ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

SYMETRICKÉ POLYNOMY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Martin Lang

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 25. března 2014

....

Martin Lang

Poděkování

Za ochotu, za cenné rady při konzultacích, za zapůjčenou literaturu a za trpělivost děkuji vedoucí bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

Obsah

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK **2**

ÚVOD **3**

1. HISTORIE SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ **4**

2. VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ **5**

2.1. Permutace 9

3. SYMETRICKÉ POLYNOMY **14**

3.1. Jednoduchý symetrický polynom 15

3.2. Vlastnosti symetrických polynomů 16

3.3. Viètovy vztahy 20

3.3.1. Viètovy vztahy – pro polynom druhého stupně 21

3.3.2. Viètovy vztahy – pro polynom třetího stupně 22

3.3.3. Viètovy vztahy - pro polynom n- tého stupně 22

3.4. Elementární symetrické polynomy 24

3.5. Hlavní věta o symetrických polynomech 27

4. VÝPOČTY SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ, SOUČTY K- TÝCH MOCNIN **32**

4.1. Součin elementárního symetrického polynomu a jednoduchého symetrického polynomu 32

4.2. Vyjádření součinu elementárních symetrických polynomů jako součet jednoduchých symetrických polynomů 34

4.3. Způsoby vyjádření symetrického polynomu jako polynomu v elementárních symetrických polynomech 36

4.4. Newtonovy vzorce 42

5. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY NA VYUŽITÍ SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ **44**

5.1. Kořeny rovnice 44

5.2. Určení rovnic na základě vztahů mezi kořeny rovnic 45

5.3. Soustavy rovnic 48

5.4. Řešení rovnic 53

ZÁVĚR **55**

RESUMÉ **56**

SEZNAM LITERATURY **57**

SEZNAM TABULEK **58**

SEZNAM POUŽITÝCH ZKRATEK

Z^n… n - tice celých čísel

Z_0^+ … množina nezáporných celých čísel

$(Z_0^+)^n$ … množina n- tic nezáporných celých čísel

R … množina reálných čísel

I … obor integrity

S_n … množina n! permutací

$<_{lex}$ … lexikografické uspořádání

ÚVOD

S pojmem ,,symetrický polynom“ jsem se poprvé setkal až při výběru tématu své bakalářské práce. Při studiu algebry jsme se se symetrickými polynomy nesetkali, ale spojení slov „symetrie“ a „polynom“ mě jakýmsi způsobem zaujalo hned zpočátku. Proto jsem si vybral práci s tímto tématem.

Nejprve si řekneme něco o historii symetrických polynomů a seznámíme se se základními pojmy. Přes permutaci, která se symetrickými polynomy velice souvisí, se dostaneme k samotným symetrickým polynomům a vlastnostem, které symetrické polynomy mají. Na závěr si ukážeme příklady, které nám symetrické polynomy pomáhají řešit.

Jedním typem početních úloh jsou příklady, v nichž je zapotřebí sestavit rovnici s kořeny odpovídajícími např. dvojnásobku kořenů, zadané rovnice, bez toho aniž bychom předem tyto kořeny vypočítali. Příklady tohoto typu však dokážeme vyřešit pomocí symetrických polynomů.

Velice často se při řešení příkladů setkáváme s překážkou, kdy je naším úkolem najít kořeny polynomů. U lineárních či kvadratických polynomů, kdy se většinou využívá vzorec pro výpočet diskriminantu, problém nebývá. U polynomů kubických nebo u polynomů čtvrtého stupně ještě existuje vzorec pro výpočet kořenů. U polynomů vyššího než čtvrtého stupně už to ale tak jednoduché není. Existují různé postupy, jak tyto kořeny najít pro speciální typy rovnic, i metody, jak najít přibližné řešení. Užitím symetrických polynomů se některé typy úloh zjednoduší.

Symetrické polynomy nám ale umožňují řešit i jiné typy příkladů. Umožňují a ulehčují nám řešit některé typy rovnic s jednou neznámou a díky elementárním symetrickým polynomům můžeme dokonce počítat soustavy nejen dvou rovnic se dvěma neznámými, ale i soustavy více rovnic s více neznámými. Uvidíme, že lze řešit soustavy jednodušší, ale i složitější, při kterých využijeme např. substituci.

Tato práce by měla odhalit, jak tyto příklady bez problémů vypočítat.

1. HISTORIE SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ

V historii sehrály symetrické polynomy důležitou roli při hledání kořenů algebraické rovnice *n*-tého stupně o jedné neznámé. Nezbytným předpokladem pro úvahy o metodách řešení takové rovnice bylo zjištění, jak spolu souvisejí koeficienty rovnice a její kořeny, což poprvé zveřejnil Albert Girard (1590 – 1633) ve své práci *Invention nouvelle en l'algèbre* (1629). (V dalším textu vysvětlíme, že koeficienty algebraické rovnice jsou symetrické polynomy v jejích kořenech.) Girardovi je připisován objev vztahů, tzv. Newton-Girardových formulí, které platí mezi elementárními symetrickými polynomy a součty mocnin neznámých. Hledáním kořenů pomocí grup jejich permutací se zabýval Lagrange (1736 – 1813) a Galois (1811 – 1832), jehož jméno je spojeno s celou teorií věnovanou studiu permutačních grup.

Práce Ivanova [8] ukazuje, že řešení algebraických rovnic v radikálech nebylo jedinou úlohou, která vedla k utváření pojmu symetrického polynomu (symetrické funkce). Už v 17. století se formování tohoto pojmu projevilo při výpočtu počtu rozkladů čísla na součet čísel,[1] čímž se zabýval Leibniz a Euler.

Souvislost rozkladu čísla na součet čísel se symetrickými polynomy vysvětlíme na jednoduchém příkladě. Uvažujme součin elementárního symetrického polynomu $\sum x_1x_2$ a jednoduchého symetrického polynomu $\sum x_1^2x_2$. Stupeň součinu je dán součtem exponentů neurčitých, proto 1 + 1 + 2 + 1 = 5 je stupeň součinu uvažovaných polynomů. Součtem násobků jakých jednoduchých symetrických polynomů lze součin $\sum x_1x_2$ a $\sum x_1^2x_2$ vyjádřit? Každý z takových polynomů bude mít také stupeň pět. Hledáme tedy rozklady čísla pět na součet. Ze všech rozkladů čísla pět nás budou zajímat pouze takové rozklady, které lze získat součtem rozkladů 1 + 1 a 2 + 1. Tyto rozklady odpovídají součtům exponentů polynomů $\sum x_1x_2$ a $\sum x_1^2x_2$. Hledanými rozklady čísla pět, které vyhovují uvedené podmínce, jsou součty: 3 + 2, 3 + 1 + 1, 2 + 2 + 1, 2 + 1 + 1 + 1. Proto je součin $\sum x_1x_2 \,.\, \sum x_1^2x_2$ dán součtem násobků polynomů $\sum x_1^3x_2^2$, $\sum x_1^3x_2x_3$, $\sum x_1^2x_2^2\,x_3$, $\sum x_1^2x_2x_3x_4$.

[1] Například číslo 6 má 11 různých rozkladů: 1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+2, 1+1+2+2, 2+2+2, 1+1+1+3, 1+2+3, 3+3, 1+1+4, 2+4, 1+5, 6.

2. VYMEZENÍ ZÁKLADNÍCH POJMŮ

V této práci se budeme neustále setkávat s některými pojmy, které je důležité si vysvětlit. Vysvětlení pojmů je upraveno dle [5].

Oborem integrity je komutativní okruh I s jednotkovým prvkem, v němž neexistují netriviální dělitelé nuly, tj.:

$$\forall a \in I, a \neq 0 \quad \forall b \in I, b \neq 0 \quad a.b \neq 0.$$

Polynomem nad oborem integrity I je libovolný výraz $f(x)$ neurčité x, jenž je ve tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde n je číslo celé kladné nebo 0 a $a_0, \ldots, a_n$ jsou prvky oboru integrity I. Tyto prvky nazýváme koeficienty, přičemž $a_n \neq 0$. V této práci budeme nejčastěji uvažovat případ, kdy koeficienty jsou reálná, popř. komplexní čísla.

Označme I nějaký obor integrity a $I[x_1]$ obor integrity polynomů jedné neurčité. Potom lze vybudovat obor integrity polynomů jedné neurčité x_2 s koeficienty v $I[x_1]$. Jeho prvky lze zapsat ve tvaru

$$f_0(x_1) + f_1(x_1)x_2 + f_2(x_1)x_2^2 + \ldots + f_k(x_1)x_2^k \in I\,[x_1][x_2].$$

Je také možné vytvořit obor integrity polynomů n neurčitých $I[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Prvky tohoto oboru integrity se pak zapisují ve tvaru:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{m_1} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1 k_2 \ldots k_n} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n},$$

kde $k_1, k_2, \ldots, k_n \in Z_0^+$ a $m_1, m_2, \ldots, m_n \in Z_0^+$. Tyto prvky nazýváme polynomy n neurčitých nad I.

Například polynom dvou neurčitých lze zapsat ve tvaru

$$(1)\ a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{11}x_1x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{02}x_2^2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 +$$

$$+ a_{03}x_2^2 + \cdots + a_{m_1 m_2}x_1^{m_1}x_2^{m_2} \in I[x_1, x_2],$$

kde $m_1, m_2, \dots, m_n \in Z_0^+$.

Příkladem polynomu dvou neurčitých, který lze zapsat ve tvaru (1) je polynom $f(x_1, x_2) = 3x_1^2x_2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 6x_1 - 4$, kde $f(x_1, x_2) \in I[x_1, x_2]$.

V případě, že se jedná o polynom jedné neurčité x_2, tj. $f(x_1, x_2) \in I[x_1][x_2]$, zapíšeme tento polynom následovně: $f(x_1, x_2) = -x_2^2 + (3x_1^2 + 2x_1)x_2 + (-6x_1 - 4)$.

Dále je důležité vysvětlit si pojmy člen polynomu, vedoucí člen polynomu, koeficient polynomu, výška a stupeň členu a stupeň polynomu n neurčitých.

Za *člen polynomu* je považován výraz ve tvaru $a_{k_1k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$.

Koeficientem polynomu je prvek $a_{k_1k_2 \dots k_n} \in I$.

Výškou členu polynomu n neurčitých je uspořádáná n – tice $[k_1, k_2, \dots, k_n]$. Výšky členů jsou prvky kartézské mocniny $(Z_0^+)^n$, kde Z_0^+ je množinou celých nezáporných čísel. Díky tomu lze zavést lexikografické uspořádání (viz. Definice 2.0.5.)

Za *stupeň členu* je považováno číslo $s = k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Nejvyšší stupeň ze stupňů členu polynomu je *stupeň polynomu*.

Příklad 2.0.1.: V polynomu $f(x) = 5x_1^4x_2^3x_3^5 + 3x_1x_2^3x_3^3 + x_1x_2x_3^2 + 2x_1x_2^2$ určete výšky členů, stupně členů a stupeň polynomu.

Řešení: Polynom $f(x)$ je součtem členů (i) $5x_1^4x_2^3x_3^5$, (ii) $3x_1x_2^3x_3^3$, (iii) $x_1x_2x_3^2$ a (iv) $2x_1x_2^2$.

Výšky členů (i), resp. (ii), resp. (iii), resp. (iv) jsou po řadě uspořádané trojice [4, 3, 5], resp. [1, 3, 3], resp. [1, 1, 2], resp. [1, 2, 0].

Stupeň členu (i), resp. (ii), resp. (iii), resp. (iv) je roven číslu 12, resp. 7, resp. 4, resp. 3. Na základě určení stupňů členů polynomu $f(x)$ můžeme říci, že stupeň polynomu je 12.

Příklad 2.0.2.: Uvažujme polynom $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2^4$. Jaký je stupeň polynomu, když:

a) $f(x_1, x_2) \in I[x_1, x_2]$ b) $f(x_1, x_2) \in I[x_1][x_2]$ c) $f(x_1, x_2) \in I[x_2][x_1]$

Řešení:

a) V případě $f(x_1, x_2) \in I[x_1, x_2]$ by byl stupeň polynomu $f(x_1, x_2) = x_1^3x_2^3 + x_1^2x_2 + {}$ $+x_1x_2^4$ roven číslu 6.

b) V případě $f(x_1, x_2) \in I[x_1][x_2]$ přepišme polynom $f(x_1, x_2)$ vzhledem k neurčité x_2: $(x_1^3)x_2^3 + (x_1^2)x_2 + (x_1)x_2^4$ a stupeň polynomu je 4.

c) Kdyby $f(x_1, x_2) \in I[x_2][x_1]$, polynom $f(x_1, x_2)$ bychom přepsali vzhledem k neurčité x_1: $(x_2^3)x_1^3 + (x_2)x_1^2 + (x_2^4)x_1$ a stupeň polynomu by byl roven číslu 3.

Výrazy v závorkách v b) a c) jsou koeficienty jednotlivých členů polynomu $f(x_1, x_2)$ jako prvky oboru $I[x_1]$ v případě b), resp. $I[x_2]$ v případě c).

V práci budeme uvažovat jen polynomy, jejichž členy „nelze sečíst“. Tuto vlastnost zpřesníme následující definicí.

Definice 2.0.3.: Řekneme, že polynom je v normálním tvaru, jestliže pro každou výšku členu $[k_1, \dots, k_n]$ se v polynomu f vyskytuje nejvýše jeden člen mající tuto výšku.

Příklad 2.0.4.: Zjistěte, který z polynomů a), b), c) je v normálním tvaru:

a) $f(x) = 2x_1^2x_2^3x_3^3 + x_1^4x_2x_3^2 + 2x_1^4x_3 + 3x_1^2x_2^3x_3^3$,

b) $f(x) = 3x_1x_2^4x_3^2 + 5x_1^2x_2^3x_3^4 + 12x_1^6x_2x_3^4 + 7x_1x_3^3$,

c) $f(x) = x_2^{10}x_3 + x_1^4x_3^{13} + 9x_1x_2^{11}x_3^3 - 5x_1^3x_2x_3^{17} - 4x_2^{10}x_3 + x_1^4x_3^{13}$.

Řešení: Vyřešme všechny tři případy polynomů:

a) Výšky členů polynomu $f(x)$ jsou ve tvaru [2, 3, 3], [4, 1, 2], [4, 0, 1], [2, 3, 3]. Vidíme, že výšky prvního a čtvrtého členu polynomu jsou stejné, a proto polynom $f(x)$ není v normálním tvaru.

b) Výšky členů tohoto polynomu mají podobu [1, 4, 2], [2, 3, 4], [6, 1, 4], [1, 0, 3]. Na základě definice můžeme říct, že polynom $f(x)$ je v normálním tvaru.

c) Členy v tomto polynomu mají výšky [0, 10, 1], [4, 0, 13], [1, 11, 3], [3, 1, 17], [0, 10, 1], [4, 0, 13]. Výška prvního (resp. druhého) členu je shodná s výškou pátého (resp. šestého) členu. Polynom $f(x)$ tedy není v normálním tvaru.

Definice 2.0.5.: Nechť $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \in (Z_0^+)^n$, $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \in (Z_0^+)^n$ jsou výšky dvou členů. Řekneme, že $\alpha >_{lex} \beta$, jestliže se ve vektoru $\alpha - \beta \in Z^n$ jako první nenulová složka zleva vyskytuje kladné číslo.

Příklad 2.0.6.: Mějme α = [2, 3, 4] a β = [0, 2, 8], protože ve vektoru $\alpha - \beta$ = (2, 1, -4) je první nenulový člen 2, tzn. je kladný, platí $\alpha >_{lex} \beta$.

Člen polynomu, který má v lexikografickém uspořádání největší výšku, je označován jako *vedoucí člen polynomu*. Výška vedoucího členu polynomu je *výškou polynomu* $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

Příklad 2.0.7.: Určete vedoucí člen a výšku polynomu:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^5x_2^3x_3^4 + 8x_1^3x_2^9x_3^5 + 17x_1^2x_2^3x_3^{14}.$$

Řešení: Členy polynomu označme (i) $3x_1^5x_2^3x_3^4$, (ii) $8x_1^3x_2^9x_3^5$, (iii) $17x_1^2x_2^3x_3^{14}$. Víme již, že výšky členů jsou trojice α = [5, 3, 4], resp. β = [3, 9, 5], resp. γ = [2, 3, 14]. Podobně jako v předchozím příkladu vypočítáme rozdíly α – β = (2, -6, -1), α – γ = (3, 0, -10). Je již zřejmé, že vedoucím členem polynomu $f(x_1, x_2, x_3)$ je člen (i) $3x_1^5x_2^3x_3^4$ a výškou tohoto polynomu je [5, 3, 4].

Věta 2.0.8.: Nechť $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ jsou dva polynomy. Vedoucí člen součinu $f \cdot g$ vznikne jako součin vedoucích členů polynomů $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ a $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Důkaz: Mějme $ax_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ jako vedoucí člen polynomu f a $bx_1^{l_1}x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n}$ jako vedoucí člen polynomu g. Podstatou důkazu je ukázat, že součin vedoucích členů má větší výšku, než součin kterýchkoliv jiných dvou členů, z nichž alespoň jeden není vedoucím členem jednoho z polynomů. Nechť je tedy $cx_1^{r_1}x_2^{r_2} \dots x_n^{r_n}$ některý z členů polynomu f a $dx_1^{s_1}x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ některý z členů polynomu g. Protože

$$[r_1, r_2, \dots, r_n] <_{lex} [k_1, k_2, \dots, k_n] \text{ a } [s_1, s_2, \dots, s_n] <_{lex} [l_1, l_2, \dots, l_n],$$

existují indexy $i, j \in \{0, 1, \dots, n\}$ takové, že

$$r_1 = k_1, \dots, r_i = k_i,\ r_{i+1} < k_{i+1} \text{ a } s_1 = l_1, \dots, s_j = l_j,\ s_{j+1} < l_{j+1}.$$

Protože víme, že násobení je komutativní operací, tedy že $f \cdot g = g \cdot f$, můžeme předpokládat, že $i \leq j$, přičemž v případě $j = n$ je $i < j$. Potom

$$r_1 + s_1 = k_1 + l_1, \dots, r_i + s_i = k_i + l_i,\ r_{i+1} + s_{i+1} < k_{i+1} + l_{i+1},$$

takže součin $abx_1^{k_1+l_1}x_2^{k_2+l_2} \dots x_n^{k_n+l_n}$ vedoucích členů polynomů f a g má větší výšku, než součin $cdx_1^{r_1+s_1}x_2^{r_2+s_2} \dots x_n^{r_n+s_n}$ a je tedy vedoucím členem polynomu $f \cdot g$. [2] ☐

2.1. Permutace

Připomeňme nejprve pojem permutace. Např. v [1] je pojem permutace definován následovně:

Definice 2.1.1.: Permutací na množině M = {1, 2, ... , n} rozumíme každé prosté zobrazení množiny M na stejnou množinu M. Permutace se zpravidla zapisuje ve tvarech:

a) $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}$

b) π: $1 \to k_1$
$2 \to k_2$
$\vdots$
$n \to k_n$

c) $\pi(1) = k_1$
$\pi(2) = k_2$
$\vdots$
$\pi(n) = k_n$

V případě a) představuje první řádek matice π prvky množiny M, ve druhém řádku jsou rovněž prvky množiny M, které jsou těmto prvkům zobrazením přiřazené, tzn., že prvku 1 je přiřazen prvek k_1. Zápisy b) a c) jsou analogické.

Definice 2.1.2.: Dvě permutace jsou shodné, přiřazují- li každému z čísel, stejné číslo jako obraz. Např. permutace P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ a Q = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ jsou shodné.

[2] Upraveno dle [2].

Poznámka: Pojmem identická permutace rozumíme permutaci, která má ,,oba řádky shodné" , např. P = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Můžeme se také setkat s pojmem inverzní permutace. Inverzní permutací k π tedy rozumíme permutaci π^{-1} zapsanou ve tvaru π^{-1} = $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$. Například permutace

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ je inverzní k permutaci } Q = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vlastnosti permutace

Následující věty nám popisují některé z vlastností, které permutace má.

Věta 2.1.3.: Množina $M = \{1, 2, ..., n\}$ má právě $n!$ navzájem různých permutací.

Důkaz: Pro n = 1 existuje právě jedna permutace π(1) = 1. Předpokladem tedy bude $n > 1$. Ze základního tvaru permutace je vidět, že počet permutací je roven počtu všech možných pořadí prvků z množiny M. Na prvním místě může být libovolný prvek z prvků 1, 2, ..., n a ke každému existuje na základě předpokladu právě $(n-1)!$ navzájem různých pořadí zbývajících $n - 1$ prvků. Je zřetelné, že všech permutací na množině M je $n \cdot (n-1)! = n!$. [3] □

Pro názornost věty si vypočtěme následující příklad.

Příklad 2.1.4.: Kolik permutací má čtyřprvková množina, kde n = 4?

Řešení: Pro takovou množinu existují tyto permutace 4 prvků. Celkem získáme těchto 4! = 24 permutací.

$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$,

$P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$, $P_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$,

[3] Upraveno dle [1]

$P_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $P_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $P_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$P_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $P_{18} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$,

$P_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $P_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $P_{24} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Označme $S_4 = \{P_1, P_2, \dots, P_{24}\}$ množinu všech permutací, které existují pro čtyřprvkovou množinu {1, 2, 3, 4}. Obecně pro n prvkovou množinu budeme používat značení $S_n = \{P_1, P_2, \dots, P_{n!}\}$. Celkem by pro n prvkovou množinu existovalo $n!$ permutací.

Poznámka: Zobrazení lze skládat, proto také permutace, které jsou speciálním případem zobrazení, je možno skládat.

Vezměme dvě různé permutace $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ a $P_2 = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}$ na množině {1, 2, 3, ..., n}. První prvek této množiny přejde permutací P_1 v prvek a_1. Tento prvek potom druhou permutací přejde v prvek b_1, stručně $P_1 \circ P_2(1) = P_2[P_1(1)] = P_2(a_1) = b_1$. Stejným způsobem se změní všechny ostatní prvky.

Příklad 2.1.5.: Složte permutace

$$P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ a } P_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

z příkladu 2.1.4.

Řešení: $P_{17}[P_3(1)] = P_{17}(1) = 4$, $P_{17}[P_3(2)] = P_{17}(4) = 3$, $P_{17}[P_3(3)] = P_{17}(2) = 1$, $P_{17}[P_3(4)] = P_{17}(3) = 2$.

Složením těchto dvou permutací vznikne permutace $P_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Věta 2.1.6.: Složením permutace a permutace inverzní vznikne identická permutace, stručně $P \circ P^{-1} = I$.

Příklad 2.1.7.: Vezměme permutaci P_{24} = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ z příkladu 2.1.4. K ní existuje inverzní permutace P_{24}^{-1} = $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Dále $P_{24}^{-1}[P_{24}(1)]$ = $P_{24}^{-1}(2)$ = 1, $P_{24}^{-1}[P_{24}(2)]$ = $P_{24}^{-1}(4)$ = 2, $P_{24}^{-1}[P_{24}(3)]$ = $P_{24}^{-1}(1)$ = 3, $P_{24}^{-1}[P_{24}(4)]$ = $P_{24}^{-1}(3)$ = 4.

Dostaneme tedy identickou permutaci $I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Lze dokázat, že algebraická struktura (S_n, o) tvoří grupu. Důkaz přenechme čtenáři.

Definice 2.1.8.: Nechť M je množina n neurčitýh, tj. $M = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$. Permutací n neurčitých rozumíme permutaci provedenou na indexy $1, 2, 3, \dots, n$ neurčitých $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Pro lepší pochopení definice uveďme následující příklad.

Příklad 2.1.9.: Mějme množinu $M = \{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\}$ a permutaci P = $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Provedením permutace P na množinu M získáme

$$\text{P}*\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{x_{P(1)}, x_{P(2)}, x_{P(3)}, x_{P(4)}\} = \{x_4, x_3, x_1, x_2\}.$$

Permutace má svůj vliv také při přechodu jednoho polynomu v polynom druhý. Dokazuje nám to příklad 2.1.10.

Příklad 2.1.10.: Polynom čtyř neurčitých

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^3 + x_1^2 x_2^3 x_3 + x_2^2 x_4 + x_3 x_4^4 + x_1^3 x_3^2 x_4$$

permutací P_{17} z příkladu 2.1.4. přejde v polynom:

$$f_{17}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{P}_{17}*f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^3 + x_4^2 x_1^3 x_2 + x_1^2 x_3 + x_2 x_3^4 + x_4^3 x_2^2 x_3$$

Je zřejmé, že polynomy jsou různé. Celkem by všemi permutacemi z příkladu 2.1.4. vzniklo 24 od sebe různých polynomů

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_{24}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Poznámka: Znaménko $*$ v zápisu $\pi * f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ znamená, že polynom $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vznikl z polynomu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tak, že na neurčité polynomu $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ byla provedena permutace π. Čili polynom $\pi * f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vznikne z $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ permutací π na neurčité $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Permutace se symetrickými polynomy velice souvisí. Protože už víme, co permutace znamená a jaké jsou některé její vlastnosti, můžeme přejít k jádru této práce.

3. SYMETRICKÉ POLYNOMY

V [5] je symetrický polynom definován takto:

Definice 3.0.1.: Polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$, který se nemění provedením jakékoliv permutace na pořadí jeho neurčitých, tj. platí:

$$\pi * f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

pro všechny permutace π, se nazývá **symetrický polynom**.

Pro lepší pochopení definice nám poslouží příklad 3.0.2.

Příklad 3.0.2.: Mějme polynom tří neurčitých

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1^3x_2^3x_3 + 3x_1^3x_2x_3^3 + 3x_1x_2^3x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 +$ $+2x_1x_3$.

Pro n = 3 existuje celkem 3! = 6 permutací.

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Provedením všech šesti permutací se polynom $f(x_1, x_2, x_3)$ nezmění. Operací $P_i * f(x_1, x_2, x_3)$ vznikne 6 polynomů $g_i(x_1, x_2, x_3)$, i = 1, 2, ..., 6, takových, že se polynomy $g_i(x_1, x_2, x_3)$ rovnají polynomu $f(x_1, x_2, x_3)$. Polynom $f(x_1, x_2, x_3)$ je proto symetrický polynom.

Pro kontrolu proveďme např. $P_5 * f(x_1, x_2, x_3)$. Zapišme to symbolicky následovně:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} * (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 3x_1^3x_2^3x_3 + 3x_1^3x_2x_3^3 + 3x_1x_2^3x_3^3 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 +$ $+2x_1x_3) = x_3^2 + x_2^2 + x_1^2 + 3x_3^3x_2^3x_1 + 3x_3^3x_2x_1^3 + 3x_3x_2^3x_1^3 + 2x_3x_2 + 2x_2x_1 +$ $+2x_3x_1$. Po seřazení jednotlivých členů polynomu dostaneme totožný polynom. Kontrolu zbývajících pěti permutací přenecháme čtenáři.

Poznámka: Polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$ je symetrický, je – li k jakékoliv přirozené číslo. Tento polynom je nazýván jako součet k – tých mocnin.

3.1. Jednoduchý symetrický polynom

Uvažujme tři různé symetrické polynomy

$$(i) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$$
$$(ii) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + x_1^2 x_3^2 + x_2^3 x_3^3$$
$$(iii) f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Všimněme si, že polynom (i) lze vyjádřit jako

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^4.$$

Stejným způsobem lze vyjádřit i polynom (ii)

$$\sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{3} x_i^2 x_j^2.$$

Polynom (iii) lze zapsat například

$$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{3} x_i x_j.$$

Polynomy typů (i) a (ii) jsou speciálními případy symetrických polynomů. Jedná se o tzv. jednoduché symetrické polynomy. V [5] jsou jednoduché symetrické polynomy definovány takto:

Definice 3.1.1.: Nechť $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ a nechť je $\{f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),\ \dots,\ f_r(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)\}$ množina všech navzájem různých polynomů z $I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ takových, že pro každé i = 1, 2, ..., r existuje permutace π taková, že $\pi * f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Polynom $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{r} f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \pi * f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, kde v posledním případě sčítání probíhá přes všechny permutace na pořadí neurčitých $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, jejichž provedením dostaneme navzájem různé sčítance, se nazývá **jednoduchý symetrický polynom.**

Příklad 3.1.2.: Uvažujme polynom $f(x_1, x_2, x_3)$ = $3x_1^2$ + $3x_2^2$ + $3x_3^2$ + $5x_1^3x_2x_3$ + $5x_1x_2^3x_3$+ +$5x_1x_2x_3^3$ + $2x_1^5x_2^5x_3$ + $2x_1^5x_2x_3^5$ + $2x_1x_2^5x_3^5$ - $4x_1x_2x_3$.

Polynom $f(x_1, x_2, x_3)$ se skládá celkem ze čtyř jednoduchých symetrických polynomů:

$$g_1: 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 = \sum_{\pi \in S_3} \pi * 3x_1^2,$$

$$g_2: 5x_1^3x_2x_3 + 5x_1x_2^3x_3 + 5x_1x_2x_3^3 = \sum_{\pi \in S_3} \pi * 5x_1^3x_2x_3,$$

$$g_3: 2x_1^5x_2^5x_3 + 2x_1^5x_2x_3^5 + 2x_1x_2^5x_3^5 = \sum_{\pi \in S_3} \pi * 2x_1^5x_2^5x_3,$$

$$g_4: -4x_1x_2x_3.$$

3.2. Vlastnosti symetrických polynomů

Následující věty nám ukážou základní vlastnosti symetrických polynomů.[4]

Věta 3.2.1.: Každý symetrický polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ je součtem konečného počtu jednoduchých symetrických polynomů.

Důkaz: Při důkazu budeme postupovat indukcí podle počtu členů polynomu $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. Pokud by se jednalo o jednoduchý symetrický polynom, neměli bychom co dokazovat.

Zaveďme proto předpoklad: $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ není jednoduchý symetrický polynom, zároveň má m členů a zároveň každý jednoduchý symetrický polynom, který má méně než m členů, je součtem jednoduchých symetrických polynomů.

Nechť je $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ vedoucí člen polynomu f. Vytvořme polynom $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ = $\sum_{\pi \in S_n} \pi * (a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$, kde sčítání probíhá přes všechny permutace na pořadí neurčitých $x_1, x_2, \dots, x_n$, jejichž provedením dostaneme různé sčítance. Polynom $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ je jednoduchý symetrický polynom. Polynom

[4] Důkazy vět 3.2.1., 3.2.4. a 3.2.7. dle [3] a [5].

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

je také jednoduchý symetrický polynom, který má méně než m členů. Podle předpokladu je tedy $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ součtem jednoduchých symetrických polynomů. Odtud již vyplývá tvrzení věty. □

Příklad 3.2.2.: Uvažujme čtyři jednoduché symetrické polynomy g_1, g_2, g_3, g_4 z příkladu 3.1.2.

Součtem $g_1 + g_2 + g_3 + g_4$ získáme polynom

$3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 5x_1^3x_2x_3 + 5x_1x_2^3x_3 + 5x_1x_2x_3^3 + 2x_1^5x_2^5x_3 + 2x_1^5x_2x_3^5 + 2x_1x_2^5x_3^5$ - - $4x_1x_2x_3$, což je symetrický polynom.

Poznámka: Polynom $\sum_{\pi \in S_n} \pi * (a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n})$ lze psát také v jednodušším tvaru a*$\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, a $\in I$. Je potřeba vyznačit, kolik neurčitých polynom má. Zpravidla se potom využívá zápis

$$a*\sum^{(n)} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_k^{i_k},$$

$k_1, k_2, \dots, k_n \in Z_0^+$, $i_1, i_2, \dots, i_k \in Z_0^+$.

Tento zápis nám tedy usnadní někdy až příliš zdlouhavé vyjadřování polynomů. Např. polynom

$$\sum_{\pi \in S_6} \pi * (x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0x_5^0x_6^0) = x_1^1x_2^1x_3^1x_4^0x_5^0x_6^0 + x_1^1x_2^1x_3^0x_4^1x_5^0x_6^0 + x_1^0x_2^1x_3^0x_4^1x_5^0x_6^1 + \cdots$$

lze zapsat zjednodušeně

$$\sum^{(6)} x_1x_2x_3.$$

Symetrický polynom z příkladu 3.2.2. lze potom tedy zapsat ve tvaru:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3\sum^{(3)} x_1^2 + 5\sum^{(3)} x_1^3x_2x_3 + 2\sum^{(3)} x_1^5x_2^5x_3 - 4\sum^{(3)} x_1x_2x_3.$$

Příklad 3.2.3.: Napišme jednoduchý symetrický polynom, známe – li jeho vedoucí člen $\sum^{(3)} 3x_1^2x_2^2x_3$.

Řešení: Pro n = 3 existuje těchto 6 permutací:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Tyto permutace provedeme na pořadí neurčitých v polynomu $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2^2x_3$.

$$P_1 * f = 3x_1^2x_2^2x_3, \quad P_2 * f = 3x_3^2x_1^2x_2, \quad P_3 * f = 3x_2^2x_3^2x_1,$$

$$P_4 * f = 3x_1^2x_3^2x_2, \quad P_5 * f = 3x_3^2x_2^2x_1, \quad P_6 * f = 3x_2^2x_1^2x_3.$$

Je patrné, že $P_1 * f = P_6 * f$, $P_3 * f = P_5 * f$, $P_2 * f = P_4 * f$. Dostaneme tedy symetrický polynom $s(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2x_2^2x_3 + 3x_1x_2^2x_3^2 + 3x_1^2x_2x_3^2$.

V úvodu práce jsme si vymezili pojmy vedoucí člen polynomu a výška polynomu. Následující věta vysvětluje, jaký je vztah mezi těmito pojmy.

Věta 3.2.4.: Každý nenulový symetrický polynom má jediný vedoucí člen a pro jeho výšku platí $k_1 \geq k_2 \geq \ldots > k_n$.

Důkaz: Fakt, že má polynom jediný vedoucí člen, plyne z tvrzení, že uspořádání výšek členů v polynomu je lineární a že každý nenulový polynom má konečně mnoho členů s nenulovými koeficienty. Při důkazu budeme postupovat sporem.

Nechť je $ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ vedoucí člen polynomu $f(x_1, \ldots, x_n)$ a nechť neplatí $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n$. Pak existují indexy i a j takové, že $1 \leq i < j \leq n$ a $k_i < k_j$. Protože je polynom f symetrický, obsahuje člen, který provedením permutace

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 \ldots i-1 & i & i+1 \ldots j-1 & j & j+1 \ldots n \\ 1 \ldots i-1 & j & i+1 \ldots j-1 & i & j+1 \ldots n \end{pmatrix}$$

vznikne ze členu $ax_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$.

Tento člen je ve tvaru

$$ax_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_j} x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_{j-1}^{k_{j-1}} x_i^{k_i} x_{j+1}^{k_{j+1}} \dots x_n^{k_n}$$

a má výšku

$$[k_1, \dots, k_{i-1},\ k_j,\ k_{i+1}, \dots, k_{j-1},\ k_i,\ k_{j+1}, \dots, k_n].$$

Ve vektoru (0, 0, ..., 0, $k_j -\ k_i$, 0, ...) je pak první člen nenulový a je kladný (díky předpokladu $k_i < k_j$). Člen $ax_1^{k_1} \dots x_{i-1}^{k_{i-1}} x_i^{k_j} x_{i+1}^{k_{i+1}} \dots x_{j-1}^{k_{j-1}} x_i^{k_i} x_{j+1}^{k_{j+1}} \dots x_n^{k_n}$ má tedy větší výšku, než vedoucí člen $ax_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$. Tímto jsme došli ke sporu – vztah $k_1 \geq k_2 \geq \dots > k_n$ platí. ☐

Věta 3.2.5.: Pro symetrické polynomy f a $g \in I[x_1, x_2, \dots, x_n]$ a libovolnou permutaci π platí vztahy:

$$\pi * (f+g) = \pi * (f) + \pi * (g) = f + g$$

$$\pi * (f \cdot g) = [\pi * (f)] \cdot [\pi * (g)] = f \cdot g$$

Tvrzení věty si ukažme na příkladu.

Příklad 3.2.6.: Mějme dva symetrické polynomy $f: x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ a $g: x_1 x_2$ a permutaci $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Provedeme – li na polynomy f a g permutaci π, získáme $\pi * (f) = x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2$ a $\pi * (g) = x_2 x_1$.

Nyní sečteme, resp. vynásobíme polynomy f a g, čímž získáme:

$$f + g = x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 x_2, \text{ resp. } f \cdot g = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3.$$

Permutací součtu, resp. součinu dostaneme $\pi * (f+g) = x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_2 x_1$, resp. $\pi * (f \cdot g) = x_2^3 x_1^2 + x_2^2 x_1^3$.

Dosazením do rovností získáme

$$\pi * (f+g) = x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2 + x_2 x_1 = f + g,$$

$$\pi * (f \cdot g) = x_2^3 x_1^2 + x_2^2 x_1^3 = (x_2^2 x_1 + x_2 x_1^2) \cdot (x_2 x_1) = f \cdot g.$$

Věta 3.2.7.: Množina všech symetrických polynomů z $I[x_1, \ldots, x_n]$ tvoří podobor integrity v $I[x_1, \ldots, x_n]$.

Důkaz: Mějme dva libovolné polynomy f a g z $I[x_1, \ldots, x_n]$ a libovolnou permutaci π. Podle definice symetrického polynomu platí:

$$\pi * f = f \text{ a } \pi * g = g.$$

Dále víme, že platí vztahy:

$$\pi * (f + g) = \pi * (f) + \pi * (g) = f + g \text{ a } \pi * (f \cdot g) = [\pi * (f)] \cdot [\pi * (g)] = f \cdot g.$$

Je tedy zřejmé, že i součet nebo součin dvou libovolných symetrických polynomů z $I[x_1, \ldots, x_n]$, je opět symetrický polynom. Označme $I_S[x_1, \ldots, x_n]$ množinu všech symetrických polynomů oboru integrity $I[x_1, \ldots, x_n]$. Potom je struktura $(I_S[x_1, \ldots, x_n], +)$ komutativní grupou a struktura $(I_S[x_1, \ldots, x_n], \cdot)$ komutativní pologrupou s neutrálním prvkem. Protože distributivnost a neexistence dělitelů nuly je pro strukturu $(I_S[x_1, \ldots, x_n], +, \cdot)$ zřejmá, platí, že $I_S[x_1, \ldots, x_n]$ je opravdu podoborem integrity v $I_S[x_1, \ldots, x_n]$.

□

3.3. Viètovy vztahy

Název těchto vztahů pochází ze jména francouzského matematika Francoise Vièta. Řekněme si nejprve pár informací o tomto významném matematikovi.

Francoise Viète

Francoise Viète se narodil v roce 1540 ve Francii. Navštěvoval školu ve Fontenay a později studoval práva na univerzitě v Poitiers. Od roku 1560 pracoval v advokátních službách, ve kterých vydržel pouhé čtyři roky. Poté se rozhodl změnit svou kariéru a stal se opatrovníkem ve službách Antoinette d´Aubeterre. V roce 1570 se Viète přestěhoval do Paříže, kde začal pracovat na svých matematických pracích. Osmdesátá léta 16. století znamenala pro Francii velké nepokoje díky kterým se Viète ještě několikrát stěhoval. Své matematické dovednosti prokázal ve službách Jindřicha IV., kterému pomáhal s matematickými problémy a dekódováním zpráv přijatých od nepřítelů. Když nepokoje ustaly, začal se Viète naplno věnovat svým dílům. V roce 1591 zveřejňuje svou knihu s názvem In Artem analyticiam isagoge (v překladu ,,Úvod do analytické techniky”), ve které představuje první algebraickou notaci. Francoise Viète představil metody pro řešení rovnic druhého, třetího a čtvrtého stupně. Možná stojí za zmínku, že pojem ,,koeficient” pochází právě od tohoto francouzského matematika.

Dále psal Viète knihy týkající se trigonometrie a geometrie a v roce 1953 vydává svou druhou knihu, kde mimo jiné spočítal hodnotu π na deset desetinných míst. V prosinci roku 1603 Viète umírá. V dnešní době je také častokrát označován jako otec algebry.[5]

Nyní ale přejděme již k samotným Viètovým vztahům.

3.3.1. Viètovy vztahy – pro polynom druhého stupně

Mějme kvadratickou rovnici $t^2 + a_1 t + a_2 = 0$, $t \in R$. Kořeny této rovnice označme x_1 a x_2. Mezi těmito kořeny a koeficienty rovnice a_1 a a_2 platí již zmiňované Viètovy vztahy, které mají podobu:

$$a_1 = -(x_1 + x_2), \qquad a_2 = x_1 x_2.$$

Tyto vztahy jsou důsledkem formule pro rozklad kvadratického trojčlenu na kořenové činitele

$$t^2 + a_1 t + a_2 = (t - x_1)(t - x_2).$$

Viètovy vztahy nám ukazují, že koeficienty rovnice $t^2 + a_1 t + a_2 = 0$ jsou funkcemi kořenů této rovnice. Funkce můžeme také zapsat jiným způsobem: místo a_1 můžeme psát $-\sigma_1$ a místo a_2 můžeme psát σ_2. Nově vzniklé vzorce pak mají podobu

$$\sigma_1^{(2)} = x_1 + x_2, \qquad \sigma_2^{(2)} = x_1 x_2.$$

Pro n neurčitých by tyto vzorce měly podobu:

$$\sigma_1^{(n)} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \qquad \sigma_n^{(n)} = x_1 x_2 \ldots x_n.$$

Záměnou pořadí proměnných se funkce σ_1a σ_2 nezmění. Platí tedy:

---

[5] Přeloženo a upraveno z [9].

$$\sigma_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 = x_2 + x_1 = \sigma_1(x_2,\ x_1), \qquad x_1, x_2\ \in R,$$
$$\sigma_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 = x_2 x_1 = \sigma_2(x_2,\ x_1), \qquad x_1, x_2 \in R.$$

Je zřejmé, že se jedná o funkce proměnných x_1 a x_2, u kterých nezáleží na pořadí proměnných, tzn. o funkce symetrické. Symetrické funkce σ_1 a σ_2 budeme nazývat **elementárními symetrickými polynomy**.

3.3.2. Viètovy vztahy – pro polynom třetího stupně

Uvažujme kubickou rovnici $t^3 + a_1 t + a_2 t + a_3 = 0, t \in R$, jejíž kořeny označíme x_1, x_2 a x_3. Pro polynomy třetího stupně mají Viètovy vztahy podobu:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3), \qquad a_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \qquad a_3 = -x_1 x_2 x_3.$$

Tyto vztahy jsou důsledkem formule pro rozklad kubického čtyřčlenu na kořenové činitele

$$t^3 + a_1 t + a_2 t + a_3 = (t - x_1)(t - x_2)(t - x_3).$$

Podobně jako u polynomů druhého stupně můžeme psát:

$$\sigma_1^{(3)} = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \sigma_2^{(3)} = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3, \qquad \sigma_3^{(3)} = x_1 x_2 x_3.$$

3.3.3. Viètovy vztahy - pro polynom n- tého stupně

Mějme polynom jedné proměnné $h(x) = t^n +\ a_1 t^{n-1} +\ \dots +\ a_n\ \in I[x]$ a nechť je tento polynom úplně rozložitelný v I, tj. existuje rozklad polynomu $h(x)$ ve tvaru:

$$h(x) = (t - x_1)\ (t - x_2) \dots (t - x_n).$$

Body $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazýváme nulové body polynomu h a platí, že $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$. Roznásobením lineárních faktorů a porovnáním koeficientů u t^i, $i = 0, 1, \dots, n - 1$ obdržíme vztahy:

$$a_1 = -(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n) = -\sum^{(n)} x_1,$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \sum^{(n)} x_1x_2,$$

$$\vdots$$

$$a_i = (-1)^i \, (x_1x_2 \ldots x_i + \ldots + x_{n-i+1}x_{n-i+2} \ldots x_n) = (-1)^i \sum^{(n)} x_1x_2 \ldots x_i,$$

$$\vdots$$

$$a_n = (-1)^n \, x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \sum^{(n)} x_1x_2 \ldots x_n.$$

Vypočtěme si příklad na nulové body.

Příklad 3.3.3.1.: Mějme polynom $f\colon x^3 - 3x^2 - x + 3$, jenž má tři nulové body z_1, z_2 a z_3. Vypočtěte $\sum^{(3)} z_1^2 z_2$.

Řešení: Víme již, že $\sum^{(3)} z_1^2 z_2 = z_1^2 z_2 + z_1^2 z_3 + z_2^2 z_1 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 + z_3^2 z_2$.

Polynom f si nejprve rozložíme pomocí nulových bodů na součin

$$f\colon (x - z_1)(x - z_2)(x - z_3).$$

Roznásobením závorek získáme

$$f\colon x^3 - x^2(z_1 + z_2 + z_3) + x(z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3) - z_1z_2z_3.$$

Na základě Viètových vztahů pro polynomy třetího stupně můžeme tedy napsat

$$\sigma_1 = z_1 + z_2 + z_3 = 3,$$

$$\sigma_2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = -1,$$

$$\sigma_3 = z_1z_2z_3 = -3.$$

Dále upravíme

$\sum^{(3)} z_1^2 z_2 = z_1^2 z_2 + \ z_1^2 z_3 + \ z_2^2 z_1 + \ z_2^2 z_3 + \ z_3^2 z_1 + \ z_3^2 z_2 =$
$= z_1 z_2 (z_1 + z_2) + z_1 z_3 (z_1 + z_3) + z_2 z_3 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 (z_1 + z_2 + z_3 - z_3) +$
$+ z_1 z_3 (z_1 + z_2 + z_3 - z_2) + z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3 - z_1) = z_1 z_2 (z_1 + z_2 + z_3) - z_1 z_2 z_3 +$
$+ z_1 z_3 (z_1 + z_2 + z_3) - z_1 z_2 z_3 + z_2 z_3 (z_1 + z_2 + z_3) - z_1 z_2 z_3.$

Po vytknutí získáme $(z_1 + z_2 + z_3)(z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3) - 3 z_1 z_2 z_3$ = 3 · (-1) – 3 · (-3) = **6.**

Protože je polynom f rozložitelný, tedy $f = (x-1)(x+1)(x-3)$, můžeme provést kontrolu výpočtu dosazením $z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = 3$ do

$$\sum^{(3)} z_1^2 z_2 = z_1^2 z_2 + \ z_1^2 z_3 + \ z_2^2 z_1 + \ z_2^2 z_3 + \ z_3^2 z_1 + \ z_3^2 z_2 = -1 + 3 + 1 + 3 + 9 - 9 = 6.$$

3.4. Elementární symetrické polynomy

Definujme elementární symetrické polynomy podobně jako v [4] nebo v [5].

Definice 3.4.1.: Elementárními symetrickými polynomy n neurčitých nad oborem integrity I nazýváme následující polynomy $\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}, \dots, \sigma_n^{(n)} \in \ I[x_1, x_2, x_3 \dots \ x_n]$:

$$\sigma_1^{(n)} = \ x_1 + \ x_2 + \ \dots + \ x_n = \sum^{(n)} x_1,$$

$$\sigma_2^{(n)} = \ x_1 x_2 + \ x_1 x_3 + \ \dots + \ x_{n-1} x_n = \sum^{(n)} x_1 x_2,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_i^{(n)} = \sum^{(n)} x_1 x_2 \dots \ x_i,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n^{(n)} = \ x_1 x_2 \dots \ x_n = \sum^{(n)} x_1 x_2 \dots \ x_n.$$

Poznámka: Některé zdroje např. [6] uvádějí elementární symetrické polynomy tak, že před každým elementárním symetrickým polynomem je $(-1)^n$. Tyto vztahy potom mají podobu:

$$\sigma_1^{(n)} = (-1)^1(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = -\sum^{(n)} x_1,$$

$$\sigma_2^{(n)} = (-1)^2(x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n) = \sum^{(n)} x_1x_2\,,$$

$$\vdots$$

$$\sigma_n^{(n)} = (-1)^n(x_1x_2 \ldots x_n) = (-1)^n \sum^{(n)} x_1x_2 \ldots x_n.$$

Uveďme si nyní pár jednoduchých příkladů na elementární symetrické polynomy.

Příklad 3.4.2.: Vypište elementární symetrické polynomy pro n = 4.

Řešení: $\sigma_1^{(4)} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$

$\sigma_2^{(4)} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$

$\sigma_3^{(4)} = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$\sigma_4^{(4)} = x_1x_2x_3x_4$

Příklad 3.4.3.: Mějme symetrický polynom $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ a vyjádřeme ho pomocí elementárních symetrický polynomů.

Řešení: Víme, že $x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$. Toto vyjádření můžeme napsat ve tvaru $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$.

Příklad 3.4.4.: Vyjádřeme pomocí elementárních symetrických polynomů polynom

$$f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^3.$$

Řešení: Při řešení tohoto příkladu budeme postupovat stejným způsobem jako v předchozím příkladu. Tedy:

$x_1^3 + x_2^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 - 3x_1^2x_2 - 3x_1x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$. Na základě toho dostaneme zápis $\sigma_1^3 - 3\sigma_2\sigma_1$.

Abychom si příklady těchto typů trochu usnadnili, uvedeme v následující tabulce, jak lze vyjádřit polynomy dvou neurčitých, které jsou součtem 2., 3., 4. až 10. mocnin neurčitých, pomocí elementárních symetrických polynomů.

Tabulka č.1: *Vyjádření symetrických polynomů v elementárních symetrických polynomech*

Symetrický polynom	**Elementární symetrické polynomy**
$x_1 + x_2$	σ_1
$x_1^2 + x_2^2$	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$
$x_1^3 + x_2^3$	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$
$x_1^4 + x_2^4$	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$
$x_1^5 + x_2^5$	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$
$x_1^6 + x_2^6$	$\sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$
$x_1^7 + x_2^7$	$\sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$
$x_1^8 + x_2^8$	$\sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$
$x_1^9 + x_2^9$	$\sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$
$x_1^{10} + x_2^{10}$	$\sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$

Definice 3.4.5.: Mějme součin $a_{k_1k_2\dots k_n}\,\sigma_1^{k_1}\dots\sigma_n^{k_n}$ elementárních symetrických polynomů s nenulovým koeficientem. Číslo $v = k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n$ nazýváme vahou součinu těchto elementárních symetrických polynomů.

Příklad 3.4.6.: Mějme součin elementárních symetrických polynomů

$$\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^3$$

Vahou součinu elementárních symetrických polynomů $\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3^3$ je $v = 1 + 2.2 + 3.3 =$ $= 14$.

3.5. Hlavní věta o symetrických polynomech

Před tím, než budeme moci dokázat hlavní větu o symetrických polynomech, je důležité vysvětlit si dvě pomocné věty, které nám hlavní větu o symetrických polynomech umožní dokázat. Věty této podkapitoly včetně důkazů jsou převzaty z [5].

Věta 3.5.1.: Součin $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^{r_1}\left(\sigma_2^{(n)}\right)^{r_2}\dots\left(\sigma_n^{(n)}\right)^{r_n}$ elementárních symetrických polynomů n neurčitých nad oborem integrity I je opět symetrický polynom s vedoucím členem $x_1^{k_1}\,x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, kde:

$$\begin{aligned} k_1 &= r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n, \\ k_2 &= \phantom{r_1 + {}} r_2 + r_3 + \dots + r_n, \\ k_3 &= \phantom{r_1 + r_2 + {}} r_3 + \dots + r_n, \\ &\vdots \\ k_n &= \phantom{r_1 + r_2 + r_3 + \dots + {}} r_n. \end{aligned}$$

Vzniklý polynom má tedy výšku

$$[r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n, r_2 + r_3 + r_4 + \dots + r_n, r_3 + r_4 + r_5 + \dots + r_n, \dots, r_n].$$

Důkaz: Důkaz věty 3.5.1. jednoznačně plyne z věty o vzniku vedoucího členu polynomů (Věta 2.0.8.). Je tedy zřejmé, že vedoucí člen polynomu $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^{r_1}\left(\sigma_2^{(n)}\right)^{r_2}\dots\left(\sigma_n^{(n)}\right)^{r_n}$ vznikne vynásobením vedoucích členů $x_1^{r_1}, x_1^{r_2}\,.\,x_2^{r_2}, \dots, x_1^{r_n}\,.\,x_2^{r_n}\dots x_n^{r_n}$.

$\square$

Příklad 3.5.2.: Určete výšku polynomu $\left(\sigma_1^{(n)}\right)^{r_1}\left(\sigma_2^{(n)}\right)^{r_2}\left(\sigma_3^{(n)}\right)^{r_3}$, kde $n = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1, r_3 = 3$.

Řešení: Příklady tohoto typu lze řešit dvěma způsoby.

(i) Dosazením za $n, r_1, r_2\ a\ r_3$ získáme polynom ve tvaru $\left(\sigma_1^{(3)}\right)^2\left(\sigma_2^{(3)}\right)^1\left(\sigma_3^{(3)}\right)^3$. Dále již budeme využívat znalosti elementárních symetrických polynomů. Můžeme tedy napsat:

$$\left(\sigma_1^{(3)}\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

$$\left(\sigma_2^{(3)}\right)^1 = x_1^1x_2^1 + x_1^1x_3^1 + x_2^1x_3^1,$$

$$\left(\sigma_3^{(3)}\right)^3 = x_1^3x_2^3x_3^3.$$

Je tedy jasné, že:

$$\left(\sigma_1^{(3)}\right)^2 \left(\sigma_2^{(3)}\right)^1 \left(\sigma_3^{(3)}\right)^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \cdot (\, x_1^1x_2^1 + x_1^1x_3^1 + x_2^1x_3^1) \cdot (\, x_1^3x_2^3x_3^3).$$

Roznásobením závorek získáme symetrický polynom, který bude mít osmnáct členů:

$x_1^6x_2^4x_3^3 + x_1^6x_2^3x_3^4 + x_1^5x_2^4x_3^4 + x_1^4x_2^6x_3^3 + x_1^4x_2^5x_3^4 + x_1^3x_2^6x_3^4 + x_1^4x_2^4x_3^5 + x_1^4x_2^3x_3^6 + x_1^3x_2^4x_3^6 +$
$+ 2x_1^5x_2^5x_3^3 + 2x_1^5x_2^4x_3^4 + 2x_1^4x_2^5x_3^4 + 2x_1^5x_2^4x_3^4 + 2x_1^5x_2^3x_3^5 + 2x_1^4x_2^4x_3^5 + 2x_1^4x_2^5x_3^4 +$
$+ 2x_1^4x_2^4x_3^5 + 2x_1^3x_2^5x_3^5$.

Snadno bychom zjistili, že vedoucím členem tohoto polynomu je člen $x_1^6x_2^4x_3^3$, jehož výška **[6, 4, 3]** je zároveň výškou polynomu $\left(\sigma_1^{(3)}\right)^2 \left(\sigma_2^{(3)}\right)^1 \left(\sigma_3^{(3)}\right)^3$.

(ii) Nyní využijme znalostí z věty 3.5.1., na základě které víme, že cílem je získat polynom s vedoucím členem $x_1^{k_1}\, x_2^{k_2} \ldots\, x_n^{k_n}$, v našem případě tedy $x_1^{k_1}\, x_2^{k_2}\, x_3^{k_3}$. Dále můžeme díky větě 3.5.1. napsat, že:

$$\begin{aligned} k_1 &= r_1 + r_2 + r_3, \\ k_2 &= \phantom{r_1 +{}} r_2 + r_3, \\ k_3 &= \phantom{r_1 + r_2 +{}} r_3, \end{aligned}$$

kde $r_1 = 2, r_2 = 1, r_3 = 3$.

Snadno již dopočítáme, že $k_1 = 6, k_2 = 4, k_3 = 3$. Získáme tedy opět vedoucí člen $x_1^6x_2^4x_3^3$.

Věta 3.5.3.: Dva symetrické polynomy

$$\left(\sigma_1^{(n)}\right)^{r_1} \left(\sigma_2^{(n)}\right)^{r_2} \ldots \left(\sigma_n^{(n)}\right)^{r_n} \text{ a } \left(\sigma_1^{(n)}\right)^{k_1} \left(\sigma_2^{(n)}\right)^{k_2} \ldots \left(\sigma_n^{(n)}\right)^{k_n},$$

které náleží oboru integrity $I[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n]$ mají stejnou výšku právě tehdy, když $r_1 = k_1, r_2 = k_2, \ldots, r_n = k_n$.

Důkaz: Podle věty 3.5.1. mají uvažované symetrické polynomy výšky

$$[r_1 + r_2 + r_3 + \ldots + r_n, r_2 + r_3 + r_4 + \ldots + r_n, r_3 + r_4 + r_5 + \ldots + r_n, \ldots, r_n]$$

a

$$[k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n,\ k_2 + k_3 + k_4 + \ldots + k_n, k_3 + k_4 + k_5 + \ldots + k_n, \ldots, k_n].$$

Pokud mají oba polynomy stejnou výšku, platí, že se musí rovnat n – té složky, tzn. $r_n = k_n$. Z tohoto tvrzení a z rovnosti $n - 1.$ složek plyne, že $r_{n-1} = k_{n-1}$. Budeme – li takto postupovat dále, dostaneme postupně $r_{n-2} = k_{n-2}, \ldots, r_2 = k_2, r_1 = k_1$. Obrácená implikace je zřejmá. ☐

Příklad 3.5.4.: Určete, zda polynomy f a g, resp. h a i mají stejnou výšku:

a) $f\colon \left(\sigma_1^{(3)}\right)^2 \left(\sigma_2^{(3)}\right)^1 \left(\sigma_3^{(3)}\right)^3$

$g\colon \left(\sigma_1^{(3)}\right)^2 \left(\sigma_2^{(3)}\right)^1 \left(\sigma_3^{(3)}\right)^4$

b) $h\colon \left(\sigma_1^{(3)}\right)^{14} \left(\sigma_2^{(3)}\right)^{10} \left(\sigma_3^{(3)}\right)^3$

$i\colon \left(\sigma_1^{(3)}\right)^{14} \left(\sigma_2^{(3)}\right)^{10} \left(\sigma_3^{(3)}\right)^3$

Řešení: a) Polynom f, resp. g má výšku

$$[r_1 + r_2 + r_3, r_2 + r_3, r_3] = [2 + 1 + 3, 1 + 3, 3], \text{ resp.}$$

$$[k_1 + k_2 + k_3, k_2 + k_3, k_3] = [2 + 1 + 4, 1 + 4, 4].$$

Polynom f má tedy výšku $[6, 4, 3]$ a polynom g $[7, 5, 4]$. Výšky těchto polynomů jsou tedy **různé.**

b) Podle předchozího postupu bychom zjistili, že polynom h má výšku $[27, 13, 3]$ a polynom g má výšku $[27, 13, 3]$. Výšky těchto polynomů **jsou stejné**.

Nyní již můžeme přejít k hlavní větě o symetrických polynomech.

Věta 3.5.5.: Hlavní věta o symetrických polynomech

Ke každému symetrickému polynomu $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ existuje právě jeden polynom $g(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ takový, že

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g(\sigma_1^{(n)}, \sigma_2^{(n)}, \sigma_3^{(n)}, \dots, \sigma_n^{(n)}).$$

Důkaz: Pro zjednodušení zápisu budeme v následujícím textu psát místo $\sigma_k^{(n)}$ pouze σ_k.

1. Nejprve si ukažme, že existuje alespoň jeden polynom g s vlastností popsanou v hlavní větě o symetrických polynomech. Postupujme tedy indukcí podle výšky polynomu f. Pokud je f nulový polynom, lze pak za g vzít rovněž nulový polynom.

Nechť je nyní dán symetricý polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$, který má nenulovou výšku $[k_1, k_2, k_3, \dots, k_n]$. Je důležité podotknout, že předpokládáme, že tvrzení věty již platí pro všechny symetrické polynomy, které mají menší výšku.

Jestliže má polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ vedoucí člen $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, potom uvažujme polynom $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3-k_4} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} . \sigma_n^{k_n}$. Je zřejmé, že polynom $a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3-k_4} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} . \sigma_n^{k_n}$ má stejný vedoucí člen, jako polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, takže symetrický polynom

$$f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3-k_4} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} . \sigma_n^{k_n}$$

má menší výšku než $[k_1, k_2, k_3, \dots, k_n]$, tzn. menší než polynom f. Na základě indukčního předpokladu existuje polynom $g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$ takový, že $f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n)$. Potom ovšem $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) =$
$= f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) + a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3-k_4} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} . \sigma_n^{k_n} =$
$= g_1(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) + a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1-k_2} \sigma_2^{k_2-k_3} \sigma_3^{k_3-k_4} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} . \sigma_n^{k_n} =$
$= g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \dots, \sigma_n)$.

2. Nyní přistoupíme k důkazu jednoznačnosti. Při důkazu budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že existují dvě různá vyjádření polynomu $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ pomocí elementárních symetrických polynomů, tj.

$$f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g_1(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n), f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = g_2(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

a zároveň

$$g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \neq g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n),$$

kde $g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, $g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in I[x_1, x_2, x_3, \dots, x_n]$.

Pro polynom $g = g_1 - g_2$ tedy platí $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

Jsou – li polynomy g_1 a g_2 navzájem různé, je potom polynom $g = g_1 - g_2$ nenulový a má vedoucí člen $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$. Dosadíme – li v polynomu g za neurčité $x_1, x_2, \dots, x_n$ elemetární symetrické polynomy $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ má na základě věty 3.5.1. polynom

$$a_{k_1 k_2 \dots k_n} \sigma_1^{k_1} \sigma_2^{k_2} \sigma_3^{k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1}} . \sigma_n^{k_n}$$

výšku

$$[k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n,\ k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_n, k_3 + k_4 + k_5 + \dots + k_n, \dots, k_n].$$

Polynom g může mít i některé další členy, např. $b_{j_1 j_2 \dots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$. Dosadíme – li v členu $b_{j_1 j_2 \dots j_n} x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ za neurčité $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ elementární symetrické polynomy $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, získáme tím symetrický polynom, který bude mít menší výšku než

$$[k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n,\ k_2 + k_3 + k_4 + \dots + k_n, k_3 + k_4 + k_5 + \dots + k_n, \dots, k_n].$$

Odtud plyne, že vedoucí člen polynomu $a_{k_1 k_2 \dots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ je současně vedoucím členem polynomu $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Plyne z toho tedy i to, že polynom $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ je nenulový. Tímto jsme došli ke sporu, neboť jsme předpokládali, že $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = 0$.

$\square$

4. VÝPOČTY SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ, SOUČTY K- TÝCH MOCNIN

Velmi často potřebujeme vyjádřit polynom $f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$, pomocí elementárních symetrických polynomů

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots x_n,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\vdots$$
$$\sigma_n = x_1x_2 \dots x_n,$$

tj. jako polynom v elementárních symetrických polynomech. Podle hlavní věty o symetrických polynomech existuje polynom $g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n) = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. V této kapitole si ukážeme početní metody, kterými je možné určit polynom g.

Nejprve ukážeme postup jak vyjádřit součin elementárních symetrických polynomů $\sigma_1^{l_1}\sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ jako součet jednoduchých symetrických polynomů. Dílčí úlohou je úloha, při níž máme vyjádřit součin jednoho elementárního symetrického polynomu a jednoduchého symetrického polynomu jako součet jednoduchých symetrických polynomů.

4.1. Součin elementárního symetrického polynomu a jednoduchého symetrického polynomu

Pokud bychom měli vyjádřit součin elementárního symetrického polynomu σ_i a jednoduchého symetrického polynomu $\sum x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, tj.

$$\sigma_i \cdot \sum x_1^{k_1}x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

jako součet jednoduchých symetrických polynomů, stačilo by najít vedoucí členy těchto jednoduchých symetrických polynomů. Z věty 3.2.4. je zřejmé, že mezi součiny

$$x_1^{k'_1}x_2^{k'_2} \dots x_n^{k'_n},$$

které vzniknou vynásobením nějakého členu polynomu σ_i s nějakým členem $\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$, jsou vedoucími členy příslušných jednoduchých symetrických polynomů součiny, pro jejichž exponenty platí

$$k'_1 \geq k'_2 \geq \ldots \geq k'_n.$$

U každého součinu $x_1^{k'_1} x_2^{k'_2} \dots x_n^{k'_n}$ musíme vědět, z kolika možných součinů jednoho členu σ_i a jednoho členu $\sum x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ součin vznikne, abychom k příslušnému jednoduchému polynomu s vedoucím členem $x_1^{k'_1} x_2^{k'_2} \dots x_n^{k'_n}$ přiřadili správný koeficient. Ukažme si to na příkladu.

Příklad 4.1.1.: Vypočítejte součin elementárního symetrického polynomu σ_3 a jednoduchého symetrického polynomu $\sum x_1^5 x_2 x_3$ pro $n = 10$.

Řešení: Připomeňme, že:

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 + \cdots + x_8 x_9 x_{10} \text{ pro } n = 10.$$

Vedoucími členy jednoduchých symetrických polynomů v součinu $\sigma_3 \sum x_1^5 x_2 x_3$ jsou členy:

$$\sum x_1^6 x_2^2 x_3^2, \sum x_1^6 x_2^2 x_3 x_4, \sum x_1^6 x_2 x_3 x_4 x_5, \sum x_1^5 x_2^2 x_3^2 x_4, \sum x_1^5 x_2^2 x_3 x_4 x_5, \sum x_1^5 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6.$$

Je patrné, že člen $x_1^6 x_2^2 x_3^2$ vznikne jedině jako součin $x_1^5 x_2 x_3 \cdot x_1 x_2 x_3$.

Člen $x_1^6 x_2^2 x_3 x_4$ už ale vznikne dvěma způsoby a to jako součin

$$x_1^5 x_2 x_3 \cdot x_1 x_2 x_4 \text{ nebo } x_1^5 x_2 x_4 \cdot x_1 x_2 x_3.$$

Příslušný jednoduchý symetrický polynom bude mít tedy koeficient dva.

Člen $x_1^6 x_2 x_3 x_4 x_5$ vznikne jakou součin

$$x_1^5 x_2 x_3 \cdot x_1 x_4 x_5 \text{ nebo } x_1^5 x_2 x_4 \cdot x_1 x_3 x_5 \text{ nebo } x_1^5 x_2 x_5 \cdot x_1 x_3 x_4$$
$$\text{nebo } x_1^5 x_3 x_4 \cdot x_1 x_2 x_5 \text{ nebo } x_1^5 x_3 x_5 \cdot x_1 x_2 x_4 \text{ nebo } x_1^5 x_4 x_5 \cdot x_1 x_2 x_3.$$

Můžeme tedy napsat, že tento člen vznikne ze součinů tvaru $x_1^5 x_i x_j \cdot x_1 x_k x_l$, kde i, j, k, l je nějaké pořadí čísel $2, 3, 4, 5$ takové, že $i < j$ a $k < l$. Těchto součinů bude tolik, kolika možnými způsoby můžeme vybrat dvě čísla z čísel $2, 3, 4, 5$ tzn. $\binom{4}{2} = 6$.

Člen $\sum x_1^5x_2^2x_3^2x_4$ vznikne pouze jako součin $x_1^5x_2x_3 \cdot x_2x_3x_4$.

Člen $\sum x_1^5x_2^2x_3x_4x_5$ vznikne ze součinů tvaru $x_1^5x_2x_i \cdot x_2x_jx_k$, kde i, j, k je nějaké pořadí čísel $3, 4, 5$ takové, že $j < k$. Těchto součinů bude $\binom{3}{1} = 3$.

Poslední člen $x_1^5x_2x_3x_4x_5x_6$ vznikne ze součinů tvaru $x_1^5x_ix_j \cdot x_kx_lx_m$, kde i, j, k, l, m je pořadí čísel takové, že $i < j$ a $k < l < m$. Celkem těchto součinů bude $\binom{5}{3} = 10$.

Součin σ_3 a $\sum^{(10)} x_1^5x_2x_3$ je roven následujícímu součtu jednoduchých symetrických polynomů:

$$\sum \boldsymbol{x_1^6x_2^2x_3^2} + \mathbf{2}\sum \boldsymbol{x_1^6x_2^2x_3x_4} + \mathbf{6}\sum \boldsymbol{x_1^6x_2x_3x_4x_5} + \sum \boldsymbol{x_1^5x_2^2x_3^2x_4} + \mathbf{3}\sum \boldsymbol{x_1^5x_2^2x_3x_4x_5} + + \mathbf{10}\sum \boldsymbol{x_1^5x_2x_3x_4x_5x_6}$$

4.2. Vyjádření součinu elementárních symetrických polynomů jako součet jednoduchých symetrických polynomů

Již víme, jak vypočítat součin elementárního symetrického polynomu a jednoduchého symetrického polynomu včetně jeho koeficientů a jak výsledek vyjádřit jako součet jednoduchých symetrických polynomů. Umíme tedy vypočítat i součin dvou elementárních symetrických polynomů, neboť elementární symetrické polynomy jsou speciálním případem jednoduchých symetrických polynomů. Pokud máme za úkol vypočítat součin více než dvou elementárních symetrických polynomů, jednoduše vynásobíme výsledek násobení dvou elementárních symetrických polynomů třetím elementárním symetrickým polynomem. Tímto způsobem pokračujeme do té doby, než dostaneme celý součin. Názorně si to ukažme na příkladu.

Příklad 4.2.1.: Spočítejte σ_2^3, kde $n = 4$ (n ... počet neurčitých).
Řešení: Je důležité uvědomit si, že $\sigma_2^3 = \sigma_2^2 \cdot \sigma_2$

Nejprve vypočteme druhou mocninu σ_2, tj.

$$\sum^{(4)} x_1x_2 \cdot \sum^{(4)} x_1x_2.$$

Protože počítáme pouze s polynomy v $n = 4$ neurčitých, můžeme $\sigma_2 = \sum^{(4)} x_1x_2$ zapsat nezkráceným zápisem:

(2) $\sigma_2^2 = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4)(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + $
$+ x_2x_4 + x_3x_4) = \sum^{(4)} x_1^2x_2^2 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3 + 6\sum^{(4)} x_1\, x_2x_3x_4.$

Jak vznikly koeficienty u jednotlivých členů, jsme si vysvětlili v předchozí kapitole.

Poznámka: Polynom σ_2^2 lze vypočítat i v software Mathematica. Ve verzi 7.0 tohoto software by se polynom σ_2^2 vypočítal následovně:

Expand[(SymmetricPolynomial [2,{x_1, x_2, x_3, x_4}])^2]

Výstupem by byl polynom

$x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2x_3 + 2x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_3^2 + 2x_1x_2x_3^2 + x_2^2x_3^2 + 2x_1^2x_2x_4 + 2x_1x_2^2x_4 +$
$+2x_1^2x_3x_4 + 6x_1x_2x_3x_4 + 2x_2^2x_3x_4 + 2x_1x_3^2x_4 + 2x_2x_3^2x_4 + x_1^2x_4^2 + 2x_1x_2x_4^2 + x_2^2x_4^2 \quad +$
$+2x_1x_3x_4^2 + 2x_2x_3x_4^2 + x_3^2x_4^2$

z něhož bychom snadno určili výsledek $\sum^{(4)} x_1^2x_2^2 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2x_3 + 6\sum^{(4)} x_1\, x_2x_3x_4$.

Dále je potřeba vynásobit elementárním symetrickým polynomem

$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$$

všechny členy (2):

$$\sigma_2 \cdot \sum^{(4)} x_1^2x_2^2 = \sum^{(4)} x_1^3x_2^3 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + 4\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$$

$$\sigma_2 \cdot \sum^{(4)} x_1^2x_2x_3 = \sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + 3\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3x_4 + \sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$$

Člen $\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5$ v součtu nebude, jelikož pracujeme jen s $n = 4$ neurčitými.

$$\sigma_2 \cdot \sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4 = \sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4$$

Se členy $\sum x_1^2x_2x_3x_4x_5$ a $\sum x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ bychom museli počítat v případě $n \geq 6$.

Připomeňme jen, že např. člen $x_1^3x_2x_3x_4$ ve druhé rovnosti vznikl jako součin

$$x_1x_i \cdot x_1^2x_jx_k.$$

Těchto součinů je tolik, kolikrát můžeme vybrat jednu neurčitou z celkem tři neurčitých x_2, x_3, x_4 tedy $\binom{3}{1} = 3$.

Konečný výsledek získáme vynásobením druhé rovnosti dvěma a třetí rovnosti šesti:

$\sigma_2^3 = \sigma_2 \cdot \sum^{(4)} x_1^2x_2^2 + \sigma_2 \cdot 2 \cdot \sum^{(4)} x_1^2x_2x_3 + \sigma_2 \cdot 6 \cdot \sum^{(4)} x_1x_2x_3x_4 =$

$= \sum^{(4)} x_1^3x_2^3 + 2\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + 4\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4 + 2\left(\sum^{(4)} x_1^3x_2^2x_3 + 3\sum^{(4)} x_1^3x_2x_3x_4 + \right.$

$\left. + \sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3^2 + 2\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4\right) + 6\left(\sum^{(4)} x_1^2x_2^2x_3x_4\right) =$

$$= \sum \boldsymbol{x_1^3x_2^3} + \boldsymbol{4}\sum \boldsymbol{x_1^3x_2^2x_3} + \boldsymbol{14}\sum \boldsymbol{x_1^2x_2^2x_3x_4} + \boldsymbol{6}\sum \boldsymbol{x_1^3x_2x_3x_4} + \boldsymbol{2}\sum \boldsymbol{x_1^2x_2^2x_3^2}$$

4.3. Způsoby vyjádření symetrického polynomu jako polynomu v elementárních symetrických polynomech

V předchozích dvou kapitolách jsme si ukázali, jak vyjádříme součin jednoduchého symetrického polynomu a elementárního symetrického polynomu a jak vyjádřit součin elementárních symetrických polynomů jako součet jednoduchých symetrických polynomů. Nyní si ukážeme způsoby vyjádření symetrického polynomu jako polynomu v elementárních symetrických polynomech.

Příklad 4.3.1.: Vyjádřete symetrický polynom $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3$ jako polynom v elementárních symetrických polynomech.

Řešení: Polynom $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3$ je jedním z jednoduchých symetrických polynomů, který se objeví v součinu σ_3 a σ_2. Součinem $\sigma_3\sigma_2$ vzniknou tyto polynomy:

$$\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3\,, \qquad \sum^{(5)} x_1^2\, x_2x_3x_4, \qquad \sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4x_5.$$

Polynom $\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3$ vznikne v součinu $\sum^{(5)} x_1x_2\, x_3 \cdot \sum^{(5)} x_1x_2$,

$$\sum^{(5)} x_1x_2x_3 \cdot \sum^{(5)} x_1x_2 = \sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3 + 3\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4 + 10\sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4x_5,$$

Polynom $\sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4x_5$ je elementární symetrický polynom σ_5.

Můžeme tedy psát

$$\sigma_3 \cdot \sigma_2 = \sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3 + 3\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4 + 10\sigma_5.$$

Z toho vyplývá, že

$$\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3 = \sigma_2\sigma_3 - 10\sigma_5 - 3\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4.$$

Koeficienty těchto polynomů jsme určili stejným způsobem jako v příkladu 4.1.1.

Polynom $\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4$ vznikne v součinu $\sum^{(5)} x_1 \cdot \sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4$

tedy

$$\sum^{(5)} x_1 \cdot \sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4 = \sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4 + 5\sum^{(5)} x_1x_2x_3x_4\, x_5.$$

Z toho plyne, že

$$\sum^{(5)} x_1^2x_2x_3x_4 = \sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5.$$

Výsledkem tedy bude

$$\sum^{(5)} x_1^2x_2^2x_3 = \sigma_2\sigma_3 - 10\sigma_5 - 3(\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_5) = \boldsymbol{\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5 - 3\sigma_1\sigma_4}.$$

Nyní si ukážeme způsob výpočtu polynomu g v elementárních symetrických polynomech $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, který se podle hlavní věty o symetrických polynomech rovná polynomu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Budeme postupovat následovně:

V polynomu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nejprve najdeme vedoucí člen, který označíme $b^{(0)} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$. Uvažujme např. $f = -3 \sum^{(n)} x_1^5 x_2^4 x_3^2 + 2 \sum^{(n)} x_1 x_2^2$, jeho vedoucím členem je $-3x_1^5 x_2^4 x_3^2$.

Dále sestrojíme součin $\sigma_1^{l_1} \sigma_2^{l_2} \dots \sigma_n^{l_n}$ elementárních symetrických polynomů tak, aby měl stejný vedoucí člen. Obecně bude takovým součinem $b^{(0)} \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \sigma_n^{k_n}$. V našem případě to bude součin:

$$-3\left(\sum^{(n)} x_1 x_2 x_3\right)^2 \cdot \left(\sum^{(n)} x_1 x_2\right)^2 \cdot \sum^{(n)} x_1 = -3\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2 = -3\sigma_1^{5-4} \sigma_2^{4-2} \sigma_3^2.$$

Symetrický polynom

$$(3)\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) - b^{(0)} \sigma_1^{k_1 - k_2} \sigma_2^{k_2 - k_3} \dots \sigma_{n-1}^{k_{n-1} - k_n} \sigma_n^{k_n} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

má menší výšku než f. V našem případě získáme polynom

$$\left(-3 \sum^{(n)} x_1^5 x_2^4 x_3^2 + 2 \sum^{(n)} x_1 x_2^2\right) - (-3\sigma_1 \sigma_2^2 \sigma_3^2) = f_1(x_1, x_2, x_3),$$

jehož vedoucí člen má výšku [5, 3, 3], tedy menší než je výška [5, 4, 2] vedoucího členu zadaného polynomu f. Součin elementárních symetrických funkcí ve (3) vyjádříme pomocí jednoduchých symetrických polynomů. Díky tomu získáme vedoucí člen v $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Celý postup se opakuje tak dlouho, dokud nedostaneme nulový polynom. Sečtením všech takto vypočítaných rovností tvaru (3) získáme vyjádření symetrického polynomu jako polynom $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$.

Příklad 4.3.2.: Mějme symetrický polynom tří neurčitých x_1, x_2, x_3

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3 \sum^{(3)} x_1^2 - \sum^{(3)} x_1 x_2 = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3.$$

Vypočtěte polynom $g(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Řešení: Vedoucí člen v $f(x_1, x_2, x_3)$ je $3x_1^2$. Sestrojíme součin $3\sigma_1^2$, který má stejný vedoucí člen jako $f(x_1, x_2, x_3)$. Součin elementárních symetrických polynomů $3\sigma_1^2$ vyjádříme pomocí jednoduchých symetrických polynomů $3(x_1 + x_2 + x_3)^2$. Sestrojíme součet

$$f(x_1, x_2, x_3) - 3\sigma_1^2 = 3\sum^{(3)} x_1^2 - \sum^{(3)} x_1 x_2 - 3(x_1 + x_2 + x_3)^2 =$$

$$= 3\sum^{(3)} x_1^2 - \sum^{(3)} x_1 x_2 - 3\sum^{(3)} x_1^2 - 6\sum^{(3)} x_1 x_2 = -7\sum^{(3)} x_1 x_2.$$

Získáme tedy polynom $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3) = -7\sum^{(3)} x_1 x_2$, jehož vedoucí člen má výšku [1,1,0] tedy menší, než je výška [2,0,0] vedoucího členu polynomu $f(x_1, x_2, x_3)$.

Vedoucí člen v $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$ je $-7x_1x_2$. Vytvoříme součin $-7\sigma_2$ mající stejný vedoucí člen jako polynom $f_1(x_1,\ x_2,\ x_3)$. Součin elementárních symetrických polynomů vyjádříme pomocí jednoduchého symetrického polynomu $-7x_1x_2$. Sestrojíme součet

$$f_1(x_1,\ x_2,\ x_3) - (-7\sigma_2) = -7\sum^{(3)} x_1 x_2 + 7\sum^{(3)} x_1 x_2 = 0.$$

Dostaneme tedy $f_2(x_1,\ x_2,\ x_3) = 0$, což je nulový polynom. Sečteme- li f, f_1, f_2 získáme hledané vyjádření:

$$\boldsymbol{g(\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3) = 3\sigma_1^2 - 7\sigma_2.}$$

Při tomto způsobu výpočtu polynomu $g(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ se předpokládá, že je polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ vyjádřen jako součet jednoduchých symetrických polynomů. Můžeme se ale setkat s polynomem $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, který takto vyjádřen není a je tedy nutné si takovéto vyjádření vypočítat. V takovýchto případech je vhodnější použít metodu, kterou lze nazvat jako metoda neurčitých koeficientů.

Mějme tedy symetrický polynom $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, který má výšku $[k_1, k_2, \dots, k_n]$ a váhu $v = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$. Podle hlavní věty o symetrických polynomech můžeme psát (4)$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{l'_1, l'_2, \dots, l'_n} c_{l'_1 l'_2 \dots l'_n} \sigma_1^{l'_1} \sigma_2^{l'_2} \dots \sigma_n^{l'_n}$, kde $c_{l'_1 l'_2 \dots l'_n}$náleží oboru integrity.

Na pravé straně stačí sčítat exponenty $l'_1, l'_1, \dots, l'_n \in\ Z_0^+$, které splňují nerovnosti:

$$(5) l'_1 + 2l'_2 + \dots + nl'_n \leq v,$$

$$(6) l'_1 + l'_2 + \dots + l'_n \leq k_1.$$

Každý člen na pravé straně (4) musí mít váhu rovnou nejvýše váze polynomu $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, z čehož plyne první nerovnost. Každý člen na pravé straně musí ještě být v neurčité x_1 nejvýše stupně k_1. Z toho plyne nerovnost druhá. V případě jednoduchých symetrických polynomů místo první nerovnosti platí

$$(7)\ l'_1 + 2l'_2 + \dots + nl'_n = v.$$

Neznámé koeficienty $c_{l'_1 l'_2 \dots l'_n}$ určíme tak, že do rovnosti

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{l'_1, l'_2, \dots, l'_n} c_{l'_1 l'_2 \dots l'_n} \sigma_1^{l'_1} \sigma_2^{l'_2} \dots \sigma_n^{l'_n}$$

dosadíme za neurčité $x_1, x_2, \dots, x_n$ vhodné skupiny n prvků z oboru integrity. Tím vzniknou lineární rovnice pro $c_{l'_1 l'_2 \dots l'_n}$, ze kterých koeficienty vypočítáme. Skupiny n prvků dosazujeme tak, aby vzniklé lineární rovnice byly co nejjednodušší.

Příklad 4.3.3.: Mějme polynom tří neurčitých $\tau = x_1 - x_2 + x_3$. Provedeme na něj všechny permutace neurčitých x_1, x_2, x_3, čímž získáme tyto polynomy:

$$\tau_1 = x_1 - x_2 + x_3, \qquad \tau_4 = -x_1 + x_2 - x_3,$$

$$\tau_2 = -x_1 + x_2 + x_3, \qquad \tau_5 = x_1 - x_2 - x_3,$$

$$\tau_3 = x_1 + x_2 - x_3, \qquad \tau_6 = -x_1 - x_2 + x_3.$$

Nyní si zavedeme polynom

$$(8)\ f(x_1, x_2, x_3) = \tau_1^2 \tau_2 + \tau_1^2 \tau_3 + \tau_2^2 \tau_3,$$

který má váhu tři. Vedoucí člen má tvar $-x_1^3$, platí tedy $k_1 = 3$. Pro l'_1, l'_2, l'_3 platí podle (7) $l'_1 + 2l'_2 + 3l'_3 = 3$. Odtud dostaneme následující hodnoty:

l'_1	l'_2	l'_3
3	0	0
1	1	0
0	0	1

Můžeme tedy napsat:

$$(9)\ f(x_1, x_2, x_3) = c_1\sigma_1^3 + c_2\sigma_1\sigma_2 + c_3\sigma_3.$$

Teď už jen vypočteme koeficienty c_1, c_2 a c_3. Provedeme to následovně:

1. Položíme $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$ a dostaneme

$$\tau_1 = 1 - 0 + 0 = 1;\ \tau_2 = -1 + 0 + 0 = -1;\ \tau_3 = 1 + 0 - 0 = 1,$$

tedy z (8)

$$f(1,0,0) = 1^2 \cdot (-1) + 1^2 \cdot 1 + (-1)^2 \cdot 1 = 1.$$

Protože

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3,$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3,$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3,$$

platí pro zvolené hodnoty $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$, že $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Po dosazení do (9) vyjde

$$1 = c_1\sigma_1^3 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$$
$$1 = c_1 \cdot 1^3$$

$$(10)\ c_1 = 1.$$

2. Položíme $x_1 = x_2 = 1, x_3 = 0$ a dostaneme

$$\tau_1 = 1 - 1 + 0 = 0;\ \tau_2 = -1 + 1 + 0 = 0;\ \tau_3 = 1 + 1 - 0 = 2,$$

tedy

$$f(1,1,0) = 0^2 \cdot 0 + 0^2 \cdot 2 + 0^2 \cdot 2 = 0.$$

Dále máme $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 1, \sigma_3 = 0$. Z (9) a (10) tedy plyne:

$$0 = c_1 \cdot (2)^3 + c_2 \cdot 2 \cdot 1 + c_3 \cdot 0$$
$$0 = 1 \cdot 8 + 2 \cdot c_2 + 0 \cdot c_3$$

$$(11)\ c_2 = -4.$$

3. Položíme $x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1$ a dostaneme

$$\tau_1 = 1 - 1 + (-1) = -1;\ \tau_2 = -1 + 1 + (-1) = -1;\ \tau_3 = 1 + 1 - (-1) = 3,$$

tedy

$$f(1,1,-1) = (-1)^2 \cdot (-1) + (-1)^2 \cdot 3 + (-1)^2 \cdot 3 = 5.$$

Dále máme $\sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = -1,\ \sigma_3 = -1.$

Z (9), (10) a (11) plyne

$$5 = c_1 \cdot 1^3 + c_2 \cdot 1 \cdot (-1) + c_3 \cdot (-1)$$
$$5 = 1 \cdot 1 + (-4) \cdot (-1) + c_3 \cdot (-1)$$

$$c_3 = 0.$$

Vyšetřovaný polynom má tedy tvar $\boldsymbol{f(x_1, x_2, x_3) = 1\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 - 0\sigma_3}$**.**

4.4. Newtonovy vzorce

Speciálním příkladem jednoduchých symetrických polynomů jsou součty k-tých mocnin

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Kvůli jednoduchosti ještě položme $s_0 = n$.

Mezi s_k a elementárními symetrickými polynomy σ_i existují jednoduché vztahy. Jedná se o tzv. Newtonovy vzorce.

Věta 4.4.1.: Mezi elementárními symetrickými polynomy $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ a součty k-tých mocnin platí vzorec:

$$(12) s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \cdots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz Newtonových vzorců je uveden např. v [6].

Příklad 4.4.2.: V tabulce č. 2 si uveďme přehled s_k pro $k = 1,2,\dots,5$ vyjádřených pomocí elementárních symetrických polynomů

Tabulka č.2: *Součty k-tých mocnin pro $k = 1,2,\dots,5$ vyjádřené pomocí elementárních symetrických polynomů*

s_1	σ_1
s_2	$\sigma_1^2 - 2\sigma_2$
s_3	$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$
s_4	$\sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_4$
s_5	$\sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 + 5\sigma_1\sigma_2^2 - 5\sigma_1\sigma_4 - 5\sigma_2\sigma_3 + 5\sigma_5$

5. ŘEŠENÉ PŘÍKLADY NA VYUŽITÍ SYMETRICKÝCH POLYNOMŮ

5.1. Kořeny rovnice

Příklad 5.1.1: Užitím Viètových vztahů (bez Cardanových vzorců) najděte kořeny rovnice

$$x^3 - 8x^2 + 9x + 18 = 0,$$

víte- li, že jeden z kořenů je dvojnásobkem druhého.

Řešení: Kořeny zadané rovnice označme $a_1, a_2 = 2a_1, a_3$. Zadanou rovnici zapišme jako $(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) = 0$. Roznásobením závorek dostaneme

$$x^3 - x^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Můžeme tedy napsat

$$a_1 + a_2 + a_3 = 8,$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 = 9,$$

$$a_1a_2a_3 = -18.$$

Tedy

$$3a_1 + a_3 = 8,$$

$$2a_1^2 + 3a_1a_3 = 9,$$

$$2a_1^2a_3 = -18.$$

Soustavu prvních dvou rovnic řeší [3, -1] a [$\frac{3}{7}$, $\frac{47}{7}$]. Dosazením [3, -1] do rovnice $a_1a_2a_3 = -18$ vypočteme $a_2 = 6$. Dosazením [$\frac{3}{7}$, $\frac{47}{7}$] do rovnice $a_1a_2a_3 = -18$ získáme $a_2 = -\frac{294}{47}$. Po provedení zkoušky zjistíme, že trojice [$\frac{3}{7}, -\frac{294}{47}, \frac{47}{7}$] není řešením soustavy rovnic. Polynom f má tedy kořeny $\boldsymbol{a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = -1}$.

Příklad 5.1.2: Bez přímého výpočtu stanovte kořeny rovnice

$$x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 32x + 64 = 0,$$

víte- li, že tato rovnice obsahuje dva dvojnásobné kořeny.

Řešení: Zapišme rovnici následovně:

$$(x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4) = 0,$$

tedy

$$x^4 - x^3(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + x^2(a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + a_1a_4 + a_2a_4 + a_3a_4) -$$

$$-x(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4) + a_1a_2a_3a_4 = 0.$$

Kořeny rovnice označme následovně: a_1, $a_2 = a_1$, a_3, $a_4 = a_3$. Můžeme sestavit soustavu rovnic

$$4 = 2a_1 + 2a_3\ (= a_1 + a_2 + a_3 + a_4),$$

$$-12 = a_1^2 + 4a_1a_3 + a_3^2\ (= a_1a_2 + a_1a_3 + a_1a_4 + a_2a_3 + a_2a_4 + a_3a_4),$$

$$-32 = 2a_1^2a_3 + 2a_1a_3^2\ (= a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + a_1a_3a_4 + a_2a_3a_4),$$

$$64 = a_1^2a_3^2\ (= a_1a_2a_3a_4).$$

Řešením prvních dvou rovnic zjistíme, že $a_1 = 4, a_3 = -2$. Obě tyto možnosti vyhovují zbývajícím dvěma rovnicím, takže zadaný polynom má kořeny:

$$\boldsymbol{a_1 = a_2 = 4, a_3 = a_4 = -2.}$$

5.2. Určení rovnic na základě vztahů mezi kořeny rovnic

Příklad 5.2.1.: Nalezněte rovnici, jejíž kořeny budou dvojnásobkem kořenů rovnice

$$x^3 - 6x^2 - 45x + 162 = 0.$$

Řešení: Kořeny zadané rovnice si označme jako $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Zadanou rovnici si zapišme ve tvaru $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0$.

Po roznásobení závorek získáme

$$x^3 - x^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Vidíme, že

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 6,$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = -45,$$

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -162.$$

Kořeny nové rovnice lze zapsat jako $\beta_1 = 2\alpha_1$; $\beta_2 = 2\alpha_2$; $\beta_3 = 2\alpha_3$. Potřebujeme získat rovnici

$$x^3 - x^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + x(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3) - \beta_1\beta_2\beta_3 = 0.$$

Součet $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2 \cdot 6 = 12$

Součin součtů $\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \beta_1\beta_3 = 2\alpha_1 \cdot 2\alpha_2 + 2\alpha_2 \cdot 2\alpha_3 + 2\alpha_1 \cdot 2\alpha_3 =$
$= 4(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_3) = 4 \cdot (-45) = -180$

Součin $\beta_1\beta_2\beta_3 = 2\alpha_1 \cdot 2\alpha_2 \cdot 2\alpha_3 = 8\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 8 \cdot (-162) = -1296$

Hledanou rovnicí je tedy rovnice $\boldsymbol{x^3 - 12x^2 - 180x + 1296 = 0}$.

Například v programu Mathematica 7.0 ověříme, že nalezená rovnice má požadované vlastnosti. Kontrolu provedeme následovně:

$$\text{Solve}[x^3 - 6x^2 - 45x + 162 == 0, x]$$

Výstupem by byly kořeny zadané rovnice $x_1 = -6$; $x_2 = 3$; $x_3 = 9$. Kořeny hledané rovnice bychom v programu Mathematica 7.0 vypočítali

$$\text{Solve}[x^3 - 12x^2 - 180x + 1296 == 0, x]$$

Výstupem by byly kořeny $x_1 = -12$; $x_2 = 6$; $x_3 = 18$, tj. dvojnásobky předchozích řešení.

Příklad 5.2.2.: Mějme rovnici $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0$. Určete rovnici, která bude mít kořeny rovnice o 1 menší.

Řešení: Kořeny původní rovnice si označme jako $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Tuto rovnici zapišme ve tvaru

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) = 0.$$

Po roznásobení závorek získáme

$$x^3 - x^2(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + x(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0.$$

Na základě elementárních symetrických polynomů víme, že

$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 24;$$

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 26;$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9.$$

Kořeny nové rovnice můžeme zapsat ve tvaru $\beta_1 = \alpha_1 - 1;\ \beta_2 = \alpha_2 - 1;\ \beta_3 = \alpha_3 - 1.$ Potřebujeme získat rovnici

$$x^3 - x^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + x(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3) - \beta_1\beta_2\beta_3 = 0.$$

Součet $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = (\alpha_1 - 1) + (\alpha_2 - 1) + (\alpha_3 - 1) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - 3 = 9 - 3 =$ $= 6$

Součet součinů $\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1) + (\alpha_1 - 1)(\alpha_3 - 1) +$ $+ (\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) = \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1 - \alpha_2 + 1 + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_3 + 1 + \alpha_2\alpha_3 - \alpha_2 - \alpha_3 +$ $+ 1 = 26 - 18 + 3 = 11$

Součin $\beta_1\beta_2\beta_3 = (\alpha_1 - 1)(\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1) = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_3 + \alpha_1 +$ $+ \alpha_2 + \alpha_3 - 1 = 24 - 26 + 9 - 1 = 6$

Hledanou rovnicí je tedy rovnice $\boldsymbol{x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0}$**.**

Kontrolu výpočtu můžeme provést opět v Mathematice

Solve[$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 == 0, x$] a Solve[$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 == 0, x$]

Výstupem jsou kořeny $x_1 = 2;\ x_2 = 3;\ x_3 = 4$, resp. $x_1 = 1;\ x_2 = 2;\ x_3 = 3.$

Příklad 5.2.3.: Stanovte rovnici, jejíž kořeny budou druhou mocninou kořenů rovnice

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Řešení: Podobně jako v příkladech 5.2.1. a 5.2.2. hledáme rovnici

$$x^3 - x^2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + x(\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3) - \beta_1\beta_2\beta_3 = 0.$$

Tedy

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 9,$$
$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = 26,$$
$$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 24.$$

Kořeny nové rovnice zapíšeme následovně: $\beta_1 = \alpha_1^2, \beta_2 = \alpha_2^2, \beta_3 = \alpha_3^2$. Tím získáme:

Součet $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) =$
$= 81 - 2 \cdot 26 = 29.$

Součin $\beta_1\beta_2\beta_3 = \alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 = (\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^2 = 24^2 = 576.$

Součet součinů $\beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = \alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_1^2\alpha_3^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 =$

$= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 - 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2 =$

$= (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)^2 - 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 26^2 - 2 \cdot 24 \cdot 9 = 244.$

Hledanou rovnicí je rovnice $\boldsymbol{x^3 - 29x^2 + 244x - 576 = 0}$.
Zadaná rovnice má kořeny $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 4$, kořeny nově vzniklé rovnice jsou
$x_1 = 4, x_2 = 9, x_3 = 16.$

5.3. Soustavy rovnic

Nejprve se věnujme soustavám dvou rovnic o dvou neznámých. Předtím, než ale začneme tyto soustavy řešit, je důležité uvést následující větu.

Věta 5.3.1.: Nechť jsou daná čísla σ_1, σ_2. Má – li kvadratická rovnice

$$(\mathrm{R}_1)\quad t^2 - \sigma_1 t + \sigma_2 = 0 \text{ řešení } t_1,\ t_2,$$

má soustava rovnic

(S$_1$) $x + y = \sigma_1;\ xy = \sigma_2$ dvě řešení: $x_1 = t_1,\ y_1 = t_2$ a $x_2 = t_2,\ y_2 = t_1$.

Je – li naopak dvojice čísel x_0 a y_0 řešením soustavy (S$_1$), je tato dvojice i kořeny rovnice (R$_1$). Důkaz věty je uveden např. v [7].

Příklad 5.3.2.: Vyřešte soustavu rovnic:

$$x + y = 4,$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = 4.$$

Řešení: Řešení tohoto druhu příkladu spočívá ve větě 5.3.1. Můžeme napsat, že:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x + y)^2 - 4xy.$$

Soustavu lze tedy zapsat také způsobem:

$$\sigma_1 = 4$$

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 4$$

Řešením této soustavy je $\sigma_1 = 4, \sigma_2 = 3$. Řešení soustavy je na základě věty 5.3.1. tvořeno kořeny rovnice $t^2 - 4t + 3 = 0$. Z rovnice je jasné, že výsledkem jsou dvojice $\{\mathbf{3};\ \mathbf{1}\}$ **a** $\{\mathbf{1};\ \mathbf{3}\}$. Správnost výpočtu můžeme opět ověřit v programu Mathematica 7.0

Solve[{$x + y == 4, x^2 - 2xy + y^2 == 4$},{$x, y$}]

Příklad 5.3.3.: Vyřešte v *R* soustavu rovnic:

$$(x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 455,$$
$$x + y = 5.$$

Řešení: První rovnice jde upravit na: $[(x + y)^2 - 2xy][(x + y)((x + y)^2 - 3xy)] = 455$.

Získáme tedy soustavu:

$$[(x + y)^2 - 2xy][(x + y)((x + y)^2 - 3xy)] = 455,$$
$$x + y = 5,$$

kterou lze přepsat na:

$$(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2) = 455,$$
$$\sigma_1 = 5.$$

Dosazením σ_1 do první rovnice a několika drobnými úpravami získáme rovnici:

$$6\sigma_2^2 - 125\sigma_2 + 534 = 0,$$

jejíž řešením je $\sigma_{2_1} = 6, \sigma_{2_2} = \frac{89}{6}$.

Z věty 5.3.1. plyne, že řešení soustavy je tvořeno kořeny rovnice $t^2 - 5t + 6 = 0$, čímž je dvojice $\{\mathbf{3}; \mathbf{2}\}, \{\mathbf{2}; \mathbf{3}\}$.

Příklad 5.3.4.: Vyřešte soustavu rovnic

$$x^3 + y^3 = 186 - 2xy(x + y),$$
$$x + y = 6.$$

Řešení: Levou stranu první rovnice lze vyjádřit jako

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)[(x + y)^2 - 3xy].$$

Získáme tedy soustavu

$$\sigma_1(\sigma_1^2 - 3\sigma_2) = 186 - 2\sigma_2\sigma_1,$$
$$\sigma_1 = 6.$$

Dosazením σ_1 do první rovnice získáme po úpravách $\sigma_2 = 5$. Sestavíme kvadratickou rovnici $t^2 - 6t + 5 = 0$, jejíž kořeny jsou $t_1 = 5, t_2 = 1$. Řešením soustavy je tedy dvojice $\{\mathbf{5}; \mathbf{1}\}, \{\mathbf{1}; \mathbf{5}\}$.

Příklad 5.3.5.: Vyřešte soustavu rovnic

$$u^2 + v = 7,$$
$$u^4 + v^2 = 25.$$

Řešení: Na první pohled je zřejmé, že výrazy na levých stranách obou rovnic nejsou symetrické. Pokud ale použijeme substituci

$$u^2 = x, \;\; v = y,$$

získáme soustavu rovnic

$$x + y = 7,$$
$$x^2 + y^2 = 25.$$

Tuto soustavu rovnic už řešit umíme. Vyjádřením y z první rovnice, následným dosazením do druhé rovnice a dalšími úpravami bychom došli ke kvadratické rovnici $2x^2 - 14x + 24 = 0$. Vyřešením této rovnice bychom došli k výsledku $x_1 = 3, x_2 = 4$ a následně $y_1 = 4, y_2 = 3$. Vrátíme – li se k původním proměnným, získáme celkem čtyři řešení zadané soustavy, jimiž jsou $\{\sqrt{\mathbf{3}};\ \mathbf{4}\}$, $\{-\sqrt{\mathbf{3}};\ \mathbf{4}\}$, $\{\sqrt{\mathbf{4}};\ \mathbf{3}\}$, $\{-\sqrt{\mathbf{4}}; \mathbf{3}\}$.

Před tím, než začneme řešit tři soustavy se třemi neznámými, je důležité uvést větu analogickou k větě 5.3.1.

Věta 5.3.6.: Nechť jsou daná čísla σ_1, σ_2, a σ_3. Má- li kubická rovnice

$$(R_2)\ t^3 - \sigma_1 t^2 + \sigma_2 t - \sigma_3 = 0 \text{ řešení } t_1, t_2 \text{ a } t_3,$$

má soustava rovnic (S_2)

$$x + y + z = \sigma_1;$$
$$xy + yz + zx = \sigma_2;$$
$$xyz = \sigma_3$$

šest řešení: $x = t_1, y = t_2, z = t_3$; $x = t_1,\ y = t_3,\ z = t_2$; $x = t_2, y = t_1,\ z = t_3$; $x = t_2,\ y = t_3,\ z = t_1$; $x = t_3,\ y = t_1,\ z = t_2$; $x = t_3,\ y = t_2,\ z = t_1$.

Je- li ale naopak trojice čísel x_0, y_0 a z_0 řešením soustavy (S_2), je tato trojice i kořeny rovnice (R_2).

Příklad 5.3.7.: Řešme soustavu tří rovnic o třech neznámých

$$x + y + z = a,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = b,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = c,$$

kde a, b, c jsou reálná čísla.

Řešení: Zadanou soustavu můžeme zapsat také jako $s_1 = a$, $s_2 = b$, $s_3 = c$**.** Symetrické polynomy s_1, s_2 a s_3 můžeme vyjádřit pomocí elementárních symetrických polynomů σ_1, σ_2, σ_3, čímž dostaneme soustavu

$$\sigma_1 = a,$$
$$\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = b,$$
$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = c.$$

Řešením této soustavy je: $\sigma_1 = a$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}\,(a^2 - b), \sigma_3 = \frac{1}{3}\,(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b)$. Dosadíme- li za σ_1, σ_2 a σ_3 zase jejich vyjádření pomocí x, y, z, dostaneme soustavu ve tvaru (S_2), jež je ekvivalentní soustavě zadané. Dostaneme tedy:

$$x + y + z = a,$$
$$xy + yz + zx = \frac{1}{2}(a^2 - b),$$
$$xyz = \frac{1}{3}(c - a^3) + \frac{1}{2}a(a^2 - b).$$

Na základě předchozí věty můžeme říct, že řešení zadané soustavy získáme určením kořenů kubické rovnice $t^3 - at^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b)t - \frac{1}{3}(c - a^3) - \frac{1}{2}a(a^2 - b) = 0$.

Příklad 5.3.8.: V předcházejícím příkladě zvolme a = 0, b = 14, c = -18.

Řešení: Kubická rovnice má v tomto případě tvar $t^3 - 7t - 6 = 0$.

Protože $t^3 - 7t - 6 = (t - 3)(t + 1)(t + 2)$, je zřejmé, že kořeny rovnice budou $t_1 = 3, t_2 = -1, t_3 = -2$. Máme tedy soustavu rovnic:

$$x + y + z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 14,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 18,$$

která má tato řešení: **{3; -1; -2}, {3; -2; -1}, {-1; -2; 3}, {-1; 3; -2 }, {-2; -1; 3}, {-2; 3; -1}**.

Příklad 5.3.9.: Řešte soustavu $u + 2v + 4w = 2,$

$$u^2 + 4v^2 + 16w^2 = 3,$$

$$u^3 + 8v^3 + 64w^3 = 5.$$

Řešení: Při řešení této soustavy využijeme substituci: $x = u, y = 2v, z = 4w$, čímž získáme soustavu

$$x + y + z = 2,$$

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 3,$$

$$x^3 + y^3 + z^3 = 5.$$

Využitím kubické rovnice z příkladu 5.3.7. získáme trojici $\{0;\ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}};\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Na základě substituce pak získáme celkem šest řešení zadané soustavy

$\mathbf{\{0;\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\},\ \{1 + \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\},\ \{0;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}};\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\},\ \{1 - \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0;\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\},}$
$\mathbf{\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}};\ 0\},\ \{1 + \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}};\ 0\}}$.

5.4. Řešení rovnic

Příklad 5.4.1: Vyřešte v oboru reálných čísel rovnici $(z + 1)^4 + (z - 1)^4 = 16.$

Řešení: Při umocnění závorek bychom dostali rovnici čtvrtého stupně, my však využijeme symetrie této rovnice. Zavedeme – li substituci

$$z + 1 = x, \qquad -(z - 1) = y,$$

dostaneme $x + y = 2.$

Zadanou rovnici poté můžeme napsat ve tvaru:

$$x^4 + (-y)^4 = 16,$$

Tedy

$$x + y = 2$$
$$x^4 + y^4 = 16.$$

Tímto jsme zadanou rovnici převedli na příklad typu soustavy dvou rovnic se dvěma neznámými (viz. Příklad 5.3.5.). Řešením této soustavy je dvojice čísel $x_1 = 0, x_2 = 2$. Zpětným dosazením do substituce získáme dvě řešení zadané rovnice

$$\boldsymbol{z_1 = 1, z_2 = -1}.$$

Příklad 5.4.2.: Vyřešte v oboru reálných čísel $\sqrt[5]{1026 - z} - \sqrt[5]{3 - z} = 3$.

Řešení: Také při řešení těchto příkladů využijeme substituci. Položíme- li

$$x = \sqrt[5]{1026 - z}\,, y = -\sqrt[5]{3 - z}\,,$$

dostaneme soustavu rovnic:

$$x + y = 3$$
$$x^5 + y^5 = 1023.$$

Opět jsme získali soustavu rovnic podobnou soustavě z příkladu 5.3.5.. Řešením této soustavy je dvojice {-1; 4}, {4; -1}. Zpětným dosazením do substituce, kde $z = 1026 - x^5$ získáme dvě řešení zadané rovnice $\boldsymbol{z_1 = 2, z_2 = 1027}$.

ZÁVĚR

Před psaním této bakalářské práce jsem neměl ponětí, co to symetrické polynomy jsou nebo k čemu tyto polynomy slouží. Postupným studiem doporučené literatury jsem ale objevoval krásu těchto polynomů. Myslím si, že je škoda, že symetrické polynomy už nejsou součástí studia algebry na vysoké škole.

V úvodu práce jsme nejprve vymezili pojmy, které je nutné znát při práci s polynomy. Trochu více jsme se věnovali pojmu permutace, neboť symetrické polynomy jsou s permutací velice spjaté. Po definování symetrického polynomu a po vymezení jeho základních vlastností jsme symetrické polynomy rozdělili na jednoduché a elementární. S oběma typy těchto speciálních symetrických polynomů jsme poté pracovali. Také jsme vyslovili asi nejdůležitější větu týkající se symetrických polynomů – jedná se o tzv. „hlavní větu o symetrických polynomech“. Tato věta je stejně jako většina vět této práce doplněna o důkaz, aby čtenář neměl pochybnosti o těchto tvrzeních. Se symetrickými polynomy jsou spojovány některé matematické vztahy, kterými jsou Viètovy vztahy a Newtonovy vzorce. Těmto vztahům jsme se věnovali ve třetí kapitole, resp. v závěru čtvrté kapitoly. Pátá kapitola je věnovaná řadě řešených příkladů, na kterých pomocí symetrických polynomů podrobně vysvětlujeme řešení soustav rovnic, sestavování rovnic na základě předem daných údajů a jiné příklady.

Všechny kapitoly v práci jsou doplněny o další příklady, pomocí kterých vysvětlujeme jednodušší i složitější definice či věty.

Tato práce nemá čtenáři sloužit jako hlavní studijní text, nicméně by měla objasnit přinejmenším základní problematiku symetrických polynomů. Budu rád, když tomu tak opravdu bude.

RESUMÉ

In the first chapter we first told about the history of symmetric polynomials. In the second chapter we focused on basic concepts, which are necessary to the operation with polynomials. We dealt with the concept of permutation. The third chapter is devoted to symmetric polynomials. After defining of symmetric polynomials we focused on the simple symmetric polynomials and the elementary polynomials and then we showed some relationships and properties that are typical for symmetric polynomials. After defining the main theorem on symmetric polynomials, we are in the fourth chapter dealt calculations of symmetric polynomials, through which we got to Newton´s formulas. The fifth chapter offers a number of solved examples, to which we have shown how it is possible symmetric polynomials used in practise.

The work is complemented by evidence of the majority of claims and examples which help explaining easier but also more complicated sentences or definition.

SEZNAM LITERATURY

Knižní zdroje:

[1] BICAN, Ladislav. Permutace na množině. In: *Lineární algebra a geometrie*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2000. 197 s. ISBN 80-200-0843-8.

[2] BICAN, Ladislav. Symetrické polynomy. In: *Algebra (pro učitelské studium)*. Vyd. 1. Praha: Academia, 2001. ISBN 80-200-0860-8.

[3] BLAŽEK, Jaroslav, KOMAN, Milan, VOJTÁŠKOVÁ, Blanka. Symetrické polynomy. In: *Algebra a teoretická aritmetika II. díl*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1985. 260 s. Učebnice pro vys. školy.

[4] COX, David A. a O'SHEA, Donal. *Ideals, varieties, and algorithms*. 2nd ed. New York: Springer, 1997, xiii, 536 s. Undergraduate texts in mathematics. ISBN 0-387-94680-2.

[5] DRÁBEK, J. a HORA, J. *Algebra. Polynomy a rovnice*. 1. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2001. 125 s. ISBN 80-7082-787-4.

[6] KOŘÍNEK, Vladimír. *Základy algebry*. 1. vyd. Praha: ČSAV, 1953.

[7] KUFNER, Alois. *Symetrické funkce*. 1. vyd. Praha: Mladá fronta, 1982. 116 s. Škola mladých matematiků, sv.52.

Internetové zdroje:

[8] Ivanov, O. V., *Iz istorii tĕorii simmetričeskych funkcij i jejo svjazej s drugimi oblasťami matematiky* [online]. Disertační práce. Moskva, 1992 [cit.19. 3. 2014] Dostupné z http://cheloveknauka.com/iz-istorii-teorii-simmetricheskih-funktsiy-i-ee-svyazey-s-drugimi-oblastyami-matematiki#ixzz2vRTVPF7F>

[9] O'CONNOR, J. J. a E. F. ROBERTSON. Francois Viete. In: *The MacTutor History of Mathematics archive* [online]. 2000 [cit. 11. 3. 2014]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Viete.html

[10] Symmetric Polynomial. *Wikipedia* [online]. Poslední změna 11. 2. 2014 21:18. [cit. 25. 2. 2014]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/Symmetric_polynomial

Seznam tabulek

Tabulka č. 1: Vyjádření symetrických polynomů v elementárních symetrických polynomech.. 26

Tabulka č.2: Součty k-tých mocnin pro $k = 1,2,\dots,5$ vyjádřené pomocí elementárních symetrických polynomů 43