diferenciální rovnice, přesné explicitní řešení není většinou k dispozici. Nicméně analýza stability (například pomocí linearizace) nebo numerické řešiče nám umožňují dobře porozumět chování těchto modelů.

3.1 Průměrová dynamika

V následující části se podíváme, jak lze postupovat při odvozování dynamických modelů pro jednopopulační hry. Jak jsme uvedli na začátku, v dynamické hře se spolu během určité doby střetávají hráči, kteří mají možnost měnit svoji strategii. Uvažujme tedy nějaké pravidlo $\boldsymbol{\rho}$, které udává, podle čeho tak budou činit.

Definice 6. *(revizní pravidlo) Revizní pravidlo* $\boldsymbol{\rho}$ je zobrazení $\boldsymbol{\rho} : \mathbb{R}^n \times \mathbf{X} \to \mathbb{R}^{n \times n}$. Složky $\rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ nazveme intenzitami přechodu ze strategie $i \in S$ na strategii $j \in S$, kde $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ představuje obecnou užitkovou funkci. [1, Kapitola 3]

Obvykle budeme užitkovou funkci $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ vztahovat právě k naší užitkové funkci $\mathbf{F}(\mathbf{x})$. Ke konkrétním volbám revizních pravidel $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ (zkráceně pouze $\boldsymbol{\rho}$) se ale vrátíme později.

Z Definice 6 víme, na základě čeho dochází v populaci ke změnám strategií a jsme tedy schopni mapovat jednotlivá rozdělení $\mathbf{x}_t$ představující stavy populace v čase $t \in \mathbb{R}_0^+$ (označení $\mathbb{R}_0^+$ představuje kladná reálná čísla včetně nuly). Tento náhodný proces lze popsat obecněji zavedením následujícího pojmu.

Definice 7. *(Markovský řetězec)* Systém náhodných veličin $\{\mathbf{M}_t, t \geq 0\}$ se nazývá *Markovský řetězec* se spojitým časem a množinou stavů $\mathbf{X}^n$, jestliže pro všechna

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbf{X}^n$ a všechna $0 \leq t_1 < t_2 < ... < t_k < s < t$, pro která $\mathbb{P}(\mathbf{M}_s = \mathbf{x}, \mathbf{M}_{t_k} = \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{M}_{t_1} = \mathbf{x}_1) > 0$, platí

$$\mathbb{P}(\mathbf{M}_t = y | \mathbf{X}_s = \mathbf{x}, \mathbf{M}_{t_k} = \mathbf{x}_k, ..., \mathbf{M}_{t_1} = \mathbf{x}_1) = \mathbb{P}(\mathbf{M}_t = \mathbf{y} | \mathbf{M}_s = \mathbf{x}). \tag{3.1}$$

[3, Kapitola 3]

Vztah (3.1) vyjadřuje *Markovskou vlastnost*, což znamená, že pravděpodobnost stavu v budoucím čase t, známe-li stav v přítomném čase s a stavy z minulých časů $t_k, ..., t_1$, je stejná, jako když známe jen stav v přítomném čase. [3, Kapitola 3]

Chápat můžeme náš náhodný proces $\{\mathbf{M}_t\}$ asi takto. Jednotliví hráči dostávají příležitosti k hraní hry. Tyto příležitosti jsou navzájem nezávislé a jejich četnost má exponenciální rozdělení E s parametrem λ. [1, Kapitola 3] nebo [3, Kapitola 3] Jejich soupeř je vybrán náhodně a na základě revizního pravidla $\boldsymbol{\rho}$ si hráč s určitou pravděpodobností změní svoji strategii. Na dalším příkladu se podíváme, jak lze konkrétně tuto pravděpodobnost určit. Zásadní bude volba parametru λ.

Příklad 5. Uvažujme množinu stavů (strategií) $S = \{1, 2, 3\}$ Markovského řetězce $\{M_t\}$ s revizním pravidlem

$$\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Řekněme, že náhodný proces $\{\mathbf{M}_t\}$ je na počátku ve stavu 1, tj. $\mathbf{M}_0 = 1$. Víme, že v tomto stavu stráví průměrně dobu $\frac{1}{\lambda}$ (toto odpovídá střední hodnotě exponenciálního rozdělení s parametrem λ). Naším záměrem je určit pravděpodobnosti přechodů mezi jednotlivými strategiemi, abychom byli schopni mapovat další vývoj řetězce $\{\mathbf{M}_t\}$. K tomu využijeme právě intenzity přechodu $\rho_{i,j}$ a průměrný čas strávený v každém stavu $\frac{1}{\lambda}$. Proveďme tedy následující volbu:

$$\lambda \geq \max_{\mathbf{x}, \boldsymbol{\pi}, i} \sum_{j \in S} \rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x}). \tag{3.3}$$

V našem případě (3.2) můžeme tedy brát v úvahu hodnoty $\lambda \geq 11$. Zvolme hned tu první možnou, tj. $\lambda = 11$ a vynásobme revizní pravidlo $\boldsymbol{\rho}$ střední hodnotou $\mathbb{E}(E) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{11}$, tj.

$$\frac{1}{\lambda}\boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} \frac{5}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

Nyní udělejme s maticí (3.4) ještě jednu nutnou úpravu. Diagonální prvky této matice nahraďme rozdílem $1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n} \rho_{i,j}$, tj.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{6}{11} & \frac{3}{11} & \frac{2}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{3}{11} & \frac{7}{11} \\ \frac{5}{11} & \frac{4}{11} & \frac{2}{11} \end{bmatrix}. \tag{3.5}$$

■

Matice (3.5) definovaná v Příkladu 5 se nazývá *matice pravděpodobností přechodů* $\mathbf{P}$ mezi strategiemi z množiny S.

Definice 8. *(matice prav. přechodů)* Matici $\mathbf{P}$ nazveme *maticí pravděpodobností přechodů* mezi strategiemi z množiny S, pokud pro složky $p_{i,j}$ platí

$$p_{i,j} = \frac{1}{\lambda}\rho_{i,j} \quad i \neq j,$$
$$p_{i,i} = 1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\rho_{i,j} \quad i \neq j.$$

Poznámka 4. Volba parametru λ (popsána v [1, Kapitola 3]) podle vztahu (3.3) spolu se změnou diagonálních prvků byla nutná z toho důvodu, aby matice $\mathbf{P}$ byla *stochastická matice*, tj. aby platilo, že

$$i) \quad \sum_{j\in S} p_{i,j} = 1 \quad \forall i \in S,$$
$$ii) \quad p_{i,j} \geq 0 \quad \forall i,j \in S.$$

Jinými slovy, každý řádek matice pravděpodobností přechodů $\mathbf{P}$ představuje pravděpodobnostní rozdělení.

Poznámka 5. Předpokládejme, že platí následující rovnost:

$$\sum_{j\in S}\rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}),\mathbf{x}) = \lambda \text{ pro všechny } \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \in \mathbf{X}^n \text{ a } i \in S. \tag{3.6}$$

V tomto případě pro diagonální prvky revizního pravidla $\boldsymbol{\rho}$ platí:

$$\rho_{i,i} = \lambda - \sum_{j\in S, j\neq i}\rho_{i,j},$$

tj.

$$p_{i,i} = \frac{1}{\lambda}\rho_{i,i} = 1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{j\in S, j\neq i}\rho_{i,j}$$

a není již tedy třeba provádět změnu diagonálních prvků $\boldsymbol{\rho}$. Obecně jinak hodnoty $\rho_{i,i}$ pro nás nemají žádný význam.

Aplikujme naše závěry na původní náhodný proces $\{\mathbf{M}_t\}$. Pokud hráč hrající strategii $i \in S$ obdrží možnost hrát hru, změní svoji strategii na $j \neq i$ s pravděpodobností $p_{i,j} = \frac{1}{\lambda}\rho_{i,j}$ a pokračuje v hraní i s pravděpodobností $p_{i,i} = 1 - \frac{1}{\lambda}\sum_{j=1}^{n}\rho_{i,j}$, kde $j \neq i$. Čas, který uplyne mezi touto změnou, se řídí exponenciálním rozdělením E s parametrem λ. Jak ale později ukážeme, nebude ve výsledku na tomto čase záležet. Nás budou totiž zajímat jen jednotlivé stavy $\{\mathbf{M}_t\}$ a ne doba, kterou řetězec v těchto stavech stráví. Pojďme se tedy podívat na pravděpodobnosti přechodů mezi těmito stavy.

Poznámka 6. Je nutné rozlišovat mezi pravděpodobnostmi přechodů mezi jednotlivými strategiemi a pravděpodobnostmi přechodů mezi jednotlivými stavy samotného řetězce $\{\mathbf{M}_t\}$.

Příklad 6. (Zadání tohoto příkladu převzato z [1, Kapitola 9]) Uvažujme rozdělení $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ populace o velikosti N, užitkovou funkci $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ a čas τ_k, který udává příchod k-té příležitosti k hraní hry. Pravděpodobnost, že pro tuto příležitost bude vybrán hráč hrající strategii i je x_i. Chceme určit pravděpodobnost přechodu ze stavu $\mathbf{x}$ ke stavu $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$.

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\tau_{k+1}} = \mathbf{y} | \mathbf{M}_{\tau_k} = \mathbf{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{x_i \rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\lambda} & , \mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{1}{N}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i), j \neq i, \\ 1 - \sum\limits_{j \in S} \dfrac{x_i \rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x})}{\lambda} & , \mathbf{x} = \mathbf{y}, j \neq i, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pokud platí vztah (3.6) potom dostáváme pravděpodobnost

$$\mathbb{P}\left(\mathbf{M}_{\tau_{k+1}} = \mathbf{y} | \mathbf{M}_{\tau_k} = \mathbf{x}\right) = \begin{cases} x_i \rho_{i,j}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) & , \mathbf{y} = \mathbf{x} + \frac{1}{N}(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i), j \neq i, \\ x_i \rho_{i,i}(\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) & , \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

■

Využitím předchozích poznatků o náhodném procesu $\{\mathbf{M}_t\}$ se pokusme aproximovat jeho trajektorii nějakým deterministicky určeným předpisem. Řekli jsme, že příležitosti k hraní přicházejí nezávisle na sobě s exponenciálním rozdělením s parametrem λ. Chceme určit, kolik takových příležitostí přijde během časového intervalu $[0, t]$. Lze ukázat, že tento počet se řídí Poissonovým rozdělením P, kde $\mathbb{E}(P) = \lambda t$ je střední hodnota rozdělení P. [1, Kapitola 9]

Uvažujme tedy nějaký velmi malý časový okamžik dt, během něhož chceme určit trajektorii procesu $\{\mathbf{M}_t\}$. Víme, že každý hráč obdrží průměrně λdt příležitostí k hraní. Řekněme dále, že současné rozdělení populace je $\mathbf{x}$. Průměrný počet příležitostí pro hráče, kteří hrají strategii $i \in S$ je potom přibližně

$$N x_i \lambda dt. \tag{3.7}$$

Přibližně proto, že rozdělení populace $\mathbf{x}$ se může během doby dt změnit. Jelikož uvažujeme dobu dt pouze velmi malou, bude i předpokládaná změna v $\mathbf{x}$ velmi malá. Pravděpodobnost přechodu mezi strategiemi $i, j \in S$ jsme určili výše jako $\frac{1}{\lambda}\rho_{i,j}$. Touto pravděpodobností rozšíříme vztah (3.7), tj.

$$N x_i \rho_{i,j} dt, \tag{3.8}$$

a dostaneme přibližný průměrný počet přechodů ze strategie i na strategii j během doby dt při velikosti populace N. Podobně vytvořme předpis pro přibližný průměrný přírůstek ve hraní strategie i. Tedy

$$N x_j \rho_{j,i} dt. \tag{3.9}$$

Využitím vztahů (3.8) a (3.9) jsme schopni určit, že přibližná očekávaná změna v počtu hráčů hrajících strategii i během okamžiku dt je

$$\begin{aligned} n_i &= N\sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i}dt - N\sum_{j\in S} x_i\rho_{i,j}dt, \\ \frac{n_i}{N} &= \sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i}dt - \sum_{j\in S} x_i\rho_{i,j}dt, \\ \frac{x_i}{dt} &= \sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i} - \sum_{j\in S} x_i\rho_{i,j}, \\ \dot{x}_i &= \sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i} - \sum_{j\in S} x_i\rho_{i,j}, \end{aligned}$$

kde $\dot{x}_i$ značí derivaci poměru hráčů hrajících strategií i podle času t. Důležitým předpokladem pro tuto úvahu byl fakt, že velikost populace N jsme limitně zvětšili, což zajistilo, že počet očekávaných přechodů mezi jednotlivými strategiemi během malého okamžiku dt byl veliký.

V této fázi jsme konečně schopni definovat předpis pro základní deterministickou dynamiku, která je založená na obecném *revizním pravidle* $\boldsymbol{\rho}$.

Definice 9. *(průměrová dynamika)* Nechť $\mathbf{x}$ je rozdělení strategií v populaci, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ je užitková funkce populační hry a $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ revizní pravidlo. Potom

$$\dot{x}_i = \sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) - x_i\sum_{j\in S} \rho_{i,j}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \tag{3.10}$$

je *průměrová dynamika*. [1, Kapitola 3]

První suma ve vztahu (3.10) značí přírůstek v počtu hráčů hrajících strategií i, zatímco druhá suma značí jejich odbyt. Zaveďme nové označení, ve kterém přepíšeme vztah (3.10) vektorově, tj.

$$\dot{\mathbf{x}} = D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x}). \tag{3.11}$$

O tom, že Markovský řetězec $\{\mathbf{M}_t\}$ opravdu aproximuje průměrovou dynamiku $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ hovoří následující věta.

Věta 1. Mějme Markovský řetězec $\{\mathbf{M}_t\}$ a lipsitzovsky spojitou průměrovou dynamiku $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$. Nechť počáteční podmínka $\mathbf{M}_0 = \mathbf{x}_0$ konverguje k určitému stavu $\mathbf{y} \in \mathbf{X}$ a nechť $\{\mathbf{x}_t\}_{t\geq 0}$ je řešením průměrové dynamiky (3.11) s počáteční podmínkou $\mathbf{x}_0$. Potom pro všechna $T < \infty$ a $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\mathbf{M}_t - \mathbf{x}_t| < \varepsilon\right) = 1. \tag{3.12}$$

[1, Kapitola 9, Kurtz's theorem]

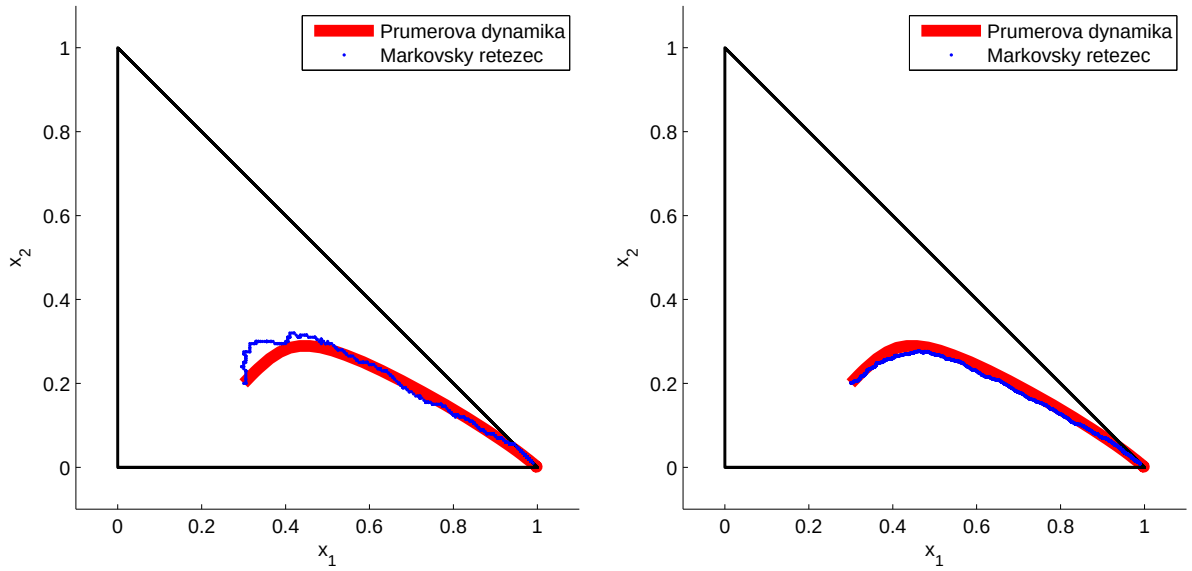
Místo důkazu této věty se raději podíváme na konkrétní příklad. Vykresleme si pomocí počítačové simulace průběhy $\{\mathbf{M}_t\}$ a $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$. Z rovnosti (3.12) plyne, že čím větší je N, tím více se budou jednotlivé trajektorie přibližovat.

Příklad 7. Uvažujme jednopopulační hru s užitkovou bimaticí

	1	2	3
1	6;6	2;4	4;3
2	4;2	2;2	6;6
3	3;4	6;6	1;1

, (3.13)

konkrétní revizní pravidlo $\boldsymbol{\rho}(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{x})$ (jeho předpis si uvedeme později; viz (3.14)) a počáteční podmínku $\mathbf{x}_0 = (0.3, 0.2, 0.5)$. Nasimulujme trajektorie průměrové dynamiky $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ a Markovského řetězce $\{\mathbf{M}_t\}$.



(a) N = 200 (b) N = 1000

Obrázek 3.1: Aproximace trajektorie průměrové dynamiky $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ trajektorií Markovského řetězce $\{\mathbf{M}_t\}$

■

Jak je možné pozorovat z Obrázku 3.1, při velikosti populace $N = 200$ je krok příliš veliký a aproximace není dobrá. Pro $N = 1000$ už ale dostáváme celkem uspokojivý výsledek.

Poznámka 7. Přestože hra v Příkladu 7 má tři strategie, tj. nacházíme se v trojrozměrném prostoru, můžeme vykreslit řešení pouze do dvojrozměrného prostoru. Tato úvaha vychází z toho, že průměrová dynamika $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ je definovaná na stavovém prostoru $\mathbf{X} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$, proto jsme schopni jednu složku $\mathbf{x}$ vyjádřit jako $x_i = 1 - \sum_{j \neq i} x_j$.

Aniž bychom to později speciálně připomínali, výpočty a obrázky budeme dělat pomocí redukovaného prostoru $\mathbf{X}^{n-1}$, ale výsledky (např. stacionární body) budeme interpretovat do celého prostoru $\mathbf{X}^n$.

Vraťme se ještě na chvíli zpět ke hře z Příkladu 7. Tato hra má tři čisté Nashovy rovnováhy: $(1,1), (2,3)$ a $(3,2)$. Z Obrázku 3.1 je možné pozorovat, že z počáteční podmínky $\mathbf{x}_0 = (0.3, 0.2, 0.5)$ konverguje řešení $D^{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ k bodu $(1,0,0)$, který odpovídá právě Nashově rovnováze $(1,1)$. Zdá se tedy, že průměrová dynamika, která vznikla použitím revizního pravidla (3.14), zachovává rovnovážné stavy a konverguje k nim. Tímto se ale budeme zabývat až v následujících kapitolách. V nich si ukážeme, jak lze z rovnosti (3.10) odvodit základní deterministické dynamiky uváděné literaturou pomocí konkrétní volby revizního pravidla $\boldsymbol{\rho}$. Poté se na dvou příkladech podíváme na jejich základní vlastnosti. Co nás ale bude zajímat nejvíce, je vztah Nashových rovnováh se stacionárními (pevnými) body jednotlivých dynamik.

3.2 Replikátorová dynamika

Nejběžnějším typem evoluční dynamiky je z pohledu teorie her zcela jistě *replikátorová dynamika*, která vychází z Darwinovského pojetí evoluce. Její odvození je následovné. Uvažujme konkrétní revizní pravidlo [1, Kapitola 3] dané předpisem:

$$\rho_{i,j} = x_j \left[F_j - F_i\right]_+ . \tag{3.14}$$

Poznámka 8. $[x]_+$ je kladná část čísla $x \in \mathbb{R}$ definovaná jako

$$[x]_+ = \begin{cases} x & \text{, pokud } x > 0, \\ \\ 0 & \text{, pokud } x \leq 0. \end{cases}$$

Rovnost (3.14) představuje následující situaci. Hráč se strategií $i \in S$ přejde na strategii $j \in S$ s intenzitou, která odpovídá součinu relativního počtu hráčů hrajících strategii j a rozdílu užitků jednotlivých hráčů. Dosazením vztahu (3.14) do předpisu (3.10) pro průměrovou dynamiku dostaneme tento tvar:

$$\begin{aligned} \dot{x_i} &= \sum_{j\in S} x_j\rho_{j,i} - x_i \sum_{j\in S} \rho_{i,j} = \sum_{j\in S} x_j x_i \left[F_i - F_j\right]_+ - x_i \sum_{j\in S} x_j \left[F_j - F_i\right]_+ \\ &= x_i \sum_{j\in S} x_j \left(F_i - F_j\right) = x_i \left(F_i \sum_{j\in S} x_j - \sum_{j\in S} x_j F_j\right) \\ &= x_i \left(F_i - \sum_{j\in S} x_j F_j\right). \end{aligned} \tag{3.15}$$

Vztah (3.15) zapsaný vektorově

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}\left(\mathbf{F} - \mathbf{x}\mathbf{A}\mathbf{x}^T\right), \tag{3.16}$$

kde **A** je užitková matice, představuje soustavu diferenciálních rovnic, které určují *replikátorovou dynamiku*. [1, Kapitola 3] Situace je taková, že zastoupení i-té strategie v populaci roste, pokud užitek plynoucí z jejího hraní je větší než součin $\mathbf{xAx}^T$. Ten představuje průměrný užitek celé populace a označíme si ho $\bar{F}(\mathbf{x})$. Pro replikátorovou dynamiku navíc platí, že strategie, které se v populaci již nevyskytují, se nemohou znovu obnovit. To lze snadno určit pouze pohledem na předpis (3.15). Pokud je totiž člen před závorkou x_i roven nule, $\dot{x}_i$ bude také vždy nula. Ukažme si nyní konkrétní příklady, kde si vykreslíme fázové portréty této dynamiky a budeme se zabývat jejím chováním.

Příklad 8. Uvažujme jednopopulační hru, která je dána užitkovou bimaticí

	1	2	3
1	1;1	0;0	0;0
2	0;0	1;1	0;0
3	0;0	0;0	1;1

.

Naším úkolem je vyřešit tuto hru, poté sestavit replikátorové rovnice, určit jejich stacionární body, porovnat je s Nashovými rovnováhami této hry a nakonec určit jejich stabilitu. Nejprve určíme řešení této statické hry. Rovnou z užitkové bimatice „podtrhávací“ metodou určíme, že hra má tři čisté Nashovy rovnováhy $(1,1)$, $(2,2)$ a $(3,3)$. Dále stanovíme užitkové funkce $F_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j$:

$$\begin{aligned} F_1 &= x_1, \\ F_2 &= x_2, \\ F_3 &= x_3 \end{aligned}$$

a pomocí nich se pokusíme zjistit smíšenou Nashovu rovnováhu. Rovnovážný užitek označíme opět u a budeme řešit následující soustavu:

$$\begin{aligned} u &= x_1, \\ u &= x_2, \\ u &= 1 - x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Ve třetí rovnici jsme využili vztahu $x_3 = 1 - x_1 - x_2$. Smíšená strategie, která je jednoznačným řešením této soustavy, je $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. Samozřejmě stejné řešení bychom dostali i pro druhého hráče (jednopopulační hra). Provedením kontroly rovnovážnosti jako v Příkladu 4 můžeme tvrdit, že kombinace strategií $((\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}))$ představuje smíšenou Nashovu rovnováhu.

Nicméně položme si otázku, zda je tato rovnováha jedinou smíšenou rovnováhou této hry? K nalezení odpovědi je nutné si uvědomit, jakým způsobem vlastně vzniká smíšená strategie, respektive smíšená rovnováha. Je to ve skutečnosti určitá lineární kombinace čistých strategií. V tomto případě jsme uvažovali kombinaci všech tří strategií, které máme k dispozici. Co kdyby ale hráči nehráli vůbec strategii 1? Může vzniknout smíšená rovnováha jen mezi strategiemi 2 a 3?

Položme tedy $x_1 = 0$ a vynechme první rovnici z původní soustavy. Potom řešíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} u &= x_2, \\ u &= 1 - x_2. \end{aligned}$$

Tato soustava má opět jednoznačné řešení, $x_2 = \frac{1}{2}$. Dopočteme x_3 a výsledkem je smíšená strategie $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, jejíž kombinací pro oba hráče dostaneme $((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$. Je i tato dvojice Nashovou rovnováhou dané hry? Užitek, který hráči získají z hraní strategie $\boldsymbol{\sigma} = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, je

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{A} \boldsymbol{\sigma}^T = 0.5. \tag{3.17}$$

Pohledem na jednotlivé užitky F_i pro strategii $\boldsymbol{\sigma}$

$$\begin{aligned} F_1 &= 0, \\ F_2 &= 0.5, \\ F_3 &= 0.5 \end{aligned}$$

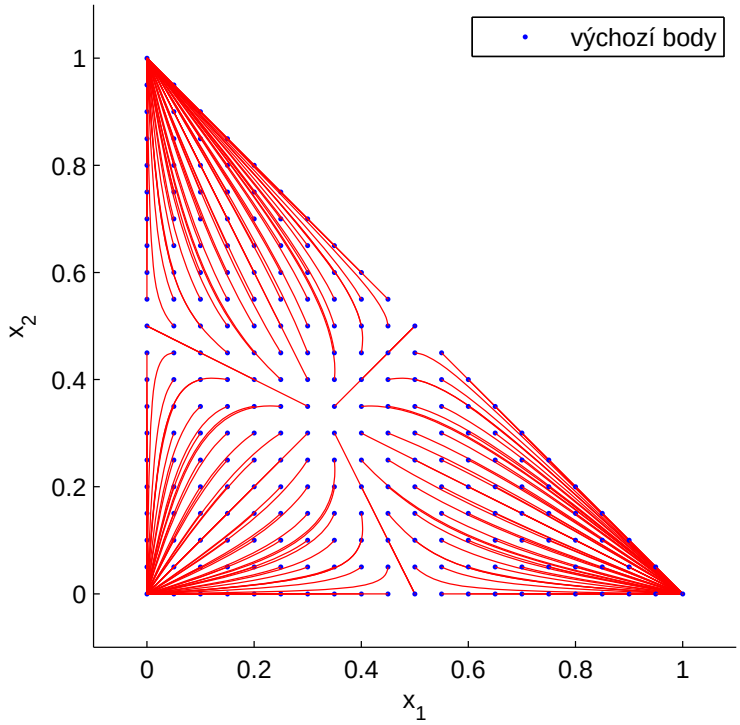
vidíme, že si opět druhý hráč nemůže změnou vlastní strategie polepšit, a proto dvojice $((0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$ je opět Nashova rovnováha. Obdobnou úvahu využijeme i pro ostatní strategie. Položíme $x_2 = 0$ a následně $x_3 = 0$ a zjistíme zbylé rovnováhy. Naše statická hra má tedy celkem sedm Nashových rovnováh, jimiž jsou kombinace strategií:

$$\begin{aligned} &(1,1), (2,2), (3,3), ((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3)), ((0, 1/2, 1/2), (0, 1/2, 1/2)) \\ &((1/2, 0, 1/2), (1/2, 0, 1/2)) \text{ a } ((1/2, 1/2, 0), (1/2, 1/2, 0)). \end{aligned}$$

Sestavme nyní replikátorové rovnice. Pro průměrný užitek v populaci $\bar{F}(\mathbf{x})$ platí, $\bar{F}(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + (1 - x_1 - x_2)^2$. Dosazením užitkových funkcí F_i a průměrného užitku $\bar{F}(\mathbf{x})$ do vztahu (3.15) dostaneme soustavu diferenciálních rovnic:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 \left(x_1 - x_1^2 - x_2^2 - (1 - x_1 - x_2)^2\right), \\ \dot{x}_2 &= x_2 \left(x_2 - x_1^2 - x_2^2 - (1 - x_1 - x_2)^2\right). \end{cases} \tag{3.18}$$

Určit přesné řešení takovýchto nelineárních systémů je buď velmi obtížné a nebo většinou ani neexistuje. Nicméně není problém pomocí vhodného softwaru nalézt numerické řešení. Podívejme se tedy na fázový portrét.



Obrázek 3.2: Fázový portrét soustavy (3.18)

Modré body představují počáteční podmínky. Těch jsme zvolili záměrně více, abychom nastínili chování celého systému. Tento fázový portrét je možné rozdělit do tří pomyslných částí, ve kterých trajektorie konvergují vždy k jedné z čistých Nashových rovnováh, jež jsou představovány body $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$. Místo pouhých odhadů udělejme raději korektní prozkoumání. Začneme určením stacionárních bodů soustavy (3.18). To uděláme tak, že položíme $\dot{x}_1 = 0$ a $\dot{x}_2 = 0$ a zjistíme kořeny soustavy rovnic:

$$\begin{cases} 0 &= x_1\left(x_1 - x_1^2 - x_2^2 - (1 - x_1 - x_2)^2\right), \\ 0 &= x_2\left(x_2 - x_1^2 - x_2^2 - (1 - x_1 - x_2)^2\right). \end{cases} \tag{3.19}$$

Tato soustava má sedm reálných řešení, viz následující tabulka.

Tabulka 3.1: Stacionární body replikátorové dynamiky z Příkladu 8

Řešení	x_1	x_2	x_3
1.	1	0	0
2.	0	1	0
3.	0	0	1
4.	$1/3$	$1/3$	$1/3$
5.	$1/2$	$1/2$	0
6.	$1/2$	0	$1/2$
7.	0	$1/2$	$1/2$

Jak je možné vidět z tabulky (3.1), stacionární body soustavy replikátorových rovnic (3.18) odpovídají přesně našim Nashovým rovnováhám. Je možné toto stanovisko zobecnit pro jakoukoliv hru? Budou vždy všechny stacionární body replikátorové dynamiky odpovídat Nashovým rovnováhám? Na tyto otázky odpovíme později. K uzavření tohoto příkladu se ještě zamyslíme nad stabilitou jednotlivých stacionárních bodů. K tomu využijeme linearizace a vlastních čísel Jacobiho matice $\mathbf{J}$, která je dána předpisem:

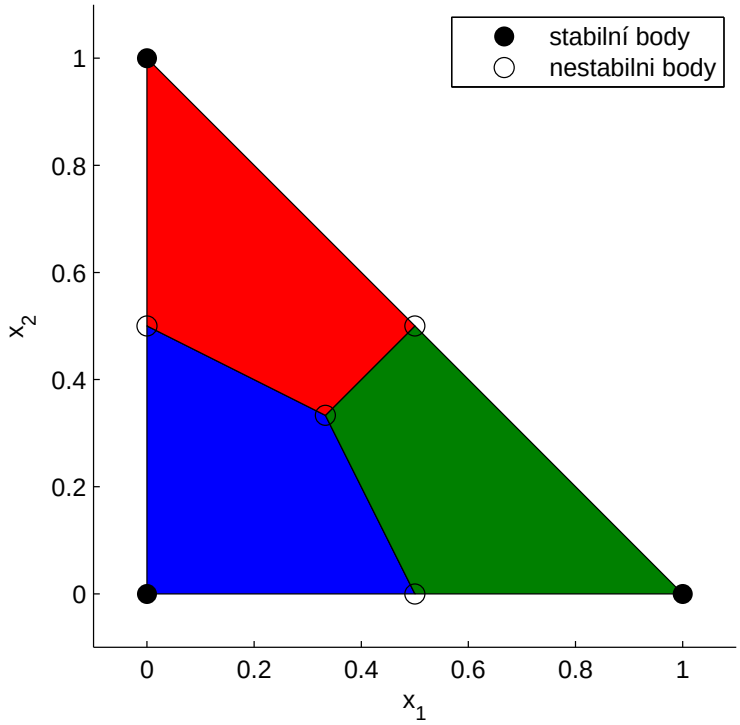
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} \\ \\ \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \dot{x}_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}. \tag{3.20}$$

Spočteme jednotlivé parciální derivace a postupně dosadíme do matice $\mathbf{J}$ jednotlivé stacionární body. Potom spočteme vlastní čísla l_1, l_2 těchto matic a výsledky opět zapíšeme do tabulky.

Tabulka 3.2: Vlastní čísla Jacobiho matice pro stacionární body replikátorových rovnic z Příkladu 8

Řešení	l_1	l_2
$(1,0,0)$	-1	-1
$(0,1,0)$	-1	-1
$(0,0,1)$	-1	-1
$(1/3, 1/3, 1/3)$	$1/3$	$1/3$
$(1/2, 1/2, 0)$	$-1/2$	$1/2$
$(1/2, 0, 1/2)$	$1/2$	$-1/2$
$(0, 1/2, 1/2)$	$1/2$	$-1/2$

Odtud jsme schopni analyzovat stabilitu těchto stacionárních bodů. První tři, které představují rovnováhy v čistých strategiích, jsou stabilní uzly. Vnitřní bod $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ je naopak nestabilní uzel. Zbylé tři hraniční body jsou nestabilní sedla. To znamená, že všechny trajektorie ze všech počátečních bodů, které neleží na hraničních úsečkách mezi jednotlivými oblastmi atrakce, jsou přitahovány ke stabilním bodům v rozích prostoru $\mathbf{X}^2$, což hezky zobrazuje Obrázek 3.3.



Obrázek 3.3: Oblasti atrakce k jednotlivým stabilním bodům soustavy (3.18)

■

V Příkladu 8 jsme se podívali na základní vlastnosti replikátorové dynamiky. Viděli jsme, že Nashovy rovnováhy odpovídaly příslušným stacionárním bodům. Tuto souvislost nyní rozebereme důkladněji. Označme R množinu stacionárních bodů a R_a množinu asymptoticky stabilních stacionárních bodů. Dále označme N množinu (symetrických) Nashových rovnováh.

Poznámka 9. Množina N neobsahuje samotné Nashovy rovnováhy, ale pouze jejich složky, tj. (smíšené) strategie.

Uvažujme (smíšenou) strategii $\boldsymbol{\sigma}^*$ a jí odpovídající rozdělení populace $\mathbf{x}^*$. Poté budeme tvrdit, že pro replikátorovou dynamiku platí:

$$\mathbf{x}^* \in R_a \implies \boldsymbol{\sigma}^* \in N, \tag{3.21}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^* \in N \implies \mathbf{x}^* \in R. \tag{3.22}$$

Aniž bychom se dopustili chyby, pokud pomineme rozdíl mezi smíšenou strategií $\boldsymbol{\sigma}^*$ a odpovídajícím rozdělením $\mathbf{x}^*$, můžeme zapsat vztahy (3.21) a (3.22) v následující podobě:

$$R_a \subseteq N \subseteq R. \tag{3.23}$$

Tato tvrzení a jejich důkazy lze najít v [2, Kapitola 9]. Rozeberme nyní ještě jeden příklad, kde se budeme zabývat jednotlivými množinami ze vtahu (3.23) a znovu se zamyslíme nad stabilitou stacionárních bodů.

Příklad 9. Uvažujme jednopopulační hru s užitkovou bimaticí

	1	2	3
1	2;2	2;2	2;2
2	2;2	0;0	3;3
3	2;2	3;3	0;0

.

Naším cílem je určit prvky množin R_a, R a N a případně určit stabilitu jednotlivých stacionárních bodů. Začneme vyšetřením Nashových rovnováh. „Podtrhávací“ metodou určíme čisté Nashovy rovnováhy. Vyjde nám rovnováha mezi strategiemi $(1,1),(2,3)$ a $(3,2)$. Tyto rovnováhy převedeme do tvaru smíšených strategií, respektive rozdělení v populaci, tj. $\mathbf{r}_1 = ((1,0,0),(1,0,0)), \mathbf{r}_2 = ((0,1,0),(0,0,1))$ a $\mathbf{r}_3 = ((0,0,1),(0,1,0))$. Pokračujeme sestavením soustavy rovnic pomocí užitkových funkcí jako v předchozích příkladech a pokusíme se nalézt smíšené Nashovy rovnováhy.

$$\begin{aligned} u &= 2, \\ u &= -x_1 - 3x_2 + 3, \\ u &= 2x_1 + 3x_2. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy je opět strategie $(1,0,0)$, což odpovídá čisté rovnováze $(1,1)$. Nicméně je nutné ještě prozkoumat případnou rovnováhu mezi strategiemi 2 a 3. Položme tedy $x_1 = 0$ a řešme následující soustavu:

$$\begin{aligned} u &= -3x_2 + 3, \\ u &= 3x_2. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme výsledek v podobě strategie $\boldsymbol{\sigma} = (0, 1/2, 1/2)$. Stejně jako v předchozích příkladech se zamyslíme nad rovnováhou kombinace strategií $((0, 1/2, 1/2),(0, 1/2, 1/2))$. Užitek, který hráči získají hraním strategie $\boldsymbol{\sigma}$, je $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{A}\boldsymbol{\sigma}^T = 1.5$. Dále potřebujeme znát hodnotu užitků F_i pro naši strategii $\boldsymbol{\sigma}$, tedy

$$\begin{aligned} F_1 &= 2, \\ F_2 &= 1.5, \\ F_3 &= 1.5. \end{aligned}$$

Odtud je jasné, že pokud si hráč, jehož soupeř hraje v této hře strategii $\boldsymbol{\sigma}$, změní svoji strategii například na $(1,0,0)$, získá užitek o velikosti 2. Odtud plyne, že dvojice $((0, 1/2, 1/2),(0, 1/2, 1/2))$ nemůže být Nashova rovnováha, protože hráč má motivaci přejít zpět k hraní strategie 1.

Zjistili jsme tedy, že tato statická hra má celkem tři Nashovy rovnováhy. Vypíšeme si jejich složky, tj. smíšené strategie, které obsahují. Ty si označíme po řadě $\boldsymbol{\sigma}_k^*$ $(k = \{1,2,3\})$, tj.

$$\boldsymbol{\sigma}_1^* = (1,0,0), \boldsymbol{\sigma}_2^* = (0,1,0) \text{ a } \boldsymbol{\sigma}_3^* = (0,0,1).$$

Nyní se zamyslíme nad prvky množiny N. Na první pohled by se mohlo zdát, že obsahuje všechny smíšené strategie $\boldsymbol{\sigma}_k$. Jak jsme ale řekli výše, množinu N tvoří pouze složky **symetrických** Nashových rovnováh. Proto v našem případě obsahuje pouze $\boldsymbol{\sigma}_1^*$.

Dále sestavíme replikátorové rovnice.

$$\begin{cases} \dot{x_1} &= x_1\left(2 - \bar{F}(\mathbf{x})\right), \\ \dot{x_2} &= x_2\left(-x_1 - 3x_2 + 3 - \bar{F}(\mathbf{x})\right), \end{cases} \tag{3.24}$$

kde $\bar{F}(\mathbf{x}) = 2(-x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2^2 + 3x_2)$. Rovnice ze soustavy (3.24) položíme rovny nule a určíme stacionární body $\mathbf{x}_k$, viz následující tabulka.

Tabulka 3.3: Stacionární body replikátorové dynamiky z Příkladu 9

Řešení	x_1	x_2	x_3
$\boldsymbol{x}_1^*$	1	0	0
$\boldsymbol{x}_2^*$	0	1	0
$\boldsymbol{x}_3^*$	0	0	1
$\boldsymbol{x}_4^*$	0	$1/2$	$1/2$

Odtud vidíme, že v tomto případě platí $N \subset R$. Proč ale stacionární body $\mathbf{x}_2^*$ a $\mathbf{x}_3^*$ odpovídají přesně smíšeným strategiím $\boldsymbol{\sigma}_2^*$ a $\boldsymbol{\sigma}_3^*$? Je mezi nimi nějaký vztah? Na tyto otázky odpovíme hned vzápětí.

Ještě předtím určíme stabilitu jednotlivých stacionárních bodů. Znovu využijeme linearizace. Stanovíme Jacobiho matici parciálních derivací tak, jak je určena ve vztahu (3.20). Nyní vypočítáme vlastní čísla l_1 a l_2 matice $\mathbf{J}$ pro každé řešení.

Tabulka 3.4: Vlastní čísla Jacobiho matice pro stacionární body replikátorových rovnic z Příkladu 9

Řešení	l_1	l_2
$(1, 0, 0)$	0	0
$(0, 1, 0)$	3	2
$(0, 0, 1)$	2	3
$(0, 1/2, 1/2)$	$-3/2$	$1/2$

V případě bodů $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$ se jedná o nestabilní uzly. Vlastní čísla $l_1^{\mathbf{x}_4^*} = -3/2$ a $l_2^{\mathbf{x}_4^*} = 1/2$ říkají, že bod $(0, 1/2, 1/2)$ je nestabilní sedlo. To je mimo jiné možné ověřit i výpočtem. Nejprve vyšetříme chování na úsečce $x_1 = 0$, $x_1 \in [0, 1]$ (Zde nelze hovořit o $x_1 = 0$ jako o přímce, protože se nacházíme pouze v simplexu X^2 a ne v celém prostoru $\mathbb{R}^2$. Stejnou myšlenku použijeme i v následujících případech, aniž bychom to znovu připomínali). Dosazením tohoto vztahu do rovnic (3.24) dostaneme:

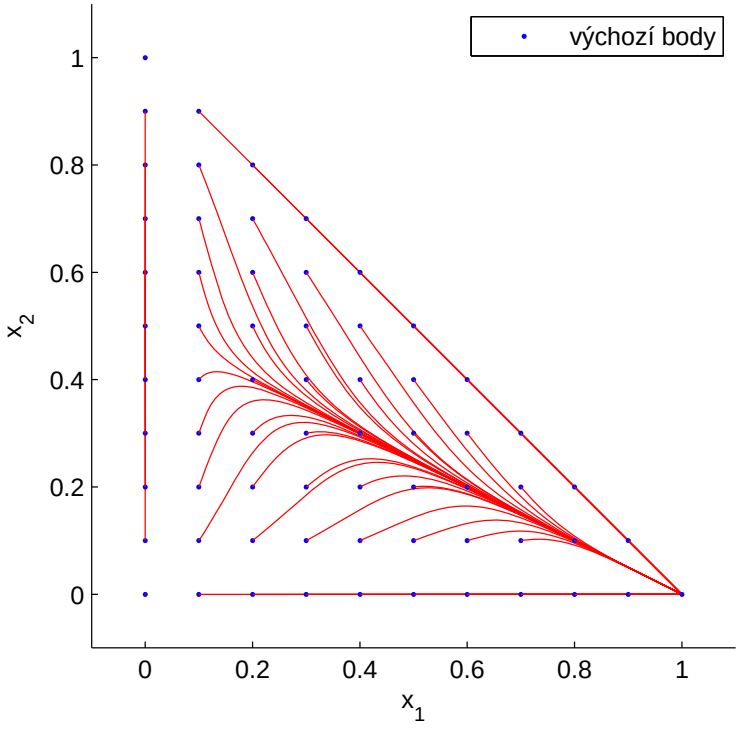
$$\dot{x}_2 = x_2(-3x_2 + 3 - 2(-3x_2^2 + 3x_2)),$$
$$\dot{x}_2 = x_2(6x_2^2 - 9x_2 + 3).$$

Z toho vyplývá, že pro $0 < x_2 < 1/2$ je $\dot{x}_2 > 0$ a pro $1/2 < x_2 < 1$ je $\dot{x}_2 < 0$, a proto jsou trajektorie na úsečce $x_1 = 0$ přitahovány do bodu $\mathbf{x}_4$. Teď se ale přesuneme na úsečku $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$. Tato úsečka spojuje stacionární body $(0, 1/2, 1/2)$ a $(1, 0, 0)$. Dosadíme ji do první rovnice ze soustavy (3.24) a vyjde nám, že

$$\dot{x}_1 = x_1(2 - 2(-x_1^2 - 3x_1(-0.5x_1 + 0.5) + 2x_1 - 3(0.5x_1 + 0.5)^2 + 3(0.5x_1 + 0.5)),$$
$$\dot{x}_1 = 0.5x_1(x_1^2 - 2x_1 + 1).$$

Z čehož vyplývá, že $\dot{x}_1 > 0$ pro $x_1 \in (0, 1)$. Trajektorie na této úsečce se tedy od bodu $(0, 1/2, 1/2)$ odtahují, a proto je tento bod nestabilní sedlo, což dokazuje, že jsme se nedopustili žádné chyby.

Jako poslední nám zbývá vyšetřit stacionární bod $(1, 0, 0)$. Pro něj nám vyšla vlastní čísla Jacobiho matice $\mathbf{J}$ nulová. Nemůžeme tedy pomocí linearizace rozhodnout o jeho stabilitě. K jejímu určení proto využijeme stejný postup jako u předchozího bodu. Zjistili jsme, že na úsečce $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$ se trajektorie k bodu $(1, 0, 0)$ přitahují. Vyšetřeme nyní chování na hraničních úsečkách $x_2 = 0$ a $x_2 = -x_1 + 1$. Začneme dosazením $x_2 = 0$ do rovnic (3.24). Odtud nám opět vyjde, že $\dot{x}_1 > 0$ pro $x_1 \in (0, 1)$, tj. trajektorie jsou přitahovány. Stejně rozhodneme i pro druhou úsečku, odkud dostaneme totožný závěr. Podobně bychom mohli rozhodnout o libovolné úsečce, směřující do bodu $(1, 0, 0)$. Proto je tento bod (asymptoticky) stabilní uzel. O našich závěrech se navíc přesvědčíme ještě pohledem na fázový portrét této hry.



Obrázek 3.4: Fázový portrét hry z Příkladu 9

Množina R_a je tedy pouze jednoprvková množina obsahující bod $(1, 0, 0)$. Pro tento příklad proto platí: $R_a = N \subset R$.

■

Jako poslední se v této kapitole ještě zamyslíme nad otázkou, kterou jsme si položili v Příkladu 9. Výše jsme ukázali, že platí $N \subseteq R$. V Příkladu 8 nám vyšla rovnost mezi těmito množinami, zatímco v Příkladu 9 jsme dostali $N \subset R$. Rozdíl mezi těmito dvěma příklady vysvětlíme takto. Je nutné si uvědomit, jaký tvar replikátorové rovnice (3.15) vlastně mají. Při pohledu na ně snadno odvodíme, že body $\mathbf{e}_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$ jsou vždy stacionární bez ohledu na to, zda se jedná i o Nashovy rovnováhy. Odtud dostaneme odpověď na původní otázku, tj. stacionární body $\mathbf{x}_2^*$ a $\mathbf{x}_3^*$ nemají žádný vztah ke smíšeným strategiím $\boldsymbol{\sigma}_2^*$ a $\boldsymbol{\sigma}_3^*$. To, že $\mathbf{e}_i$ je vždy řešením, dokážeme následujícím způsobem. Dosaďme vektor $\mathbf{e}_i$ do replikátorových rovnic (3.15). Všechny složky $\dot{x}_k$, až na i-tou, budou zcela jistě rovny nule. Pro $\dot{x}_i$ pak platí:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_i &= x_i(F_i - (x_1F_1 + ... + x_iF_i + ... + x_nF_n)),\\
\dot{x}_i &= (F_i - F_i),\\
\dot{x}_i &= 0.
\end{aligned}$$

Tento závěr lze hezky pozorovat na zadání z Příkladu 4. Hra má sice jedinou Nashovu rovnováhu, kterou je kombinace $((1/3, 1/3, 1/3), (1/3, 1/3, 1/3))$, přesto nám ale vyjdou z replikátorových rovnic čtyři stacionární body. Jeden odpovídající této Nashově rovnováze a tři krajní body prostoru $\mathbf{X}^2$, které opět žádné rovnováze neodpovídají. V Příkladu 9 není překvapivá ani stacionaritu bodu $(0, 1/2, 1/2)$. O strategii, odpovídající tomuto bodu, jsme řekli, že nemůže tvořit Nashovu rovnováhu, protože hráči mají motivaci přesunout se k hraní strategie 1. V replikátorové dynamice se ale nepoužívané strategie nemohou obnovit, a proto na úsečce $x_1 = 0$ je pro hráče optimální strategie odpovídající bodu $(0, 1/2, 1/2)$, přestože se nejedná o Nashovu rovnováhu.

3.3 Smithova dynamika

V předchozí kapitole jsme si představili základní deterministickou evoluční dynamiku z pohledu teorie her. Řekli jsme, že nepoužívané strategie se v této dynamice nemohou znovu obnovit. Proto se v této kapitole podíváme na opačný případ, tj. případ, kdy se strategie mohou obnovit. Prozkoumáme, co tato změna přinese z pohledu stacionárních bodů a stability. Začněme tedy představením revizního pravidla [1, Kapitola 4]:

$$\rho_{i,j} = [F_j - F_i]_+ . \tag{3.25}$$

Na první pohled jsou si obě uvedená revizní pravidla (3.14) a (3.25) podobná, nicméně zde chybí vynásobení rozdílu mezi užitky poměrem x_j. To znamená, že intenzita přechodu mezi strategiemi i a j je dána pouze rozdílem užitků těchto strategií. Dosazením pravidla

(3.25) do průměrové dynamiky (3.10) dostaneme následující předpis.

$$\dot{x}_i = \sum_{j \in S} x_j [F_i - F_j]_+ - x_i \sum_{j \in S} [F_j - F_i]_+. \tag{3.26}$$

Tento vztah určuje *Smithovu dynamiku*. [1, Kapitola 4] Připomeňme, že první suma v (3.26) představuje přírůstek v hraní strategie i, zatímco druhá suma udává úbytek v hraní této strategie. Samozřejmě platí, že pokud $[F_i - F_j]_+ \neq 0$, pak $[F_j - F_i]_+ = 0$ a obráceně. Odtud tedy snadno odvodíme, že nepoužívaná strategie se může znovu obnovit. Stačí, aby užitek z jejího hraní byl vyšší než užitek ostatních strategií. Potom první suma v (3.26) bude kladná, tj. $\dot{x}_i > 0$ a poměr x_i poroste. Pojďme se tedy podívat na nějaké příklady, na kterých si ukážeme vlastnosti Smithovy dynamiky. Záměrně zvolíme stejná zadání jako v Příkladech 8 a 9, abychom mohli porovnat dosažené výsledky.

Příklad 10. Mějme tedy stejné zadání jako v Příkladu 8, tj. uvažujme populační hru s užitkovou bimaticí

	1	2	3
1	1;1	0;0	0;0
2	0;0	1;1	0;0
3	0;0	0;0	1;1

.

Rovnou vytvoříme rovnice Smithovy dynamiky. Dosadíme jednotlivé užitkové funkce F_i do předpisu (3.26) a vyjde nám:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & (x_1[x_1 - x_1]_+ + x_2[x_1 - x_2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[x_1 - (1 - x_1 - x_2)]_+) - \\ & -x_1([x_1 - x_1]_+ + [x_2 - x_1]_+ + [(1 - x_1 - x_2) - x_1]_+), \\ \\ \dot{x}_2 = & (x_1[x_2 - x_1]_+ + x_2[x_2 - x_2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[x_2 - (1 - x_1 - x_2)]_+) - \\ & -x_2([x_1 - x_2]_+ + [x_2 - x_2]_+ + [(1 - x_1 - x_2) - x_2]_+). \end{cases}$$

Odstraněním nulových členů můžeme psát:

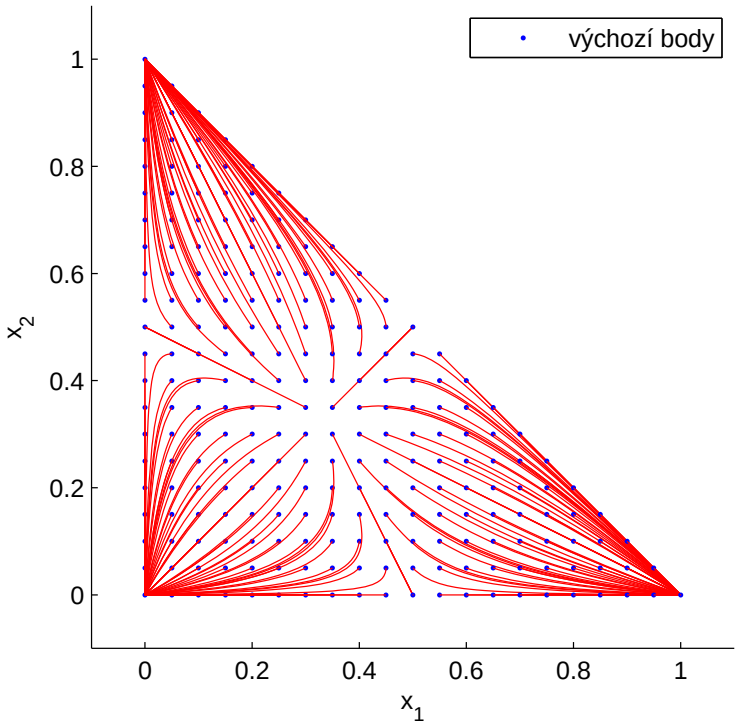
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & (x_2[x_1 - x_2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[2x_1 + x_2 - 1]_+) - \\ & -x_1([x_2 - x_1]_+ + [1 - 2x_1 - x_2]_+), \\ \\ \dot{x}_2 = & (x_1[x_2 - x_1]_+ + (1 - x_1 - x_2)[x_1 + 2x_2 - 1]_+) - \\ & -x_2([x_1 - x_2]_+ + [1 - x_1 - 2x_2]_+). \end{cases} \tag{3.27}$$

I tak je ale na první pohled jasné, že výpočet stacionárních bodů bude velmi komplikovaný, protože předpis Smithovy dynamiky je poměrně složitý. Stejně tak bude problém vyšetřit stabilitu jednotlivých bodů pomocí linearizace. Obecně totiž nebudeme moci členy $[F_i - F_j]_+$ zderivovat, pokud předem nevíme jejich hodnotu. Pro konkrétní bod $\mathbf{x}$ ale

můžeme dopředu určit užitkové funkce F_i, poté odebrat všechny nulové členy a zbylé kladné členy $[F_i - F_j]_+$ přepsat jako $(F_i - F_j)$. Po této úpravě budeme schopni rovnice (3.27) zderivovat a určit tak stabilitu bodu $\mathbf{x}$. Nicméně ke stanovení stacionárních bodů jsou naše možnosti velmi omezené. V podstatě jedinou šanci, jak je určit, máme z fázového portrétu. I zde se ale může numerický řešič dopustit snadno chyby.

Proto zvolíme jiný postup než v předchozích příkladech. Stanovíme smíšené strategie tvořící Nashovy rovnováhy a ty poté dosadíme do rovnic (3.27). Tak pouze ověříme, zda jednotlivé rovnováhy představují i stacionární body dané hry. Pusťme se do toho tedy v našem příkladě.

Víme, že tato hra má celkem sedm Nashových rovnováh, viz Příklad 8. Smíšené strategie, které tvoří tyto rovnováhy, dosadíme do předpisu (3.27) a zjistíme hodnoty $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_2$. Pro všechny tyto body (strategie) nám vyjde $\dot{x}_1 = 0$ a $\dot{x}_2 = 0$, tj. všechny představují stacionární body naší dynamiky. To, jestli existují i jiné pevné body, zatím nevíme. Vykresleme si tedy fázový portrét této hry.



Obrázek 3.5: Fázový portrét Smithovy dynamiky v Příkladu 10

Z Obrázku 3.5 se zdá, že opravdu máme jen sedm stacionárních bodů a z toho plyne, že platí rovnost množin N a R. Opět vidíme tři asymptoticky stabilní body v rozích prostoru $\mathbf{X}^3$. Ještě se v rychlosti pokusme pomocí výše popsaného způsobu určit linearizací stabilitu. Vlastní čísla Jacobiho matice nám ale vyjdou nulová, linearizace nám v tomto případě tedy nepomůže. Jelikož se ale jedná o jednoduchý příklad, spokojíme se s řešením pouze pomocí fázového portrétu.

Pro zadání z Příkladů 8 a 10 jsme dostali stejné výsledky jak pro replikátorovou dynamiku, tak pro Smithovu dynamiku. Nemá cenu se tedy tímto příkladem více zabývat a přesuneme se hned k druhému.

■

Příklad 11. Vyšetřeme Smithovu dynamiku pro zadání z Příkladu 9. Máme užitkovou bimatici

	1	2	3
1	2;2	2;2	2;2
2	2;2	0;0	3;3
3	2;2	3;3	0;0

.

Sestavíme rovnice Smithovy dynamiky.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & (x_2[x_1 + 3x_2 - 1]_+ + (1 - x_1 - x_2)[2 - 2x_1 - 3x_2]_+) - \\ & -x_1([1 - x_1 - 3x_2]_+ + [2x_1 + 3x_2 - 2]_+), \\ \dot{x}_2 = & (x_1[1 - x_1 - 3x_2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[3 - 3x_1 - 6x_2]_+) - \\ & -x_2([x_1 + 3x_2 - 1]_+ + [3x_1 + 6x_2 - 3]_+). \end{cases} \tag{3.28}$$

Víme, že tato hra má následující Nashovy rovnováhy:

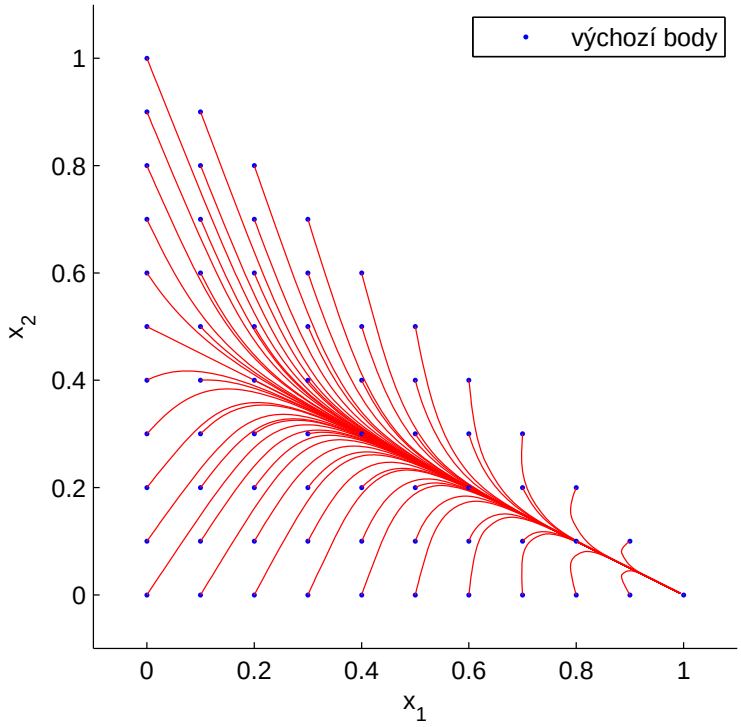
$$((1,0,0),(1,0,0)), ((0,1,0),(0,0,1)) \text{ a } ((0,0,1),(0,1,0)) \tag{3.29}$$

Připomeňme, že pro replikátorovou dynamiku nám vyšly čtyři stacionární body, přitom pouze jeden odpovídal přímo Nashovým rovnováhám. Dosaďme tedy tyto body do rovnic (3.28). Dosažené výsledky vypíšeme do tabulky.

Tabulka 3.5: Hodnoty $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_2$ stacionárních bodů v Příkladu 9 pro Smithovu dynamiku

Bod	$\dot{x}_1$	$\dot{x}_2$
$(1,0,0)$	0	0
$(0,1,0)$	2	-5
$(0,0,1)$	2	3
$(0, 1/2, 1/2)$	$1/2$	$-1/4$

To, že body $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$ nejsou ve Smithově dynamice stacionární, není příliš překvapující. Stacionarita těchto bodů v replikátorových rovnicích je dána pouze jejich specifickou vlastností, kterou jsme popsali na konci Kapitoly 3.2. Nicméně, zajímavý je výsledek dosažený pro bod $(0, 1/2, 1/2)$, který sice nepředstavuje Nashovu rovnováhu, ale v replikátorové dynamice se jednalo o stacionární bod. Důvod, proč tomu tak je, si ukážeme vzápětí. Vykresleme si nejprve fázový portrét této hry.



Obrázek 3.6: Fázový portrét Smithovy dynamiky v Příkladu 11

Na Obrázku 3.6 vidíme jeden asymptoticky stabilní bod $(1, 0, 0)$, který odpovídá rovnováze $(1, 1)$. Je to také jediný pevný bod v této dynamice. Co se tedy stalo se stacionaritou bodu $(0, 1/2, 1/2)$?

Pokusme se nyní na tuto otázku odpovědět. Vyšetřeme užitky, které plynou z hraní jednotlivých strategií pro strategii $(0, 1/2, 1/2)$, tj. dosaďme do užitkové funkce (2.1) bod $\mathbf{x} = (0, 1/2, 1/2)$.

$$F_1 = 2,$$
$$F_2 = 1.5,$$
$$F_3 = 1.5.$$

Strategie 1 se v tomto případě v populaci nepoužívá. Teoreticky ale z jejího hraní plyne nejvyšší užitek. A to je klíčový faktor, který zde hraje roli. Řekli jsme totiž, že ve Smithově dynamice se nepoužívaná strategie může znovu obnovit. To je přesně ta situace, která zde nastane. Nejvyšší užitek z hraní této strategie „přebije“ užitky strategií 2 a 3, a proto bude pro hráče vždy lepší „přesunout“ se k hraní strategie 1.

■

Na Příkladu 11 jsme si ukázali zajímavé chování Smithovy dynamiky. Nejvyšší užitek plynoucí z hraní strategie 1 zde zajistil, že pro strategii $(0, 1/2, 1/2)$ nevznikl v dynamice žádný stacionární bod, což je rozdílné od chování replikátorové dynamiky. V [1, Kapitola 4] se lze dočíst, že ve Smithově dynamice existuje pro každou (symetrickou) Nashovu rovnováhu stacionární bod a zároveň všechny stacionární body odpovídají Nashově rovnováze.

Shrnutí Kapitoly 3

V Kapitole 3 jsme se snažili co možná nejlépe popsat základní evoluční dynamiky a jejich vlastnosti. Ty bychom mohli shrnout v následujících bodech:

i Náhodný proces popisující vývoj strategií v čase pro konečnou populaci na základě *revizního pravidla* lze limitním zvětšením velikosti populace aproximovat deterministickou dynamikou, kterou jsme označili jako *Průměrovou dynamiku*

ii Základním typem evoluční dynamiky je *replikátorová dynamika*; pro tu platí, že nepoužívané strategie se nemohou znovu obnovit

iii V replikátorové dynamice existuje pro každou rovnovážnou strategii odpovídající stacionární bod; ne pro každý stacionární bod ale existuje i Nashova rovnováha

iv Příkladem dynamiky, ve které se nepoužívané strategie mohou obnovit, je *Smithova dynamika*

v Na příkladu jsme ukázali, že ve Smithově dynamice platí rovnost množin N a R. Důkaz tohoto tvrzení lze najít v [1, Kapitola 4]

Kapitola 4

Jednopopulační hry s parametrem

4.1 Diskrétní přechod v hrách s parametrem

V této kapitole se zaměříme na hru z Příkladů 9 a 11. Nejvyšší užitek z hraní strategie 1 v těchto příkladech zajistil, že jedinou Nashovou rovnováhou této hry byla dvojice $(1, 1)$. Naším cílem nyní bude vyšetřit chování této hry, pokud budeme mít možnost měnit velikost užitků pro strategie 2 a 3. Lze totiž očekávat, že zvětšením těchto užitků dojde ke změně rovnovážných strategií, což zajistí i odlišné chování evolučních dynamik. Pro jednoduchost přidáme do užitkové bimatice pouze jeden parametr c a budeme tedy zkoumat závislost vlastností jednotlivých dynamik na tomto parametru. Uvažujme tedy následující zadání.

Příklad 12. Populační hra je dána užitkovou bimaticí:

	1	2	3
1	2;2	2;2	2;2
2	2;2	0;0	c;c
3	2;2	c;c	0;0

,

kde $c \in [3, 5]$. Hodnoty parametru c jsme zvolili záměrně tak, abychom docílili zvětšení užitku pro strategii $(0, 1/2, 1/2)$. Tato strategie sice netvořila Nashovu rovnováhu, nicméně stále, minimálně pro replikátorovou dynamiku, hrála ve výsledku určitou roli. V této kapitole budeme řešit diskrétní přechod, tj. rozdělíme tento příklad do třech částí, kdy budeme uvažovat postupně

1) $c_1 = 3$,

2) $c_2 = 4$,

3) $c_3 = 5$.

Výsledky těchto jednotlivých variant nám poté v následující kapitole pomohou při spojitém přechodu parametrem c. Vrhněme se rovnou do řešení tohoto zadání. Variantu 1) máme již vyřešenou, začneme tedy řešením 2).

Pro názornost si přepíšeme užitkovou bimatici:

	1	2	3
1	2;2	2;2	2;2
2	2;2	0;0	4;4
3	2;2	4;4	0;0

,

Snadno určíme, že máme stejné Nashovy rovnováhy jako v případě 1), tj. $(1,1),(2,3),(3,2)$. Řešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} u &= 2, \\ u &= -2x_1 - 4x_2 + 4, \\ u &= 2x_1 + 4x_2 \end{aligned}$$

nalezneme smíšenou rovnováhu. V tomto případě nemáme jednoznačné řešení, nýbrž řešením je úsečka $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$, $x_1 \in [0,1]$. To znamená, že tato hra má nekonečně mnoho Nashových rovnováh. To je způsobené tím, že na libovolném bodě této úsečky dojde vždy k rovnosti užitků. Jen ještě zmíníme, že je zbytečné řešit případnou rovnováhu mezi strategiemi 2 a 3, protože výsledná strategie je již obsažena v řešení $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$. Jak to tedy bude se stacionárními body jednotlivých dynamik? Nejprve vytvoříme rovnice replikátorové dynamiky:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(2 - (2x_1 + x_2(4 - 2x_1 - 4x_2) + (1 - x_1 - x_2)(2x_1 + 4x_2))), \\ \dot{x}_2 &= x_2(4 - 2x_1 - 4x_2 - (2x_1 + x_2(4 - 2x_1 - 4x_2) + (1 - x_1 - x_2)(2x_1 + 4x_2))). \end{cases}$$

Tyto rovnice položíme rovny nule a vyřešíme. Samozřejmě dostaneme jako kořeny body: $(0,0),(1,0)$ a $(0,1)$. Nás ale zajímá hlavně situace na úsečce $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$. Dosaďme ji tedy do našich rovnic:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(2 - (2x_1 + (-0.5x_1 + 0.5)(4 - 2x_1 + 2x_1 - 2) + (1 - x_1 + 0.5x_1 - 0.5) \\ & \quad (2x_1 - 2x_1 + 2))), \\ \dot{x}_2 &= x_2(4 - 2x_1 + 2x_1 - 2 - (2x_1 + (-0.5x_1 + 0.5)(4 - 2x_1 + 2x_1 - 2) + \\ & \quad + (1 - x_1 + 0.5x_1 - 0.5)(2x_1 - 2x_1 + 2))). \end{cases}$$

Sečteme a upravíme:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1(2 - (2x_1 + 2(-0.5x_1 + 0.5) + 2(-0.5x_1 + 0.5))), \\ \dot{x}_2 &= x_2(2 - (2x_1 + 2(-0.5x_1 + 0.5) + 2(-0.5x_1 + 0.5))). \end{cases}$$

A odtud už je samozřejmě vidět, že platí:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & 0, \\ \dot{x}_2 = & 0. \end{cases}$$

To samé uděláme pro rovnice Smithovy dynamiky:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & (x_2[2x_1 + 4x_2 - 2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[2 - 2x_1 - 4x_2]_+) - \\ & -x_1([-2x_1 - 4x_2 + 2]_+ + [2x_1 + 4x_2 - 2]_+), \\ \\ \dot{x}_2 = & (x_1[-2x_1 - 4x_2 + 2]_+ + (1 - x_1 - x_2)[-4x_1 - 8x_2 + 4]_+) - \\ & -x_2([2x_1 + 4x_2 - 2]_+ + [4x_1 + 8x_2 - 4]_+). \end{cases}$$

Dosazením úsečky $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$ nám vyjde:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & ((-0.5x_1 + 0.5)[2x_1 - 2x_1 + 2 - 2]_+ + (1 - x_1 + 0.5x_1 - 0.5) \\ & [2 - 2x_1 + 2x_1 - 2]_+) - x_1([-2x_1 + 2x_1 - 2 + 2]_+ + [2x_1 - 2x_1 + 2 - 2]_+), \\ \\ \dot{x}_2 = & (x_1[-2x_1 + 2x_1 - 2 + 2]_+ + (1 - x_1 + 0.5x_1 - 0.5)[-4x_1 + 4x_1 - 4 + 4]_+) - \\ & -(-0.5x_1 + 0.5)([2x_1 - 2x_1 + 2 - 2]_+ + [4x_1 - 4x_1 + 4 - 4]_+). \end{cases}$$

Odtud už také snadno určíme, že opět platí:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = & 0, \\ \dot{x}_2 = & 0. \end{cases}$$

Je tedy zřejmé, že úsečka $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$ nepředstavuje pouze množinu Nashových rovnováh, ale i stacionárních bodů. Tento výsledek lze shrnout tak, že hráči jsou indiferentní vůči tomu, jakou strategii odpovídající bodům úsečky $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$ budou používat. Tímto uzavřeme řešení varianty 2) a podíváme se na poslední případ, tj. $c = 5$.

Znovu si nejprve přepíšeme užitkovou bimatici:

	1	2	3
1	2;2	2;2	2;2
2	2;2	0;0	5;5
3	2;2	5;5	0;0

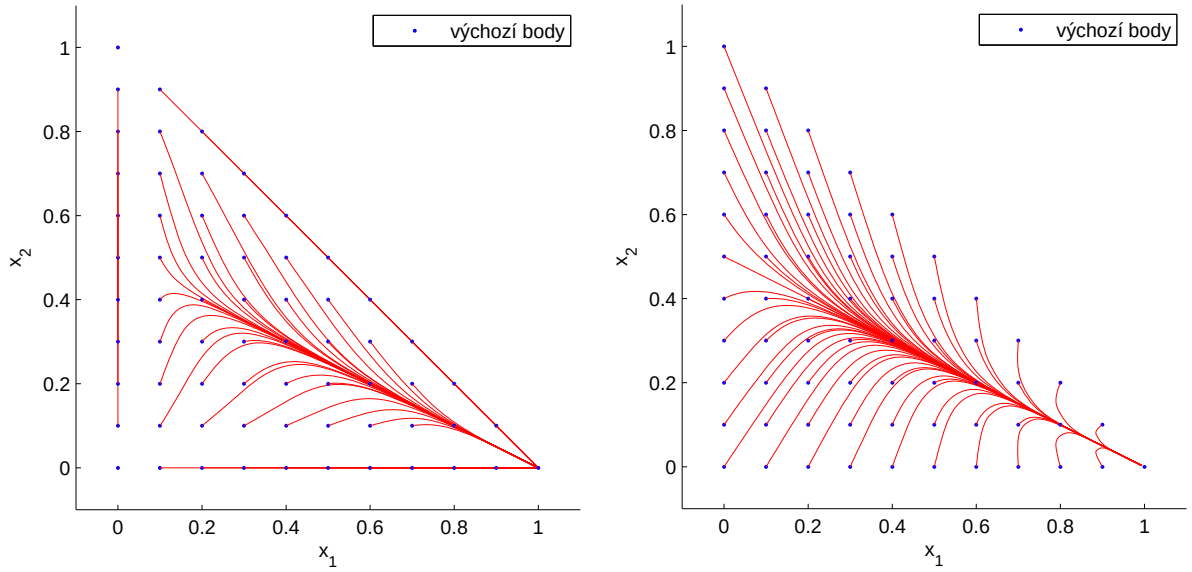
,

V tomto případě máme opět tři čisté Nashovy rovnováhy $(1, 1), (2, 3)$ a $(3, 2)$. Nesmíme ale zapomenout na případnou rovnováhu mezi strategiemi 2 a 3. Řešme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} u &= -5x_2 + 5, \\ u &= 5x_2. \end{aligned}$$

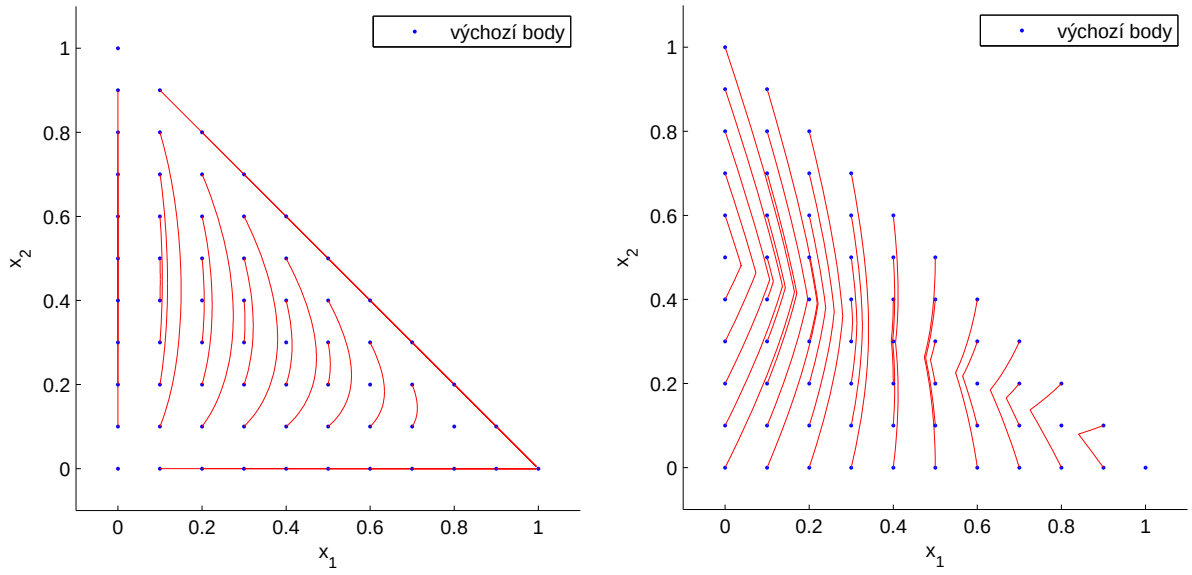
Odtud dostaneme řešení $(0, 1/2, 1/2)$. Přezkoumáním rovnováhy této strategie podle užitků F_i zjistíme, že v tomto případě se opravdu jedná o Nashovu rovnováhu. Vysvětlení je totiž jednoduché. Užitek plynoucí z určité lineární kombinace strategií 2 a 3 je totiž vždy vyšší než užitek strategie 1. To, že je zachována Nashova rovnováha pro dvojici $(1, 1)$, jen potvrzuje obecně známý paradox teorie her, že očividně horší strategie může být stále Nashova

rovnováha. Kdyby se totiž hráči měli možnost domluvit, měli by v tomto případě vždy vyšší užitek z hraní určité kombinace mezi strategiemi 2 a 3. Nicméně toto není předmětem zkoumání této práce. Tento příklad uzavřeme vykreslením jednotlivých fázových portrétů pro obě dynamiky a hodnoty c_1, c_2, c_3.



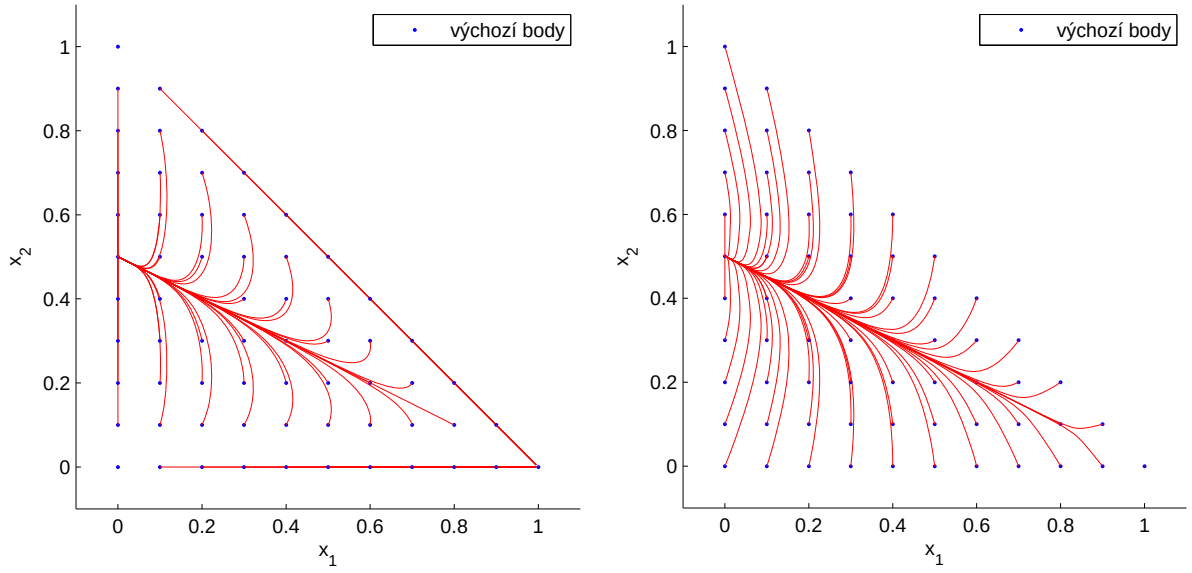
(a) replikátorová dynamika (b) Smithova dynamika

Obrázek 4.1: Fázové portréty hry z Příkladu 12 pro $c = 3$



(a) replikátorová dynamika (b) Smithova dynamika

Obrázek 4.2: Fázové portréty hry z Příkladu 12 pro $c = 4$



(a) replikátorová dynamika

(b) Smithova dynamika

Obrázek 4.3: Fázové portréty hry z Příkladu 12 pro $c = 5$

■

Tato kapitola měla za cíl demonstrovat změny v chování jednotlivých dynamik a změny v Nashových rovnováhách podle toho, jak se měnil parametr v užitkové bimatici. O tento přechod se nyní pokusíme spojitě.

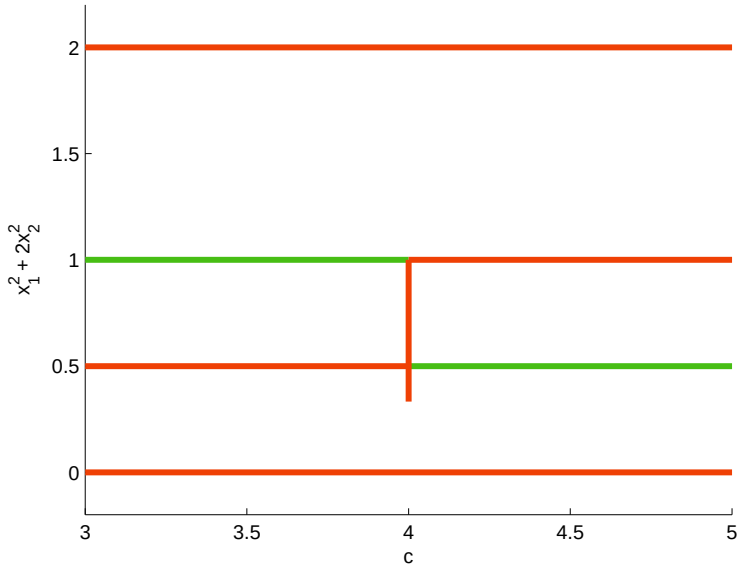
4.2 Spojitý přechod v hrách s parametrem

V této kapitole navážeme na Příklad 12 s tím rozdílem, že přechod parametru $c \in [3, 5]$ bude spojitý. Není třeba asi vysvětlovat, proč jsme vlastně hodnoty c zvolili zrovna takto. Na intervalu $[3, 5]$ totiž dojde dvakrát ke změně Nashových rovnováh, což zajišťuje i zajímavé chování našich dynamik. Cílem našeho zájmu bylo právě toto chování a tento zájem se nezmění ani při spojitém přechodu parametru c. K popsání tohoto přechodu použijeme tzv. bifurkační diagram. To je graf, ve kterém na vodorovnou osu vyneseme hodnoty parametru c a na svislou osu hodnoty určité normy stacionárních bodů $\mathbf{x}$ (Normu volíme proto, abychom byli schopni vykreslit vektor do jednoho bodu). Dopředu je ale nutné říct, že ve Smithově dynamice nastane komplikace, jelikož není snadné analyticky řešit jednotlivé rovnice této dynamiky. Proto se v tomto případě uchýlíme k numerickému řešení. V replikátorové dynamice nám tato komplikace nenastane, a proto jsme schopni získat analytické řešení.

Začneme řešením pro replikátorovou dynamiku. Nejprve sestavíme jednotlivé rovnice:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1(2-(2x_1+x_2(2x_1+c(1-x_1-x_2))+(1-x_1-x_2)(2x_1+cx_2))),\\ \dot{x}_2 &= x_2(2x_1+c(1-x_1-x_2)-(2x_1+(1-x_1-x_2)(2x_1+cx_2)+\\ &\quad +x_2(2x_1+c(1-x_1-x_2)))).\end{aligned}$$

Nás nyní zajímá, pro jaké body $\mathbf{x}$ je $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_2$ rovno nule v závislosti na parametru c. Řešením těchto rovnic nám vyjdou čtyři kořeny: $(0,0),(0,1/2),(0,1)$ a $(1,0)$. Pro hodnotu parametru $c=4$ dostaneme navíc řešení $x_2=-0.5x_1+0.5$, $x_1\in[0,1]$. Nyní jsme schopni konečně vykreslit bifurkační diagram. Jak jsme zmínili výše, na svislou osu budeme vynášet hodnotu určité normy. Výhodné bude zvolit takovou normu, ve které nám naše výsledné body nebudou splývat, tj. budeme vykreslovat hodnoty: $x_1^2+2x_2^2$.



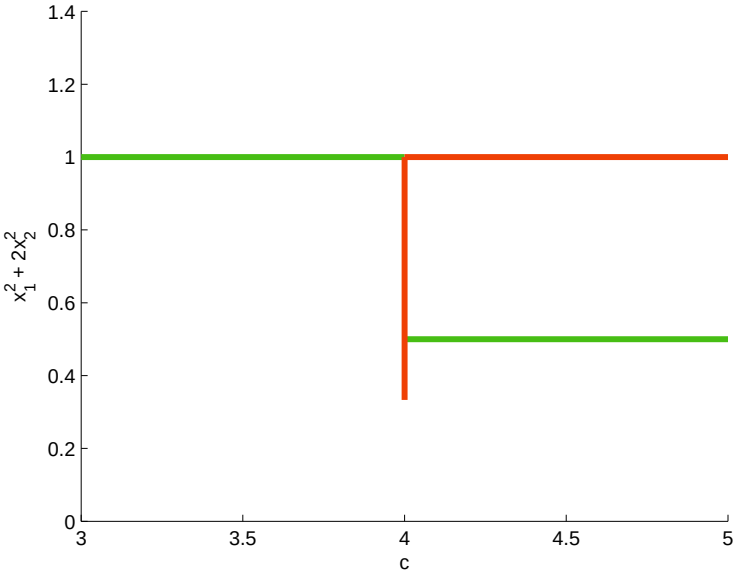
Obrázek 4.4: Bifurkační diagram replikátorové dynamiky v Příkladu 12

Poznámka 10. Červené úsečky na Obrázcích 4.4 a 4.5 představují nestabilní body, zatímco zelené značí body stabilní.

Na Obrázku 4.4 přesně vidíme, co se z pohledu stacionárních bodů děje v replikátorové dynamice pro $c\in[3,5]$. Nejzajímavějším bodem je samozřejmě bod $c=4$. V něm dojde k vytvoření nekonečně mnoha pevných bodů a navíc se prohodí stabilita bodů zobrazených do hodnot 0.5 a 1. To jsou hodnoty, představující body $(0,1/2,1/2)$, respektive $(1,0,0)$. Body zobrazené do hodnot 0 a 2 jsou stále nestabilní a odpovídají nerovnovážných hraničním bodům $(0,0,1)$ a $(0,1,0)$. Tímto jsme vyřešili spojitý přechod pro replikátorovou dynamiku a můžeme se přesunout ke Smithově dynamice.

Jelikož rovnice Smithovy dynamiky budeme řešit pouze numericky, nebudeme zde jejich předpis (kvůli jejich délce) už vypisovat. V krátkosti popíšeme, jak konkrétně budeme řešení hledat. Interval $[3,5]$ si rozdělíme s krokem 0.001. Poté se stejným krokem budeme

dosazovat body $\mathbf{x}$ simplexu $\mathbf{X}^2$ a budeme kontrolovat, zda $\dot{x}_1$ a $\dot{x}_2$ jsou pro body $\mathbf{x}$ rovny nule. Pokud ano, tak daný bod vykreslíme pomocí stejné normy jako v předchozím případě. Tím dostaneme následující graf:



Obrázek 4.5: Bifurkační diagram Smithovy dynamiky v Příkladu 12

Pro Smithovu dynamiku obdržíme samozřejmě rozdílný výsledek než pro replikátorovou dynamiku. Bod zobrazený do hodnoty 1 je na intervalu $[3, 4)$ stabilní. V bodě $c = 4$ máme opět nekonečně mnoho pevných bodů odpovídajících úsečce $x_2 = -0.5x_1 + 0.5$. Tyto body jsou všechny nestabilní. Poté se změní stabilita bodu zobrazeného do hodnoty 1 a vznikne nový stacionární bod, který se zde zobrazí do 0.5. Tento bod je stabilní. Tyto závěry o stabilitě lze ověřit pro obě dynamiky například spočtením vlastních čísel Jacobiho matice nebo porovnáním s fázovými portréty.

Shrnutí Kapitoly 4

Hlavním záměrem této kapitoly bylo popsat chování jednotlivých dynamik v závislosti na parametru c. Spíše než samotné řešení populačních her nás zajímá řešení těchto dynamických systémů. Nelinearita obou uvedených dynamik může z pohledu diferenciálních přinést velmi různorodé výsledky. To dokládá i výsledek z našeho příkladu. V bodě $c = 4$ dochází ke vzniku nových stacionárních bodů spolu se změnou stability. To znamená, že v tomto bodě dochází k zajímavé bifurkaci. Bližší pohled na tuto problematiku by mohl být předmětem dalšího zkoumání.

Kapitola 5

Závěr

Tato bakalářská práce měla za hlavní cíl představit problematiku evoluční dynamiky z pohledu teorie her. V úvodu jsme čtenáře v rychlosti seznámili se základními pojmy populačních her a s jejich řešením ve smyslu Nashových rovnováh. Už jen hledání těchto rovnováh může být pro hry s více strategiemi poměrně komplikované a je nutné pečlivě rozmyslet, zda daná strategie opravdu tvoří Nashovu rovnováhu, či ne. V této práci jsme se zaměřili na jednopopulační hry se třemi strategiemi a pokusili se uvést princip, jak rovnováhy efektivně hledat. Situace by se samozřejmě ještě víc zkomplikovala, pokud bychom uvažovali více strategií nebo vícepopulační hry.

V další části jsme pomocí náhodného procesu (Markovského řetězce) odvodili základní evoluční dynamiku. Toho jsme docílili limitním zvětšením dané populace hráčů, čímž jsme zajistili, že náhodnost z tohoto procesu „vymizela“. Vzniklou deterministickou dynamiku jsme pojmenovali jako Průměrovou dynamiku. Při definování této obecné dynamiky jsme potřebovali tzv. revizní pravidlo. To udává, jakým způsobem bude v populaci docházet k přírůstku nebo úbytku jednotlivých strategií. V této práci jsme si představili dvě revizní pravidla, díky kterým vznikly následující dynamiky: replikátorová dynamika a Smithova dynamika. Mezi těmito dynamikami je základní kvalitativní rozdíl. V první zmiňované se nepoužívané strategie nemohou znovu obnovit. To mělo za následek určité vlastnosti, kterými jsme se zabývali v Kapitole 3.2. Ve druhé popisované dynamice se naopak nepoužívané strategie obnovit mohou. Díky tomu je zajištěno, že stacionární body této dynamiky odpovídají vždy Nashovým rovnováhám a naopak. Vlastnosti těchto dynamik jsme demonstrovali na příkladech.

V poslední části jsme se zaměřili na populační hry, ve kterých je užitek závislým parametrem. Zkoumali jsme, jaké změny nastanou v chování jednotlivých dynamik. Hlavně nás zajímaly pevné body a jejich stabilita. Zde jsme došli k zajímavým závěrům z pohledu jak teorie her, tak obyčejných diferenciálních rovnic a jejich řešení. Právě toto chování by mohlo být předmětem dalšího zkoumání.

Literatura

[1] SANDHOLM, William H. *Population games and evolutionary dynamics.* Cambridge, Mass.: MIT Press, 2011, xxv, 589 p. ISBN 978-026-2195-874.

[2] WEBB, James N. *Game theory: decision, interaction, and evolution.* London: Springer, c2007, ix, 241 p. ISBN 18-462-8423-6.

[3] PRÁŠKOVÁ, Zuzana a Petr LACHOUT. *Základy náhodných procesů.* 2. dotisk 1. vyd. Praha: Karolinum, 2005, 146 s. ISBN 80-718-4688-0.