Posudek rigorózní práce

Autor:	Mgr. Radim Hošek
Název práce:	Od zobecnění bistabilní rovnice ke sledům na cestě
Oponent práce:	Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

Odborný přínos práce:	nové výsledky
Matematická odborná úroveň:	vynikající
Věcné chyby:	téměř žádné
Grafická, jazyková a formální úroveň:	téměř vynikající

Rigorózní práce Radima Hoška je věnována zkoumání nelineární okrajové úlohy s homogenními Neumannovými okrajovými podmínkami

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 u'' + F'(u) = 0 & \text{na } (0,1), \\ u'(0) = u'(1) = 0. \end{cases}$$

Ve druhé kapitole jsou studovány kritické body energetického funkcionálu, který je přiřazen vícezdrojovému hladkému potenciálu F. Autor zavádí funkci φ, která přiřazuje zvolené počáteční podmínce bod, ve kterém řešení počáteční úlohy nabývá svého maxima. Studium vlastností této funkce φ je klíčem ke klasifikaci kritických bodů energetického funkcionálu (věta 2.26). Jednotlivá tvrzení týkající se základních vlastností funkce φ (definiční obor, obor hodnot, spojitost a monotonie) jsou dokázána v příloze B.

Třetí kapitola je věnována studiu kvalitativních vlastností diagramu řešení v případě obecného vícezdrojového hladkého potenciálu F. Nejprve se autor věnuje případu hladkého potenciálu se dvěma zdroji. Je zkoumána spojitost a diferencovatelnost jednotlivých větví diagramu řešení (propozice 3.4 a 3.13). Dále jsou formulovány postačující podmínky pro motononii větví (věta 3.11). Tyto podmínky nejsou podmínkami nutnými, což autor prokazuje vhodným protipříkladem v příloze A. Ve druhé části třetí kapitoly autor formuluje postačující podmínky pro spojitost a monotonii větví diagramu řešení v případě vícezdrojového hladkého potenciálu F (propozice 3.16 a věta 3.19).

Čtvrtá kapitola je věnována nehladkým potenciálům. Ztráta C^2 hladkosti potenciálu F v bodech lokálních minim umožňuje vznik celého kontinua řešení okrajové úlohy. Při zkoumání otázky počtu různých variet stacionárních řešení autor formuluje daný problém pomocí teorie grafů. Každé kontinuum řešení dimenze d je reprezentováno sledem délky d v lineárním grafu (cestě). Počet různých sledů délky d je potom dán součtem všech prvků d-té mocniny matice sousednosti. Pro speciální případy nehladkých potenciálů F autor dále získává jednodušší vyjádření celkového počtu všech přípustných sledů (věty 4.13, 4.17 a 4.19).

V páté kapitole autor získává explicitní vyjádření pro počet sledů délky k v cestě délky $n-1$. Během odvozování explicitního předpisu autor rozkrývá zajímavé vazby na jiné partie matematiky mimo teorii grafů. Začátek kapitoly je věnován zajímavému pozorování, že k-tá mocnina matice sousednosti odpovídá k-té iteraci v Jacobiově iterační metodě, která je aplikována v případě diskrétní okrajové úlohy (propozice 5.8). Okrajová úloha je uvažována na čtvercové síti s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami, diferenční rovnice obsahuje Laplaceův operátor. Autorovi se dále podařilo získat analytický popis všech vlastních čísel matice sousednosti (lemma 5.10) a následně i vyjádření charakteristického polynomu matice sousednosti pomocí Čebyševových polynomů druhého druhu (věta 5.16). V cestě délky $n-1$ je počet sledů délky $k \geq n$ vyjádřen pomocí charakteristického polynomu jako lineární kombinace počtů sledů délek $d < n$ (důsledek 5.12). Pro počet sledů délek $d < n$ je dále odvozena explicitní formule (věta 5.18). V tomto explicitním předpisu autor objevuje posloupnost (DR_k) (Disanto-Rinaldi), která zohledňuje vliv okrajových podmínek. Závěr páté kapitoly je věnován vyjádření počtu sledů na cestě délky 3 ($n = 4$) pomocí Fibonacciho posloupnosti (věta 5.50).

Poznámky a připomínky:

V lemmatu 2.7 není zřejmé, co značí φ (definice funkce φ je uvedena pouze v důkazu předchozí propozice). V důkazu propozice 2.20 není korektně určeno I_3, předposlední rovnost neplatí (pokud K je dolní odhad $|F''(c)|$). Místo rovnosti by mělo být $\geq$ a K by mělo být suprémem. Obdobně K_m na str. 37, 52 a 55 by mělo být suprémem. Na str. 53 by $K_{M,k}$ mělo být infimem a $K_{m,k}$ suprémem. V celé práci místo $\stackrel{def}{=}$ používat jednotně pouze $:=$ (viz str. 35 a 67). V důkazu propozice 3.13 není v pořádku tvar majoranty pro $a \in (0, 1-\delta_0]$ (jmenovatel má být ještě umocněn na třetí). Na str. 46 nahoře má být $G(\theta) = G(\theta a) + G'(c)\theta(1-a)$ a poté by měl následovat odhad pro absolutní hodnotu $|G(\theta) - G(\theta a)|$. V důkazu lemmatu 3.18 není zřejmé, jaká je vazba indexu i na volbu $x \in \operatorname{Dom}\varphi$ ve vztahu $\varphi(x) = (F_i)^{-1}(F(x))$.

Otázka:

Jaký je vztah mezi vlastními čísly matice sousednosti ${}_nA$ a vlastními čísly diferenčního operátoru druhého řádu s homogenními Dirichletovými okrajovými podmínkami? Hledejte čísla $\lambda \in \mathbb{R}$, pro která má úloha

$$\begin{cases} \Delta\nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \{1, \dots, n\}, \\ u(0) = u(n+1) = 0, \end{cases}$$

netriviální řešení (kde $\Delta\nabla u(t) = u(t+1) - 2u(t) + u(t-1)$). Při sestavovaní obecného řešení diferenční rovnice užijte substituci $\omega = \arccos \frac{2-\lambda}{2}$.

Předložená práce je rozsáhlým dílem, které čítá celkem 23 definic, 25 menších tvrzení, 34 pomocných tvrzení, 16 vět a 6 důsledků. Důkazy jednotlivých vět a tvrzení jsou pečlivě provedeny. Práce navazuje na výsledky z článku

P. Drábek, S.B. Robinson: Continua of local minimizers in a non-smooth model of phase transitions. Z. Angew. Math. Phys. 62, No. 4, 609-622 (2011),

který je věnován úloze pro potenciál se dvěma zdroji. V předložené práci se autorovi podařilo získat nové výsledky pro vícezdrojový potenciál. V práci je řada původních výsledků, a to z oblasti spojitých i diskrétních struktur. Pátá kapitola dokládá autorovu schopnost rozkrývat nové vazby mezi různými obory matematiky (teorie grafů, kombinatorika, teorie aproximací). Práce má vysokou matematickou kulturu. Text je přehledně strukturován, autorova angličtina je dobře srozumitelná. Předložená práce je důkazem matematické vyzrálosti jejího autora. Práce splňuje podmínky kladené na rigorózní práci. Práci Mgr. Radima Hoška doporučuji k obhajobě.

V Plzni, 3. dubna 2014

Ing. Petr Nečesal, Ph.D.
KMA FAV ZČU