ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC NAD OKRUHY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Barbora Velíšková

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 11. dubna 2014

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucí bakalářské práce **Mgr. Martině Kašparové, Ph.D.** za vstřícnost, trpělivost, rady a připomínky, které mi pomohly vytvořit tuto práci.

OBSAH

Použité značky a symboly

$\mathbb{Z}$ − obor integrity celých čísel

$\mathbb{Z}_m$ − okruh zbytkových tříd celých čísel, kde m není prvočíslo

$\mathbb{Q}\,[x]$ – okruh polynomů jedné neurčité nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}\,[x, y, z]$ – okruh polynomů tří neurčitých nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$

$\mathbb{Z}\,[x, y]$ – okruh polynomů dvou neurčitých nad tělesem celých čísel $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_r]$ – okruh polynomů r neurčitých nad tělesem racionálních čísel $\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}\,[x_1, x_2, \dots, x_n]$ – okruh polynomů n neurčitých nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$

R – komutativní okruh s jednotkovým prvkem

$R^{n \times n}$ – okruh čtvercových matic řádu n nad okruhem R

$R^{n \times m}$ – okruh matic typu $n \times m$ nad okruhem R

T – těleso

A, B, C ... – matice

A^{-1} – inverzní matice k matici A

A^T – transponovaná matice k matici A

$-A$ – opačná matice k matici A

A_{rec} – reciproká matice k matici A

O – nulová matice

E – jednotková matice

a_{ij} – prvek v *i*-tém řádku a v *j*-tém sloupci matice A

$\det A$ – hodnota determinantu matice A

SLR – soustava lineárních rovnic

Úvod, zpřesnění tématu

Téma soustav lineárních rovnic mě zaujalo, neboť s jednoduššími typy lineárních rovnic a jejich soustav (zpravidla dvou rovnic o dvou neznámých) se žáci setkávají již na základní škole, na střední škole pak řeší i soustavy lineárních rovnic o třech či čtyřech neznámých.

Metodami řešení a řešitelností soustav m rovnic s reálnými koeficienty a n neznámými se zabývají úvodní kurzy matematiky na vysokých školách. Nejširší možnosti řešení nabízí právě těleso reálných čísel $\mathbb{R}$.

Ve své práci se budu věnovat soustavám lineárních rovnic nad komutativními okruhy s jednotkovým prvkem, které nejsou tělesy. Takovými okruhy je například obor integrity celých čísel $\mathbb{Z}$, okruh zbytkových tříd $\mathbb{Z}_m$, kde m není prvočíslo, okruhy polynomů jedné i více neurčitých nad komutativními okruhy, například $\mathbb{Q}\,[x]$, $\mathbb{R}\,[x, y, z]$, $\mathbb{Z}\,[x, y]$ atd.

V dalším textu budeme okruhem R vždy rozumět komutativní okruh s jednotkovým prvkem. Pokud není uvedeno jinak, jsou použité definice a věty citovány z publikace [1], v mnoha případech jsou v této publikaci aplikovány nad tělesem T a pro účel práce upraveny pro okruh R.

1. Soustavy lineárních rovnic nad komutativními okruhy

1.1. Základní pojmy

Z hlediska matematické logiky se rovnicí s n neznámými rozumí jakákoliv výroková forma o n proměnných, jejímž oborem proměnnosti je v matematice na základních a středních školách obvykle množina všech reálných čísel $\mathbb{R}$ nebo kartézský součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Řešením rovnice rozumíme každý prvek z oboru pravdivosti výrokové formy, tj. každou uspořádanou n-tici $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, jejímž dosazením do výrokové formy (rovnice) dostaneme pravdivý výrok (rovnost). Jiné uspořádané n-tice nelze považovat za řešení zadané rovnice.

V této práci budeme hledat řešení soustav lineárních rovnic, tj. obory pravdivostí konjunkcí výrokových forem, které mají za obor proměnnosti nějaký komutativní okruh R nebo jeho kartézské mocniny $R^2 = R \times R$; $R^3 = R \times R \times R$ apod.

Zformulujme předchozí text přesněji a konkrétněji v následující definici.

Definice (SLR nad okruhem R)

Soustavou n lineárních rovnic o m neznámých nad komutativním okruhem R budeme rozumět soustavu rovnic tvaru

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & y_n \end{array}, \qquad (\times)$$

kde koeficienty $a_{11}, a_{12}, \dots a_{nm}$ a pravé strany $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou prvky okruhu R.

Řešením této soustavy je uspořádaná n-tice $[x_1, x_2, \dots, x_n]$, kde $x_1, x_2, \dots, x_n$ jsou prvky okruhu R.

Soustavou tří rovnic o třech neznámých nad komutativním okruhem $\mathbb{Z}_4$ je například soustava:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \ x_3 &= 0 \\ x_2 + \ 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + \ 2\,x_2 \qquad &= 1 \end{aligned} \qquad (\odot)$$

Jejím řešením je uspořádaná trojice [3, 2, 0], což lze ověřit dosazením.

Různými postupy (užitím determinantů nebo elementárních úprav), jimiž lze toto řešení získat, se budeme zabývat v dalších kapitolách.

Připomeňme ještě algebraickou strukturu R, v níž budeme soustavy řešit, tj. komutativní okruh s jednotkovým prvkem.

<u>Definice (okruh)</u>

Množina R se dvěma binárními operacemi " $+$ " a " $\cdot$ " (sčítání a násobení) se nazývá okruh, jestliže platí následující axiomy:

a) $\forall a, b, c \ \in \ R : (a + b) + \ c = a + (b + c)$;
b) $\forall a, b \ \in R : a + b = b + a$;
c) $\exists 0 \ \in R, \forall a \in R : a + 0 = a$;
d) $\forall a \in R, \exists - a \in R : a + (-a) = \ 0$;
e) $\forall a, b, c \in R : (a \ \cdot \ b) \ \cdot \ c = a \ \cdot \ (b \ \cdot \ c)$
f) $\forall a, b, c \in R : \ a \ \cdot \ (b + c) = \ a \ \cdot \ b + a \ \cdot \ c$
g) $\forall a, b, c \in R : (a + b) \ \cdot \ c = \ a \ \cdot \ c + b \ \cdot \ c$

Pokud platí axiom

h) $\exists 1 \in R, \forall a \in R : 1 \cdot a = a \ \cdot \ 1 = a$,

pak hovoříme o okruhu s jednotkovým prvkem.

Pokud platí axiom

i) $\forall a, b \ \in R : a \ \cdot \ b = b \ \cdot \ a$,

pak hovoříme o komutativním okruhu.

Pokud platí axiomy h) a i), pak hovoříme o komutativním okruhu s jednotkovým prvkem.

V této práci nás budou zajímat pouze komutativní okruhy s jednotkovým prvkem, tj. struktury, v nichž je operace sčítání i násobení asociativní a komutativní (axiomy a), b), e), i)), sčítání i násobení je operací s neutrálním prvkem (axiomy c), h) – prvek 0 je nulovým prvkem, prvek $1 \neq 0$ je jednotkovým prvkem) a sčítání je navíc operací s prvkem opačným (axiom d) – prvek $-a$ je opačným prvkem k prvku a). Obě binární operace na množině R jsou svázány distributivními zákony (axiomy f), g)).

Uveďme příklady algebraických struktur, které jsou komutativním okruhem s jednotkovým prvkem a nejsou tělesem, tj. příklady množin, ve kterých budeme soustavy lineárních rovnic řešit.

- Obor integrity celých čísel $\mathbb{Z}$, kde 0 je neutrálním prvkem pro sčítání a 1 je jednotkový prvek pro násobení;
- Okruh zbytkových tříd celých čísel $\mathbb{Z}_m$, kde $m > 1$ není prvočíslo, třída 0 zahrnující všechna celá čísla dělitelná m je nulovým prvkem, třída 1 obsahující všechna čísla, která při dělení m dávají zbytek 1, je jednotkovým prvkem, operace " + " a " · " jsou definovány „modulo m“;
- Okruhy polynomů jedné neurčité nad komutativními okruhy s jednotkou, např. $\mathbb{Z}[x]$, nebo nad komutativními tělesy, např. $\mathbb{Q}\,[x]$, nulový polynom $o\ (x)$ je nulovým prvkem, polynom 1 je jednotkovým prvkem.
- Okruhy polynomů více neurčitých nad komutativními okruhy s jednotkou, resp. nad komutativními tělesy, např. $\mathbb{Z}[x,y]$, resp. $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_r\ ]$.

2. Matice, operace s nimi a jejich vlastnosti

Jednou z možností řešení SLR nad okruhem R je využití matic. Proto si nyní vyslovme nezbytně nutné definice a objasněme vlastnosti matic nad okruhem. Teorie týkající se způsobů řešení SLR budeme přidávat postupně v dalších kapitolách.

Definice (matice nad okruhem R)

Nechť R je okruh a m, n přirozená čísla. Maticí typu $n \times m$ nad okruhem R budeme rozumět obdélníkové schéma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix},$$

kde $a_{ij} \in R$ pro každé $i = 1, \dots, n$ a každé $j = 1, \dots, m$. Tuto matici budeme značit (a_{ij}). Jestliže je $m \neq n$, pak hovoříme o obdélníkové matici typu $n \times m$, jestliže je $m = n$, hovoříme o čtvercové matici řádu n. Jestliže je v obdélníkové matici $a_{ij} = 0$ pro každé $i \neq j$, pak říkáme, že je matice diagonální.

Definice (diagonální matice)

Nechť R je komutativní okruh. Diagonální maticí nad okruhem R budeme rozumět každou matici, které má mimo hlavní diagonálu samé nulové prvky.

Obdélníková matice $A = (a_{ij})$ typu $n \times m$ je tedy diagonální, jestliže pro každé $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m, i \neq j$, je $a_{ij} = 0$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & 0 \end{pmatrix},$$

kde $m > n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \\ 0 & 0 & & 0 \quad 0 \end{pmatrix},$$

kde $n > m$.

Dále říkáme, že prvek a_{ij} stojí v matici na místě ij, kde i je číslo řádku a j je číslo sloupce v dané matici.

Množinu všech matic typu $n \times m$ nad okruhem R budeme stručně zapisovat $R^{n\times m}$.

Definice (horní trojúhelníková matice)

Nechť $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n nad okruhem R. Řekneme, že matice A je horní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n; i > j$ je $a_{ij} = 0$.

Např. $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ je horní trojúhelníkovou maticí nad okruhem $\mathbb{Z}_{12}$.

Definice (dolní trojúhelníková matice)

Nechť $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ je čtvercová matice řádu n nad okruhem R. Řekneme, že matice A je dolní trojúhelníková, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n; i < j$ je $a_{ij} = 0$.

Např. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 8 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ je dolní trojúhelníkovou maticí nad okruhem $\mathbb{Z}_9$.

Následující text věnujeme operacím s maticemi a vlastnostem matic.

2.1. Operace s maticemi

2.1.1. Sčítání matic

Definice (součet matic)

Nechť $A = (a_{ij})$; $B = (b_{ij})$ jsou matice typu $n \times m$ nad okruhem R. Součtem těchto dvou matic budeme rozumět matici

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$$

typu $n \times m$, která má na místě ij součet prvků stojících v maticích A a B na místě ij; říkáme, že matice sčítáme po složkách.

Zdůrazněme, že součet $A + B$ matic A, B je definován jen tehdy, mají-li matice A, B stejný typ; součet $A + B$ má pak stejný typ jako matice A, B.

Příklad: Vypočítejte součet matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

nad okruhem $\mathbb{Z}_4$.

Řešení je zcela prosté, sečteme prvky nacházející se na stejných pozicích v matici A i v matici C. Protože pracujeme nad okruhem $\mathbb{Z}_4$ budou prvky $a_{ij} + c_{ij}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$, matice $A + C$ z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. Pokud $a_{ij} + c_{ij} \notin \mathbb{Z}_4$ vypočteme zbytek po dělení součtu čtyřmi. Tento zbytek (0, 1, 2, nebo 3) zapíšeme.

$$A + C = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+0 & 3+1 \\ 0+1 & 2+3 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$A + C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pro snadné určení celočíselných zbytků po sčítání nad okruhem $\mathbb{Z}_4$ můžeme použít následující tabulku:

Tabulka (1) Celočíselné zbytky po sčítání modulo 4

$\oplus$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Sčítání matic nad okruhem R má následující vlastnosti:

a) Sčítání matic nad okruhem R je asociativní a komutativní, tj. $\forall A, B, C \in R^{n \times m}: (A + B) + C = A + (B + C)$, $\forall A, B, \in R^{n \times m}: A + B = B + A$, protože sčítání prvků v okruhu R je asociativní a komutativní.

b) Nad okruhem R existuje nulový prvek, nulová matice O, která má na všech místech nulový prvek okruhu R, tj. $O = (a_{ij})$, kde $a_{ij} = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ a $j = 1, \ldots, m$. Součet nulové matice typu $n \times m$ s libovolnou maticí A stejného typu je roven matici A, tj.

$$\exists O \in R^{n \times m}\ \forall A \in R^{n \times m}: A + O = O + A = A.$$

Vlastnost je důsledkem existence nulového prvku v okruhu R.

c) K libovolné matici A typu $n \times m$ existuje matice $-A$ stejného typu, tzv. opačná matice, která má na každém místě ij opačný prvek k prvku, který je na místě ij v matici A, tj. $-A = \left(-a_{ij}\right)$, jestliže $A = (a_{ij})$. Součet matice a matice k ní opačné dává nulovou matici, tj.

$$\forall A \in R^{n\times m} \, \exists -A \in R^{n\times m} : A + (-A) = O.$$

Existenci opačné matice lze dokázat z existence opačného prvku k libovolnému prvku okruhu R.

Struktura $(R^{n\times m}, +)$ je tedy komutativní grupou.

2.1.2. *Násobení matic*

Definice (součin matic):

Nechť $A = (a_{is})$ je matice typu $n \times m$ a $B = (b_{sj})$ matice typu $m \times k$ nad komutativním okruhem R. Součinem matic A, B (v tomto pořadí) budeme rozumět matici $A \cdot B$ typu $n \times k$, která má na místě ij prvek

$$\sum_{s=1}^{m} a_{is}b_{sj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj},$$

tj. skalární součin i-tého řádkového vektoru matice A a j-tého sloupcového vektoru matice B.

Součin $A \cdot B$ matic A, B je definován pouze tehdy, má-li matice A stejný počet sloupců jako matice B řádků. Součin $A \cdot B$ má pak stejný počet řádků jako matice A a stejný počet sloupců jako matice B.

Příklad: Vypočítejte součin matic $A \cdot B$ nad okruhem $\mathbb{Z}_4$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Řešení je náročnější než při sčítání matic. Například prvek na pozici $i = 1, j = 3$ získáme tím, že skalárně vynásobíme první řádkový vektor matice A se třetím sloupcovým vektorem matice B. Opět pracujeme nad okruhem $\mathbb{Z}_4$, a proto získané výsledky podřídíme stejnému pravidlu dělení čtyřmi s celočíselným zbytkem jako v případě součtu matic v kapitole 2.1.1. nebo využijeme tabulku násobení v $\mathbb{Z}_4$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obdobně jako u sčítání, i u násobení lze vytvořit tabulku celočíselných zbytků, které jsou prvky okruhu $\mathbb{Z}_4$

Tabulka (2) Celočíselné zbytky po násobení modulo 4

$\otimes$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Pro násobení matic platí níže uvedená tvrzení:

a) Násobení matic je asociativní, tj.

$$\forall A \in R^{n\times m}, \forall B \in R^{m\times k}, \forall C \in R^{k\times l}: (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C);$$

b) Násobení matic není obecně komutativní. To je zřejmé např. pro součin matice A typu $n \times m$ s maticí B typu $m \times n, m \neq n$, kdy matice $A \cdot B$ jsou typu $n \times n$ (čtvercové matice řádu n) a matice $B \cdot A$ typu $m \times m$ (čtvercové matice řádu m).

c) Násobení matic je distributivní zleva i zprava vzhledem ke sčítání, tj.

(1)$\forall A \in R^{n\times m}, \forall B, C \in R^{m\times k}: A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C,$

(2) $\forall A \in R^{m\times k}, \forall B, C \in R^{n\times m}: (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$

d) Nad okruhem s jednotkovým prvkem lze definovat jednotkovou matici E řádu n, která je neutrálním prvkem vzhledem k násobení matic, tj.

$$\exists E \in R^{n\times n}\ \forall A \in R^{n\times n}: E \cdot A = A \cdot E = A, \text{ kde } E = (\delta_{ij}),$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & pro \ \ i, j = 1, \dots, n; i = j \\ 0 & pro \ \ i, j = 1, \dots, n; i \neq j \end{cases}$$

Omezíme-li se pouze na čtvercové matice řádu n, plyne z vlastností a), d), že struktura $(R^{n\times n}, \cdot)$ je monoid. Navíc můžeme říci, že struktura $(R^{n\times n}, +, \cdot)$ je nekomutativní okruh s jednotkou, neboť je komutativní grupou vzhledem ke sčítání matic, monoidem vzhledem k násobení matic a operace jsou svázány distributivními zákony c).

2.1.3. Násobení matic skalárem

Definice (násobení matice číslem)

Nechť $A = (a_{ij}) \in R^{n\times m}$ je matice typu $n \times m$ nad okruhem R a nechť $c \in R$ je jeho libovolný prvek. c-násobkem matice A budeme rozumět matici

$$c \cdot A = (c \cdot a_{ij})$$

typu $n \times m$, která má na místě ij c-násobek prvku, který v matici A stojí na místě ij.

Příklad: Vypočítejte dvojnásobek matice A a čtyřnásobek matice B nad okruhem $\mathbb{Z}_6$, jestliže

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Řešení:

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad 4B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podobně jako jsme v části 2.1.1. vytvořili tabulku pro sčítání prvků nad okruhem $\mathbb{Z}_4$, můžeme vytvořit tabulku i nad okruhem $\mathbb{Z}_6$.

Násobení skalárem má následující vlastnosti:

Nechť $A, B \in R^{n\times m}$ jsou libovolné matice typu $n \times m$ a c, d libovolné prvky okruhu R. Potom platí:

a) $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$;
b) $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$;
c) $(c \cdot d) \cdot A = c \cdot (d \cdot A)$;
d) $1 \cdot A = A$;
e) $c \cdot (A \cdot B) = (c \cdot A) \cdot B = A \cdot (c \cdot B)$, pokud $m = n$.

Protože $(R^{n\times m}, +)$ je komutativní grupa a násobení matic skalárem splňuje a), b), c), d), je příslušná algebraická struktura R-modulem.

Pokud bychom matice předpokládali nad tělesem T místo okruhu R a rovněž skaláry, jimiž lze násobit matice, bychom vybírali z tělesa T, bylo by vlastnostmi a), b), c) ze strany 9 a 10 a a), b), c), d) ze strany 11 doloženo, že množina všech matic nad T typu $n \times m$ spolu se sčítáním a násobením skalárem tvoří vektorový prostor nad T.
Na základě toho můžeme R -modul charakterizovat jako „vektorový prostor nad komutativním okruhem R“.

2.2. Vlastnosti matic

2.2.1. Invertování a transponování matic nad okruhem

Definice (inverzní matice)

Nechť R je okruh a A čtvercová matice řádu n nad R. Inverzní maticí k matici A budeme rozumět matici A^{-1}, pro kterou je $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$. Matice A, ke které inverzní matice existuje, se nazývá invertibilní.

Uveďme příklady matic a matic k nim inverzních:

Nad $\mathbb{Z}_8$ je k matici A

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

maticí inverzní matice A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Nad $\mathbb{Z}$ je k matici B

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

maticí inverzní matice B^{-1}

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -9 & 6 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Nad $\mathbb{Q}[x]$ je k matici C

$$C = \begin{pmatrix} x^2 - 2x - 4 & 2x + 2 \\ x - 3 & 2 \end{pmatrix}$$

maticí inverzní matice C^{-1}

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & x + 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & -\frac{x^2}{2} + x + 2 \end{pmatrix}$$

Pro součin dvou invertibilních matic platí následující tvrzení:

Nechť R je komutativní okruh s jednotkovým prvkem a A, B invertibilní matice téhož řádu nad R. Potom je rovněž matice $A \cdot B$ invertibilní a je

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

V kapitole 3.1. objasníme, jak zjistit, kdy je matice invertibilní a jak vypočítat inverzní matici.

Definice (transponovaná matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu $n \times m$ nad komutativním okruhem R. Transponovanou maticí k matici A budeme rozumět matici $A^T = (b_{ji})$ typu $m \times n$, kde pro každé $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, m$ je $b_{ji} = a_{ij}$.

Například matice

$$A^T = \begin{pmatrix} x^2 & -x + 1 & 1 \\ 2x & x^3 - 3 & 0 \end{pmatrix}$$

nad $\mathbb{Q}[x]$ je transponovaná k matici

$$A = \begin{pmatrix} x^2 & 2x \\ -x + 1 & x^3 - 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti operací transponovaných matic jsou shrnuty v dalším tvrzení:

Nechť A, B jsou libovolné matice nad okruhem R, které je možno sečíst, respektive vynásobit, nechť c je libovolný prvek okruhu R. Potom platí:

a) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
b) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$;
c) $(c \cdot A)^T = c \cdot A^T$;
d) $(A^T)^T = A$.

Jestliže je A čtvercová invertibilní matice, potom je matice A^T rovněž invertibilní a je

e) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

2.3. Maticový zápis soustavy

Na počátku jsme si v definici soustavy lineárních rovnic představili soustavu v následujícím tvaru:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1m}x_m & = & y_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2m}x_m & = & y_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \dots & + & a_{nm}x_m & = & y_n \end{array}, \qquad (\times)$$

Tuto soustavu umíme nyní zapsat jako maticovou rovnici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

je matice soustavy,

$$b = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

je sloupec pravých stran a

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

je neznámá matice. Soustavu rovnic pak můžeme stručně zapsat ve tvaru $A \cdot x = b$.

Při zavedeném maticovém zápisu můžeme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \qquad (\odot) \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Užití determinantů pro řešení soustav lineárních rovnic nad okruhem

V následujících kapitolách budeme maticový zápis soustav využívat v různých metodách řešení SLR nad okruhem, nyní si představme první z těchto metod – užití determinantů.

Z vysokoškolského kurzu algebry je známá definice determinantu matice nad komutativním tělesem. Stejnou definici je možno použít i pro matici nad okruhem R.

<u>Definice (determinant nad R)</u>

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad komutativním okruhem R. Determinant matice A, píšeme $\det A$, resp.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

je prvek okruhu R vytvořený z prvků a_{ij} matice A následovně:

Jestliže $n = 1$, tj.

$$A = (a_{11}),$$

pak

$$\det A = a_{11}.$$

Jestliže $n \geq 2$, tj.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

pak

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} =$$

$$= a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n},$$

kde $\det A_{1j}$, $j = 1, \dots, n$, jsou determinanty matic, které vzniknou z matice A vynecháním prvního řádku a j-tého sloupce.

V dalším textu budeme předpokládat platnost tzv. křížového pravidla, Sarrusova pravidla, rozvojů determinantů podle i-tého řádku, resp. j-tého sloupce a dalších vlastností determinantů i pro matice nad R. Příslušné důkazy, že uvedená pravidla a vlastnosti platí i nad okruhem R lze najít například v publikaci Lineární algebra, J. Bečvář, 2002.

<u>Příklad</u>: Vypočtěte determinant matice A nad okruhem $\mathbb{Z}_8$ ze strany 13.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matice A je čtvercová řádu tři, můžeme tedy využít Sarrusova pravidla. Protože ho v této práci používáme poprvé, rozepíšeme ho podrobně. Abychom snáze určili součiny, které máme provést, opíšeme za determinant znovu první dva sloupce matice A.

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

K součinu prvků na hlavní diagonále, $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$, přičteme další dva součiny

$$a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}.$$

Členy a_{31}, a_{21}, a_{32} vidíme přepsané ve dvou sloupcích, které jsme za determinant doplnili pro lepší přehlednost.

Od tohoto součtu součinů odečteme následující součet:

$$a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Celý vzorec pak vypadá následovně:

$$\det A = (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 4 \\ 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{matrix} =$$

$$= (6 \cdot 4 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1) - (1 \cdot 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2) =$$

$$= 73 - 34 = 39 = 7$$

3.1. Řešení soustav lineárních rovnic užitím inverzní matice

Již víme, že každou SLR můžeme zapsat pomocí matice A a sloupce pravých stran ve tvaru $A \cdot x = b$. Je-li matice A invertibilní, lze řešení příslušné soustavy získat následovně. Obě strany maticové rovnice

$$A \cdot x = b$$

vynásobíme zleva inverzní maticí A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Součin dvou navzájem inverzních matic je jednotková matice, a tedy:

$$E \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Matice E je neutrální prvek operace násobení matic, tudíž:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Postup řešení soustav lineárních rovnic užitím inverzní matice je nyní zřejmý. Zbývá objasnit, jak poznat, kdy je matice nad R invertibilní a jak k ní najít inverzní matici.

Definice (Reciproká matice)

Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu $n > 1$ nad okruhem R. Reciprokou maticí k matici A budeme rozumět matici A_{rec} řádu n, ve které na místě ij stojí algebraický doplněk prvku a_{ji} matice A, tj. prvek $(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ji}$.

Věta (Podmínka existence inverzní matice nad okruhem R a její výpočet)

Nechť R je okruh a A čtvercová matice nad okruhem R. Matice A je nad okruhem R invertibilní právě tehdy, když je její determinant $\det A$ invertibilním prvkem okruhu R. Nastane-li tento případ, je

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A_{rec}.$$

Výpočet A_{rec} a A^{-1} si ukážeme na příkladu.

Příklad 1: Najděte reciprokou matici A_{rec} a inverzní matici A^{-1} k matici A nad $\mathbb{Z}_8$ ze strany 13.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \det A = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Nad okruhem $\mathbb{Z}_8$ jsou invertibilní prvky[1] 1, 3, 5, 7. Vzhledem k tomu, že $\det A = 7$, je podle předchozí věty matice A invertibilní.

Zbývá vypočítat reciprokou matici a $(\det A)^{-1}$. K výpočtu reciproké matice A_{rec} musíme znát všechny subdeterminanty druhého řádu matice A. Na prvním subdeterminantu, $\det A_{11}$, ilustrujeme jejich výpočet:

$$\det A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = (4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = 5$$

Pro ostatní subdeterminanty platí:[2]

$$\begin{array}{lll} \det \mathrm{A}_{11} = 5 & \det \mathrm{A}_{12} = 4 & \det \mathrm{A}_{13} = 1 \\ \det \mathrm{A}_{21} = 7 & \det \mathrm{A}_{22} = 2 & \det \mathrm{A}_{23} = 6 \\ \det \mathrm{A}_{31} = 0 & \det \mathrm{A}_{32} = 1 & \det \mathrm{A}_{33} = 4 \end{array}$$

Pro každou čtvercovou matici řádu tři bude reciproká matice vypadat následovně:

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} \det A_{11} & -\det A_{21} & \det A_{31} \\ -\det A_{12} & \det A_{22} & -\det A_{32} \\ \det A_{13} & -\det A_{23} & \det A_{33} \end{pmatrix},$$

Po doplnění hodnot subdeterminantů matice A tedy získáme

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -4 & 2 & -1 \\ 1 & -6 & 4 \end{pmatrix},$$

tj. nad $\mathbb{Z}_8$

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Inverzním prvkem k $\det A = 7$ je $(\det A)^{-1} = 7$, neboť $7 \cdot 7 = 1$ v $\mathbb{Z}_8$.

Nalezenou reciprokou matici a inverzní prvek k determinantu dosadíme do vztahu

$$A^{-1} = (\det A)^{-1} \cdot A_{rec}$$

z věty o výpočtu inverzní matice.

$$A^{-1} = 7 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

---

[1] Připomeňme, že v okruzích $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$ jsou invertibilní všechny prvky p, které jsou nesoudělné s m, tj. p je invertibilním prvkem okruhu $\mathbb{Z}_m$ právě tehdy, když NSD(p, m) = 1.

[2] Stále používáme pro výsledky metodu dělení 8 s celočíselným zbytkem, jak jsme již popsali u příkladů sčítání a násobení matic.

Jako kontrola nám poslouží vynásobení matic $A \cdot A^{-1}$, ze kterého dostaneme jednotkovou matici E .

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: Nad okruhem $\mathbb{Z}_6$ najděte inverzní matici k matici A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve určíme invertibilní prvky okruhu $\mathbb{Z}_6$. To můžeme udělat například pomocí tabulky násobení modulo 6

Tabulka (3) Celočíselné zbytky po násobení modulo 6

⊗	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

nebo užitím věty z první poznámky pod čarou. Nad okruhem $\mathbb{Z}_6$ jsou invertibilními prvky čísla 1 a 5.

Nyní vypočítáme determinant matice A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 0 + 0) - (20 + 0 + 12) = -30 = 0$$

Matice tedy není invertibilní, protože $\det A = 0$.

Příklad 3: Užitím inverzní matice vyřešte nad okruhem $\mathbb{Z}_4$ soustavu:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array}$$

Označme

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

matici soustavy a vypočtěme její determinant, abychom zjistili, zda je invertibilní.

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (2 + 3 + 4 - 2 - 2 - 6) = -1 = 3$$

Nad okruhem $\mathbb{Z}_4$ jsou invertibilní prvky 1 a 3, to si opět můžeme ověřit pomocí tabulky. Matice A je proto invertibilní, $\det A^{-1} = 3$, a můžeme vypočítat matici A_{rec} pomocí subdeterminantů matice.

$$\begin{array}{llllll} \det \mathrm{A}_{11} = & 0 & \det \mathrm{A}_{12} = & 1 & \det \mathrm{A}_{13} = & 2 \\ \det \mathrm{A}_{21} = & 1 & \det \mathrm{A}_{22} = & 0 & \det \mathrm{A}_{23} = & 3 \\ \det \mathrm{A}_{31} = & 1 & \det \mathrm{A}_{32} = & 3 & \det \mathrm{A}_{33} = & 0 \end{array}$$

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Záporná čísla se v $\mathbb{Z}_4$ nevyskytují, celou číselnou řadu upravujeme tak, aby v ní byla jen čísla z množiny $\{0, 1, 2, 3\}$. K představě o této úpravě nám může pomoci následující tabulka

Tabulka (4) Záporná čísla modulo 4

$\mathbb{Z}$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2
$\mathbb{Z}_4$	3	0	1	2	3	0	1	2

Obdobně bychom mohli pokračovat se všemi čísly z množiny celých čísel, a to nejen pro $\mathbb{Z}_4$, ale také pro $\mathbb{Z}_6, \mathbb{Z}_8, \mathbb{Z}_{12}$ atd.

Reciprokou maticí k matici zadané soustavy je

$$A_{rec} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní najdeme inverzní matici

$$A^{-1} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z rovnice $A \cdot x = b$ pro invertibilní matici A plyne $x = A^{-1} \cdot b$, kde b je vektor pravých stran.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

SLR má jedno řešení, kterým je uspořádaná trojice $[x_1, x_2, x_3] = [2, 3, 2]$.

<u>Příklad 4</u>: Užitím inverzní matice řešte soustavu:

$$x^2y - x^2 - 2xy + 2xz - 4y + 2z - 2 = 0, \qquad (*)$$
$$xy - x - 3y + 2z + 3 = 0.$$

V zadání není sděleno, nad jakým okruhem je třeba soustavu řešit. Lze na ni nahlížet jako na soustavu dvou polynomiálních rovnic o třech neznámých nad okruhem celých čísel, tj. polynomy příslušné soustavě jsou prvky $\mathbb{Q}[x, y, z]$. Takovým typem soustavy se v práci nezabýváme. Při podrobnějším zkoumání soustavy si však můžeme všimnout, že neznámé y a z se v rovnicích objevují jen v první mocnině, tj. rovnice jsou lineární v y a z a mají koeficienty v nějakém okruhu polynomů jedné neurčité x. Na soustavu je proto možné se dívat jako na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých.

Přepišme danou soustavu tak, aby byla lineární v neznámých y a z:

$$(x^2 - 2x - 4)y + (2x + 2)z - x^2 - 2 = 0,$$
$$(x - 3)y + 2z - x + 3 = 0,$$

resp.

$$\begin{pmatrix} x^2 - 2x - 4 & 2x + 2 \\ x - 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2 \\ x - 3 \end{pmatrix}$$

Matice C soustavy lineárních rovnic je invertibilní nad okruhem $\mathbb{Q}[x]$, jak jsme uvedli na straně 14 v kapitole 2.2.1. o invertování matic nad okruhem. Je tedy

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 2x - 4 & 2x + 2 \\ x - 3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} x^2 + 2 \\ x - 3 \end{pmatrix},$$

odkud

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & x + 1 \\ \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & -\frac{x^2}{2} + x + 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x^2 + 2 \\ x - 3 \end{pmatrix},$$

a tedy

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x - 5 \\ x^2 - 9 \end{pmatrix}$$

je dvojice, která je řešením dané soustavy.

Poznámka: soustavu (*) dvou rovnic o třech neznámých lze díky vytknutí y a z řešit jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

3.2. Užití Cramerova pravidla pro řešení soustav lineárních rovnic

Cramerovo pravidlo se studenti na vysoké škole naučí užívat pro „malé“ soustavy rovnic (tj. soustavy tří rovnic o třech neznámých) nad komutativními tělesy. Nyní si ukážeme, že lze zobecnit i pro soustavy lineárních rovnic nad okruhy. Pravidlo umožní vyřešit i soustavy, jejichž matice nejsou nad okruhem R invertibilní, je tedy použitelné v obecnějších případech než metoda inverzní matice z kapitoly 3.1.

Věta (Cramerovo pravidlo):

Nechť A je čtvercová matice řádu n a $y = (y_1, \dots, y_n)$ n-tice prvků okruhu R. Pro každé $j = 1, \dots, n$ označme symbolem A_j matici, která vznikne z matice A nahrazením jejího j-tého sloupce n-ticí $y = (y_1, \dots, y_n)$, tj. sloupcem pravých stran. Potom platí:

a) Každé řešení soustavy lineárních rovnic $A \cdot x = y$ je řešením následující soustavy se separovanými neznámými:

$$\begin{array}{ccc} \det A \cdot x_1 & = & \det A_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \det A \cdot x_n & = & \det A_n \end{array}.$$

b) Jestliže $\det A$ je invertibilním prvkem okruhu R, potom má soustava lineárních rovnic $A \cdot x = y$ jediné řešení ve tvaru:

$$x_1 = \det A_1 \cdot (\det A)^{-1}, x_2 = \det A_2 \cdot (\det A)^{-1}, \dots, x_n = \det A_n \cdot (\det A)^{-1}.$$

Důkaz.

Předpokládejme, že n-tice $x = (x_1, \dots, x_n)$ je řešením soustavy $A \cdot x = y$. Označíme-li $X_j, j = 1, \dots, n$, matici řádu n, která vznikne z jednotkové matice E nahrazením jejího j-tého sloupce n-ticí $x = (x_1, \dots, x_n)$ potom je pro každé $j = 1, \dots, n$

$$A \cdot X_j = A_j .$$

Podle věty o násobení determinantů je nyní pro každé $j = 1, \dots, n$

$$\det A \cdot \det X_j = \det A_j ,$$

tj.

$$\det A \cdot x_1 = \det A_1, \dots, \det A \cdot x_n = \det A_n.$$

Jestliže má okruh R jednotkový prvek a jestliže je $\det A$ invertibilním prvkem okruhu R, potom je

$$x_1 = \det A_1 \cdot (\det A)^{-1}, \dots, x_n = \det A_n \cdot (\det A)^{-1}.$$

Na příkladech ukážeme, jak pravidlo používat.

Příklad 1: S využitím Cramerova pravidla určete řešení soustavy zadané maticí A nad $\mathbb{Z}_8$ ze strany 13

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a vektorem pravých stran

$$b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Připomeňme, že pro determinant matice A platí:

$$\det A = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$$

Matice A je tedy invertibilní a podle části b) Cramerova pravidla má soustava jedno řešení, k jehož nalezení ještě zbývá vypočítat determinanty tří matic, které se od matice soustavy liší v jednom sloupci tak, jak je uvedeno v pravidle.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \det A_2 = \begin{vmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 2\,, \det A_3 = \begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 7$$

Z předchozích výpočtů víme, že $(\det A)^{-1} = 7$, proto jsou složky trojice, která je řešením soustavy, dány výrazy

$$x_1 = \det A_1 \cdot (\det A)^{-1} = 1 \cdot 7 = 7,$$

$$x_2 = \det A_2 \cdot (\det A)^{-1} = 2 \cdot 7 = 6,$$

$$x_3 = \det A_3 \cdot (\det A)^{-1} = 7 \cdot 7 = 1.$$

Pokud bychom postupovali podle části a) Cramerova pravidla, získali bychom soustavu

$$7 \cdot x_1 = 1,$$
$$7 \cdot x_2 = 2,$$
$$7 \cdot x_3 = 7,$$

v níž jsou neznámé separovány. Řešení jednotlivých rovnic lze najít v tabulce.

Tabulka (5) Celočíselné zbytky po násobení modulo 8

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	0	2	4	6
3	0	3	6	1	4	7	2	5
4	0	4	0	4	0	4	0	4
5	0	5	2	7	4	1	6	3
6	0	6	4	2	0	6	4	2
7	0	7	6	5	4	3	2	1

Na neznámé x_1, pro kterou platí $7 \cdot x_1 = 1$, si ukážeme, jak postupovat. V tabulce součinů modulo 8 v řádku „7" najdeme ten sloupec, který v tomto řádku dává prvek 1. Vidíme, že je to sloupec „7", a proto $x_1 = 7$.

Podobným postupem zjistíme, že $x_2 = 6$ a $x_3 = 1$. Řešením soustavy

$$\begin{array}{rcrcrcr} 6x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 6 \end{array}$$

nad okruhem $\mathbb{Z}_8$ je uspořádaná trojice $[7, 6, 1]$. Správnost řešení si můžeme ověřit dosazením do zadání.

Příklad 2: Řešte následující soustavu nad okruhem celých čísel $\mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array} \quad (\square)$$

Nejprve vypočteme $\det A$, abychom určili, zda je matice invertibilní.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (9 - 6 + 1 - 3 + 3 - 6) = -2$$

Zjistili jsme, že matice není invertibilní, nelze proto použít postupu z kapitoly 3.1. K vyřešení soustavy použijeme Cramerovo pravidlo (část a)), podle něhož najdeme soustavu se separovanými neznámými, jejíž řešení mohou být řešením dané soustavy. Vypočteme determinanty, ve kterých vždy jeden ze sloupců v matici nahradíme vektorem pravých stran.

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Soustava

$$-2 \cdot x_1 = -15,$$
$$-2 \cdot x_2 = 18,$$
$$-2 \cdot x_3 = 7$$

nemá žádné řešení v $\mathbb{Z}$, neboť první a třetí rovnice nemají v $\mathbb{Z}$ řešení. Z toho důvodu ani daná soustava nemá nad okruhem celých čísel řešení.

Příklad 3: Řešte soustavu (□) z předchozího příkladu nad okruhem $\mathbb{Z}_9$, tj. najděte nad tímto okruhem všechna řešení soustavy:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 8z & = & 2 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 3 \end{array} \quad (\square)$$

Vypočteme determinant matice A a determinanty matic A_1, A_2, A_3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 7$$

Skutečnost, že $\det A = 7$, a tedy $(\det A)^{-1} = 4$, nám napovídá, že matice A je invertibilní a soustava proto bude mít jediné řešení dané předpisy v části b) Cramerova pravidla:

$$x = \det A_1 \cdot (\det A)^{-1} = 3 \cdot 4 = 3,$$
$$y = \det A_2 \cdot (\det A)^{-1} = 0 \cdot 4 = 0,$$
$$z = \det A_3 \cdot (\det A)^{-1} = 7 \cdot 4 = 1$$

Ke stejnému výsledku dospějeme s využitím tabulky, v níž lze snadno najít řešení soustavy

$$7 \cdot x = 3,$$
$$7 \cdot y = 0,$$
$$7 \cdot z = 7,$$

se separovanými neznámými z části a) Cramerova pravidla.

Tabulka (6) Celočíselné zbytky po násobení modulo 9

$\otimes$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	2	4	6	8	1	3	5	7
3	0	3	6	0	3	6	0	3	6
4	0	4	8	3	7	2	6	1	5
5	0	5	1	6	2	7	3	8	4
6	0	6	3	0	6	3	0	6	3
7	0	7	5	3	1	8	6	4	2
8	0	8	7	6	5	4	3	2	1

Řešením SLR (□) nad okruhem $\mathbb{Z}_9$ je uspořádaná trojice $[3, 0, 1]$. Správnost řešení si můžeme ověřit dosazením do zadání.

<u>Příklad 4</u>: Řešte následující soustavu nad okruhem $\mathbb{Z}_6$.

$$\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 4y & + & z & = & 4 \\ 4x & & & + & 3z & = & 2 \\ 3x & + & 5y & + & 4z & = & 5 \end{array}$$

Vypočteme determinant matice A a determinanty matic A_1, A_2, A_3.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 5 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2\,, \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} = 4$$

Prvek 4 není v okruhu $\mathbb{Z}_6$ invertibilní, musíme proto postupovat podle části a) Cramerova pravidla. Jestliže je nějaká trojice řešením dané soustavy, pak je také řešením soustavy:

$$4 \cdot x = 2,$$
$$4 \cdot y = 2,$$
$$4 \cdot z = 4$$

Tabulka (7) Celočíselné zbytky po násobení modulo 6

$\otimes$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Z tabulky vyplývá, že řešení rovnice $4 \cdot x = 2$ není určeno jednoznačně. Rovnici vyhovují kořeny $x_1 = 2$ a $x_2 = 5$. Stejná řešení má i rovnice $4 \cdot y = 2$, tj. $y_1 = 2;\ y_2 = 5$. Také poslední rovnice, $4 \cdot z = 4$, má dvě řešení, $z_1 = 1;\ z_2 = 4$. Řešením soustavy se separovanými neznámými jsou všechny trojice, v nichž je první složka 2 nebo 5, druhá rovněž 2 nebo 5 a třetí 1 nebo 4.

Tím vznikne osm možných řešení, osm různých uspořádaných trojic:

$$t_1 = [2,2,1] \quad t_2 = [2,2,4] \quad t_3 = [2,5,1] \quad t_4 = [2,5,4]$$
$$t_5 = [5,2,1] \quad t_6 = [5,2,4] \quad t_7 = [5,5,1] \quad t_8 = [5,5,4]$$

Trojice, která řeší soustavu se separovanými neznámými, však nemusí být řešením dané soustavy, jak plyne z formulace Cramerova pravidla. Některé trojice nejsou řešením dané SLR. Teprve dosazením do dané SLR zjistíme, které trojice vyhovují. Jsou to pouze uspořádané trojice t_4 a t_6. Dospěli jsme k poněkud neobvyklému závěru, že daná soustava lineárních rovnic má nad okruhem $\mathbb{Z}_6$ právě dvě řešení. S něčím takovým jsme se v případě soustav lineárních rovnic nad komutativním tělesem nesetkali. Pro ně z hlediska počtu řešení nastala vždy jedna ze tří situací – soustava neměla žádné řešení, soustava měla právě jedno řešení nebo měla soustava nekonečně mnoho řešení.

4. Postupy užívající elementárních úprav matice soustavy

Na základní a střední škole se žáci naučí řešit soustavy rovnic několika metodami – dosazovací, sčítací, srovnávací. Tyto metody jsou připomenuty například v práci E. Smrečkové Soustavy lineárních rovnic a nerovnic [5]. Pro ilustraci si můžeme představit následující soustavu dvou rovnic o dvou neznámých.

$$3x + 2y = 11$$
$$5x + 7y = 11$$

Ve sčítací metodě vynásobíme každou z obou rovnic vhodným číslem tak, abychom jednu neznámou po sečtení rovnic eliminovali.

$$\begin{array}{r} 15x + 10y = 55 \\ -15x - 21y = -33 \\ \hline -11y = 22 \\ y = -2 \end{array}$$

Druhou neznámou lze vypočítat opakovaným použitím sčítací metody,

$$\begin{array}{r} 21x + 14y = 77 \\ -10x - 14y = -22 \\ \hline 11x = 55 \\ x = 5 \end{array}$$

nebo dosazením první neznámé do původní rovnice.

$$3x + 2 \cdot (-2) = 11$$
$$3x = 15$$
$$x = 5$$

Dosazovací metoda spočívá ve vyjádření jedné neznámé z jedné rovnice pomocí druhé neznámé z té samé rovnice.

$$y = \frac{11 - 3x}{2}$$

Za vyjádřenou neznámou dosadíme ve druhé rovnici. Vznikne tak lineární rovnice s jednou neznámou, kterou umíme řešit.

$$5x + 7 \cdot \frac{11 - 3x}{2} = 11$$
$$10x + 77 - 21x = 22$$
$$x = 5$$

Druhou neznámou pak dostaneme po dosazení první zjištěné do rovnice, ze které jsme původně vyjadřovali.

Při užití srovnávací metody pak jednu neznámou vyjádříme z obou rovnic pomocí druhé neznámé,

$$y = \frac{11 - 3x}{2}$$

$$y = \frac{11 - 5x}{7}$$

a porovnáním obou vyjádření první neznámou eliminujeme.

$$\frac{11 - 3x}{2} = \frac{11 - 5x}{7}$$

$$77 - 21x = 22 - 10x$$

$$x = 5$$

Tím dostaneme rovnici pro druhou neznámou.

Uvedené metody lze použít i v případě soustav n rovnic o m neznámých.

Ze sčítací metody lze odvodit Gaussovu eliminační metodu řešení soustav lineárních rovnic. S Gaussovou eliminační metodou se seznamují studenti na vysokých školách. Soustavu rovnic zapíšeme jako rozšířenou matici a převedeme ji na horní trojúhelníkovou matici pomocí elementárních úprav.

<u>Definice (elementární transformační matice)</u>

Elementární transformační maticí budeme rozumět každou invertibilní matici, která se nejvýše na jednom místě liší od jednotkové matice.

Rozeznáváme dva typy elementárních transformačních matic:

(i) V matici jsou mimo hlavní diagonálu samé nuly. Na hlavní diagonále jsou jedničky s výjimkou místa ii, kde stojí nenulový prvek b. Prvek b musí být invertibilní, neboť matice má být invertibilní. (Je-li $b = 1$, jedná se o jednotkovou matici.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) V matici jsou na hlavní diagonále samé jedničky. Mimo hlavní diagonálu jsou nuly s výjimkou místa ij, kde stojí prvek b. (Je-li $b = 0$, jde o jednotkovou matici.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & b & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V následujících odstavcích si objasníme použití elementárních transformačních matic a jejich vliv na násobenou matici. Pro ilustraci přikládám jednoduché příklady.

Vynásobíme-li nějakou matici A elementární transformační maticí I zprava, je výsledkem matice, která se od matice A liší pouze tím, že její i-tý sloupec je b-násobkem i-tého sloupce matice A.

Příklad 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$$

Vynásobíme-li nějakou matici A elementární transformační maticí I zleva, je výsledkem matice, která se od matice A liší pouze tím, že její i-tý řádek je b-násobkem i-tého řádku matice A.

Příklad 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$I \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

Vynásobíme-li matici A elementární transformační maticí II zprava, je výsledkem matice, která se od matice A liší pouze tím, že její j-tý sloupec je součtem j-tého sloupce a b-násobkem i-tého sloupce matice A (b-násobek i-tého sloupce se přičte k j-tému sloupci).

Příklad 3: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $II = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot II = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}$$

Vynásobíme-li matici A elementární transformační maticí II zleva, je výsledkem matice, která se od matice A liší pouze tím, že její i-tý řádek je součtem i-tého řádku a b-násobku j-tého řádku matice A (b-násobek j-tého řádku se přičte k i-tému řádku).

<u>Příklad 4</u>: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$II \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Dvě elementární transformační matice typu (i), které mají na stejném místě hlavní diagonály prvek b, resp.b^{-1}, jsou navzájem inverzní. Dvě elementární transformační matice typu (ii), které mají na stejném místě mimo hlavní diagonálu prvek b, resp. $-b$, jsou navzájem inverzní.

<u>Definice (elementární úpravy matic)</u>

Elementární úpravy matice $A \in R^{n \times m}$ jsou úpravy, které nemění počet lineárně nezávislých řádků a sloupců matice. Vymezíme čtyři elementární úpravy matice, které označíme E1, E2, E3, E4.

E1) Přerovnávání řádků nebo sloupců matice.

E2) Vynásobení libovolného řádku nebo sloupce matice invertibilním prvkem okruhu.

E3) Přičtení lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců) matice k libovolnému řádku (sloupci) matice.

E4) Vypuštění řádku matice, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

Vztah mezi elementárními transformačními maticemi a elementárními úpravami matic lze ukázat na jednoduchých příkladech.

Vynásobení matice A elementární transformační maticí typu (i) odpovídá úpravě E2, při vynásobení zprava jde o úpravu sloupců, zleva o úpravu řádků matice A. Viz příklad 1 a příklad 2.

Vynásobení matice A elementární transformační maticí typu (ii) odpovídá úpravě E3, při vynásobení zprava jde o úpravu sloupců, zleva pak řádků matice A. Viz příklad 3 a příklad 4.

Elementární úpravu E1 lze složit ze tří elementárních úprav E3 a jedné elementární úpravy typu E2. Na příkladu ukážeme výměnu řádků pomocí těchto úprav.

<u>Příklad 5</u>: V následující matici A nad okruhem $\mathbb{Z}_{16}$ zaměňte druhý a čtvrtý řádek.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix} \langle 1 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \langle 2 \rangle \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix} \langle 3 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \langle 4 \rangle \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Nejprve jsme používali úpravu E3. V krocích $\langle 1 \rangle - \langle 3 \rangle$ jsme postupně provedli následující: ke čtvrtému řádku jsme přičetli druhý řádek, od druhého řádku jsme odečetli čtvrtý řádek, ke čtvrtému řádku jsme přičetli druhý řádek. Po třetím kroku jsme již na místě čtvrtého řádku měli řádek druhý. Druhý řádek jsme v kroku $\langle 4 \rangle$ vynásobili 15. Číslo 15 je v okruhu $\mathbb{Z}_{16}$ prvek odpovídající číslu -1 a touto úpravou se na místě druhého řádku objevil původní čtvrtý řádek.

Můžeme zapsat jednoduše

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 13 & 14 & 15 & 0 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Obdobně lze pro úpravu E1 využít i elementární transformační matice. Ukažme si jejich užití při výměně sloupců.

Příklad 6: Pomocí elementárních transformačních matic zaměňte v matici A nad okruhem $\mathbb{Z}_9$ první a druhý sloupec.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Pracujeme se sloupci, proto budeme matici A násobit zprava. Nejprve maticí typu (ii), která má na místě a_{12} prvek 1, tím ke druhému sloupci přičteme první sloupec.

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

V dalším kroku přičteme k prvnímu sloupci osminásobek druhého tím, že matici A vynásobíme zprava elementární transformační maticí, která má na místě a_{21} prvek 8. Je to vlastně totéž jako odečíst od prvního sloupce druhý. Abychom dodrželi použití prvků okruhu $\mathbb{Z}_9$ podle zadání, musíme si uvědomit, že v tomto okruhu $-1 = 8$.

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Znovu zopakujeme přičtení prvního sloupce k druhému.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Nakonec použijeme elementární transformační matici typu (i), a vynásobíme první sloupec osmi.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Můžeme zapsat

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 & 8 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 8 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Pro vyřešení SLR ve většině případů využíváme elementární úpravy matic k tomu, abychom původní matici vytvořenou z koeficientů soustavy převedli na horní nebo dolní trojúhelníkovou matici nebo na odstupňovanou matici.

Příklad 7: Upravte následující matici nad okruhem $\mathbb{Z}$ na horní trojúhelníkovou matici.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 3 \\ 1 & -3 & 6 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Matici A zapíšeme spolu s jednotkovou maticí E, takže vznikne obdélníková matice. Do pravé části této matice se zobrazí provedené úpravy.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 8 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \langle 1 \rangle \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 33 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \langle 2 \rangle$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 28 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & -5 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \langle 3 \rangle \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -3 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 28 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 163 & 6 & 16 & 7 \end{array}\right)$$

V kroku $\langle 1 \rangle$ jsme využili elementární úpravy E1 a E3. Navzájem jsme zaměnili 1. a 2. řádek, a následně jsme k druhému řádku přičetli pětinásobek řádku prvního a od třetího řádku jsme odečetli dvojnásobek prvního. V dalších krocích ($\langle 2 \rangle$ a $\langle 3 \rangle$) jsme také využili úpravu E3 obdobným způsobem.

Nově získanou horní trojúhelníkovou maticí je matice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 28 \\ 0 & 0 & 163 \end{pmatrix}.$$

Matici v pravém poli nazveme maticí C a platí

$$B = C \cdot A.$$

Připomeňme, že elementárními úpravami matic lze řešit soustavy n rovnic o m neznámých.

Příklad 8: Najděte nad okruhem $\mathbb{Z}_{10}$ všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned} 7x + 2y + z &= 5 \\ 8y + 6z &= 0 \\ 3x + 5y + 4z &= 3 \\ 5x + 3y + 8z &= 1 \end{aligned}$$

Soustava je nehomogenní, zapíšeme ji do rozšířené matice a pomocí elementárních úprav upravíme na horní trojúhelníkovou matici.

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & \vdots & 5 \\ 0 & 8 & 6 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 4 & \vdots & 3 \\ 5 & 3 & 8 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \langle 1 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 8 & 6 & \vdots & 0 \\ 3 & 5 & 4 & \vdots & 3 \\ 5 & 3 & 8 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \langle 2 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 8 & 6 & \vdots & 0 \\ 0 & 7 & 5 & \vdots & 8 \\ 0 & 3 & 3 & \vdots & 6 \end{pmatrix} \langle 3 \rangle \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 7 & 5 & \vdots & 8 \\ 0 & 8 & 6 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \langle 4 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 8 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 8 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \langle 5 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & \vdots & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 8 & \vdots & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

V prvním kroku jsme vynásobili první řádek třemi, tím na místě a_{11} dostaneme 1. Díky tomu jsme ve druhém kroku mohli od třetího řádku odečíst trojnásobek prvního a zároveň od čtvrtého řádku odečíst pětinásobek prvního.

Na pozicích a_{21}, a_{31}, a_{41} máme nulové prvky okruhu $\mathbb{Z}_{10}$[3], ve třetím kroku vynásobíme čtvrtý řádek sedmi a vyměníme ho s druhým řádkem. Poté ve čtvrtém kroku odečteme od třetího řádku sedminásobek druhého řádku a od čtvrtého řádku odečteme osminásobek druhého.

Vidíme, že nyní se třetí a čtvrtý řádek rovnají (jsou lineární kombinací), v pátém kroku od čtvrtého řádku odečteme třetí řádek a vznikne nulový řádek, který lze z rovnice vypustit podle úpravy E4.

Nová soustava rovnic vypadá následovně:

$$\begin{aligned} x + 6y + 3z &= 5 \\ y + z &= 2 \\ 8z &= 4 \end{aligned}$$

[3] Nulu většinou chápeme jako jisté reálné nebo racionální číslo, zde to však není jen nula, je to celá nulová třída – množina všech celých čísel, která jsou dělitelná 10 beze zbytku.

Stále pracujeme nad okruhem $\mathbb{Z}_{10}$, použijeme-li postup uvedený u příkladu 1 z kapitoly 3.2. zjistíme, že rovnice $8z = 4$ má nad tímto okruhem dvě řešení, a to $z_1 = 3, z_2 = 8$.

Z rovnice $y + z = 2$ vyjádříme $y = 2 - z$ a postupně za z dosazujeme z_1 a z_2, vyjde nám, že $y_1 = 9, y_2 = 4$. Dále z rovnice $x + 6y + 3z = 5$ vyjádříme $x = 5 - 6y - 3z$. Víme, že výsledné trojice jsou $[x_1, y_1, z_1]$; $[x_2, y_2, z_2]$. Do vyjádření x dosadíme, a vyjde nám $x_1 = 2, x_2 = 7$.

Můžeme zapsat výsledné uspořádané trojice:

$$t_1 = [2, 9, 3];\ t_2 = [7, 4, 8]$$

Dosazením trojic do původní soustavy rovnic ověříme, že jsou řešením soustavy.

Příklad 9: Nad okruhem $\mathbb{Z}_6$ řešte soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$x + 4y + 5z = 3$$
$$5x + y + z = 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & \vdots & 3 \\ 5 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & \vdots & 3 \\ 0 & 5 & 0 & \vdots & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Nejprve ke druhému řádku přičteme první řádek a poté druhý řádek vynásobíme pěti. Dostáváme jednoznačné řešení pro neznámou y:

$$y = 1$$

Z první rovnice tedy zůstává rovnice o dvou neznámých

$$x + 5z = 5$$

Abychom mohli tuto rovnici řešit, zavedeme neznámou z jako parametr:

$$z = t,$$

kde $t \in \mathbb{Z}_6$, tzn. $t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Nyní můžeme vyjádřit neznámou x:

$$x = 5 - 5t.$$

Protože jsme v $\mathbb{Z}_6$, hodí se vyjádřit x spíše ve tvaru $x = 5 + t$, neboť $-5 = 1$ v tomto okruhu.

Při zapsání do uspořádané trojice vypadá řešení takto:

$$[5 + t, 1, t];\ t \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Rovnice má tedy celkem 6 možných řešení:

$$t_1 = [5, 1, 0];\ t_2 = [0, 1, 1];\ t_3 = [1, 1, 2];$$
$$t_4 = [2, 1, 3];\ t_5 = [3, 1, 4];\ t_6 = [4, 1, 5]$$

<u>Příklad 10</u>: Nad okruhem $\mathbb{Z}[x]$ řešte soustavu tří rovnic o třech neznámých *y*, *z*, *u*:

$$y - xz + x^2u = -x$$
$$x^2y - 2z + (x + 1)u = 0$$
$$x^3y - xz + u = x + 2$$

Soustavu si zapíšeme do rozšířené matice a pomocí elementárních úprav upravíme na horní trojúhelníkovou.

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & \vdots & -x \\ x^2 & -2 & x+1 & \vdots & 0 \\ x^3 & -x & 1 & \vdots & x+2 \end{pmatrix} \langle 1 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & \vdots & -x \\ 0 & x^3 - 2 & -x^4 + x + 1 & \vdots & x^3 \\ 0 & x & -x^2 - x + 1 & \vdots & x+2 \end{pmatrix} \langle 2 \rangle \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & \vdots & -x \\ 0 & -2 & x^3 - x^2 + x + 1 & \vdots & -2x^2 \\ 0 & x & -x^2 - x + 1 & \vdots & x+2 \end{pmatrix} \langle 3 \rangle \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & \vdots & -x \\ 0 & -2 & x^3 - x^2 + x + 1 & \vdots & -2x^2 \\ 0 & 2x & -2x^2 - 2x + 2 & \vdots & 2x+4 \end{pmatrix} \langle 4 \rangle \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -x & x^2 & \vdots & -x \\ 0 & -2 & x^3 - x^2 + x + 1 & \vdots & -2x^2 \\ 0 & 0 & x^4 - x^3 - x^2 - x + 2 & \vdots & -2x^3 + 2x + 4 \end{pmatrix}$$

Při elementárních úpravách pracujeme s polynomy stejně, jako bychom na příslušných pozicích v matici měli čísla. V prvním kroku vynásobíme první řádek matice prvkem $(-x^2)$ a druhý prvkem $(-x)$. Následně těchto součinů využijeme a přičteme „nový“ první řádek k druhému a „nový“ druhý řádek ke třetímu. Získáme tak matici, která má na prvních pozicích v druhém a třetím řádku nulový prvek okruhu.

Obdobně pokračujeme další úpravou, ve druhém kroku třetí řádek vypočtené matice vynásobíme prvkem $(-x^2)$ a tento násobek přičteme k druhému řádku.
Úpravu E2 využijeme ve třetím kroku – třetí řádek matice vynásobíme dvěma, abychom si usnadnili výpočet v dalším kroku.
Ve čtvrtém kroku přičteme ke třetímu řádku „$x -$násobek“ druhého řádku a tím získáme požadovanou trojúhelníkovou matici.

Poslední řádek odpovídá rovnici

$$(x^4 - x^3 - x^2 - x + 2)u = -2x^3 + 2x + 4,$$

kterou lze upravit na tvar

$$(x - 1)(x^3 - x - 2)u = -2(x^3 - x - 2).$$

Polynom $x^3 - x - 2$ nemá žádný celočíselný nulový bod, proto můžeme psát

$$(x - 1)u = -2 \quad (*).$$

Odtud je zřejmé, že daná soustava nemá v $\mathbb{Z}[x]$ žádné řešení, protože rovnici $(*)$ nevyhovuje žádný polynom $u \in \mathbb{Z}[x]$.

Poznamenejme, že budeme-li považovat předchozí soustavu za soustavu tří polynomiálních rovnic o čtyřech neznámých nad oborem integrity celých čísel, povede se, díky úpravě na odstupňovanou matici, najít její celočíselná řešení. Z rovnice (*) je zřejmé, že u musí dělit -2, tedy $u \in \{1, -1, 2, -2\}$. Dosazením takových hodnot za u v rovnici (*) dostáváme následující řešení pro x:

$$\begin{array}{cc} (x-1)\cdot 1 = -2, & (x-1)\cdot(-1) = -2, \\ x_1 = -1 & x_2 = 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} (x-1)\cdot 2 = -2, & (x-1)\cdot(-2) = -2 \\ x_3 = 0 & x_4 = 2 \end{array}$$

Z druhého řádku odstupňované matice získáme rovnici

$$-2z + (x^3 - x^2 + x + 1)u = -2x^2$$

Dosazujme do ní postupně dvojice $[x, u] = [-1, 1], [3, -1], [0, 2], [2, -2]$ a vypočtěme z:

$$-2z - 2 \cdot 1 = -2, \quad -2z + (27 - 9 + 4) \cdot (-1) = -18,$$
$$z_1 = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad z_2 = -2$$

$$-2z + 1 \cdot 2 = 0, \quad -2z + (8 - 4 + 3) \cdot (-2) = -8,$$
$$z_3 = 1 \qquad\qquad\qquad\qquad z_4 = -3$$

Do první rovnice dané soustavy, tj. do

$$y - xz + x^2u = -x$$

dosazujeme za x, z, u postupně trojice $[-1, 0, 1], [3, -2, -1], [0, 1, 2], [2, -3, -2]$:

$$y - 0 + 1 = 1, \quad y + 6 - 9 = -3,$$
$$y_1 = 0 \qquad\qquad y_2 = 0$$

$$y - 0 + 0 = 0, \quad y - (-6) + 4 \cdot (-2) = -2$$
$$y_3 = 0 \qquad\qquad\qquad y_4 = 0$$

V oboru integrity celých čísel jsme našli čtyři celočíselná řešení dané soustavy:

$$[-1, 0, 0, 0];\ [3, 0, -2, -1];\ [0, 0, 1, 2];\ [2, 0, -3, -2]$$

4.1. Jordanova metoda zjištění inverzní matice

V této podkapitole budeme předpokládat, že matice soustavy je invertibilní. V takovém případě lze najít matici inverzní k matici soustavy Jordanovou metodou. Tato metoda je nad okruhem použitelná, když předem víme, že inverzní matice k dané matici existuje, což lze zjistit po vypočtení determinantu matice, tak jak jsme si již ukázali v kapitole 3.1.

V Jordanově metodě vycházíme z obdélníkové matice typu $n \times 2n$, která bude vypadat následovně

$$(A_{n,n} \ \vdots\ E_{n,n}).$$

Pomocí elementárních úprav řádků vytvoříme z této matice matici

$$(E_{n,n} \ \vdots\ A_{n,n}^{-1}).$$

K tomu využijeme stejný postup jako u příkladu v předchozí kapitole, v pravém poli pak stojí hledaná inverzní matice.

Příklad 1: Pomocí Jordanovy metody nalezněte v okruhu $\mathbb{Z}_9$ inverzní matici matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Prvním krokem je vypočtení determinantu matice a určení, zda je matice invertibilní.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 + 112 - 160 - 24 = -62 = 1$$

Vidíme, že nad $\mathbb{Z}_9$ je matice A invertibilní a A^{-1} můžeme najít Jordanovou metodou:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tuto matici budeme dále upravovat pomocí elementárních úprav.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle 1 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 6 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle 2 \rangle$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

V prvním kroku jsme první řádek vynásobili 5, abychom na pozici a_{11} získali číslo 1, ve druhém kroku jsme od druhého řádku odečetli sedminásobek prvního řádku a od třetího řádku jsme odečetli čtyřnásobek prvního řádku. Na jednotkové matici v levém poli se tyto úpravy projeví také. $(0 - 7 \cdot 5 = -35 = 1; 0 - 4 \cdot 5 = -20 = 7)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & \vdots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle 3 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & \vdots & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} \langle 4 \rangle$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Třetí krok znamenal vynásobení druhého řádku 2, takže jsme na pozici a_{22} dostali číslo 1, následně jsme ve čtvrtém kroku odečetli od třetího řádku dvojnásobek řádku druhého. Nyní je matice na levé straně horní trojúhelníková. Musíme ji dále upravit na diagonální.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & \vdots & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \langle 5 \rangle \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 8 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Na místě a_{33} je hodnota 1, a tak můžeme v pátém kroku odečíst od druhého řádku řádek třetí, a od prvního řádku odečíst čtyřnásobek třetího řádku. V levém poli je nyní jednotková matice E a v pravém inverzní matice A^{-1}.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Správnost našeho řešení si můžeme ověřit vynásobením původní matice maticí inverzní.

Příklad 2: Využijte výpočet z předchozího příkladu k vyřešení rovnice

$$A \cdot x = b,$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení je možné dvěma způsoby. V prvním nalezneme inverzní matici A^{-1} Jordanovou metodou a následně vynásobíme rovnici $A \cdot x = b$ inverzní maticí A^{-1} zleva

$$A^{-1} \cdot A \cdot x = A^{-1} \cdot b$$

Tím jsme na levé straně rovnice dostali součin jednotkové matice se sloupcem neznámých a nyní můžeme provést součin matic na pravé straně matice

$$x = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy je uspořádaná trojice $x = [2, 1, 1]$

Druhý způsob je kratší, obsahuje méně výpočtů. Je podobný Jordanově metodě tím, že matici A upravujeme na jednotkovou matici E pomocí elementárních úprav. Zapíšeme ji spolu s b do rozšířené matice. Postup užití elementárních úprav jsme si již ukázali, zapíšeme nyní jen zkráceně výsledek. Řešení soustavy se po upravení matice A na jednotkovou matici E zobrazí v pravé části rozšířené matice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 & \vdots & 3 \\ 7 & 5 & 6 & \vdots & 7 \\ 4 & 2 & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

4.2. Smithův normální tvar matice

Zde již překračujeme obzor bakalářského oboru matematická studia, proto nebudeme uvádět zbytečně mnoho teorie, pouze základní nutné podmínky a vysvětlení. Smithův normální tvar matice a jeho využití při řešení soustav rovnic si raději ukážeme na příkladech.

V této kapitole označme R matici, kterou násobíme matici A zprava a L matici, kterou násobíme matici A zleva.

Nechť $\mathbb{Z}$ značí obor integrity celých čísel, $\mathbb{Z}^{n\times m}$ je okruh všech celočíselných matic typu $n \times m$, SL_k $(\mathbb{Z})$ je množina všech čtvercových matic typu $k \times k$ s determinantem 1 či -1. Množinu SL_k $(\mathbb{Z})$tedy tvoří elementární transformační matice typu (ii) a jejich součiny. Jako $D = diag\ (d_1, d_2, \dots, d_m)$ označíme diagonální matici, která má celé číslo d_i na místě $(i, i), i = 1, \dots, m$ a nuly jinde. Potom platí následující tvrzení.

Věta (existence Smithova normálního tvaru matice)

Nechť $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$. Pak existují $L \in SL_n$ $(\mathbb{Z})$ a $R \in SL_m$ $(\mathbb{Z})$ takové, že

$$L \cdot A \cdot R = D = diag\ (d_1, d_2, \dots, d_m),$$

kde $d_i > 0, i = 1, \dots, s$ a $d_i \mid d_{i+1}, i = 1, \dots, s - 1$.

Na řádky a sloupce matice A užíváme elementární úpravy, kterým odpovídá násobení matice A elementárními transformačními maticemi $L_1, L_2, \dots$ popřípadě $R_1, R_2, \dots$ Složení těchto operací odpovídají matice $L = L_n \cdot L_{n-1} \cdot \dots \cdot L_1$ a $R = R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_m$, které nejsou určeny jednoznačně.

Věta o existenci Smithova normálního tvaru platí nejen pro matice nad oborem integrity celých čísel, tj. nad $\mathbb{Z}$, ale také nad obory integrity polynomů jedné neurčité s koeficienty v nějakém komutativním tělese, tj. nad $T[x]$, kde T je komutativní těleso.

Definice (Smithův normální tvar matice A)

Nechť A je nenulová matice okruhu $\mathbb{Z}^{n \times m}$. Jednoznačně určená matice D z předchozí věty se nazývá Smithův normální tvar matice A.

Abychom matici D využili při řešení SLR, přepíšeme soustavu $A \cdot x = b$ na $D \cdot y = c$ s tím, že $x = R \cdot y, D = L \cdot A \cdot R$ a $c = L \cdot b$.

$$
\begin{aligned}
A \cdot x &= b \\
L \cdot A \cdot x &= L \cdot b \\
L \cdot A \cdot x &= c \\
L \cdot A \cdot R \cdot y &= c \\
D \cdot y &= c
\end{aligned}
$$

Sama jsem se Smithův normální tvar naučila z publikací [2] a [6]. V diplomové práci Moniky Vlasové jsem si pak ověřovala své poznatky přepočítáváním jednotlivých příkladů. Úvodní příklad se mi zdál natolik užitečný, že využiji jeho zadání jako první krok k pochopení práce se Smithovým tvarem matice.

Příklad 1: Řešme nad okruhem celých čísel $\mathbb{Z}$ následující soustavu

$$
\begin{aligned}
38x_1 + 12x_2 &= 64 \\
46\, x_1 + 14x_2 &= 38
\end{aligned}
$$

Při zápisu do tvaru $A \cdot x = b$ vidíme, že

$$A = \begin{pmatrix} 38 & 12 \\ 46 & 14 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 64 \\ 38 \end{pmatrix}$$

Nejprve musíme získat matici D, proto násobíme matici A různými elementárními transformačními maticemi. V prvním kroku chceme od prvního sloupcového vektoru matice A odečíst trojnásobek druhého sloupcového vektoru, proto násobíme matici A maticí R_1 zprava.

$$A = \begin{pmatrix} 38 & 12 \\ 46 & 14 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 38 & 12 \\ 46 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

V druhém kroku násobíme matici A maticí L_1 zleva. Tím od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku a matice A se změní na horní trojúhelníkovou.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Při vynásobení matice A maticí R_2 zprava dostaneme matici diagonální odečtením šestinásobku prvního sloupce od sloupce druhého.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}$$

Abychom vyhověli podmínce $d_i > 0, i = 1, \dots, s$ musíme matici A dále vynásobit maticí L_2 zleva.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Máme diagonální matici D, zbývá vypočítat matice L a R.

$$L = L_2 \cdot L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$
$$R = R_1 \cdot R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix}$$

Můžeme provést i zkoušku podle vzorce:

$$D = L \cdot A \cdot R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 & 12 \\ 46 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Nyní lze přistoupit k řešení soustavy $D \cdot y = L \cdot b$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 64 \\ 38 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 90 \end{pmatrix}$$

Pro větší přehlednost uveďme i vzniklou soustavu

$$\begin{aligned} 2y_1 &= 64 \\ 10y_2 &= 90 \end{aligned}$$

$$y_1 = 32,\ y_2 = 9$$

Dále víme, že $x = R \cdot y$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ -3 & 19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 32 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 75 \end{pmatrix}$$

Řešením soustavy

$$38x_1 + 12x_2 = 64$$
$$46\,x_1 + 14x_2 = 38$$

nad okruhem celých čísel $\mathbb{Z}$ je uspořádaná dvojice $x_1 = -22,\ x_2 = 75$. Zkoušku provedeme dosazením do původních rovnic.

Příklad 2: Řešte pomocí Smithova normálního tvaru soustavu danou zápisem $A\ \cdot x = b$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že matice *A* má 3 řádky a 4 sloupce (je maticí typu $3\ \times 4$), neznámá x je vyjádřena uspořádanou čtveřicí, zatímco b jako vektor pravých stran soustavy je uspořádaná trojice. U obdélníkových matic musíme pečlivě dodržovat pravidlo, které jsme zavedli v kapitole 2.1.2. o násobení matic.

Pro připomenutí ho zopakujme:

Součin $A\ \cdot\ B$ matic A, B je definován pouze tehdy, má-li matice *A* stejný počet sloupců jako matice *B* řádků. Součin $A\ \cdot\ B$ má pak stejný počet řádků jako matice *A* a stejný počet sloupců jako matice B.

V našem případě to znamená, že všechny matice *L* budou čtvercové řádu tři, všechny matice R budou čtvercové řádu čtyři.

Začneme s úpravou matice *A* na diagonální tvar. Abychom získali na pozici a_{21} a a_{31} nulu, odečteme od druhého řádku matice *A* pětinásobek prvního řádku a zároveň od třetího řádku odečteme trojnásobek prvního řádku matice A. Toho dosáhneme vynásobením maticí L_1 zleva.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 5 & 7 & 6 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -8 & -34 & -10 \\ 0 & -10 & -20 & -4 \end{pmatrix}$$

Nyní odečteme od druhého sloupce čtvrtý sloupec a od třetího sloupce odečteme pětinásobek čtvrtého sloupce matice A. Vynásobíme matici A zprava maticí R_1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -8 & -34 & -10 \\ 0 & -10 & -20 & -4 \end{pmatrix}, R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 8 & 2 \\ 0 & -8 & -34 & -10 \\ 0 & -10 & -20 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Ke třetímu řádku musíme přičíst trojnásobek druhého řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix}, L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & -6 & 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 48 & -34 \end{pmatrix}$$

Po dokončení trojúhelníkového tvaru matice A se budeme snažit upravit matici A tak, aby na pozici a_{34} byl nulový prvek. Musíme proto na místě a_{33} dostat prvek, který bude dělitelem prvku z pozice a_{34}, Přičteme ke třetímu sloupci čtvrtý sloupec matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 48 & -34 \end{pmatrix}, R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 48 & -34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & -34 \end{pmatrix}$$

Ke čtvrtému sloupci připočteme dvojnásobek třetího sloupce, tím se přibližujeme k tomu, abychom dostali nulový prvek na pozici a_{34}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & -34 \end{pmatrix}, R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & -10 \\ 0 & 0 & 14 & -34 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -6 \end{pmatrix}$$

Pokračujeme ve vytváření dělitele na pozici a_{33} tím, že ke třetímu sloupci přičteme dvojnásobek čtvrtého sloupce matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -6 \end{pmatrix}, R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 14 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

Nyní konečně máme na pozici a_{33} prvek, který když třikrát vynásobíme a přičteme k prvku na pozici a_{34} tak na této pozici vznikne nulový prvek. Ke čtvrtému sloupci přičteme trojnásobek třetího sloupce matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}, R_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Čtvrtý sloupec chceme vynulovat, proto k němu přičteme dvojnásobek prvního sloupce matice A a zároveň od něj odečteme šestnáctinásobek druhého sloupce matice A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, R_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & 2 & 10 & 32 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Od prvního řádku odečteme dvojnásobek třetího řádku, a zároveň od druhého řádku odečteme pětinásobek třetího řádku.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední úpravou matice A je odečtení prvního sloupce od druhého sloupce.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, R_7 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nalezli jsme diagonální matici D, vypočtěme matice L, R.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -6 & -2 \\ 85 & -14 & -5 \\ -18 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & -1 & -18 & -45 \end{pmatrix}$$

Můžeme začít s řešením soustavy $D \cdot y = L \cdot b$. Jelikož matice D má čtyři sloupce, najdeme čtyři hodnoty neznámé y.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 & -6 & -2 \\ 85 & -14 & -5 \\ -18 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ 85 \\ -18 \end{pmatrix}$$

Vidíme, že vektor $c = L \cdot b$ na pravé straně rovnice má pouze tři komponenty, proto y_4 vyjádříme jako parametr.

$$y_1 = 38\,, y_2 = 85\,, y_3 = -18\,, y_4 = p; p \in \mathbb{Z}$$

Víme, že $x = R \cdot y$. Tuto rovnici zapíšeme následujícím způsobem:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -16 \\ 0 & 0 & 5 & 17 \\ 0 & -1 & -18 & -45 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 38 \\ 85 \\ -18 \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -47 + 2p \\ 85 - 16p \\ -90 + 17p \\ 239 - 45p \end{pmatrix}$$

Množinu řešení pak můžeme zapsat:

$$x_1 = -47 + 2p\,, x_2 = 85 - 16p, x_3 = -90 + 17p\,, x_4 = 239 - 45p; p \in \mathbb{Z}$$

nebo

$$x = (-47, 85, -90, 239) + (2, -16, 17, -45) \cdot p;\ p \in \mathbb{Z}\,.$$

Závěr

V této práci se prolínají a kombinují znalosti ze střední a vysoké školy, které jsou doplněné několika novými poznatky. Na začátku jsem uvedla definice a vlastnosti potřebné k připomenutí pojmů komutativní okruh s jednotkovým prvkem, soustava lineárních rovnic a matice.

V další části práce jsem ukázala na příkladech, jak s těmito matematickými strukturami pracovat a jak mohou kooperovat. Dalším pojmem byly determinanty. Nepoužila jsem zde vyšší řád matice, aby i determinanty byly snadno řešitelné a tak srozumitelné.

Elementární úpravy jsem uvedla až téměř na konci práce, protože nabízejí nejvyšší variabilitu. Matice v nich nemusí být čtvercové, ale mohou být i obdélníkové. Z těchto „nejjednodušších" řešení soustav lineárních rovnic jsem pak vycházela při složitějších postupech, z nichž některé přesahují i učivo bakalářského programu matematická studia.

Je uvedeno, že komutativním okruhem s jednotkovým prvkem jsou i okruhy polynomů, při své práci jsem je však příliš nevyužila. Myslím si, že by tato práce mohla být použita jako skripta pro studenta, který si chce rozšířit obzory v algebře, a pro tento účel se mi zdá použití zbytkových tříd celých čísel transparentnější a vhodnější než použití polynomů.

V každé kapitole jsem se snažila uvést takový příklad, který jasně ukáže použití jednotlivých postupů k vyřešení soustavy lineárních rovnic.

Shrnutí

Práce se zabývá soustavami lineárních rovnic nad komutativním okruhem. Shrnuje poznatky o použití matic a determinantů k řešení takových soustav lineárních rovnic.

Klíčová slova

Soustava lineárních rovnic, komutativní okruh, matice, determinanty

Resume

The thesis deals with the systems of linear equations over the commutative ring. It summarizes the knowledge about using matrices and determinants to solve linear equations systems over the commutative ring.

Key words

The systems of linear equations, commutative ring, matrices, determinants

Seznam tabulek

Seznam literatury

[1] Bečvář, J. Lineární algebra. 2. vyd. Praha: Matfyzpress, 2002. ISBN 80-85863-92-8

[2] Hora, J. Soustavy lineárních diofantovských rovnic a Smithův normální tvar matice. South Bohemia Mathematical Letters. 2011, roč. 19, č. 1, s. 18-26. ISSN 1804-1450.
Dostupné z WWW:< http://home.pf.jcu.cz/~sbml/wp-content/uploads/hora.pdf >

[3] Nimrichter, F; Hubačková, I; Schramm, L.; Topinka, V. Matematika pro I. A II. Ročník středních ekonomických škol, 6. vyd. Praha, 1980

[4] Polák, J. Středoškolská matematika v úlohách I., 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. ISBN 80-7196-021-7.

[5] Smrečková, E.; Soustavy lineárních rovnic a nerovnic, Olomouc 2010. Dostupné z WWW: < http://theses.cz/id/u4oc8e/85440-861932277.pdf >

[6] Vlasová, M.; Soustavy lineárních rovnic a konečné Abelovy grupy, Plzeň, 2010.