ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ENDOMORFISMY VEKTOROVÝCH PROSTORŮ

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Jana Konopová, Dis.

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2014

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 8. dubna 2014

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucí mé bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady a čas, který mi věnovala.

Zde se nachází originální zadání bakalářské práce.

Obsah

Úvod

Jak již z názvu vyplývá, tato bakalářská práce se zaměřuje na konkrétní typ lineárního zobrazení, a sice endomorfismus. Jde o zobrazení vektorového prostoru V do téhož vektorového prostoru V.

Endomorfismy (lineární operátory) slouží obecně k popisu změny. V lineární algebře se bez endomorfismů neobjede výklad o podobnosti matic a Jordanově kanonickém tvaru. Lineární operátory vektorových prostorů nekonečné dimenze jsou předmětem studia funkcionální analýzy. Ta ve svých počátcích studovala vektorové prostory funkcí a lineární operátory mezi takovými prostory, což bylo užitečné pro řešení diferenciálních a integrálních rovnic.

S popisem transformací (tj. endomorfismů) pomocí rovnic se setkáváme už v Eulerově práci *Problema algebraicum ab affectiones prorsus singulares memorabile* z roku 1771. Z dnešního pohledu se v ní zabýval ortogonálními maticemi, kterými lze popsat transformace kartézských souřadnic. Složení lineárních substitucí kvadratických forem uměl maticově vyjádřit C. F. Gauss v práci *Disquisitiones arithmeticae* z roku 1801. Rovněž při studiu forem, tentokráte kubických, dospěl F. G. Eisenstein k popisu lineárních substitucí pomocí čtvercových schémat tvořených koeficienty těchto substitucí. Maticový popis lineárních transformací se přibližuje dnešní podobě v pracích A. Cayleyho a J. J. Sylvestera.

Ve své práci se snažím sepsat ucelený text, který by obsahoval základní informace o endomorfismech, doplněný o řadu ilustrativních příkladů.

Pro větší přehlednost je práce rozdělena do několika kapitol. V jednotlivých kapitolách je postupně definován pojem endomorfismu, jeho jádra a obrazu. Dále jsou zde uvedeny některé ze základních příkladů endomorfismu, vlastnosti toho zobrazení a jeho typy. Taktéž jsem se zabývala problematikou endomorfismů na lineárních prostorech se skalárním součinem. Protože každé lineární zobrazení lze reprezentovat i maticově, jedna z kapitol je věnována také tomuto problému. V závěru jsem se zaměřila na aplikaci endomorfismů, konkrétně na jejich využití v geometrii. Soustředila jsem se na shodná zobrazení, tj. identitu, posunutí, otočení, středovou souměrnost a osovou souměrnost, což je látka probíraná již na základní škole, a tato práce mi umožnila podívat se danou problematiku z jiného úhlu pohledu.

V průběhu celé práce jsem se snažila definice a věty doplnit o řadu vlastních příkladů. Ty by měly čtenáři pomoci v pochopení předložených tvrzení. U většiny příkladů jsem také uváděla návod a vysvětlení, jak postupovat při výpočtu, opět z důvodu snadnějšího pochopení dané problematiky. Některé z příkladů jsou si typově podobné, liší se však ve zvoleném vektorovém prostoru. Volila jsme tak záměrně, aby čtenář měl možnost srovnání při počítání v různých prostorech.

Veškeré definice a věty jsem převzala doslovně, nebo s menšími úpravami tak, aby odpovídaly pojmu endomorfismu, ze zdrojů, které jsou uvedeny v závěru práce v seznamu použité literatury.

Pojem endomorfismu

Homomorfismus (též označovaný jako lineární zobrazení) prostoru *V* do téhož prostoru *V* se nazývá endomorfismus prostoru *V* nebo též lineární operátor[1] na prostoru *V*, resp. lineární transformace prostoru *V*. Lineární operátor tedy zobrazuje prvky jednoho prostoru do téhož prostoru a zachovává přitom vektorové sčítání a násobení skalárem dané na těchto vektorových prostorech. Množina všech takových transformací je také vektorovým prostorem.

1.1 Definice. Nechť *V* je vektorový prostor nad tělesem *T*. Zobrazení f prostoru *V* do prostoru *V* se nazývá endomorfismus, jestliže platí:

- $\forall u, v \in V \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$,
- $\forall u \in V, \forall a \in T \qquad f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$.

Množinu všech endomorfismů prostoru *V* značíme End *V*.

Příklad 1. Rozhodněte, zda zobrazení *f* prostoru R^3, které je dáno předpisem

$$f(x, y, z) = (x - y + z, x - 2y, x + 3y - 2z),$$

je endomorfismus.

Aby zobrazení mohlo být endomorfismem, musí být splněny podmínky, které jsou stanovené v předcházející definici. Především musí jít o zobrazení v rámci jednoho prostoru, v tomto případě R^3. Ze zadání vidíme, že trojici reálných čísel je přiřazena trojice reálných čísel, jde tedy o zobrazení z R^3 do R^3. Pro ověření dalších podmínek si zvolíme dva vektory tak, aby zastupovaly libovolné vektory prostoru *V* - například takto:

$$u = (u_1, u_2, u_3),$$
$$v = (v_1, v_2, v_3).$$

Nejprve ověříme první podmínku.

$$f(u + v) = f(u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) =$$
$$= (u_1 + v_1 - (u_2 + v_2) + u_3 + v_3, u_1 + v_1 - 2(u_2 + v_2),$$
$$u_1 + v_1 + 3(u_2 + v_2) - 2(u_3 + v_3)) =$$
$$= (u_1 - u_2 + u_3 + v_1 - v_2 + v_3, u_1 - 2u_2 + v_1 - 2v_2,$$

[1] Lineární operátor je někdy chápán ve významu obecnějšího lineárního zobrazení, které převádí prvky z jednoho lineárního prostoru *U* do druhého prostoru *V*.

$$u_1 + 3u_2 - 2u_3 + v_1 + 3v_2 - 2v_3)$$

$$f(u) = (u_1 - u_2 + u_3, u_1 - 2u_2, u_1 + 3u_2 - 2u_3)$$

$$f(v) = (v_1 - v_2 + v_3, v_1 - 2v_2, v_1 + 3v_2 - 2v_3)$$

$$f(u) + f(v) = (u_1 - u_2 + u_3 + v_1 - v_2 + v_3,$$

$$u_1 - 2u_2 + v_1 - 2v_2, u_1 + 3u_2 - 2u_3 + v_1 + 3v_2 - 2v_3)$$

První podmínka je tedy splněna. Nyní ověříme druhou podmínku.

$$f(a \cdot u) = f(a \cdot u_1, a \cdot u_2, a \cdot u_3) =$$

$$= (a \cdot u_1 - a \cdot u_2 + a \cdot u_3, a \cdot u_1 - 2a \cdot u_2, a \cdot u_1 + 3a \cdot u_2 - 2a \cdot u_3)$$

$$a \cdot f(u) = a(u_1 - u_2 + u_3, u_1 - 2u_2, u_1 + 3u_2 - 2u_3)$$

Ověřili jsme, že je splněna i druhá podmínka a můžeme tedy říci, že zobrazení f je endomorfismem.

Příklad 2. Endomorfismus *f* prostoru $(Z_5)^3$ je dán předpisem

$$f(x, y, z) = (x + y, 2y + z, x + 2y + z).$$

Najděte obraz vektoru $u = (2,3,1)$.

Obraz vektoru (2,3,1) získáme dosazením 2, respektive 3, respektive 1, za *x*, resp. *y*, resp. *z*, v předchozím předpisu. Platí tedy:

$$f(2,3,1) = (2 + 3, 2 \cdot 3 + 1, 2 + 2 \cdot 3 + 1)$$

$$f(2,3,1) = (0, 2, 4)$$

$$v = (0, 2, 4)$$

Vektor *u* se zobrazí na vektor $v = (0,2,4)$.

Endomorfismus (zobrazení $f: V \to V$ vektorového prostoru *V* do téhož prostoru *V*) tedy „zachovává“ operace sčítání a násobení skalárem. Sečteme-li libovolné dva prvky z *V* a výsledek zobrazíme v endomorfismu *f*, vyjde tentýž výsledek, jako kdybychom nejprve tyto prvky převedli prostřednictvím zobrazení (zobrazili v endomorfismu *f*) a poté výsledky sečetli. Obdobně je tomu i u násobení skalárem. Jestliže libovolný vektor $v \in V$ vynásobíme skalárem $a \in T$ a získaný výsledek zobrazíme pomocí *f*, získáme tentýž výsledek, jako když vektor v nejprve zobrazíme pomocí f a získaný obraz vynásobíme skalárem.

Příklad 3. Máme daný endomorfismus *f* prostoru R^3 předpisem

$$f(x, y, z) = (y + z, x + 3y - z, 2x - z).$$

Dále máme dané vektory $u = (2, 3, 5)$ a $v = (4, 1, 3)$ a číslo $a = 4$. Na daných vektorech ukažte, že obraz součtu vektorů v endomorfismu f je roven součtu jejich obrazů a obraz násobku vektoru *u* je roven násobku obrazu vektoru v endomorfismu *f*.

Postupně počítáme.

$$f(u + v) = f(2 + 4, 3 + 1, 5 + 3) = f(6, 4, 8) =$$

$$= (4 + 8, 6 + 3 \cdot 4 - 8, 2 \cdot 6 - 8) = (12, 10, 4)$$

$$f(u) = (3 + 5, 2 + 3 \cdot 3 - 5, 2 \cdot 2 - 5) = (8, 6, -1)$$

$$f(v) = (1 + 3, 4 + 3 \cdot 1 - 3, 2 \cdot 4 - 3) = (4, 4, 5)$$

$$f(u) + f(v) = (8, 6, -1) + (4, 4, 5) = (12, 10, 4)$$

Opravdu tedy platí

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Nyní dokážeme výše uvedené tvrzení o obrazu násobku.

$$f(a \cdot u) = f\big(4(2, 3, 5)\big) = f(8, 12, 20) =$$

$$= (12 + 20, 8 + 3 \cdot 12 - 20, 2 \cdot 8 - 20) = (32, 24, -4)$$

$$a \cdot f(u) = 4f(2, 3, 5) = 4(3 + 5, 2 + 3 \cdot 3 - 5, 2 \cdot 2 - 5) = 4(8, 6, -1) =$$

$$= (32, 24, -4)$$

Tím jsme potvrdili, že i $f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$ platí pro zadané hodnoty *a* a *u*.

V následujícím příkladu budeme mít obdobné zadání, jako v příkladu č. 3, jen si počítání trochu ztížíme a budeme pracovat s prostorem polynomů.

Příklad 4. Máme daný endomorfismus f prostoru $Q_2[x] = \{ax^2 + bx + c; a, b, c \in Q\}$ tedy endomorfismus na prostoru polynomů stupně nejvýše dva, které mají koeficienty v tělese racionálních čísel Q. Zobrazení je dáno předpisem

$$f(ax^2 + bx + c) = (a + c)x^2 + (2a + b - 2c)x + a - b + 2c.$$

Dále máme dané vektory

$$u = 3x^2 - x + 4,$$

$$v = 2x^2 + 2x + 1$$

a číslo $a = 4$.

Na daných vektorech ukažte, že obraz součtu vektorů je roven součtu jejich obrazů a obraz násobku vektoru je roven násobku obrazu vektoru.

$$f(u+v) = f(3x^2 - x + 4 + 2x^2 + 2x + 1) = f(5x^2 + x + 5) =$$
$$= (5+5)x^2 + (2 \cdot 5 + 1 - 2 \cdot 5)x + 5 - 1 + 2 \cdot 5 = 10x^2 + x + 14$$
$$f(u) = f(3x^2 - x + 4) = (3+4)x^2 + (2 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot 4)x + 3 + 1 + 2 \cdot 4 =$$
$$= 7x^2 - 3x + 12$$
$$f(v) = f(2x^2 + 2x + 1) = (2+1)x^2 + (2 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 1)x + 2 - 2 + 2 \cdot 1 =$$
$$= 3x^2 + 4x + 2$$
$$f(u) + f(v) = 7x^2 - 3x + 12 + 3x^2 + 4x + 2 = 10x^2 + x + 14$$

Jak jsme se přesvědčili, opravdu platí $f(u+v) = f(u) + f(v)$.

Nyní se přesvědčíme, zda platí také tvrzení o obrazu násobku. Ověření provedeme pouze pro vektor u a číslo a.

$$f(a \cdot u) = f\big(4 \cdot (3x^2 - x + 4)\big) = f(12x^2 - 4x + 16) =$$
$$= (12+16)x^2 + (2 \cdot 12 - 4 - 2 \cdot 16)x + 12 + 4 + 2 \cdot 16 =$$
$$= 28x^2 - 12x + 48$$
$$a \cdot f(u) = 4 \cdot f(3x^2 - x + 4) =$$
$$= 4 \cdot ((3+4)x^2 + (2 \cdot 3 - 1 - 2 \cdot 4)x + 3 + 1 + 2 \cdot 4) =$$
$$= 4 \cdot (7x^2 - 3x + 12) = 28x^2 - 12x + 48$$

Opět se potvrdila rovnost $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$.

Příklad 5. Rozhodněte, zda je homomorfismus daný předpisem

$$f(x, y, z) = (2x + z, 3y + z)$$

endomorfismus.

Již ze zadání je patrné, že nejde o endomorfismus, protože ten zobrazuje vektorový prostor *V* do téhož vektorového prostoru *V*. Zde jde o zobrazení z prostoru R^3 do prostoru R^2. Není tedy nutné dále počítat.

Příklad 6. Zobrazení $f: R^2 \to R^2$ je dáno předpisem

$$f(x, y) = (2x + 1, x + y).$$

Rozhodněte, zda-li se jedná o endomorfismus.

Podle definice je endomorfismus zobrazení vektorového prostoru V do téhož vektorového prostoru V, což v tomto případě platí, mohlo by tedy jít o endomorfismus. Dále ale také musí podle definice platit:

$$\forall u, v \in V \qquad f(u+v) = f(u) + f(v)$$

$$\forall u \in V, \forall a \in T \quad f(a \cdot u) = a \cdot f(u)$$

Máme dvě možnosti, jak můžeme postupovat – buďto ukážeme, že libovolné dva vektory splňují uvedené dvě rovnosti (obdobně, jako v příkladu číslo 1), nebo, máme-li podezření, že nepůjde o endomorfismus, zvolíme libovolnou dvojici vektorů z R^2 a ukážeme, že alespoň jedna z rovností neplatí.

Zvolíme například vektory $u = (2,3)$ a $v = (1,1)$.

$$f(u+v) = f(2+1, 3+1) = f(3,4) = (2 \cdot 3 + 1, 3 + 4) = (7,7)$$

$$f(u) = f(2,3) = (2 \cdot 2 + 1, 2 + 3) = (5,5)$$

$$f(v) = f(1,1) = (2 \cdot 1 + 1, 1 + 1) = (3,2)$$

$$f(u) + f(v) = (5,5) + (3,2) = (8,7)$$

Jak čtenář může vidět, v tomto případě pro zde zvolené vektory u a v platí:

$$f(u+v) \neq f(u) + f(v).$$

Protože z definice je patrné, že podmínky musí platit pro libovolnou dvojici vektorů, zobrazení tedy není homomorfismus. Jestliže zobrazení není homomorfismem, nemůže být ani endomorfismem. Ověřovat druhou podmínku již není nutné.

Pro větší názornost i zde uvedeme příklad obdobného zadání, jako je příklad 6., tentokrát ale na prostoru polynomů stupně nejvýše jedna.

Příklad 7. Zobrazení $f: R_1[x] \to R_1[x]$ je dáno předpisem

$$f(ax+b) = (2a+2)x + a + b.$$

Ověřte, zda se jedná o endomorfismus.

Postupovat budeme stejně jako v předchozím příkladu. Zvolíme libovolné dva vektory a ověříme, zda platí podmínky stanovené v definici 1.1. V opačném případě je jasné, že nejde o endomorfismus.

Vektory zvolíme např.

$$u = 2x + 3 \text{ a } v = x + 1.$$

$$f(u+v) = f(2x + 3 + x + 1) = f(3x + 4) =$$

$$= (2 \cdot 3 + 2)x + 3 + 4 = 8x + 7$$

$$f(u) = f(2x+3) = (2 \cdot 2 + 2)x + 2 + 3 = 6x + 5$$
$$f(v) = f(x+1) = (2 \cdot 1 + 2)x + 1 + 1 = 4x + 2$$
$$f(u) + f(v) = 6x + 5 + 4x + 2 = 10x + 7$$

Jak vidíme, pro námi zvolené vektory neplatí podmínka z definice endomorfismu, protože $f(u+v) \neq f(u) + f(v)$. Nejde tedy o endomorfismus.

1.2 Definice. Jestliže *f* je endomorfismus prostoru *V* do prostoru *V*, potom se množina
Ker $f = \{v \in V; f(v) = o\}$ nazývá jádro endomorfismu *f* ,
Im $f = \{w \in V; \exists v \in V\ f(v) = w\}$ nazývá obraz endomorfismu *f*.

Jádrem endomorfismu *f* tedy rozumíme množinu všech vektorů prostoru *V*, které se zobrazí na nulový vektor prostoru *V*. Na základě této definice počítáme jádro endomorfismu i v praktických úlohách. Obrazem endomorfismu f rozumíme množinu všech vektorů prostoru *V*, ke kterým existuje vzor v prostoru *V*. Výpočet obrazu se opírá o vlastnost homomorfismů, podle níž je obraz endomorfismu generován obrazy vektorů, které generují prostor *V*, tj. pro obraz endomorfismu platí

$$\mathrm{Im} f = [f(v_1), f(v_2), \dots, f(v_n)],$$

kde $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ je množinou generátorů *V*. Další vlastnosti endomorfismů uvedeme později ve třetí kapitole.

Příklad 8. Pro endomorfismus $f: (Z_5)^2 \to (Z_5)^2$ platí

$$f(x,y) = (2x + 3y, 4x + y).$$

Určete jeho jádro a obraz.

Nejprve vypočítáme jádro daného endomorfismu. Vektory (x,y), které tvoří jádro, se podle definice musí zobrazit na nulový vektor, platí tedy

$$f(x,y) = (0,0) \qquad \to \qquad (2x + 3y, 4x + y) = (0,0)$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých nad tělesem Z_5.

$$2x + 3y = 0$$
$$4x + y = 0$$

Z druhé rovnice vyjádříme *y* a dosadíme do první rovnice a vypočítáme *x*. Následně pak dopočítáme hodnotu *y*.

$$4x + y = 0 \qquad \to \qquad y = x$$
$$2x + 3y = 0 \qquad \to \qquad 2x + 3x = 0$$

$$0 \cdot x = 0$$

Soustavě vyhovuje libovolné x a $y = x$. Můžeme zvolit $x = t$, kde t je parametr, za který můžeme dosadit libovolné číslo ze Z_5. Platí tedy:

$$\text{Ker } f = \{(t,t), t \in (Z_5)^2\} = [(1,1)].$$

Nyní vypočítáme obraz endomorfismu Im f.

Nejprve zvolíme množinu vektorů, které generují vektorový prostor $(Z_5)^2$. Nejjednodušší je zvolit kanonickou bázi[2], pak je

$$(Z_5)^2 = [(1,0),(0,1)] \text{ a}$$

$$\text{Im } f = [f(1,0), f(0,1)] = [(2,4),(3,1)]$$

Protože v $(Z_5)^2$ platí, že $4(2,4) = (3,1)$, platí $[(2,4),(3,1)] = [(3,1)]$, a tedy

$$\text{Im } f = [(3,1)]$$

Dosud jsme pracovali pouze s endomorfismy, které byly zadány obrazem libovolného vektoru. (Např. v úloze 3 byl zadán vektor $(y+z, x+3y-z, 2x-z)$ jako obraz libovolného vektoru (x,y,z) prostoru R^3 v endomorfismu f, což bylo stručně vyjádřeno předpisem $f(x,y,z) = (y+z, x+3y-z, 2x-z)$.)

Připomeňme nyní jeden z dalších způsobů zadání endomorfismů – pomocí obrazů bázových vektorů.

1.3 Věta. Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T. Každý endomorfismus prostoru V do prostoru V je určen obrazy vektorů libovolně zvolené báze[3] prostoru V.

Příklad 9. Pro endomorfismus $f: R^3 \to R^3$ platí:

$$f(1,1,1) = (0,0,1), \qquad f(4,2,1) = (2,0,1), \qquad f(6,5,0) = (1,0,0)$$

Určete jeho jádro a obraz.

Snadno bychom zjistili, že vektory $\{(1,1,1),(4,2,1),(6,5,0)\}$ tvoří bázi prostoru R^3 a endomorfismus je zadán obrazy bázových vektorů. Pokud by tato množina nebyla bází,

[2] Buď $v_i \in T^n$ vektor mající na i-tém místě prvek 1 a všude jinde 0. Množina $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, tj. množina vektorů $v_1 = (1,0,\dots,0)$, $v_2 = (0,1,\dots,0)$, $\cdots$, $v_n = (0,0,\dots,1)$, je lineárně nezávislá množina generátorů aritmetického vektorového prostoru T^n, a tedy báze tohoto prostoru, nazýváme ji kanonickou bází. Kanonická báze prostoru polynomů stupně nejvýše *n* je $\{1, x, x^2, \cdots, x^n\}$.

[3] Říkáme, že podmnožina $M = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ vektorového prostoru *V* nebo že vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi tohoto prostoru, jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé a zároveň generují *V*. Podmnožina *M* generuje *V* právě když každý vektor z *V* je lineární kombinací vektorů z množiny *M*.

zobrazením f by endomorfismus nebyl určen. Převeďme před výpočtem jádra a obrazu tento způsob zadání endomorfismu na obvyklejší předpis pro obraz $f(x,y,z)$ libovolného vektoru $u=(x,y,z)$ z R^3. Protože platí

$$u=(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1),$$

platí tedy i

$$f(x,y,z)=f\big(x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)\big)=$$
$$=xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1).$$

Stačí nám najít obrazy vektorů kanonické báze prostoru R^3 v endomorfismu f.

Při výpočtu budeme postupovat následovně. Zadané vektory a jejich obrazy zapíšeme do matic – první řádek můžeme chápat tak, že vektoru $(1,1,1)$ odpovídá v endomorfismu f vektor $(0,0,1)$, podobně v druhém řádku vektoru $(4,2,1)$ odpovídá vektor $(2,0,1)$, analogicky sestavíme i třetí řádek. Postupně, pomocí elementárních úprav (u obou matic provedeme vždy stejnou úpravu), převedeme levou stranu na jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\4&2&1&2&0&1\\6&5&0&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&-2&-3&2&0&-3\\0&-1&-6&1&0&-6\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&-1&-6&1&0&-6\\0&-2&-3&2&0&-3\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&1&6&-1&0&6\\0&0&9&0&0&9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&0&0&1\\0&1&6&-1&0&6\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\sim$$
$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-1&0&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)$$

Z řádků matice lze vyčíst, že

$$f(1,0,0)=(1,0,0),$$
$$f(0,1,0)=(-1,0,0),$$
$$f(0,0,1)=(0,0,1),$$

a proto

$$f(x,y,z)=xf(1,0,0)+yf(0,1,0)+zf(0,0,1)=$$
$$=x(1,0,0)+y(-1,0,0)+z(0,0,1)=(x-y,0,z).$$

Jádro endomorfismu tvoří všechny vektory $(x,y,z)\in R^3$, pro které platí $f(x,y,z)=0$, tj.

$$(x-y,0,z)=(0,0,0).$$

Odtud vyplyne řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých.

$$x-y=0\ \rightarrow x=y$$
$$0\cdot y=0\ \rightarrow y=t$$

$$z = 0$$

Nalezená trojice přestavuje jádro daného endomorfismu, tedy

$$\text{Ker } f = \{(t, t, 0), t \in R\} = [(1,1,0)].$$

Nyní určíme Im *f*. Im f je dán obrazy generátorů prostoru R^3. Vzory vektorů $(0,0,1), (2,0,1), (1,0,0)$ tvoří dokonce bázi prostoru R^3, proto

$$\text{Im } f = [f(1,1,1), f(4,2,1), f(6,5,0)] = [(0,0,1), (2,0,1), (1,0,0)].$$

Úpravu lineárního obalu provedeme „maticově". Vektory zapíšeme do matice a elementárními úpravami převedeme na schodovitý tvar. Zjistíme tak, jestli se nějaký vektor nezmění na nulový.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jeden z vektorů se opravdu změnil na nulový, zbylé dva vektory jsou lineárně nezávislé, a proto

$$\text{Im } f = [(1,0,0), (0,0,1)].$$

Příklad 10. Pro endomorfismus $f: Q^3 \to Q^3$ platí:

$$f(1,1,0) = (2,0,1), \;\; f(-2,-1,1) = (0,1,1), \;\; f(-1,-1,1) = (1,1,0)$$

Určete jádro a obraz endomorfismu.

Postupujeme stejně, jako v příkladu 9.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$f(1,0,0) = (1,0,-1)$$

$$f(0,1,0) = (1,0,2)$$

$$f(0,0,1) = (3,1,1)$$

Můžeme proto psát:

$$f(x, y, z) = (x + y + 3z, z, -x + 2y + z)$$

Pro výpočet jádra hledejme x, y, z tak, aby platilo:

$$(x + y + 3z, z, -x + 2y + z) = (0,0,0)$$

$$x + y + 3z = 0 \to x + y = 0 \to x = -y$$

$$z = 0$$

$$-x + 2y + z = 0 \rightarrow -x + 2y = 0 \rightarrow 3y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$\mathrm{Ker} f = (0,0,0).$$

Pro výpočet obrazu endomorfismu opět zvolíme kanonickou bázi vektorového prostoru Q^3.

$$\mathrm{Im} f = [f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)] = [(1,0,-1), (1,0,2), (3,1,1)]$$

Nyní se přesvědčíme, jestli některý z vektorů není lineární kombinací jiného vektoru. Vektory zapíšeme do matice 3×3 a pomocí elementárních úprav převedeme na schodovitý tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Úpravami se žádný z vektorů nezměnil na nulový, a proto můžeme říct, že vektory jsou lineárně nezávislé a tvoří obraz endomorfismu. Protože libovolná množina lineárně nezávislých generátorů tvoří bázi prostoru, můžeme říci, že vektory $(1,0,-1)$, $(1,0,2)$, $(3,1,1)$ tvoří bázi prostoru Q^3 i Im f, a tedy Im $f = Q^3$.

Příklady endomorfismů

Dosud jsme uváděli příklady endomorfismů, jimiž je nějakému vektoru prostoru T^2, respektive T^3, přiřazen vektor téhož prostoru. Setkávali jsme se tedy s případy, kdy *V* je tvořen dvojicemi, resp. trojicemi prvků tělesa *T*. Také jsme pracovali s vektorovými prostory polynomů stupně nejvýše n.

V této kapitole uvedeme také další příklady endomorfismů jiných (či obecnějších) vektorových prostorů, než je výše zmiňovaný T^n, či prostory polynomů.

- Nechť *V* je vektorový prostor. Zobrazení, které každému vektoru prostoru *V* přiřadí nulový vektor prostoru *V*, je endomorfismus. Nazývá se nulový endomorfismus a značí se obvykle symbolem *O*. Jeho jádrem je celý prostor *V*, jeho obrazem je nulový podprostor prostoru *V*.
- Nechť *V* je vektorový prostor všech vázaných vektorů prostoru, které mají společný počátek v pevně zvoleném bodě *S*. Nechť je dána přímka *p*, která prochází bodem *S*. Otočení prostoru *V* kolem přímky p o úhel α přirozeným způsobem určuje homomorfismus prostoru *V* do prostoru *V* (tedy endomorfismus prostoru *V*). Jádro tohoto endomorfismu je triviální, obrazem je celý prostor *V*.
- Nechť *V* je vektorový prostor všech vázaných vektorů prostoru, které mají společný počátek v pevně zvoleném bodě *S*. Nechť je dána rovina ρ, která prochází bodem *S*. Přiřadíme-li každému vektoru prostoru *V* jeho kolmou projekci na rovinu ρ, dostaneme homomorfismus prostoru *V* do prostoru *V* (endomorfismus prostoru *V*). Jádrem je množina všech vektorů prostoru *V*, které jsou kolmé k rovině ρ (leží na kolmé přímce k rovině ρ procházející bodem *S*). Obrazem je rovina ρ.
- Nechť *V* je vektorový prostor všech reálných funkcí definovaných na intervalu $(-\infty, +\infty)$. Funkce *v* se nazývá sudá, resp. lichá, jestliže pro každé reálné číslo *x* platí $v(-x) = v(x)$, resp. $v(-x) = -v(x)$. Tedy např. funkce *sin* je lichá a funkce *cos* je sudá. Zobrazení *f*, které každé funkci $v \in V$ přiřazuje funkci w, $w(x) = \frac{1}{2}(v(x) + v(-x))$, je homomorfismus *V* do *V* (endomorfismus prostoru *V*) a Ker f je množina všech lichých funkcí a Im f je množina všech sudých funkcí. Zobrazení g, které každé funkci $v \in V$ přiřazuje funkci w, $w(x) = \frac{1}{2}(v(x) - v(-x))$, je rovněž homomorfismus *V* do *V* (endomorfismus

na *V*). Ker g je množina všech sudých funkcí a Im g množina všech lichých funkcí.

- Zobrazení *f*, které každému polynomu s reálnými koeficienty přiřazuje jeho derivaci, je endomorfismem prostoru $R[x]$ do prostoru $R[x]$. Jádro tohoto endomorfismu tvoří všechny konstantní polynomy, můžeme psát Ker $f = [1]$. Zřejmě je Im $f = R[x]$. Obrazem podprostoru tvořeného právě všemi polynomy stupně nejvýše n je podprostor právě všech polynomů stupně nejvýše $n-1$. Úplným vzorem polynomu
$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
je lineární množina
$$\frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + a_0 x + [1].$$
Polynomy této množiny se liší pouze absolutním členem.
- Nechť *V* je vektorový prostor všech reálných funkcí reálné proměnné, které jsou spojité na uzavřeném intervalu $\langle 0,1 \rangle$. Zobrazení, které každé funkci $v \in V$ přiřazuje funkci w, $w(x) = \int_0^x v(t)dt$, $x \in \langle 0,1 \rangle$ je homomorfismus prostoru *V* do prostoru *V* (endomorfismus prostoru *V*).

Vlastnosti endomorfismů vektorového prostoru

V následující kapitole si ukážeme, že s endomorfismy lze provádět některé operace – například je možné zavést na množině endomorfismů daného prostoru součin a součet endomorfismů a násobek endomorfismu prvkem tělesa.

3.1 Definice. Buďte $f: V \to V$ a $g: V \to V$ endomorfismy téhož vektorového prostoru. Součinem (složením) endomorfismů f a g rozumíme $gf(u) = g[f(u)]$. Součtem endomorfismů f a g rozumíme $(f+g)(u) = f(u) + g(u)$. Násobkem endomorfismu f prvkem $r \in T$ rozumíme $(rf)(u) = rf(u)$.

Součinem, čili složením endomorfismů gf tedy rozumíme situaci, kdy daný vektor nejprve zobrazíme prostřednictvím zobrazení f a následně pak výsledek zobrazíme prostřednictvím zobrazení g. Součet endomorfismů f a g provedeme podle definice tak, že sečteme předpisy jednotlivých endomorfismů a pomocí výsledného zobrazení zobrazíme daný vektor. Výsledek, který získáme, bude stejný, jako v případě, kdy nejprve jednotlivými endomorfismy vektor zobrazíme a poté výsledky a sečteme. Pod pojmem násobení endomorfismu prvkem tělesa pak chápeme situaci, kdy předpis endomorfismu vynásobíme libovolným prvkem daného tělesa a následně provedeme zobrazení vektoru. Výsledek bude odpovídat výsledku, který získáme zobrazením vektoru daným předpisem a následným vynásobením výsledku prvkem tělesa.

Příklad 11. Endomorfismy f, g prostoru R^2 jsou dány předpisy:

$$f(x,y) = (2x + y, x + 4y)$$

$$g(x,y) = (x + y, 3y).$$

Ověřit, že zadaná zobrazení jsou skutečně endomorfismy, dokáže již čtenář sám. Postup je obdobný, jako u příkladů v první kapitole. Vypočítejte součet endomorfismů $f + g$, násobek endomorfismu $r \cdot f$ pro $r = 3$ a součin gf, fg endomorfismů f a g. Dále najděte endomorfismus $\bar{g}$ tak, aby endomorfismus $g + \bar{g}$ přiřazoval libovolnému vektoru nulový vektor.

Nejprve vypočítáme součet endomorfismů.

$$(f+g)(x,y) = (2x + y, x + 4y) + (x + y, 3y) = (3x + 2y, x + 7y)$$

Všimněme si, že ke stejnému výsledku bychom dospěli, kdybychom endomorfismy sčítali v opačném pořadí, tedy $g + f$. Ověření, že výsledné zobrazení je endomorfismem, ponecháme opět na čenáři.

Výpočet násobku endomorfismu provedeme pro číslo $r = 3$.

$$3 \cdot f = 3(2x + y, x + 4y) = (6x + 3y, 3x + 12y)$$

Ověření platnosti definice endomorfismu opět provede čtenář sám.

Nyní provedeme výpočet složeného endomorfismu gf a poté fg.

Při prvním výpočtu budeme postupovat obráceně, tedy nejprve zobrazíme vektor (x, y) v zobrazení f a potom v endomorfismu g. V druhém případě nejprve zobrazíme pomocí zobrazení g a následně pomocí zobrazení f.

$$gf = g[f(x, y)] = g[2x + y, x + 4y] = [(2x + y) + (x + 4y), 3(x + 4y)] =$$
$$= (3x + 5y, 3x + 12y)$$

$$fg = f[g(x, y)] = f[x + y, 3y] = [2(x + y) + 3y, x + y + 4(3y)] =$$
$$= (2x + 5y, x + 13y)$$

Zde si můžeme povšimnout, že vyšel jiný výsledek při skládání endomorfismů v pořadí fg a jiný výsledek v pořadí gf, tj. $fg \neq gf$. Skládání (součin) endomorfismů tedy není komutativní. Existují však dvojice endomorfismů, pro něž platí $gf = fg$. Definici uvedeme později.

Nyní budeme hledat endomorfismus $\bar{g}$ takový, aby součet g a $\bar{g}$ byl roven nulovému endomorfismu. Snadno zjistíme, že postačí změnit znaménka v předpisu endomorfismu.

Pro hledaný předpis $\bar{g}$ tedy platí

$$\bar{g}(x, y) = (-x - y, -3y).$$

Snadno ověříme, že opravdu platí

$$g + \bar{g} = (x + y, 3y) + (-x - y, -3y) = (0,0).$$

3.2 **Věta**. Nechť $f: V \to V$ a $g: V \to V$ jsou endomorfismy vektorových prostorů. Pak platí:

- jsou-li f a g endomorfismy, je i gf endomorfismus,
- je-li gf endomorfismus, jsou i f a g endomorfismy.

Příklad 12. Máme definované endomorfismy $f: R^4 \to R^4$ a $g: R^4 \to R^4$. Předpisy pro zobrazení jsou

$$f(x,y,z,t) = (2x - z, x + y + t, 3x + t, 3z - t)$$
$$g(x,y,z,t) = (x + z, 3x - y + t, 2z, y - t).$$

Určete předpis pro složený endomorfismus gf a dokažte, že jde o endomorfismus.

Při výpočtu budeme postupovat v obráceném pořadí, tedy nejprve zobrazíme pomocí zobrazení f a potom g.

$$g[f(x,y,z,t)] = g[2x - z, x + y + t, 3x + t, 3z - t] =$$
$$= ((2x - z) + (3x + t), 3(2x - z) - (x + y + t) + (3z - t), 2(3x + t),$$
$$(x + y + t) - (3z - t)) =$$
$$= (5x - z + t, 5x - y - 2t, 6x + 2t, x + y - 3z + 2t)$$

Předpis pro složené zobrazení gf je tedy

$$gf = (5x - z + t, 5x - y - 2t, 6x + 2t, x + y - 3z + 2t).$$

Ověření, že složené zobrazení je také endomorfismem, provedeme obdobně jako v příkladu 1. Není třeba ho již podrobně rozepisovat.

Příklad 13. Ve vektorovém prostoru

$$R^{2\times 2} = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}; x, y, z, t \in R\right\},$$

tj. ve vektorovém prostoru čtvercových matic řádu dva, máme daný endomorfismus f a g předpisem

$$f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y & 2y + z + t \\ 2x + 2t & 3z - 2t \end{pmatrix},$$
$$g\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z & 2x + 2t \\ y + z - t & z + t \end{pmatrix}.$$

Určete předpis pro složený endomorfismus gf.

Při výpočtu budeme opět postupovat v obráceném pořadí.

$$g\left[f\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\right] = g\begin{pmatrix} x + 2y & 2y + z + t \\ 2x + 2t & 3z - 2t \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} (2y + z + t) + (2x + 2t) & 2\cdot(x + 2y) + 2\cdot(3z - 2t) \\ (2y + z + t) + (2x + 2t) - (3z - 2t) & (2x + 2t) + (3z - 2t) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2x + 2y + z + 3t & 2x + 4y + 6z - 4t \\ 2x + 2y - 2z + 5t & 2x + 3z \end{pmatrix}$$

Předpis pro složené zobrazení gf je tedy

$$gf = \begin{pmatrix} 2x+2y+z+3t & 2x+4y+6z-4t \\ 2x+2y-2z+5t & 2x+3z \end{pmatrix}$$

Jak jsem již dříve zmínila, existují dvojice endomorfismů f a g, pro které platí rovnost

$$fg = gf.$$

Nyní uvedeme definici a vše ukážeme na konkrétním příkladu.

3.3 Definice. Jestliže pro endomorfismy f a g platí rovnost $fg = gf$, potom říkáme, že f a g komutují nebo že jsou záměnné.

Příklad 14. Rozhodněte a výpočtem dokažte, zda-li jsou následující endomorfismy $f: (Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ a $g: (Z_5)^3 \to (Z_5)^3$ komutující (záměnné).

Předpisy pro zobrazení jsou:

$$f(x, y, z) = (2x, y, 3z),$$

$$g(x, y, z) = (3x, 4y, 3z).$$

Nejprve vypočítáme složené zobrazení fg.

$$fg = f\big(g(x, y, z)\big) = f(3x, 4y, 3z) = (2 \cdot 3x, 4y, 3 \cdot 3z) = (x, 4y, 4z)$$

Dále vypočítáme složené zobrazení gf.

$$gf = g(f(x, y, z) = g(2x, y, 3z) = (3 \cdot 2x, 4y, 3 \cdot 3z) = (x, 4y, 4z)$$

Jak jsme ukázali, v tomto případě platí $fg = gf$ a můžeme tedy říct, že dané endomorfismy jsou záměnné.

Příklad 15. Výpočtem ověřte, zda-li jsou zadané endomorfismy f a g na prostoru polynomů nejvýše prvního stupně nad tělesem Z_3 (tj. $(Z_3)_1[x] = \{ax + b; a, b \in Z_3\}$) komutující. Endomorismy jsou dány předpisy:

$$f(ax + b) = (2a + b)x + (a + b)$$

$$g(ax + b) = 2bx + (2a + b).$$

Vypočítáme složené zobrazení fg.

$$f[g(ax + b)] = f[2bx + 2a + b] = [2(2b) + 2a + b]x + 2b + 2a + b =$$

$$= [2a + 2b]x + 2a$$

Nyní vypočítáme složené zobrazení gf.

$$g[f(ax + b)] = g[(2a + b)x + a + b] = [2(a + b)]x + 2(2a + b) + a + b =$$

$$= [2a + 2b]x + 2a$$

Jak vidíme, i v tomto případě platí $fg = gf$ a endomorfismy jsou tedy komutující.

Na konkrétních případech jsme zjistili, že sčítání endomorfismů je komutativní, lze najít nulový endomorfismus a endomorfismus opačný k danému. Bylo by možné ověřit, že sčítání endomorfismů je asociativní a že násobení vektoru skalárem také splňuje odpovídající axiomy vektorového prostoru.

Množina End *V* = Hom (*V*,*V*) všech endomorfismů prostoru *V* se sčítáním endomorfismů a násobení endomorfismů skaláry je vektorovým prostorem nad tělesem *T*. Skládání endomorfismů je asociativní, jednotkovým prvkem vzhledem k této operaci je identický automorfismus. Platí i oba distributivní zákony a vazba skládání endomorfismů a násobení endomorfismů skaláry: pro $\forall f, g, h \in$ End *V* a $a \in T$ je

$$f(g+h) = fg + fh,$$
$$(f+g)h = fh + gh,$$
$$(af)g = a(fg) = f(ag).$$

V následující větě jsou shrnuty základní vlastnosti endomorfismů.

3.4 **Věta**. Nechť *f* je endomorfismus prostoru *V* do prostoru *V*. Potom platí:

- Endomorfismus *f* zobrazuje nulový vektor prostoru *V* na nulový vektor prostoru *V*.
- Endomorfismus f zobrazuje opačný vektor k vektoru $v \in V$ na opačný vektor k vektoru $f(v)$.
- Endomorfismus f zobrazuje lineární kombinaci vektorů prostoru *V* na stejnou lineární kombinaci obrazů těchto vektorů. Přesněji: je-li $v_1, \cdots, v_k \in V$ a $a_1, \cdots, a_k \in T$, potom $f\left(\sum_{i=1}^{k} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} a_i f(v_i)$.
- Obraz podprostoru prostoru *V* je podprostor prostoru V.
- Im *f* je podprostorem prostoru *V*.
- Obraz množiny generátorů prostoru *V* je množinou generátorů prostoru Im *f*.
- Úplný vzor podprostoru prostoru *V* je podprostorem prostoru *V*.
- Ker *f* je podprostorem prostoru *V*.
- Úplný vzor vektoru $w \in$ Im f je lineární množinou $v +$ Ker *f*, kde $v \in V$ je libovolný vektor, pro který $f(v) = w$.

Typy endomorfismů

4.1 **Definice**. Bijektivní endomorfismus prostoru *V* (tj. izomorfismus *V* na *V* – „prostý a na“) se nazývá automorfismus prostoru *V*. Množinu všech automorfismů prostoru *V* značíme Aut$V$[4].

Příkladem automorfismu je endomorfismus z příkladu č. 10, neboť je to prosté zobrazení prostoru Q^3 na prostor Q^3. Jde o automorfismus na prostoru Q^3.

Připomeňme, že bijektivní zobrazení množiny *A* na množinu *B* je zobrazení, které je injektivní a surjektivní zároveň. Pro injektivní (prosté) zobrazení platí:

$$\forall x_1, x_2 \in V: x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Máme-li tedy dva různé prvky, zobrazí se opět na různé prvky. Surjektivní zobrazení (na množinu) je zobrazení, kdy každý prvek z množiny *B* má svůj vzor v množině *A*. Obecně tedy můžeme říci, že bijekce množiny *A* na množinu *B* znamená, že každý prvek z množiny *B* má právě jeden vzor v množině *A*.

Je potřeba také zmínit, že již z vyšetření jádra a obrazu endomorfismu lze poznat, zda jde o zobrazení prosté a zda jde o zobrazení na. Pokud je Ker $f = 0$, je zobrazení f prosté. Pokud je Im $f = V$, je zobrazení f na. Pokud je tedy jádro triviální, je endomorfismus (obecně každý homomorfismus) prostý, pokud je obrazem endomorfismu celý vektorový prostor, do něhož endomorfismus zobrazuje, pak je to zobrazení na (taktéž platí obecně pro homomorfismy).

K tomu, aby endomorfismus byl automorfismem, postačuje na konečně generovaných prostorech, aby f byl buď jen prostý, nebo jen surjektivní. Toto tvrzení zformulujeme v následující větě.

4.2 **Věta**. Nechť *V* je vektorový prostor nad tělesem *T*. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- prostor *V* má konečnou dimenzi,
- každý injektivní endomorfismus prostoru *V* je automorfismus,
- každý surjektivní endomorfismus prostoru *V* je automorfismus.

[4] Platí: Aut$V \subseteq$ End$V$ = Hom(V, V).

Příklad 16. Endomorfismus f prostoru R^3 do prostoru R^3 zobrazí vektory (x, y, z) na vektory $(x+z, 2y+z, 2z)$. Určete jádro zobrazení a na jeho základě rozhodněte, zda jde o automorfismus.

Výpočet jádra jsme si připomněli v první kapitole, proto již není třeba více rozebírat a můžeme rovnou počítat.

$$f(x, y, z) = (0,0,0)$$

$$(x+z, 2y+z, 2z) = (0,0,0)$$

Vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých.

$$x+z=0$$

$$2y+z=0$$

$$2z=0$$

Po vyřešení dostáváme následující řešení:

$$x=0, y=0, z=0.$$

A proto platí

$$\text{Ker } f = [(0,0,0)].$$

Jak jsem již uvedla dříve, pokud je Ker $f = [(0,0,0)]$, je zobrazení f prosté, čili jde o injektivní zobrazení. Podle věty 4.2 platí, že každý injektivní endomorfismus je automorfismem, proto i zobrazení f je automorfismem.

Maticové vyjádření endomorfismů

Každý homomorfismus (lineární zobrazení) jde reprezentovat maticově. Matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím B_1, B_2 převádí souřadnice vektoru vzhledem k dané bázi B_1 na souřadnice jeho obrazu určené vzhledem k bázi B_2.

Nejprve zde uvedeme definici matice obecného lineárního zobrazení, dále se pak budeme zabývat pouze maticí endomorfismu.

Připomeňme, že matice homomorfismu $g: U \to V$ vzhledem k bázím M, N je matice typu $n \times m$ a má ve sloupcích zapsané souřadnice obrazů vektorů báze M vyjádřené vzhledem k bázi *N*, tj. ve sloupcích jsou souřadnice

$$\langle f(u_1)\rangle_N, \langle f(u_2)\rangle_N, \cdots, \langle f(u_m)\rangle_N,$$

kde

$$M = \{u_1, u_2, \cdots, u_m\},$$
$$N = \{v_1, v_2, \cdots, v_n\}.$$

5.1 Definice. Maticí endomorfismu g prostoru *V* vzhledem k bázím M a N budeme rozumět matici homomorfismu g prostoru *V* do prostoru *V* vzhledem k bázím *M* a *N*.

Pro endomorfismy bude vždy vycházet čtvercová matice, protože jde o zobrazení z *V* do *V* a všechny báze prostoru *V* mají stejný počet vektorů.

Příklad 17. Endomorfismus f prostoru R^4 do prostoru R^4 zobrazí vektory (x, y, z, t) na vektory $(x + y, y + z, z + t, x + t)$. Najděte matici A endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi prostoru R^4.

Kanonickou bázi prostoru R^4 tvoří vektory

$$(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1).$$

V endomorfismu f se tyto vektory zobrazí na vektory:

$$f(1,0,0,0) = (1,0,0,1)$$
$$f(0,1,0,0) = (1,1,0,0)$$
$$f(0,0,1,0) = (0,1,1,0)$$
$$f(0,0,0,1) = (0,0,1,1)$$

Získané vektory zapíšeme do matice a to tak, že jednotlivé vektory budou tvořit postupně sloupce matice. Maticí endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi prostoru je tedy čtvercová matice A řádu 4.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Všimněme si, že pro matici endomorfismu platí:

$$\begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ z+t \\ x+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

5.2 Věta. Nechť V je vektorový prostor dimenze m nad tělesem T a M je báze tohoto prostoru. Nechť f je endomorfismus prostoru V do prostoru V a A matice $m \times m$ nad tělesem T. Matice A je maticí endomorfismu f vzhledem k bázi M právě tehdy, když pro každý vektor $v \in V$ je $\langle f(v) \rangle_M^T = A \cdot \langle v \rangle_M^T$.

Příklad 18. Najděte matici B endomorfismu f z předchozího příkladu vzhledem k bázím M a N prostoru R^4. Báze M a N jsou:

$$M = \{(1,0,1,0), (0,1,0,1), (-1,0,0,0), (0,-1,0,0)\},$$

$$N = \{(2,0,1,0), (0,1,1,1), (1,1,1,0), (0,2,0,-1)\}.$$

Vektory báze M se endomorfismem f zobrazí na následující vektory:

$$f(1,0,1,0) = (1,1,1,1),$$

$$f(0,1,0,1) = (1,1,1,1),$$

$$f(-1,0,0,0) = (-1,0,0,-1),$$

$$f(0,-1,0,0) = (-1,-1,0,0).$$

Tyto vektory musíme vyjádřit souřadnicemi vzhledem k bázi N. Je potřeba je tedy vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze N. Někdy je lze snadno určit pouhým pohledem. V tomto případě ale budeme počítat – využijeme k tomu soustavy lineárních rovnic.

Vektor $(1,1,1,1)$ má souřadnice (a, b, c, d) vzhledem k bázi N, tj.

$$\langle (1,1,1,1) \rangle_N = (a, b, c, d).$$

Potom platí

$$(1,1,1,1) = a(2,0,1,0) + b(0,1,1,1) + c(1,1,1,0) + d(0,2,0,-1).$$

Z rovnosti vektorů na levé a pravé straně vyplyne soustava čtyř rovnic,

$$2a + 0b + 1c + 0d = 1$$

$$0a + 1b + 1c + 2d = 1$$

$$1a + 1b + 1c + 0d = 1$$

$$0a + 1b + 0c - 1d = 1,$$

kterou převedeme na matici a elementárními úpravami převedeme na schodovitý tvar.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Upravenou matici převedeme zpět na soustavu rovnic, kterou vyřešíme.

$$a + b + c = 1$$

$$b + c + 2d = 1$$

$$c + 4d = 1$$

$$d = 1$$

Čtenář sám již snadno dopočítá, že $a = 2, b = 2, c = -3, d = 1$.

Platí tedy, že

$$(1,1,1,1) = 2(2,0,1,0) + 2(0,1,1,1) - 3(1,1,1,0) + 1(0,2,0,-1),$$

tj. $\langle(1,1,1,1)\rangle_N = (2,2,-3,1)$.

Stejně najdeme souřadnice ostatních vektorů.

Druhý vektor je shodný s prvním, proto není nutné již počítat. Přesto se u něj ale zastavíme a ukážeme si další z možných způsobů výpočtu.

Matici, kterou jsme získali ze soustavy rovnic, nejprve převedeme na schodovitý tvar a následně elementárními úpravami převedeme na jednotkovou matici.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Jak vidíme, na pravé straně matice nám vyšel shodný výsledek, jako u prvního způsobu výpočtu. Ověřili jsme si, že oba způsoby počítání jsou možné.

Pro třetí vektor platí

$$(-1,0,0,-1) = a(2,0,1,0) + b(0,1,1,1) + c(1,1,1,0) + d(0,2,0,1).$$

$$2a + 0b + 1c + 0d = -1$$

$$0a + 1b + 1c + 2d = 0$$

$$1a + 1b + 1c + 0d = 0$$

$$0a + 1b + 0c - 1d = -1$$

Získáme matici, kterou upravíme.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

Opět převedeme na soustavu rovnic a dopočítáme.

$$a + b + c = 0$$

$$b + c + 2d = 0$$

$$c + 4d = -1$$

$$d = -2$$

Celkem snadno by čtenář zjistil, že $a = -4, b = -3, c = 7, d = -2$.

Platí tedy

$$(-1,0,0,-1) = -4(2,0,1,0) - 3(0,1,1,1) + 7(1,1,1,0) - 2(0,2,0,-1).$$

Pro poslední vektor můžeme napsat, že platí

$$(-1,-1,0,0) = a(2,0,1,) + b(0,1,1,1) + c(1,1,1,0) + d(0,2,0,-1).$$

Dále počítáme stejným způsobem.

$$2a + 0b + 1c + 0d = -1$$

$$0a + 1b + 1c + 2d = -1$$

$$1a + 1b + 1c + 0d = 0$$

$$0a + 1b + 0c - 1d = 0$$

Upravujeme výslednou matici.

$$\left(\begin{array}{cccc|c}2&0&1&0&-1\\0&1&1&2&-1\\1&1&1&0&0\\0&1&0&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&2&-1\\2&0&1&0&-1\\0&1&0&-1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&2&-1\\0&-2&-1&0&-1\\0&1&0&-1&0\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&2&-1\\0&0&1&4&-3\\0&0&-1&-3&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&1&2&-1\\0&0&1&4&-3\\0&0&0&1&-2\end{array}\right)$$

Sestavíme upravenou soustavu rovnic a dopočítáme.

$$a+b+c=0$$

$$b+c+2d=-1$$

$$c+4d=-3$$

$$d=-2$$

Zjistili jsme, že $a=-3, b=-2, c=5, d=-2$.

Ze získaných souřadnic nyní utvoříme matici *B*. Souřadnice pro jeden vektor budou vždy tvořit sloupec matice *B*. Matice *B* je maticí endomorfismu *f* vzhledem k bázím *M* a *N*.

$$B=\begin{pmatrix}2&2&-4&-3\\2&2&-3&-2\\-3&-3&7&5\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}$$

Platí rovnost

$$\begin{pmatrix}2a+2b-4c-3d\\2a+2b-3c-2d\\-3a-3b+7c+5d\\a+b-2c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2&-4&-3\\2&2&-3&-2\\-3&-3&7&5\\1&1&-2&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$$

a tato rovnost definuje endomorfismus *f* v souřadnicích vzhledem k bázím *M*, *N*.

Všimněme si, že jsme řešili tři soustavy lineárních rovnic, které se lišily pouze sloupcem pravých stran. Bylo by proto možné vyřešit soustavy najednou. K matici soustavy připíšeme za svislou čáru všechny pravé strany – ve sloupcích jsou vektory, pro něž chceme najít souřadnice v bázi *N*.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}2&0&1&0&1&1&-1&-1\\0&1&1&2&1&1&0&-1\\1&1&1&0&1&1&0&0\\0&1&0&-1&1&1&-1&0\end{array}\right)$$

Vzniklou matici typu 4×8 upravujeme tak, aby v levé části byla jednotková matice. Ve sloupcích matice v pravé části jsou hledané souřadnice. V pravé části je tedy hledaná matice endomorfismu vzhledem k bázím *M* a *N*. Můžeme tedy zapsat, že

$$(N|f(M))\sim(E|B).$$

Na následujícím příkladu ukážeme, jak vypadá matice složeného zobrazení. Pokud máme zobrazení f, které má matici A a zobrazení g s maticí B, potom matice složeného zobrazení fg bude matice C, pro kterou platí $C = A \cdot B$.

Příklad 19. S využitím zadání z příkladu č. 11 dokažte, že pro matici C složeného zobrazení fg platí $C = A \cdot B$, kde A je maticí zobrazení f a B maticí zobrazení g.
Ze zadání snadno zjistíme, že maticí endomorfismu f je

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Obdobně pro matici endomorfismu g platí

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ze zadání také víme, že matice složeného zobrazení fg je

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 13 \end{pmatrix}.$$

Nyní vypočítáme součin matic A, B.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 1 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 13 \end{pmatrix} = C$$

Jak jsme se výpočtem přesvědčili, uvedená rovnost opravdu platí.

5.3 Definice. Nechť *V* je vektorový prostor a *M*, *N* jeho dvě báze. Maticí přechodu od báze *M* k bázi *N* budeme rozumět matici identického automorfismu prostoru *V* vzhledem k bázím *M* a *N*. Identický automorfismus na prostoru *V* budeme značit 1_V.

Příklad 20. Uvažujme báze

$$M = \{(3,1,1), (1,2,0), (1,2,2)\},$$
$$N = \{(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$$

vektorového prostoru $(Z_5)^3$. Najděte matici přechodu od báze *M* k bázi *N*.
Vektory báze *M* vyjádříme pomocí vektorů báze *N* takto:

$$(3,1,1) = (1,1,1) + 2(1,0,0)$$
$$(1,2,0) = (1,1,1) + (1,1,0) + 4(1,0,0)$$
$$(1,2,2) = 2(1,1,1) + 4(1,0,0)$$

Matice přechodu od báze *M* k bázi *N* tedy vypadá takto:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

5.4 Věta. Buďte M, M' báze vektorového prostoru V, buď A matice přechodu od báze M k bázi M' a buď B matice endomorfismu $f\colon V \to V$ vektorového prostoru V vzhledem k bázi M. Pak $A^{-1}BA$ je matice endomorfismu f vzhledem k bázi M'.

Matice B a $A^{-1}BA$ jsou tedy matice téhož endomorfismu (vzhledem k různým bázím – M,M').

Výše uvedený výraz A^{-1} označuje inverzní matici. Řekneme, že A^{-1} je inverzní matice k matici A, nebo že A je inverzní matice k matici A^{-1}, jestliže platí:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E,$$

kde E je jednotková matice[5].

Pouze pro připomenutí výpočtu inverzní matice zde uvedeme následující příklad.

Příklad 21. K matici A nad tělesem Z_5 vypočítejte inverzní matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Matici přepíšeme na matici $(A|E)$ typu 3×6 a pomocí elementárních úprav převedeme levou stranu matice na jednotkovou matici. Na pravé straně tímto způsobem dostaneme matici inverzní.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Od matice $(A|E)$ jsme dospěli k matici $(E|A^{-1})$, kde inverzní maticí je

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro ověření můžeme spočítat, že opravdu platí $A \cdot A^{-1} = E$.

[5] Jednotkovou maticí řádu n nazýváme takovou matici $E = (e_{ij})$, pro kterou platí, že $e_{ij} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \cdots, n$ a zároveň mimo hlavní diagonálu má samé 0.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 1 & 4\\1 & 4 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\3 & 2 & 2\\3 & 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6+9 & 3+4+3 & 4+6\\3+12 & 2+4 & 2+8\\1+12+12 & 3+8+4 & 8+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

5.5 Věta. Buď f endomorfismus vektorového prostoru V a buď A matice f vzhledem k bázím M a M' prostoru V. Pak f je automorfismus, právě když matice A je regulární[6]. Rovněž platí, že endomorfismus f vektorového prostoru V je automorfismus, právě když determinant matice f vzhledem k libovolné bázi prostoru V je nenulový.

Příklad 22. Vyjdeme z příkladu 13 a použijeme matici A endomorfismu f vzhledem ke kanonické bázi prostoru R^4 z tohoto příkladu.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Elementárními úpravami převedeme na schodovitý tvar a zjistíme, zda-li jsou všechny řádky lineárně nezávislé a tím zjistíme i hodnost matice.

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & 0\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Jak je vidět, poslední řádek se vynuloval, tudíž byl lineárně závislý a hodnost dané matice (tedy počet jejích lineárně nezávislých řádků) je 3. Matice proto není regulární a v tomto případě nejde o automorfismus.

5.6 Definice. Nechť A a B jsou čtvercové matice téhož řádu nad tělesem T. Budeme říkat, že matice A, B jsou podobné, jestliže existuje regulární matice C nad tělesem T taková, že platí $A = \;^{-1}BC$.

V definici 5.6 je lhostejné, zda píšeme inverzní matici vpravo nebo vlevo; matice A vznikne vynásobením matice B zleva a zprava navzájem inverzními maticemi.

---

[6] Matice A nad T se nazývá regulární právě tehdy, jestliže k ní existuje inverzní matice A^{-1}. V opačném případě se nazývá singulární.
Regulární matice je taková čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly (det $A \neq 0$).
Ekvivalentně lze též o regulární matici tvrdit:

- její řádky jsou lineárně nezávislé,
- její sloupce jsou lineárně nezávislé,
- hodnost čtvercové regulární matice o velikosti $n \times n$ je právě n.

Endomorfismy na lineárních prostorech se skalárním součinem

V úvodu této kapitoly připomeňme, že prostorem se skalárním součinem (též označovaným jako unitární prostor) rozumíme každý vektorový prostor s nějakým pevně zavedeným skalárním součinem $\varphi(u,v)$. V této kapitole se omezíme pouze na vektorové prostory nad tělesem reálných čísel.

Připomeňme, že skalární součin φ je zobrazení, které každé dvojici vektorů $u,v \in V$ vektorového prostoru nad tělesem reálných čísel přiřazuje reálné číslo (tedy skalár) $\varphi(u,v) \in R$. Zároveň platí:

- $\forall u,v \in V \quad \varphi(u,v) = \varphi(v,u)$,
- $\forall u,v,w \in V \quad \varphi(u,v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$,
- $\forall u,v \in V \quad \forall k \in R \quad \varphi(k \cdot u,v) = k \cdot \varphi(u,v)$,
- $\forall u \in V \quad \varphi(u,u) \geq 0 \quad \wedge \quad \varphi(u,u) = 0$, pak u je nulový vektor.

Z těchto vlastností, které musí splňovat každý skalární součin, lze např. dokázat, že skalární součin nulového vektoru s libovolným vektorem je roven nule, tj. $\varphi(u,o) = 0$.

Příklad 23. Mějme vektory $u = (5,1,3)$ a $v = (-2,1,0)$ prostoru R^3. Určete standardní skalární součin $u \cdot v$.

Připomeňme, že standardní skalární součin dvou vektorů obecně vypočítáme

$$u \cdot v = (u_1, u_2, \cdots, u_n) \cdot (v_1, v_2, \cdots, v_n) = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n.$$

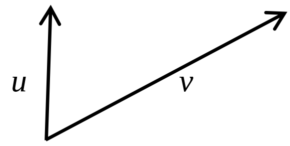
V tomto případě tedy počítáme

$$u \cdot v = 5 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 = -9.$$

Uveďme nyní některé příklady skalárního součinu dvou vektorů, které jsou prvky prostorů odlišných od R^n.

Máme-li množinu dvou nenulových vektorů v prostoru (rovině), které mají počátek v pevně zvoleném bodě, skalární součin pak definujeme jako součin délek vektorů a kosinu úhlu, který vektory svírají.

Příklad 24. Nechť jsou dány v rovině vektory u, v, kde $|u| = 1j, |v| = 2j$ a $\beta = 60^0$ je velikost úhlu, který vektory svírají. Určete jejich skalární součin.



Obr. 1: Skalární součin vektorů

Skalární součin vektorů roviny se společným počátkem je dán součinem

$$\varphi(u, v) = |u| \cdot |v| \cdot \cos\beta,$$

proto

$$\varphi(u, v) = 1 \cdot 2 \cdot \cos 60^0 = 1 \cdot 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1.$$

Na prostoru všech polynomů stupně nejvýše n je skalární součin definován pomocí určitého integrálu takto:

$$\varphi(f(x), g(x)) = \textstyle\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Příklad 25. Určete skalární součin vektorů $p(x) = 2x - 1, q(x) = -x + 3$ prostoru $R_1[x]$ se skalárním součinem definovaným předpisem

$$\varphi(p, q) = \textstyle\int_{-1}^1 p(x)q(x)dx.$$

Provedeme výpočet.

$$\varphi(p, q) = \int_{-1}^1 (2x - 1) \cdot (-x + 3)dx = \int_{-1}^1 (-2x^2 + 7x - 3)dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 3x\right]_{-1}^1 = \left(-\frac{2}{3} + \frac{7}{2} - 3\right) - \left(\frac{2}{3} + \frac{7}{2} + 3\right) = -\frac{22}{3}$$

V prostoru $R^{n\times n}$ všech čtvercových matic řádu n definujeme skalární součin matic A, B rovností

$$\varphi(A, B) = tr(A \cdot B^T),$$

kde trC je tzv. stopa matice C, tj. součet prvků na její hlavní diagonále, tedy

$$trC = \textstyle\sum_{k=1}^n c_{kk}.$$

Příklad 26. Máme definované matice *A* a *B* v prostoru $R^{2\times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Určete skalární součin $\varphi(A, B)$.

Nejprve vypočítáme matici *C*, která je součinem matic *A* a B^T.

$$C = A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 0 + 1\cdot 2 & 3\cdot 1 + 1\cdot 3 \\ 2\cdot 0 + 1\cdot 2 & 2\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Nyní sečteme prvky na hlavní diagonále matice *C*.

$$trC = 2 + 5 = 7$$

Skalární součin matic *A* a *B* je tedy roven 7.

6.1 Definice. Nechť *U* je unitární prostor nad tělesem *R*. Zobrazení *f* prostoru *U* do prostoru *U* se nazývá unitární endomorfismus, jestliže pro každé dva vektory $x, y \in U$ je

$$\varphi(f(x), f(y)) = \varphi(x, y).$$

Unitární endomorfismus je tedy definován jako zobrazení, které zachovává skalární součin.

Příklad 27. Na prostoru R^2 se standardním skalárním součinem máme daný endomorfismus, který je dán předpisem

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2).$$

Rozhodněte, zda jde o unitární endomorfismus.

Unitární prostor zachovává skalární součin, pro libovolné dva vektory tedy musí platit $f(x) \cdot f(y) = x \cdot y$. Zvolíme tedy obecné vektory (x_1, x_2) a (y_1, y_2) a jednoduchým výpočtem ověříme, zda tato rovnost platí.

$$f(x) \cdot f(y) = (-x_1, x_2) \cdot (-y_1, y_2) = (-x_1) \cdot (-y_1) + x_2 \cdot y_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Jak vidíme, rovnost platí a jde o unitární endomorfismus.

Příklad 28. Máme zobrazení f na prostoru R^2se standardním skalárním součinem, které je určené předpisem

$$f(x, y) = (2x - 3y, x + y).$$

Rozhodněte, zda jde o unitární endomorfismus.

Při výpočtu můžeme postupovat dvěma způsoby. Jednak můžeme počítat s vektory s obecnými souřadnicemi, stejně jako v předchozím případě. Pokud ale máme podezření, že nejde o unitární zobrazení, zvolíme konkrétní dva vektory a vypočítáme skalární součiny. Tentokrát zvolíme pro výpočet druhý způsob.

Zvolila jsem vektory

$$u = (1,2), v = (3,-1).$$

$$u \cdot v = (1,2) \cdot (3,-1) = 3 - 2 = 1$$

$$f(u) = (2 \cdot 1 - 3 \cdot 2, 1 + 2) = (-4,3)$$

$$f(v) = (2 \cdot 3 - 3 \cdot (-1), 3 - 1) = (9,2)$$

$$f(u) \cdot f(v) = (-4,3) \cdot (9,2) = -36 + 6 = -30$$

Jak je vidět, zadané zobrazení nezachovává skalární součin a nejde proto o unitární endomorfismus.

Uveďme vlastnosti týkající se skládání unitárních endomorfismů.

6.2 Věta.

- Složení dvou unitárních endomorfismů je unitární endomorfismus.
- Množina všech unitárních automorfismů prostoru tvoří grupu.

Příklad 29. V unitárním prostoru R^2 se skalárním součinem jsou dány endomorfismy f a g. Ukažte, že jejich složením je endomorfismus, který rovněž zachovává skalární součin, je tedy unitární. Předpisy unitárních zobrazení jsou:

$$f(x_1, x_2) = (-x_1, x_2)$$

$$g(x_1, x_2) = (-\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}})$$

Nejprve vypočítáme složené zobrazení fg, pro které platí:

$$fg = f\big(g(x)\big) = f\left(-\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right)$$

Dále budeme postupovat stejně jako v příkladu č. 26.

$$x \cdot y = (x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

$$fg(x) \cdot fg(y) = \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}, \frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}}, \frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} - \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{x_1}{\sqrt{2}} + \frac{x_2}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{y_1}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}}\right) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Jak jsme se přesvědčili, opravdu platí rovnost

$$fg(x) \cdot fg(y) = x \cdot y.$$

Složené zobrazení je tedy unitární.

V dalším textu se zaměříme na matice v souvislosti s endomorfismy na unitárních prostorech a maticové vyjádření takových endomorfismů.

6.3 Definice. Ortogonální, nebo též ortonormální, případně unitární matice je čtvercová matice A, pro kterou platí $A^T A = E$, kde A^T je transponovaná matice k A a E je jednotková.

Příklad 30. Mějme matici nad tělesem reálných čísel

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Protože matice A je symetrická, platí $A = A^T$, je tedy:

$$A^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Snadno vypočítáme, že platí

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

tedy matice A je ortonormální.

Nyní uvedeme ekvivalentní podmínky ortogonální matice:

6.4 Věta. Nechť A je čtvercová matice nad tělesem reálných čísel. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- $AA^T = E$, tj. A je ortogonální,
- sloupce A tvoří ortonormální bázi prostoru R^n se standardním skalárním součinem,
- řádky A tvoří ortonormální bázi prostoru R^n se standardním skalárním součinem,
- A je regulární a $A^{-1} = A^T$,

- endomorfismus, jehož maticí vzhledem k ortonormální bázi je A, je unitární endomorfismus.

Pro připomenutí zde vysvětlíme důležité pojmy použité v předchozí větě, které se v této práci objevují poprvé.

Ortonormální báze je množina tvořená vektory, které jsou vždy po dvou na sebe kolmé, tj. jejich skalární součin je nula. Zároveň jsou také jednotkové, tj. jejich velikost je 1. Příkladem ortonormální báze prostoru R^3 se standardním skalárním součinem je kanonická báze tohoto prostoru.

Příklad 31. Ověřte, že množina M je ortonormální bází prostoru R^3.

$$M = \left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}0\right),(0{,}0{,}1)\right\}$$

Jak je uvedeno výše, skalární součin každých dvou vektorů ortonormální báze musí být roven nule. Počítejme tedy.

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}+0\cdot 0=0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)\cdot(0{,}0{,}1)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0+0\cdot 1=0$$

$$\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\cdot(0{,}0{,}1)=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 0+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0+0\cdot 1=0$$

Zároveň musí být vektory jednotkové.

$$\left|\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$$

$$\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)\right|=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+0^2}=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}=1$$

$$|(0{,}0{,}1)|=\sqrt{0^2+0^2+1^2}=1$$

Podle věty 6.4 je každá matice, jejímiž řádkovými, resp. sloupcovými vektory jsou vektory množiny M, ortogonální. Proto je matice

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ortogonální.

Z věty 6.2 víme, že všechny unitární automorfismy unitárního prostoru tvoří grupu. Podle předchozí věty je maticí unitárního automorfismu ortogonální matice. Proto můžeme tvrdit, že všechny ortogonální matice řádu n tvoří také grupu. Označme ji $O(n)$. Pro $n = 1$ je $O(1) = \{(1); (-1)\}$, tedy pouze dvouprvková množina. Všechny ortogonální matice řádu dva lze zapsat maticemi

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \alpha \in R.$$

6.5 Věta. Nechť U je unitární prostor, který má konečnou dimenzi. Potom je endomorfismus f prostoru U do prostoru U unitární právě tehdy, když jeho matice vzhledem k nějakým ortonormálním bázím prostoru U je unitární.

Příklad 32. Endomorfismus f unitárního prostoru R^3 se standardním skalárním součinem, který vektoru (x, y, z) přiřazuje vektor

$$(\sqrt{3}x + y - 2z, \sqrt{3}x - 3y, \sqrt{3}x + y + 2z),$$

má vzhledem ke kanonické bázi prostoru R^3 matici

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Rozhodněte, zda je zobrazení unitární a zda je matice ortogonální.

Podle výše uvedené definice musíme ověřit, že platí $A \cdot A^T = E$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -2 \\ \sqrt{3} & -3 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3+1+4 & 3-3+0 & 3+1-4 \\ 3-3+0 & 3+9+0 & 3-3+0 \\ 3+1-4 & 3-3+0 & 3+1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Je zřejmé, že matice A není ortogonální. Je tedy pravděpodobné, že ani zadané zobrazení f není unitární. Zvolíme tedy libovolné dva vektory a výpočtem ověříme, zda-li zobrazení f zachovává skalární součin.

Pro náš výpočet jsme zvolila vektory

$$(1,1,1) \text{ a } (1,0,-1).$$

Nejprve vypočteme jejich skalární součin.

$$(1,1,1)\cdot(1,0,-1) = 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) = 0$$

Nyní vypočteme skalární součiny jejich obrazů.

$$f(1,1,1) = \left(\sqrt{3}+1-2, \sqrt{3}-3, \sqrt{3}+1+2\right) = (\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3)$$

$$f(1,0,-1) = (\sqrt{3}+2, \sqrt{3}, \sqrt{3}-2)$$

$$\left(\sqrt{3}-1, \sqrt{3}-3, \sqrt{3}+3\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2, \sqrt{3}, \sqrt{3}-2\right) =$$

$$= \left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\left(\sqrt{3}+2\right) + \left(\sqrt{3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{3}+3\right)\cdot\left(\sqrt{3}-2\right) = 1-\sqrt{3}$$

Z výsledků je jasné, že se skalární součin nezachoval, tudíž f nemůže být unitární.

6.6 **Věta**. Nechť V je unitární prostor konečné dimenze, M, N jeho dvě báze a A matice přechodu od báze M k bázi N. Potom platí:

- jestliže jsou báze M a N ortonormální, je matice A unitární,
- jestliže je báze N ortonormální a matice A unitární, je báze M ortonormální,
- jestliže je báze M ortonormální a matice A unitární, je báze N ortonormální.

Příklad 33. Množina $M = \left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), (0,0,1)\right\}$ je ortonormální báze prostoru R^3 a matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

je unitární matice a zároveň je to matice přechodu od báze M k nějaké bázi N. Ukažte, že N je ortonormální báze.

Protože je daná matice maticí přechodu od báze M k bázi N a vektory báze M známe, získají se vektory báze N jako sloupcové vektory matice, která je součinem matice A a matice, jejíž sloupce tvoří vektory báze M:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6\sqrt{2}} & -\frac{1}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ \frac{\sqrt{\frac{3}{2}}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2\sqrt{6}} & -\frac{1}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{4\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12} & \frac{-2 - \sqrt{3}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12} & \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Bázi *N* tvoří vektory

$$n_1 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$n_2 = \left(\frac{4\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right),$$

$$n_3 = \left(\frac{-2 - \sqrt{3}}{6}, \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3}\right).$$

Zbývá ověřit, že vektory báze *N* jsou ortonormální, tedy každé dva vektory jsou na sebe kolmé a zároveň jsou jednotkové.

$$n_1 \cdot n_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{4\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) =$$

$$= \frac{1 - 4\sqrt{3}}{24} + \frac{3 + 4\sqrt{3}}{24} - \frac{1}{6} = 0$$

$$n_2 \cdot n_3 = \left(\frac{4\sqrt{6} - \sqrt{2}}{12}, \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}, \frac{\sqrt{2}}{6}\right) \cdot \left(\frac{-2 - \sqrt{3}}{6}, \frac{-1 + 2\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= -\frac{7\sqrt{6}+10\sqrt{2}}{72} + \frac{7\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{72} + \frac{\sqrt{2}}{9} = 0$$

$$n_1 \cdot n_3 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\frac{-2-\sqrt{3}}{6}, \frac{-1+2\sqrt{3}}{6}, \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{24} + \frac{-\sqrt{6}+6\sqrt{2}}{24} - \frac{\sqrt{2}}{3} = 0$$

Jak jsme se přesvědčili, bázové vektory jsou opravdu na sebe kolmé.

$$|n_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

$$|n_2| = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{6}-\sqrt{2}}{12}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2} = 1$$

$$|n_3| = \sqrt{\left(\frac{-2-\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1+2\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$$

Je patrné, že i druhá podmínka je splněna a vektory jsou ortonormální.

Vzhledem k tomu, že pracujeme s endomorfismy, jsou matice takových zobrazení čtvercové. Následující věta charakterizuje pomocí determinantu, který je definován právě pro čtvercové matice, nutnou podmínku pro to, aby matice byla unitární (ortogonální).

6.7 Věta. Jestliže je A čtvercová unitární matice, potom je $|det\,A| = 1$.
Čtvercová unitární matice je tedy regulární. Determinant ortogonální matice je roven buď 1, nebo -1.

Příklad 34. Ukažme si platnost této věty na matici, u které jsme již dříve ukázali, že je unitární. Matice A je

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Vypočítáme determinant:

$$detA = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1.$$

Jak jsme se přesvědčili, determinant matice je skutečně -1, čili $|detA| = 1$.

Endomorfismy a geometrická zobrazení

V poslední kapitole se budeme věnovat aplikaci endomorfismů, čili jejich použití. Zaměříme se na užití endomorfismů v geometrii, ačkoliv možností jejich použití je mnohem více. Ukážeme, že matice, které se objevují v analytickém vyjádření známých geometrických zobrazení jako je identita, rotace, stejnolehlost apod., jsou matice speciálních typů endomorfismů.

Připomeňme důležitý model vektorového prostoru – množinu všech vázaných vektorů v rovině či prostoru, které mají společný počátek v nějakém pevně zvoleném bodě. Zavedením soustavy souřadnic lze tyto „geometrické vektory" nahradit „aritmetickými vektory", tj. uspořádanými dvojicemi, trojicemi a případně n-ticemi reálných čísel.

Transformace soustavy souřadnic

Nejprve definujme pojem soustava souřadnic.

7.1 Definice. Zobrazení S dané repérem[7] $\langle O; e_1, e_2, \cdots, e_n \rangle$, které každému bodu $X \in A_n$ přiřazuje uspořádanou n-tici $\{X\}_S = [x_1, \cdots, x_n] \in R^n$ (tzv. souřadnice bodu X), nazýváme soustava souřadnic v afinním prostoru A_n. Bod O se nazývá počátkem soustavy souřadnic. Souřadnicemi vektoru $u \in V$ vzhledem k S rozumíme jeho souřadnice $u_S = (u_1, \cdots, u_n) \in R^n$ vzhledem k bázi $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$, tj. $u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \cdots + u_n e_n = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i$, kde $u_i \in R$.

Zvolíme-li nový repér $\langle P; d_1, d_2, \cdots, d_n \rangle$, který ve stejném prostoru definuje soustavu souřadnic $S^{'}$, vyjádříme stejný vektor $u \in V$ lineární kombinací

$$u = u_1^{'} d_1 + u_2^{'} d_2 + \cdots + u_n^{'} d_n = \sum_{j=1}^{n} u_j^{'} d_j \, , u_j^{'} \in R.$$

Pro souřadnice libovolného vektoru u v soustavě S a $S^{'}$, kde

$$u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)^T,$$

$$u^{'} = \left(u_1^{'}, u_2^{'}, \cdots, u_n^{'}\right)^T,$$

platí transformační vztah

$$u' = A \cdot u.$$

[7] Repér je uspořádaná $(n+1)$-tice $\langle O; e_1, \cdots, e_n \rangle$, kde $O \in A_n$ je pevně zvolený bod a $\{e_1, \cdots, e_n\}$ je báze prostoru V.

Pokud vztah rozepíšeme, dostáváme

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Matice A je maticí přechodu od báze $\{e_i\}$ k bázi $\{d_j\}$ vektorového prostoru V, můžeme tedy říct, že je maticí endomorfismu vektorového prostoru V. Její sloupce tvoří souřadnice nových bázových vektorů d_j vzhledem k původní bázi $\{e_i\}$. Snadno se můžeme přesvědčit, že matice A je regulární. Pokud by tomu tak nebylo, byl by jeden řádek nulový, nebo by byl lineární kombinací zbývajících řádků.

Pokud zaměníme obě báze $\{e_i\}$ a $\{d_j\}$, získáme obdobnou rovnici

$$u = B \cdot u'.$$

Sloupce matice B tvoří souřadnice starých bázových vektorů e_i vzhledem k nové bázi $\{d_j\}$.

Pokud oba výše uvedené vztahy sloučíme do jednoho, získáme vztah

$$u' = A \cdot B \cdot u',$$

z něhož vyplývá, že

$$A \cdot B = E \quad \to \quad B = A^{-1}.$$

Pro transformaci souřadnic bodu X v afinním prostoru A_n platí vztah

$$x = A \cdot x' + b,$$

po rozepsání

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

nový počátek P má vzhledem ke staré souřadné soustavě souřadnice $b = [b_1, b_2, \cdots, b_n]^T$.

7.2 Definice. Geometrickým zobrazením nazýváme předpis $g: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, které každému bodu X z množiny $\mathcal{A}$ (tzv. vzoru) přiřazuje nejvýše jeden bod $X' = g(X)$ z množiny $\mathcal{B}$ (tzv. obraz).

Geometrické zobrazení $g: A_n \to A_n$ definované na afinním prostoru A_n, které zachovává kolinearitu, rovnoběžnost a dělící poměr je speciálním případem afinního zobrazení. Toto afinní zobrazení indukuje zobrazení $f: R^n \to R^n$, v němž je každému vektoru OX přiřazen vektor $O'X'$, platí $O'X' = f(OX) = g(X) - g(O)$, kde $g(X) = X'$ je obraz bodu X v afinním zobrazením g, $g(O) = O'$ je obraz počátku soustavy souřadnic O v afinním zobrazení g. Odtud lze získat analytické vyjádření afinního zobrazení g ve tvaru:

$$g(X) = f(OX) + g(O),$$

tj.

$$X' = A \cdot X + O',$$

kde A je matice endomorfismu f.

Vztah pro souřadnice vzoru X a obrazu X' v zobrazení g lze napsat též po složkách

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} o_1 \\ o_2 \\ \vdots \\ o_n \end{pmatrix}.$$

Shodná zobrazení

Nejprve připomeňme, že eukleidovský prostor je afinní prostor, v jehož vektorovém zaměření je definován skalární součin dvou vektorů. Pomocí skalárního součinu lze definovat vzdálenost dvou bodů

$$|XY| = |y - x| = \sqrt{(y - x)^2}.$$

7.3 Definice. Buď E_n eukleidovský prostor. Afinní zobrazení $f: E_n \to E_n$ se nazývá shodné zobrazení (shodnost), právě když pro každé dva body $X, Y \in E_n$ a jejich obrazy $X', Y' \in E_n$ platí $|X'Y'| = |XY|$.

Z výše uvedeného tvrzení také vyplývá, že shodná zobrazení zachovávají velikost úhlů, obsahy a objemy.

Každá shodnost má analytické vyjádření

$$f: x' = A \cdot x + b.$$

Tato rovnice popisuje shodnost právě tehdy, když matice A je ortonormální, jinak řečeno platí

$$A^T \cdot A = E.$$

Pro každou ortonormální matici A platí

$$det(A^T \cdot A) = detA^T \cdot detA = (detA)^2 = detE = 1,$$

což nastává ve dvou případech, buďto je $detA = +1$ (přímá shodnost), nebo $detA = -1$ (nepřímá shodnost).

V případě přímé shodnosti je maticí A matice

$$A_\varphi^+ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

v případě nepřímé shodnosti pak

$$A_\varphi^- = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

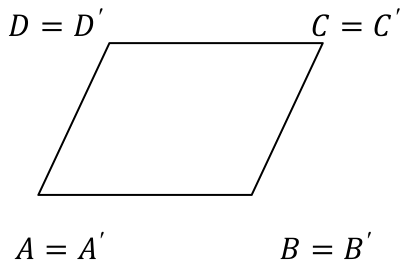
Pro shodná zobrazení v rovině je ortonormální matice typu 2×2 a hodnoty úhlu φ jsou z intervalu $\langle 0,2\pi \rangle$.

Analytické vyjádření přímé shodnosti je

$$f: x' = A_\varphi^+ \cdot x + b.$$

Podle hodnoty úhlu φ a vektoru b rozlišujeme následující typy přímých shodností – identita, posunutí (translace), otočení (rotace) a její speciální druh středovou souměrnost. Jestliže je $\varphi = 0$ (tj. $A_\varphi^+ = E$, a tedy E je matice endomorfismu indukovaného takovým afinním zobrazením) a vektor b je nulový, potom zobrazení f je identitou

$$id: x' = x.$$



Obr. 2: Identita

Pokud tedy rozepíšeme obecné analytické zobrazení pro shodnost

$$f: x' = A \cdot x + b,$$

dosadíme za A matici endomorfismu

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix},$$

tedy konkrétně pro identitu platí, že φ je rovno nule a dostaneme tím

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože b je nulový vektor, můžeme psát

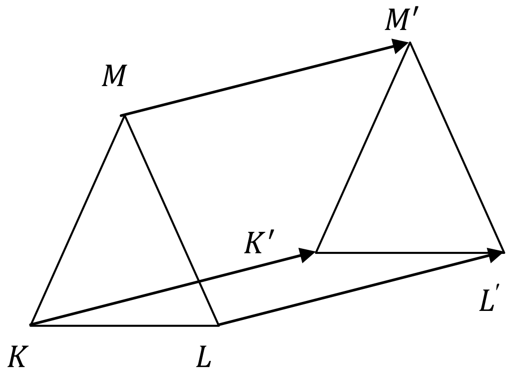
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

po úpravě

$$x' = x,$$
$$y' = y.$$

Jestliže je $\varphi = 0$ (tj. $A_\varphi^+ = E$) a vektor b je nenulový, potom se jedná o posunutí (translaci) s vektorem posunutí b, značíme

$$\mathcal{T}_b: x' = x + b.$$



Obr. 3: Posunutí

Obdobně jako u identity, i v tomto případě můžeme rozepsat analytické vyjádření posunutí. Úhel φ je opět nulový, proto matice A je ve tvaru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor posunutí je však nenulový, proto jej napíšeme obecně, jako

$$b = (b_1, b_2).$$

Po dosazení do obecné rovnice tedy získáme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

tedy

$$x' = x + b_1,$$
$$y' = y + b_2.$$

Je-li $\varphi \neq 0$ (tj. existuje-li právě jeden samodružný bod[8] S), potom je f otočení (rotace) se středem S a úhlem otočení φ:

$$\mathcal{R}_{S,\varphi}: x' = A_\varphi^+(x - s) + s.$$

Pokud obecnou rovnici rozepíšeme, dosadíme za matici endomorfismu

$$A_\varphi^+ = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

a střed rotace S má souřadnice

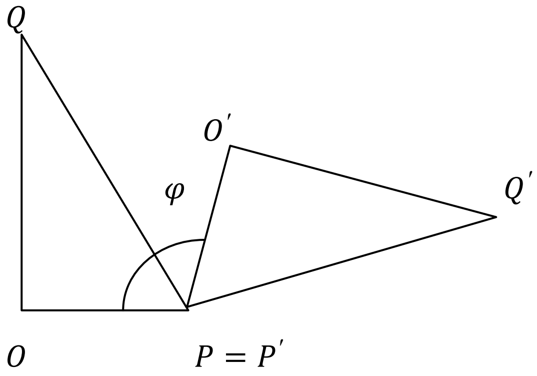
$$S = [s_1, s_2].$$

Po dosazení tedy dostáváme

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - s_1 \\ x - s_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$$

a po úpravě získáme

$$x' = (x - s_1) \cdot \cos\varphi - (y - s_2) \cdot \sin\varphi + s_1,$$
$$y' = (x - s_1) \cdot \sin\varphi + (y - s_2) \cdot \cos\varphi + s_2.$$



Obr. 4: Rotace

V případě, že $\varphi = \pm\pi$, je rotace f středovou souměrností se středem S:

$$S_s: x' = -x + 2s.$$

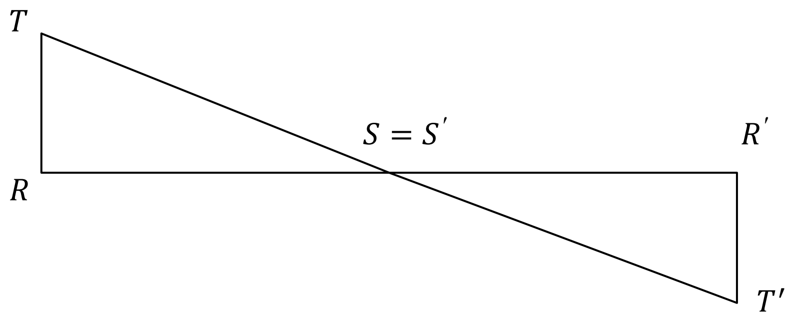
Taktéž rovnici středové souměrnosti můžeme rozepsat na jednotlivé složky. Po dosazení $\varphi \pm \pi$ do matice endomorfismu v obecné rovnici shodného zobrazení jsme získali předpis

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

[8] Máme-li zobrazení f množiny $\mathcal{A}$ na množinu $\mathcal{A}'$, pak bod $S \in \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$ nazveme samodružným bodem, pokud platí $f(S) = S$.

Po úpravě

$$x^{'} = -x + 2 \cdot s_1,$$
$$y^{'} = -y + 2 \cdot s_2.$$



Obr. 5: Středová souměrnost

Obdobně jako shodnost přímou můžeme nepřímou shodnost v rovině analyticky zapsat

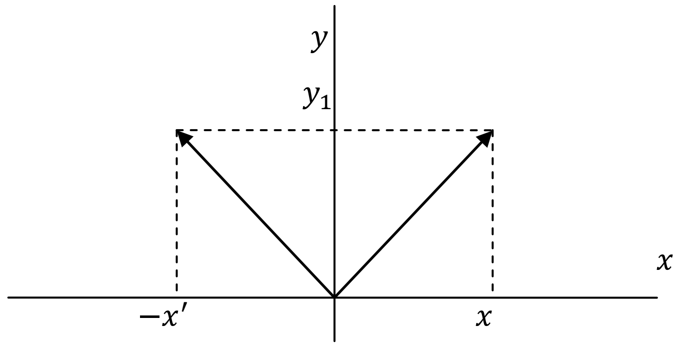
$$f: x^{'} = A_{\varphi}^{-} \cdot x + b.$$

Podle existence samodružných bodů pak rozlišujeme jednak osovou souměrnost $\mathcal{O}_O$ s osou o, jednak posunutou souměrnost (posunuté zrcadlení), které je složením osové souměrnosti $\mathcal{O}_O: x^{'} = A \cdot x + b^{'}$ a translace $\mathcal{T}_{\vec{u}}: x^{'} = x + u$, kde $\vec{u} \parallel o$.

Příklad 35. Vraťme se k příkladu č. 26 a použijme předpis pro zobrazení z tohoto příkladu, pouze upravíme značení. Předpis je

$$f(x_1, y_1) = (-x_1, y_1).$$

Pokud budeme dvojice reálných čísel znázorňovat v pravoúhlé soustavě souřadnic jako geometrické vektory s počátkem v bodě $[0,0]$ a s koncovým bodem v bodě $[x_1, y_1]$ zjistíme, že zobrazením f je každému vektoru přiřazen vektor osově souměrný podle osy y.



Obr. 6: Osová souměrnost

Podobná zobrazení

Jednoduše řečeno, jsou podobná zobrazení euklidovského prostoru zobrazení, jež zachovávají tvar geometrických útvarů.

7.4 Definice. Buď E_n euklidovský prostor. Afinní zobrazení $f: E_n \to E_n$ se nazývá podobné zobrazení (podobnost), jestliže existuje takové reálné číslo $k > 0$ (tzv. poměr podobnosti), že pro každé dva body $X, Y \in E_n$ a jejich obrazy $X', Y' \in E_n$ platí $|X'Y'| = k \cdot |XY|$.

Pokud je poměr podobnosti $k = 1$, hovoříme o tzv. nevlastní podobnosti. Pro $k \neq 1$ je pak podobnost označována jako vlastní. Z definice 7.4 také plyne, že podobná zobrazení zachovávají velikost úhlů, poměry obsahů a objemů.

Podobnost je popsána rovnicí

$$f: x' = A \cdot x + b$$

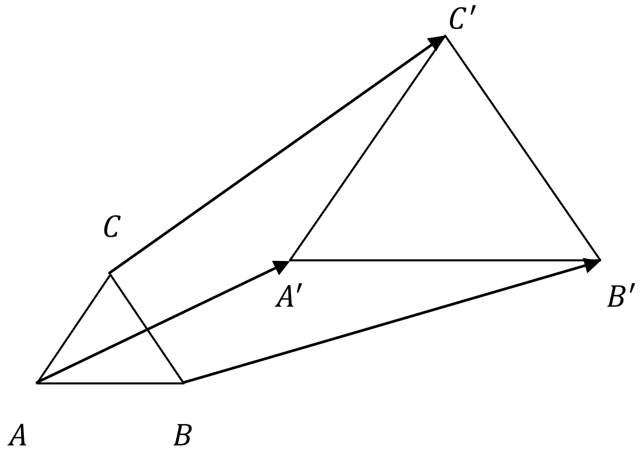
právě tehdy, když pro matici A platí

$$A^T \cdot A = k^2 \cdot E,$$

neboli

$$\left(\frac{1}{k} \cdot A\right)^T \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot A\right) = E,$$

tj. existuje k takové, že matice $\left(\frac{1}{k} \cdot A\right)$ je ortogonální.



Obr. 7: Podobnost

Příklad 36. Dokažte, že matice A je maticí podobného zobrazení.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Jak je uvedeno výše, matice podobného zobrazení musí splňovat podmínku

$$A^T \cdot A = k^2 \cdot E$$

Snadno se přesvědčíme, že matice transponovaná k matici A je

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jednoduchým výpočtem zjistíme, že

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podmínka tedy platí a můžeme říci, že

$$k^2 = 5 \quad \rightarrow \quad |k| = \sqrt{5}.$$

Závěr

Cílem této bakalářské práce bylo podat ucelený přehled základních informací o endomorfismech vektorového prostoru. Také příklady jsem volila tak, aby vhodně doplnily výklad a tím dopomohly ke snadnějšímu pochopení dané problematiky.

Samozřejmě jsem ve své práci neobsáhla veškeré otázky týkající se endomorfismů, což ani nebylo mým cílem. Především v poslední kapitole jsem se věnovala pouze užití endomorfismů ve shodném a podobném zobrazení v rovině, ačkoliv možnosti využití endomorfismů v geometrii jsou daleko rozsáhlejší. Záměrně jsem si zvolila pouze tuto oblast geometrie, protože se s touto problematikou každý setkává již na základní škole. Nicméně užití endomorfismu umožňuje zabývat se jednoduchým zobrazením v rovině z jiné stránky.

Resumé

How it is resulted of the topic, this thesis is concerned on one concrete type of the linear picture : the endormorphism. It is based on the picture of vector space V to the same vector space V. The aim of this thesis is to report the comprehensive summary of some basic information about this type of picture.

The term of endomorphism, its nub and its picture is progressively defined in the particular chapters. Furthermore there are mentined some of basic examples of endomorphism, the features of this picture and the types. Each linear picture is possible to represent by the perspective of matrix, one of these chapters is dedicated to this problem, too. The final charter is specialized on the aplication of these endomorphisms and concretely its application in geometry.

The definitions and the theorems are completed by many concrete examples in this thesis. These examples should assist to understand these statements to the reader. The instructions and the explanations how to proceed in calculation are mentioned in most of these examples.

Seznam literatury

[1] BEČVÁŘ, Jindřich. *Lineární algebra*. 4. vyd. Praha: Matfyzpress, 2010. ISBN 978-807378-135-4.

[2] BEČVÁŘ, Jindřich. *Z historie lineární algebry*. 1. vyd. Praha: Matfyzpress, 2007. ISBN 978-807378-036-4.

[3] BICAN, Ladislav. *Lineární algebra a geometrie*. 1. vyd. Praha: Academia, 2000. 197 s. ISBN 80-200-0843-8.

[4] HLADÍK, Milan. Afinní podprostory. In: *Lineární algebra (nejen) pro informatiky*. 2013. Dostupné z: http://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA/text_la.pdf

[5] LÁVIČKA, Miroslav. KMA/G1 Geometrie 1. Pomocný učební text. Plzeň, 2008. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G1/texty/G1_texty.pdf

[6] LÁVIČKA, Miroslav. KMA/G2 Geometrie 2. Pomocný učení text. Plzeň, 2006. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G2/texty/G2_text.pdf

[7] OLŠÁK, Petr. *Lineární algebra*. Praha, 2010. Dostupné z: ftp://math.feld.cvut.cz/pub/olsak/linal/linal2.pdf

Seznam obrázků