ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

POSLOUPNOSTI A ŘADY: ZÁKLADNÍ VLASTNOSTI, LIMITY: ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Kristýna Suchanová

Přírodovědná studia, obor Matematika

Vedoucí práce: Mgr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň, 2014

Zde se nachází oficiální zadání bakalářské práce.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci na téma

„Posloupnosti a řady: základní vlastnosti, limity: řešené příklady“

vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, dne ....

....

Kristýna Suchanová

V tomto místě bych ráda poděkovala vedoucímu mé bakalářské práce panu Mgr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D. za poskytnutí mnoha cenných odborných rad a připomínek a za ochotu a čas strávený při konzultacích.

Obsah

Úvod

Bakalářská práce se zabývá problematikou posloupností a nekonečných číselných řad. Přestože byla tato látka v minulosti již několikrát zpracována, rozhodla jsem se jí podrobněji zabývat v mé bakalářské práci především proto, že se jedná o učivo probírané jak na středních, tak vysokých školách a vždy se jednalo o jeden z mých oblíbených matematických oborů.

Hlavním záměrem bylo shrnout základní údaje k této problematice a doplnit je o řešené příklady. Snažila jsem se vytvořit jakýsi ucelený učební text, který by studentům jasně a stručně osvětlit toto učivo a pomohl jim při řešení matematických úkonů spojených s touto látkou.

Práce je rozdělena do dvou částí. První část je převážně teoretická a definuje pojem posloupnost a nekonečná číselná řada. Dále se zabývá základními vlastnostmi posloupností a nekonečných číselných řad, výpočtem jejich limity a konvergence. Tato teorie je doplněna o jednoduché řešené příklady, které napomáhají k pochopení probírané látky.

Druhá praktická část práce je pojata jako kapitola řešených příkladů. Zde jsou řešeny komplexní příklady za pomoci metod objasněných v teoretické části práce. Většina zvolených příkladů je vybrána z internetové sbírky úloh Trial z Fakulty aplikovaných věd, které jsem doplnila o své vlastní poznámky a řešení.

Výsledný text by měl sloužit především jako jednoduchá pomůcka pro studium základních pojmů z matematické analýzy a napomoct s jejich řešením.

1 Posloupnosti

1.1 Definice posloupnosti

Posloupnost (ať konečná či nekonečná) je funkce, jejímž definičním oborem je podmnožina množiny přirozených čísel. Funkční hodnota této funkce přiřazená číslu $n \epsilon N$ se nazývá n-tý člen posloupnosti a značí se nejčastěji a_n, b_n apod. Posloupnost s n-tým členem a_n se značí $\{a_n\}$. Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů $\{n; a_n\}$ roviny, kde $n \epsilon N$.

Posloupnost je nejčastěji zadána jedním z těchto tří způsobů:

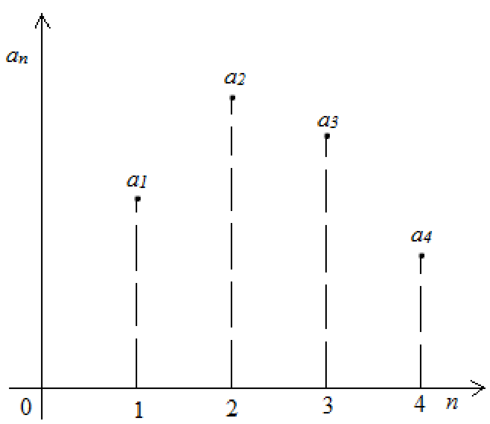
a) analytickým vyjádřením tedy vzorcem, vyjadřující n-tý člen posloupnosti pomocí n

b) rekurentním vyjádřením určeným nejčastěji prvním členem a vzorcem vyjadřujícím člen posloupnosti (nejčastěji člen $n + 1$) v závislosti na předchozích

c) výčtem prvků členů posloupnosti (a to i částečným), z něhož lze určit charakteristickou vlastnost posloupnosti

d) grafickým znázorněním tedy zobrazením v souřadnicové soustavě v rovině. Toto znázornění je podobné jako vyjádření výčtem prvků, avšak v případě grafického znázornění vynášíme jednotlivé hodnoty prvků posloupnosti do grafu. Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů, které odpovídají hodnotám členů posloupnosti $\{a_n\}$. Na osu x vynášíme hodnoty nezávislé proměnné n a na osu y pak hodnoty a_n. [10]

Obrázek č. 1: Ilustrační graf posloupnosti (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



1.1.1 Řešené příklady podle typu zadání posloupnosti a grafické znázornění posloupnosti

Př. 1. Napište prvních šest členů posloupnosti $a_n = 8n$. Posloupnost graficky znázorněte.

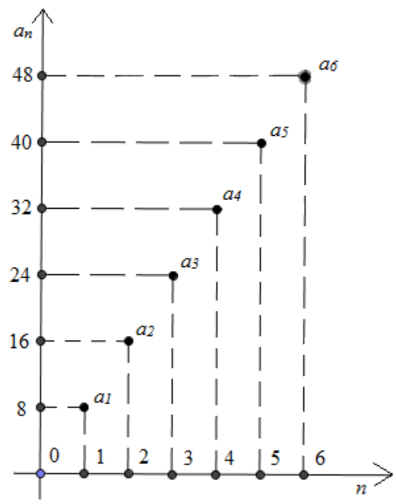
Řešení:

Máme zadaný vzorec, vyjadřující n-tý člen posloupnosti $a_n = 8n$. Do vzorce pro n-tý člen posloupnosti budeme postupně zadávat hodnoty jednotlivých členů. Pro první člen je hodnota $n = 1$. První člen $a_1 = 8 \cdot 1$ je roven hodnotě 8. Pro druhý člen a_2 je hodnota $n = 2$. Druhý člen $a_2 = 8 \cdot 2$ je roven hodnotě 16. Pro další členy posloupnosti bude platit stejné pravidlo a jako poslední člen spočteme člen a_6. Pro šestý člen a_6 je hodnota $n = 6$. Šestý člen $a_6 = 8 \cdot 6$ je roven hodnotě 48.

Výsledných šest členů posloupnosti $a_n = 8n$ zapíšeme: $a_1 = 8$, $a_2 = 16$, $a_3 = 24, a_4 = 32, a_5 = 40, a_6 = 48$.

Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů, které odpovídají hodnotám členů $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ posloupnosti $\{a_n\}$. Na osu *x* vynášíme hodnoty nezávislé proměnné n od 1 do 6 a na osu *y* pak hodnoty a_n posloupnosti $\{a_n\}$.

Obrázek č. 2: Graf posloupnosti k příkladu č. 1 (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



Př. 2. Je dáno prvních sedm členů konečné posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25, a_6 = 36, a_7 = 49$. Určete jeden z možných předpisů pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$.

Řešení:

Pozorně si prohlédneme zadaných prvních sedm členů posloupnosti $\{a_n\}$: $a_1 = 1, a_2 = 4, a_3 = 9, a_4 = 16, a_5 = 25, a_6 = 36, a_7 = 49.$ Ze vztahu po sobě jdoucích členů je patrné, že se jedná o posloupnost se vztahem n^2, předpis pro n-tý člen konečné posloupnosti $\{a_n\}$ tedy bude $\{a_n\} = n^2$.

Zpětným dosazením do předpisu pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$, který jsme určili $\{a_n\} = n^2$, ověříme, zda jsme předpis pro n-tý člen posloupnosti $\{a_n\}$ určili správně.

Př. 3. Napište prvních pět členů rekurentně zadané posloupnosti $\{a_n\}$, kde $a_1 = 10$ a $a_{n+1} = a_n - 3$. Výsledných prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}$ graficky znázorněte.

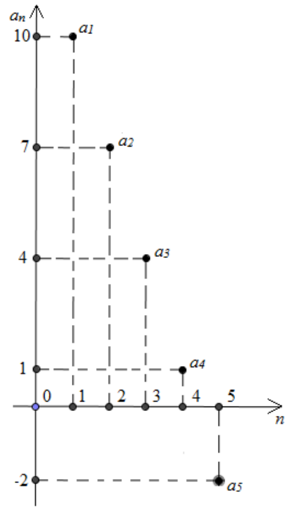
Řešení:

Ze zadání víme, že první člen a_1 je roven hodnotě 10. Ze vztahu $a_{n+1} = a_n - 3$, kde člen a_n předchází členu a_{n+1} je patrné, že každý následující člen bude menší o hodnotu 3 než člen jemu předcházející. Je-li hodnota prvního členu a_1 rovna 10, následující člen a_2 musí být menší o hodnotu 3. Člen $a_2 = a_1 - 3$. Po dosazení je tedy člen a_2 roven hodnotě $10 - 3$. Člen $a_2 = 7$. Další člen a_2 předchází členu a_3. Hodnota členu a_3 musí být o 3 menší než hodnota členu a_2. Člen $a_3 = a_2 - 3$. Po dosazení je tedy člen a_3 roven hodnotě $7 - 3$. Člen $a_3 = 4$. Pro další členy posloupnosti $\{a_n\}$ bude platit stejné pravidlo.

Výsledných prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}$ má tedy hodnoty $a_1 = 10, a_2 = 7, a_3 = 4, a_4 = 1, a_5 = -2$.

Jako poslední graficky znázorníme vypočtených prvních pět členů posloupnosti $\{a_n\}$. Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů, které odpovídají hodnotám členů posloupnosti a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Na osu x vynášíme hodnoty nezávislé proměnné n od 1 do 5 a na osu y pak hodnoty a_n posloupnosti $\{a_n\}$.

Obrázek č. 3: Graf posloupnosti k příkladu č. 3 (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



1.2 Vlastnosti posloupností

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *omezená*, existuje-li číslo $K > 0$ takové, že platí

$|a_n| \leq K \qquad \forall n \in N.$

Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá:

a) *shora omezená,* existuje-li číslo M takové, že

$b_n \leq M \qquad \forall n \in N;$

b) *zdola omezená,* existuje-li číslo m takové, že

$b_n \geq m \qquad \forall n \in N.$

Číslo $a \in A$, kde množina A je podmnožinou R, se nazývá *minimum* množiny A, pokud $\forall x \in A$ platí $a \leq x$.

Minimem posloupnosti $\{x_n\}$ se rozumí minimum množiny $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; značí se $min\{x_n\}$.

Číslo $b \in A$, kde množina A je podmnožinou R, se nazývá *maximum* množiny A, pokud $\forall x \in A$ platí $b \geq x$.

Maximem posloupnosti $\{x_n\}$ se rozumí maximum množiny $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$; značí se $max\{x_n\}$.

Pro definici suprema a infima definujeme podmnožinu R^* jako množinu $R + \{\pm\infty\}$.

Supremum množiny A, kde A je podmnožinou R^*, je číslo $h \epsilon R^*$ takové, že

a) $\forall x \epsilon A: x \leq h$ „h je horní závora"

b) $\forall x_1 \epsilon R^*: x_1 < h \Rightarrow \exists x_2 \epsilon A: x_2 > x_1$ „h je nejmenší horní závora"

Supremem posloupnosti $\{x_n\}$ se rozumí supremum množiny $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$; značí se $sup\{x_n\}$.

Infimum množiny A, kde A je podmnožinou R^*, je číslo $d \epsilon R^*$ takové, že

a) $\forall x \epsilon A: d \leq x$ „d je dolní závora"

b) $\forall x_1 \epsilon R^*: d < x_1 \Rightarrow \exists x_2 \epsilon A: x_2 < x_1$ „d je největší dolní závora"

Infimem posloupnosti $\{x_n\}$ se rozumí infimum množiny $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$; značí se $inf\{x_n\}$.

Je – li posloupnost $\{a_n\}$ shora neomezená, píšeme $sup\{a_n\} = +\infty$.

Je – li posloupnost $\{a_n\}$ zdola neomezená, píšeme $inf\{a_n\} = -\infty$. [1, s. 32]

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *konstantní*, pokud

$a_{n+1} = a_n$ pro všechna $n \epsilon N$.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá

rostoucí, platí-li	$a_{n+1} \geq a_n$	$\forall n \epsilon N$;
ostře rostoucí, platí-li	$a_{n+1} > a_n$	$\forall n \epsilon N$;
klesající, platí-li	$a_{n+1} \leq a_n$	$\forall n \epsilon N$;
ostře klesající, platí-li	$a_{n+1} < a_n$	$\forall n \epsilon N$.

V některých publikacích můžeme místo pojmu *klesající* nalézt názvosloví *nerostoucí* a místo pojmu *rostoucí* můžeme nalézt názvosloví *neklesající*. V této práci však budeme dále pracovat s názvoslovím uvedeným výše.

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *monotónní*, pokud pro její členy platí *neostrá nerovnost.*

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *ostře monotónní,* pokud pro její členy platí *ostrá nerovnost.* [1, *s. 31*]

1.2.1 Řešené příklady na vlastnosti posloupností

Př. 1. Určete, zda zadaná posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí, klesající, ostře rostoucí nebo ostře klesající.

a) $a_n = -n + 2$

b) $a_n = n^2 - 7n + 12$

c) $a_n = \sqrt{n + 8}$

Řešení:

a) Při řešení využijeme vztah $a_{n+1} \leq a_n$ kdy předpokládáme, že posloupnost $a_n = -n + 2$

bude ostře klesající.

Za členy posloupnosti $a_{n+1} < a_n$ dosadíme členy zadané posloupnosti $a_n = -n + 2$. Tedy člen $a_n = -n + 2$ a člen $a_{n+1} = -(n + 1) + 2$. Po úpravě dostáváme vztah $-n + 1 < -n + 2$. Nerovnici dále upravíme na konečný výsledek $1 < 2$. Z výsledné nerovnice je patrné, že platí původní vztah $a_{n+1} < a_n$ a posloupnost $a_n = -n + 2$ je ostře klesající.

Posloupnost $a_n = -n + 2$ je ostře klesající.

b) Při řešení využijeme vztah $a_{n+1} \geq a_n$ kdy předpokládáme, že posloupnost $a_n = n^2 - 7n + 12$ bude rostoucí.

Za členy posloupnosti $a_{n+1} \geq a_n$ dosadíme členy zadané posloupnosti $a_n = n^2 - 7n + 12$. Tedy člen $a_n = n^2 - 7n + 12$ a člen $a_{n+1} = (n + 1)^2 - 7(n + 1) + 12$. Po úpravě dostáváme vztah $n^2 - 7n + 12 \geq n^2 - 5n + 6$. Rovnici dále řešíme následujícím způsobem:

$$-2n \geq -6$$

$$n \leq 3$$

Z výsledné nerovnice je patrné, že platí původní vztah $a_{n+1} \geq a_n$ a posloupnost $a_n = n^2 - 7n + 12$ je rostoucí od třetího členu posloupnosti. Zbývá určit, jak vypadá posloupnost ve svých prvních třech členech. Ty vypočítáme dosazením do předpisu posloupnosti. Zjistíme, že $a_1 = 6$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$. Posloupnost $a_n = n^2 - 7n + 12$ je tedy klesající pro své první tři členy a od třetího členu je rostoucí.

c) Při řešení využijeme vztah $a_{n+1} > a_n$ kdy předpokládáme, že posloupnost $a_n = \sqrt{n+8}$ bude ostře rostoucí.

Za členy posloupnosti $a_{n+1} > a_n$ dosadíme členy zadané posloupnosti $a_n = \sqrt{n+8}$. Tedy člen $a_n = \sqrt{n+8}$ a člen $a_{n+1} = \sqrt{(n+1)+8}$. Po úpravě dostáváme vztah $\sqrt{n+9} > \sqrt{n+8}$. Nerovnici umocníme na druhou, abychom odstranili odmocninu, a poté dále řešíme následujícím způsobem:

$$n + 9 > n + 8$$

$$9 > 8$$

Z výsledné nerovnice je patrné, že platí původní vztah $a_{n+1} > a_n$ a posloupnost $a_n = \sqrt{n+8}$ je ostře rostoucí.

Posloupnost $a_n = \sqrt{n+8}$ je ostře rostoucí.

V následujících příkladech při řešení vyžijeme výpočet limity posloupnosti $\{a_n\}$, viz kapitola Limita posloupnosti $\{a_n\}$.

Př. 2. Určete, zda zadaná posloupnost $\{a_n\}$ je omezená shora, omezená zdola nebo omezená.

a) $a_n = n^2 - 9$

b) $a_n = \frac{n-4}{n+7}$

Řešení:

Omezenost posloupnosti $\{a_n\}$ zjistíme výpočtem limity posloupnosti $\{a_n\}$.

a) Pro posloupnost $a_n = n^2 - 9$ budeme počítat limitu $\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 9)$. Z výsledku $\lim_{n\to+\infty}(n^2 - 9) = +\infty$ je patrné, že posloupnost $a_n = n^2 - 9$ není shora omezená a nebude tedy ani omezená.

Jako poslední krok zjistíme, zda je posloupnost $a_n = n^2 - 9$ omezená zdola. K vypočtené limitě musíme přidat výpočet monotonie posloupnosti $a_n = n^2 - 9$. Tu vypočteme pomocí vzorce $a_{n+1} \geq a_n$, kdy budeme předpokládat, že posloupnost $a_n = n^2 - 9$ bude rostoucí. Po dosazení dostáváme vztah $(n+1)^2 - 9 \geq n^2 - 9$ a tento vztah dále upravíme do tvaru $n^2 + 2n - 8 \geq n^2 - 9$. Výsledná nerovnice bude vypadat $n \geq -\frac{1}{2}$ a z tohoto výsledku je zřejmé, že posloupnost $a_n = n^2 - 9$ je rostoucí, dokonce je ostře rostoucí. Posloupnost $a_n = n^2 - 9$ je tedy zdola omezená a to hodnotou prvního členu $a_1 = 1^2 - 9$.

Posloupnost $a_n = n^2 - 9$ je tedy zdola omezená číslem -8.

b) Pro posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ budeme počítat limitu $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-4}{n+7})$. Z výsledku $\lim_{n\to+\infty}(\frac{n-4}{n+7}) = 1$ je patrné, že členy posloupnosti $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ se blíží k hodnotě 1. Předpokládejme, že posloupnost bude omezená shora hodnotou 1 a tento vztah vyjádříme jako $a_n < 1$. Po dosazení dostaneme nerovnici $\frac{n-4}{n+7} < 1$, kterou upravíme následujícím způsobem:

$$n - 4 < n + 7$$

$$0 < 11$$

Z výsledku je zřejmé, že posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ je omezená shora hodnotou 1.

Nyní vyšetříme, zda je posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ omezená zdola. K vypočtené limitě musíme přidat výpočet monotonie posloupnosti $a_n = \frac{n-4}{n+7}$. Tu vypočteme pomocí vzorce $a_{n+1} \geq a_n$, kdy budeme předpokládat, že posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ bude rostoucí. Po dosazení dostáváme vztah $\frac{(n+1)-4}{(n+1)+7} \geq \frac{n-4}{n+7}$ a tento vztah dále upravíme do tvaru $n^2 + 4n - 21 \geq n^2 + 4n - 32$. Výsledná nerovnice bude vypadat $11 \geq 0$ a z tohoto výsledku je zřejmé, že posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ je rostoucí, dokonce je ostře rostoucí, neboť v celém řetězci právě provedených úprav lze znaménko nerovnosti $\geq$ nahradit znaménkem $>$. Posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ je tedy zdola omezená a to hodnotou prvního členu $a_1 = \frac{1-4}{1+7}$. Posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ je tedy zdola omezená číslem $\frac{-3}{8}$.

Celkově je posloupnost $a_n = \frac{n-4}{n+7}$ omezená shora číslem 1 a zdola číslem $\frac{-3}{8}$ a je tady omezená.

Př. 3. Určete maximum, minimum, supremum a infimum zadané posloupnosti $\{a_n\}$.

a) $a_n = n^3 + 5n - 3$

b) $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$

Řešení:

a) Jako první krok spočteme limitu posloupnosti $a_n = n^3 + 5n - 3$. Z výsledku $\lim_{n\to+\infty}(n^3 + 5n - 3) = +\infty$ zjistíme, že posloupnost $a_n = n^3 + 5n - 3$ není shora omezená a tedy pro ni neexistuje maximum. Dále vidíme, že $\sup(\mathrm{n}^3 + 5\mathrm{n} - 3) = +\infty$.

Zbývá určit minimum a infimum posloupnosti $a_n = n^3 + 5n - 3$. Tyto hodnoty vypočteme pomocí vzorce $a_{n+1} \geq a_n$, kdy budeme předpokládat, že posloupnost $a_n = n^3 + 5n - 3$ bude rostoucí. Po dosazení dostáváme vztah $(n+1)^3 + 5(n+1) - 3 \geq n^3 + 5n - 3$ a tento vztah dále upravíme do tvaru $n^3 + 3n^2 + 8n + 3 \geq n^3 + 5n - 3$. Výsledná nerovnice bude vypadat $n^2 + n + 2 \geq 0$, a protože proměnou n volíme z množiny přirozených čísel N, je zřejmé, že posloupnost $a_n = n^3 + 5n - 3$ je rostoucí. Minimem posloupnosti $a_n = n^3 + 5n - 3$ bude tedy první člen $a_1 = 1^3 + 5 \cdot 1 - 3$. Minimum posloupnosti $a_n = n^3 + 5n - 3$ se rovná 3, dále víme, že pokud existuje minimum, jeho hodnota je shodná s infimem.

Výsledné hodnoty posloupnosti $a_n = n^3 + 5n - 3$ jsou: maximum neexistuje, supremum je rovno $+\infty$, minimum je rovno 3 a infimum je rovno 3.

b) Jako první krok vypočteme limitu posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$. Z výsledku $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n-7}{n+1}\right) = 3$ zjistíme, že členy posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ se blíží k hodnotě 3. Předpokládejme, že posloupnost bude omezená shora hodnotou 3 a tento vztah vyjádříme jako $a_n < 3$. Po dosazení dostaneme nerovnici $\frac{3n-7}{n+1} < 3$, kterou upravíme následujícím způsobem:

$$3n - 7 < 3(n+1)$$

$$-10 < 0$$

Z výsledku je zřejmé, že posloupnost $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ je omezená shora hodnotou 3. To znamená, že hodnota suprema posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ je rovna 3, avšak maximum posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ neexistuje, protože se hodnotě 3 pouze nekonečně blíží.

Zbývá určit minimum a infimum posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$. Tyto hodnoty vypočteme pomocí vzorce $a_{n+1} \geq a_n$, kdy budeme předpokládat, že posloupnost $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ bude rostoucí. Po dosazení dostáváme vztah $\frac{3(n+1)-7}{(n+1)+1} \geq \frac{3n-7}{n+1}$. Nerovnici dále upravujeme následujícím způsobem:

$$\frac{3n-4}{n+2} \geq \frac{3n-7}{n+1}$$

$$(3n-4) \cdot (n+1) \geq (3n-7) \cdot (n+2)$$

$$3n^2 - n - 4 \geq 3n^2 - n - 14$$

$$-4 \geq -14$$

Z výsledku nerovnice je zřejmé, že posloupnost $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ je rostoucí.

Minimem posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ bude tedy první člen $a_1 = \frac{3 \cdot 1-7}{1+1}$. Minimum posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ se rovná -2, dále víme, že pokud existuje minimum, jeho hodnota je shodná s infimem.

Výsledné hodnoty posloupnosti $a_n = \frac{3n-7}{n+1}$ jsou: maximum neexistuje, supremum je rovno 3, minimum je rovno -2 a infimum je rovno -2.

1.3 Aritmetická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *aritmetická*, právě když existuje takové reálné číslo d, že pro každé přirozené číslo n je

$a_{n+1} = a_n + d$

[6, s. 37]

Číslo d se nazývá *diference* aritmetické posloupnosti.

Dále platí: $\{a_n\}$ je rostoucí $\Leftrightarrow d > 0$;

$\{a_n\}$ je klesající $\Leftrightarrow d < 0$;

$\{a_n\}$ je konstantní $\Leftrightarrow d = 0$.

Grafem aritmetické posloupnosti je množina izolovaných bodů ležících na přímce (důsledek vzorce pro n-tý člen).

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ s diferencí d platí pro každé $n \epsilon N$

$a_n = a_1 + (n-1)d$. [6, s. 38]

K odvození využijeme vzorec $a_{n+1} = a_n + d$, kdy za členy posloupnosti $\{a_n\}$ postupně dosadíme. Dostaneme tak sled rovností, které budeme dále upravovat následujícím způsobem:

Nejprve vytvoříme soustavu rovnic: [11]

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d$$

$$a_4 = a_3 + d$$

...

$$a_n = a_{n-1} + d$$

Poté sečteme všechny pravé a levé členy soustavy: [11]

$$a_2 + a_3 + a_4 + .. + a_n = (a_2 + d) + (a_3 + d) + (a_4 + d) + .. + (a_n + d) + (a_{n-1} + d)$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + .. + a_n = a_2 + a_3 + a_4 + .. + a_n + a_{n-1} + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ s diferencí d platí $\forall r, s \epsilon N$

$a_s = a_r + (s-r)d$. [6, s. 39]

Pro součet s_n prvních členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$,

tj. pro $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, platí

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

[6, s. 41]

Odvození vzorce provedeme tak, že zapíšeme součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$, kdy všechny členy a_n aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ vyjádříme pomocí prvního členu a_1. Pak tento zápis provedeme ještě jednou, ale v obráceném pořadí. [11]

$$s_n = a_1 + (a_1 + d) + .. + [a_1 + (n-2)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$s_n = [a_1 + (n-1)d] + [a_1 + (n-2)d] + .. + (a_1 + d) + a_1$$

Tento vztah, dále sečteme a upravíme následujícím způsobem: [11]

$$2s_n = [a_1 + a_1 + (n-1)d] + .. + [a_1 + a_1 + (n-1)d]$$

$$2s_n = [a_1 + a_n] + [a_1 + a_n] + .. + [a_1 + a_n]$$

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

1.3.1 Řešené příklady na aritmetickou posloupnost

Př. 1. Dokažte, že zadaná posloupnost $a_n = 2n - 17$ je aritmetická a určete její diferenci d.

Řešení:

Pro ověření platnosti využijeme vzorec $a_{n+1} - a_n = d$. Po dosazení dostáváme rovnici $2(n+1) - 17 - 2n + 17 = d$. Z rovnice po úpravě vyplývá, že hodnota diference d je 2. Ověření provedeme pomocí vzorce $a_n = a_1 + (n-1)d$, kdy dosazením dostaneme rovnici $2n - 17 = 2 - 17 + (n-1)d$. Rovnici dále řešíme následujícím způsobem:

$$2n - 2 = nd - d$$

$$2(n-1) = d(n-1)$$

Nyní rovnici vydělíme výrazem $(n-1)$ a dostáváme konečný výsledek $d = 2$, čímž jsme ověřili platnost předchozího výpočtu.

Posloupnost $a_n = 2n - 17$ je aritmetická s diferencí $d = 2$.

Př. 2. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je zadán první člen $a_1 = 15$ a diference $d = 3$.

a) Kolikátý člen je roven číslu 150?

b) Který člen je nejblíže hodnotě 200? [7, *s. 68*].

Řešení:

a) Pro výpočet použijeme vzorec $a_n = a_1 + (n-1)d$. Po dosazení dostaneme rovnici $150 = 15 + (n-1)3$. Výsledkem je $n = 46$ a tudíž hodnotě 150 je roven člen a_{46}.

b) Pro výpočet použijeme vzorec $a_n = a_1 + (n-1)d$. Po dosazení dostaneme rovnici $200 = 15 + (n-1)3$. Jelikož se však žádný člen posloupnosti nerovná hodnotě 200 dostáváme pouze přibližnou hodnotu $n = \frac{188}{3}$. Výsledek zaokrouhlíme na $n = 62{,}6$. Budeme tedy muset vyšetřit členy a_{62} a a_{63}. Opět využijeme vzorec $a_n = a_1 + (n-1)d$ a po dosazení vypočítáme $a_{62} = 198$ a $a_{63} = 201$. Po porovnání obou členů vidíme, že k hodnotě 200 je nejblíže člen a_{63}.

Př. 3. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je zadaný sedmý člen posloupnosti $a_7 = 61$ a diference $d = \frac{3}{5}$. Určete hodnotu dvanáctého členu a_{12} posloupnosti $\{a_n\}$.

Řešení:

Pro výpočet dvanáctého členu a_{12} využijeme vzorec $a_s = a_r + (s-r)d$, kdy za a_s dosadíme člen a_{12} a za člen a_r dosadíme člen a_7. Po dosazení tedy získáme rovnici $a_{12} = 61 + (12-7)\frac{3}{5}$. Tuto rovnici dále řešíme následujícím způsobem:

$$a_{12} = 61 + \frac{36}{5} - \frac{21}{5}$$

$$a_{12} = 64$$

Hodnota dvanáctého členu aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je 64.

Př. 4. V aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ určete součet prvních dvaceti členů posloupnosti $\{a_n\}$, máme-li zadaný první člen posloupnosti $a_1 = -6$ a dvacátý člen posloupnosti $a_{20} = 74$.

Řešení:

Pro výpočet použijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Do vzorce dosadíme a získáme rovnici $s_{20} = \frac{20}{2}(-6 + 74)$. Tuto rovnici dále upravíme následujícím způsobem:

$$s_{20} = -\frac{120}{2} + \frac{1480}{2}$$

$$s_{20} = 680$$

Součet prvních dvaceti členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ je roven hodnotě 680.

Př. 5. Určete první člen aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$, máme-li zadaný součet prvních dvanácti členů $s_{12} = 520$ a dvanáctý člen $a_{12} = 80$.

Řešení:

Při řešení opět využijeme vzorec $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Do vzorce dosadíme a získáme rovnici $520 = \frac{12}{2}(a_1 + 80)$. Tuto rovnici dále upravíme následujícím způsobem:

$$520 = \frac{12a_1}{2} + \frac{960}{2}$$

$$2 \cdot 520 = 12a_1 + 960$$

$$a_1 = \frac{20}{3}$$

Hodnota prvního členu a_1 aritmetické posloupnosti je $\frac{20}{3}$.

1.4 Geometrická posloupnost

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *geometrická*, právě když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Číslo q se nazývá *kvocient* geometrické posloupnosti.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ s kvocientem $q \neq 0$ platí pro každé $n \epsilon N$

$a_n \ = a_1 \cdot q^{n-1}$.

V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ s kvocientem $q \neq 0$ platí pro každé $n \epsilon N$

$a_{\ s} = \ a_r \cdot q^{s-r}$.

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ s kvocientem q platí

a) je – li $q \ = \ 1$, pak $\qquad s_n = n \cdot a_1;$

b) je – li $q \ \neq \ 1$, pak $\qquad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Odvození vzorce provedeme tak, že zapíšeme součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$, kdy všechny členy a_n aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$ vyjádříme pomocí prvního členu a_1.

a) Pro každé $n \in N$ je $a_1 = a_1$, potom $s_n = a_1 + \cdots + a_1 = na_1$

b) $s_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1}$, tento vztah dále upravíme následujícím způsobem:

$$q \cdot s_n = a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^n$$

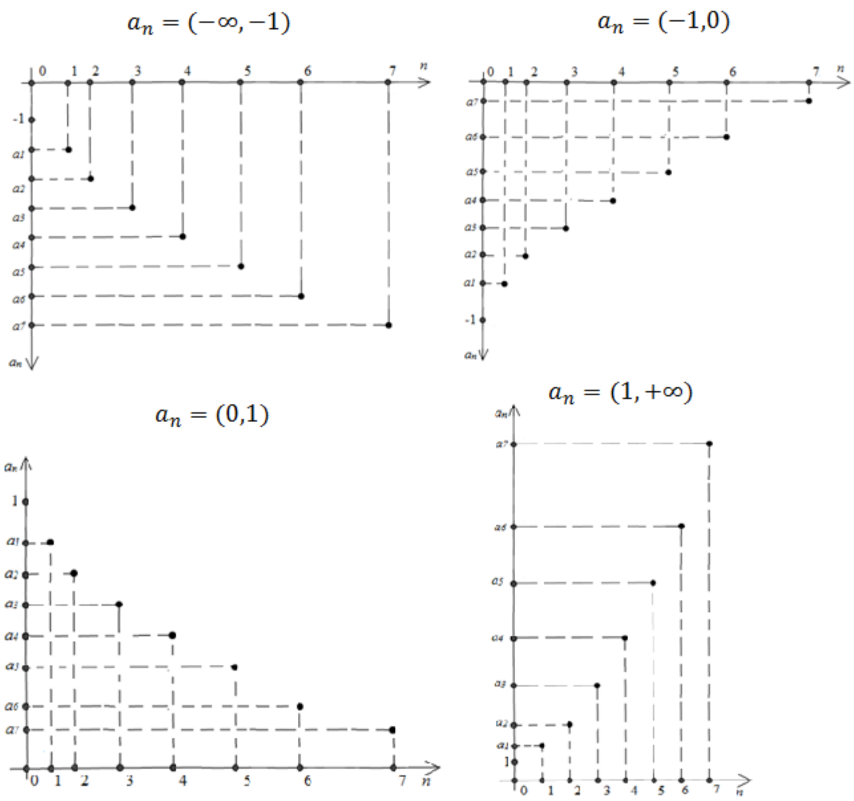
$$s_n(q-1) = a_1 q^n - a_1$$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

(Odvárko 2008, s. 50. – 53.).

Grafickým znázorněním pro geometrickou posloupnost $\{a_n\}$ je grafické znázornění exponenciely, kde:

Obrázek č. 4: Grafické znázornění geometrické posloupnosti (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



Speciálním případem je grafické znázornění, kdy grafem geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ mohou být i body ležící na přímce (pro $q = 1$) či body ležící na dvojici exponenciel (pro $q < 0 \wedge q \neq -1$) nebo body ležící na dvojici přímek (pro $q = -1$).

1.4.1 Řešené příklady na geometrickou posloupnost

Př. 1. V zadané geometrické posloupnosti $a_n = \frac{3^n}{4^{(n+2)}}$ určete kvocient q.

Řešení:

Pro výpočet kvocientu q využijeme vzorec $q = \frac{a_n+1}{a_n}$ Po dosazení dostáváme rovnici $q = \frac{\frac{3^{(n+1)}}{4^{(n+1)+2}}}{\frac{3^n}{4^{(n+2)}}}$.

Rovnici dále upravíme následujícím způsobem:

$$q = \frac{3^{(n+1)} \cdot 4^{(n+2)}}{3^n \cdot 4^{(n+3)}}$$

$$q = \frac{3^n \cdot 3 \cdot 4^{(n+2)}}{3^n \cdot 4^{(n+2)} \cdot 4}$$

$$q = \frac{3}{4}$$

Z rovnice po úpravě vyplývá, že hodnota kvocientu q je $\frac{3}{4}$.

Př. 2. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je zadán první člen $a_1 = 2816$ a kvocient $q = \frac{1}{4}$. Vypočítejte hodnotu sedmého členu a_7 posloupnosti $\{a_n\}$.

Řešení:

Pro výpočet sedmého členu a_7 posloupnosti $\{a_n\}$ použijeme vzorec $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Po dosazení dostáváme rovnici $a_7 = 2816 \cdot \frac{1}{4}^{7-1}$. Konečnou úpravou získáme výslednou hodnotu sedmého členu $a_7 = \frac{11}{16}$.

Př. 3. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je zadaný desátý člen posloupnosti $a_{10} = 132$ a kvocient $q = 2$. Určete hodnotu sedmnáctého členu a_{17} posloupnosti $\{a_n\}$.

Řešení:

Pro výpočet sedmnáctého členu a_{17} využijeme vzorec $a_s = a_r \cdot q^{s-r}$, kdy za a_s dosadíme člen a_{17} a za člen a_r dosadíme člen a_{10}. Po dosazení tedy získáme rovnici $a_{17} = 132 \cdot 2^{17-10}$, tento vztah již stačí jen dopočítat.

Hodnota sedmnáctého členu geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je 16896.

Př. 4. V geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ určete součet prvních šesti členů posloupnosti $\{a_n\}$, máme-li zadaný první člen posloupnosti $a_1 = 4$ a kvocient $q = -3$.

Řešení:

Pro výpočet použijeme vzorec $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$. Do vzorce dosadíme a získáme rovnici $s_6 = 4 \cdot \frac{(-3)^6-1}{-3-1}$, tento vztah již stačí jen dopočítat.

Hodnota součtu prvních šesti členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je -728.

Př. 5. Určete první člen aritmetické posloupnosti $\{a_n\}$, máme-li zadaný součet prvních osmi členů $s_8 = 13107$ a kvocient $q = 4$.

Řešení:

Při řešení opět využijeme vzorec $s_n = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$. Do vzorce dosadíme a získáme rovnici $13107 = a_1 \cdot \frac{4^8-1}{4-1}$. Tuto rovnici dále upravíme následujícím způsobem:

$$13107 = a_1 \cdot 21845$$

$$a_1 = \frac{13107}{21845}$$

První člen geometrické posloupnosti $\{a_n\}$ je roven hodnotě $\frac{3}{5}$.

1.5 Alternující posloupnost

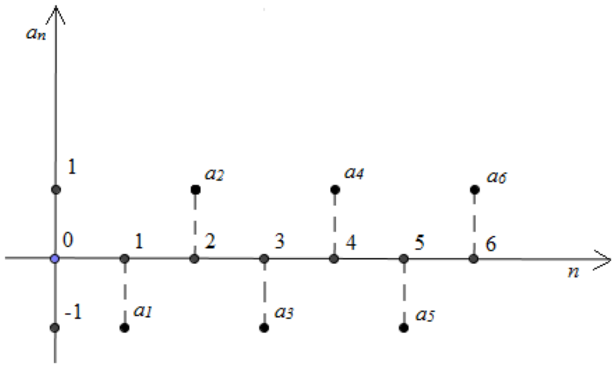
Příkladem *alternující posloupnosti je* posloupnost $\{a_n\} = (-1)^n \; pro \; n \geq 1$.

Pro členy alternující posloupnosti $\{a_n\}$ platí:

$a_1 = -1, a_2 = 1, a_3 = -1, a_4 = 1, a_5 = -1$..

Grafické znázornění alternující posloupnosti $\{a_n\}$:

Obrázek č. 5: Grafické znázornění alternující posloupnosti (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



Pro alternující posloupnost $\{a_n\}$ neexistuje limita, můžeme určit pouze částečné limity:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, tato limita platí pro sudé členy alternující posloupnosti $\{a_n\}$

a $\lim_{n\to+\infty} a_n = -1$, tato limita platí pro liché členy alternující posloupnosti $\{a_n\}$.

Př. Vypočítejte prvních pět členů alternující posloupnosti $a_n = (-3)^n$.

Řešení:

Máme zadaný vzorec, vyjadřující n-tý člen posloupnosti $a_n = (-3)^n$. Do vzorce pro n-tý člen posloupnosti $a_n = (-3)^n$ budeme postupně zadávat hodnoty jednotlivých členů. Pro první člen posloupnosti $a_n = (-3)^n$ je hodnota $n = 1$. První člen a_1 posloupnosti $a_n = (-3)^n$ je roven hodnotě -3. Pro druhý člen a_2 je hodnota $n = 2$. Druhý člen a_2 posloupnosti $a_n = (-3)^n$ je roven hodnotě 9. Pro další členy posloupnosti $a_n = (-3)^n$ bude platit stejné pravidlo a jako poslední člen spočteme člen a_5. Pro pátý člen a_5 je hodnota $n = 5$. Pátý člen a_5 posloupnosti $a_n = (-3)^n$ je roven hodnotě -243.

Výsledných šest členů posloupnosti $a_n = (-3)^n$ zapíšeme: $a_1 = -3$, $a_2 = 9$, $a_3 = -27, a_4 = 81, a_5 = -243$.

2 Limita posloupnosti

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *vlastní limitu* $a \epsilon R$, jestliže ke každému $\varepsilon \epsilon R^+$ existuje

$n_0 \epsilon N$ takové, že $\forall n \geq n_0 (n \epsilon N)$ platí $\left| a_n - a \right| = \varepsilon$.

Zápis:

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ nebo také $a_n \to a$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má ne*vlastní limitu* $+\infty$, jestliže ke každému $K \epsilon R$ existuje

$n_0 \epsilon N$ takové, že $\forall n \geq n_0 (n \epsilon N)$ platí $a_n > K$.

Zápis: $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ nebo také $(a_n \to +\infty)$.

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ má ne*vlastní limitu* $-\infty$, jestliže ke každému $K \epsilon R$ existuje

$n_0 \epsilon N$ takové, že $\forall n \geq n_0 (n \epsilon N)$ platí $a_{\ n} < K$.

Zápis: $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ nebo také $(a_n \to -\infty)$. [5, *s. 21 – 22*]

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je *konvergentní v R*, má – li tuto vlastnost:

$\exists\ a \epsilon R$ $\quad \forall \varepsilon > 0$ $\quad \exists n_0 \epsilon N$ $\quad \forall n \epsilon N$:

$(n > n_0 \Rightarrow \left| a_n - a \right| < \varepsilon)$.

Číslo se nazývá *limita* dané posloupnosti. Píšeme

$\lim_{n\to+\infty} a_n = a;$ nebo také $a_n \to a,$

a říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ konverguje k číslu a. [1, s. 33]

Posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá *divergentní*, jestliže není konvergentní.

Rozlišujeme tři základní typy divergentních posloupností:

a) Posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje k* $+\infty$, když

$\forall E > 0\ \exists n_0 \epsilon N: n > n_0 \Rightarrow a_n > E$.

Označujeme

$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ nebo také $a_n \to +\infty$.

b) Posloupnost $\{a_n\}$ *diverguje* $k -\infty$, když

$\forall E > 0\ \exists n_0 \in N: n > n_0 \Rightarrow a_n < -E.$

Označujeme

$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ nebo také $a_n \to -\infty$

c) Posloupnost $\{a_n\}$ nemá žádnou limitu [1, *s. 44*]

2.1 Řešené příklady na limity posloupností

Př. 1. Vypočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$.

a) $a_n = \frac{5n+2}{3^n}$

b) $a_n = \frac{(-1)^n(n-3)}{2n^2-7n+4}$

Řešení:

a) Výpočet limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+2}{3^n}$ vypočteme následujícím způsobem:

nejprve vytkneme proměnou n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(5+\frac{2}{n})}{3^n}$$

Po úpravě vidíme, že ve jmenovateli je exponenciela, která se k $+\infty$ blíží rychleji než výraz v čitateli $n(5+\frac{2}{n})$.

Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n+2}{3^n} = 0$.

b) Výpočet limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(n-3)}{2n^2-7n+4}$ vypočteme následujícím způsobem:

nejprve vytkneme proměnou n

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n n(1-\frac{3}{n})}{n^2(2-\frac{7}{n}+\frac{4}{n^2})}$$

Po úpravě vidíme, že n^2 ve jmenovateli se k $+\infty$ blíží rychleji než n v čitateli a z výrazu $(-1)^n$ mohou vyjít pouze hodnoty 1 a -1.

Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n(n-3)}{2n^2-7n+4} = 0$.

Př. 2. Určete, zda posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní či nevlastní limitu.

a) $a_n = \frac{(n-3)(n+6)}{n^2+12n-2}$

b) $a_n = (n+3)!$

Řešení:

Nejprve spočteme limitu posloupnosti $\{a_n\}$. Pokud hodnota limity bude $-\infty$ nebo $+\infty$ posloupnost $\{a_n\}$ má nevlastní limitu. Pokud výsledkem bude libovolné číslo z množiny reálných čísel posloupnost $\{a_n\}$ má vlastní limitu.

a) Výpočet limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)(n+6)}{n^2+12n-2}$ vypočteme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n-18}{n^2+12n-2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2(1+\frac{3}{n}-\frac{18}{n^2})}{n^2(1+\frac{12}{n}-\frac{2}{n^2})}$$

Po dosazení za n vidíme, že jednotlivé výrazy $\frac{3}{n}, -\frac{18}{n^2}, \frac{12}{n}, -\frac{2}{n^2}$ se blíží k nule. Proměnné n^2 se vykrátí a zůstane jen $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1}$. Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-3)(n+6)}{n^2+12n-2} = 1$. Výsledné číslo limity patří do množiny reálných čísel, tudíž posloupnost $a_n = \frac{(n-3)(n+6)}{n^2+12n-2}$ má vlastní limitu rovnou hodnotě 1.

b) Pro výpočet limity $\lim_{n\to+\infty}(n+3)!$ nebude potřeba provádět žádné početní úpravy a můžeme rovnou dosadit za n hodnotu $+\infty$. Vidíme, že $\lim_{n\to+\infty}(n+3)! = +\infty$ a tedy posloupnost $a_n = (n+3)!$ má nevlastní limitu.

Př. 3. Určete, zda posloupnost $\{a_n\}$ konverguje nebo diverguje.

a) $a_n = \sqrt[3]{2n+5}$

b) $a_n = \frac{(n-2)!}{n!(n^2-3n+2)}$

Řešení:

Poté mohou nastat tři situace. V případě, že limita posloupnosti a_n neexistuje nebo se jedná o nevlastní limitu rovnou $\pm\infty$, jde o posloupnost divergentní. Pokud je naopak výsledkem libovolné číslo z množiny reálných čísel, potom je posloupnost konvergentní.

a) Pro výpočet limity $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{2n+5}$ nebude potřeba provádět žádné početní úpravy a můžeme rovnou „dosadit“ za n hodnotu $+\infty$. Vidíme, že $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{2n+5} = +\infty$ a tedy posloupnost $a_n = \sqrt[3]{2n+5}$ je divergentní.

b) Výpočet limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)!}{n!(n^2-3n+2)}$ vypočteme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)(n-1)n!}{n!\,(n^2-3n+2)}$$

V tuto chvíli můžeme zkrátit jak faktoriál $n!$, tak kvadratickou rovnici $n^2 - 3n + 2$. Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-2)!}{n!(n^2-3n+2)} = 1$. Posloupnost $a_n = \frac{(n-2)!}{n!(n^2-3n+2)}$ je konvergentní a konverguje k hodnotě 1.

2.2 Vlastnosti limity posloupnosti

Jestliže pro skoro všechna $n \epsilon N$ je $a_n = a$, $a \epsilon R$, pak $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$.

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou posloupnosti takové, že pro skoro všechna $n \epsilon N$ je $a_n = b_n$. Pak

$\lim_{n\to+\infty} a_n$existuje, právě když $\lim_{n\to+\infty} b_n$existuje a obě limity jsou si rovny. [1, s. 26]

Nechť $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a platí $\lim_{n\to\infty} a_n > lim_{n\to\infty} b_n$. Potom pro skoro všechna n platí $a_n > b_n$.

2.2.1 Algebra limit

Nechť reálné posloupnosti $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ jsou konvergentní a označme $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$

a $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Potom i posloupnosti $\{a_n + b_n\}$; $\{a_n - b_n\}$; $\{a_n * b_n\}$; $\{\frac{a_n}{b_n}\}$,

$b_n \neq 0$, kde $\forall n \epsilon N$, jsou konvergentní a platí:

a) $\lim_{n\to+\infty} \alpha a_n = \alpha a, \qquad \alpha \epsilon R.$

b) $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b.$

c) $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = a - b.$

d) $\lim_{n\to+\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = \frac{a}{b}$, *(když* $b = 0$, nelze o konvergenci posloupnosti $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ tímto způsobem rozhodnout)

e) $\lim_{n\to+\infty}(a_n * b_n) = a * b$ [1, s. 37]

Posloupnost $\{a_{k_n}\}$, kde $\{a_n\}$ je daná posloupnost a $\{k_n\}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel, se nazývá *vybraná posloupnost* z posloupnosti $\{a_n\}$ nebo také *podposloupnost* posloupnosti $\{a_n\}$.

Má – li posloupnost $\{a_n\}$ limitu a, $a \epsilon R^*$, pak každá posloupnost $\{a_{k_n}\}$ z ní vybraná má limitu a, *tj.* [5, s. 27]

$$\lim_{k_n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n = a$$

2.2.2 Řešené příklady na vlastnosti a algebru limit

Př. 1. Vypočítejte limity zadaných posloupností $a_n = \frac{(n+3)\cdot(n+2)}{n^2+6n-8}$, $b_n = \frac{7}{n^2+5n+6}$, $c_n = \frac{n+5}{\sqrt{n^2+3}}$, $d_n = \sqrt{\frac{15}{n+2}}$ a vyberte posloupnosti, které mají shodnou limitu.

Řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+3)\cdot(n+2)}{n^2+6n-8} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{7}{n^2+5n+6} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+5}{\sqrt{n^2+3}} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{15}{n+2}} = 0$$

Posloupnost $\{a_n\}$ má shodnou limitu s posloupností $\{c_n\}$. Posloupnost $\{b_n\}$ má shodnou limitu s posloupností $\{d_n\}$.

Př. 2. Vypočítejte limity zadaných posloupností $a_n = \frac{(2n+5)\cdot(2n-9)}{4n^2-5n+6}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ a posloupnosti navzájem porovnejte.

Řešení:

Nejprve spočteme jednotlivé limity posloupností $\{a_n\}$ a $\{b_n\}$ a ověříme, zda jsou posloupnosti konvergentní. Následně porovnáme výsledky limit.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+5)\cdot(2n-9)}{4n^2-5n+6} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$$

Ověřili jsme, že obě posloupnosti jsou konvergentní, a proto nyní můžeme porovnat výsledky limit:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+5)\cdot(2n-9)}{4n^2-5n+6}$$

Pro skoro všechny prvky posloupností a_n a b_n platí $a_n > b_n$.

Př. 3. Spočtěte limitu posloupnosti $a_n = \frac{5n^3-2n^2+5n-8}{2n^3+2n^2-6}$ a uveďte příklad podposloupnosti k posloupnosti $\{a_n\}$.

Řešení:

Z limity posloupnosti $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-2n^2+5n-8}{2n^3+2n^2-6}$ vytkneme n^3 takto:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3\left(5-\frac{2}{n}+\frac{5}{n^2}-\frac{8}{n^3}\right)}{n^3\left(2+\frac{2}{n}-\frac{6}{n^3}\right)}$$

Po úpravě vidíme, že jednotlivé zlomky s proměnou n ve jmenovateli se blíží k 0 a proměnná n^3 se zkrátí. Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \frac{5n^3-2n^2+5n-8}{2n^3+2n^2-6} = \frac{5}{2}$. Podposlopnost k posloupnosti $a_n = \frac{5n^3-2n^2+5n-8}{2n^3+2n^2-6}$ bude například posloupnost zadaná výčtem prvků $b_n = \left\{\frac{17}{9}, \frac{62}{33}, \frac{150}{77}, \frac{2421}{1097}, \frac{3230}{1449}, \frac{5352}{2363}\right\}$.

Př. 4. Je zadána posloupnost $a_n = \frac{(n-8)\cdot(n+2)}{n^2-9n-10}$ a hodnota $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = \frac{7}{6}$. Pomocí vzorce pro výpočet součtu limit posloupností určete hodnotu limity posloupnosti $\{b_n\}$. Dále rozhodněte, které z posloupností $x_n = \frac{n-10}{(n+2)}$ a $y_n = \frac{(3n+2)\cdot(2n-1)}{6n^2+5n}$ mají odpovídající limitu.

Řešení:

Nejprve vypočítáme limity všech zadaných posloupností. Tedy $\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-8)\cdot(n+2)}{n^2-9n-10}=1$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{n-10}{(n^2+2)}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\frac{(3n+2)\cdot(2n-1)}{6n^2+5n}=\frac{1}{6}$.

K výpočtu součtu limity posloupností využijeme vzorec $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=a+b$. Z vzorce vyjádříme $\mathrm{b}=\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)-a$ a dále upravíme následujícím způsobem:

$$b=\frac{7}{6}-1$$

$$b=\frac{1}{6}$$

Limita posloupnosti $\{b_n\}$ má hodnotu $\frac{1}{6}$. Nyní stačí porovnat limity posloupností $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ s limitou posloupnosti $\{b_n\}$. Vyhovující posloupnost je posloupnost $\{y_n\}$.

3 Nekonečné číselné řady

3.1 Definice nekonečné číselné řady

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ reálných čísel. Symbol

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

se nazývá *nekonečná číselná řada*, čísla a_n se nazývají *členy řady*.

Posloupnost částečných součtů řady je posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ definovaná předpisem

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá *konvergentní*, je-li příslušná posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{+\infty}$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom existuje $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ a nazývá se *součet* (konvergentní) *řady.* V opačném případě se řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ nazývá *divergentní* a nemá součet. [1, s. 48]

3.2 Vybrané příklady nekonečných číselných řad

3.2.1 Nekonečná geometrická řada

Nekonečná geometrická řada je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je taková řada, kde posloupnost a_n je *geometrická posloupnost*.

Příkladem *nekonečné geometrické řady* je

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots$$

kde $a_1 = a \in R$.

Tato řada je konvergentní, právě když $|q| < 1$. Pro součet s konvergentní nekonečné geometrické řady pak platí $s = \frac{a_1}{1-q}$. [10] Pro ostatní případy je tato řada divergentní.

3.2.2 Alternující řada

Nechť (a_n) je posloupnost kladných čísel. Řada

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots$$

se nazývá *alternující řada*. [12]

3.2.3 Harmonická řada

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ splňuje nutnou podmínku konvergence řady (viz. níže), ale je divergentní. [1, s. 50]

Př. Je dána řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{4}{5^{n+1}}$.

a) Určete předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů s_n.

b) Vypočítejte součet nekonečné číselné řady.

c) Sečtěte prvních sedm členů posloupnosti a_n. [12]

Řešení:

a) Nejprve vypočítáme hodnotu kvocientu $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, tedy $q = \frac{1}{5}$. Jelikož je kvocient $q \neq 1$, můžeme pro výpočet s_n použít vzorec $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$. Do vzorce dosadíme a upravíme následujícím způsobem:

$$s_n = \frac{4}{5^{1+1}} \cdot \frac{1-(\frac{1}{5})^n}{1-\frac{1}{5}}$$

$$s_n = \frac{1}{5} \cdot (1 - 5^{-n})$$

Předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů $s_n = \frac{1}{5} \cdot (1 - 5^{-n})$.

b) Pro výpočet součtu použijeme vzorec $s = \frac{a_1}{1-q}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$s = \frac{\frac{4}{25}}{1-\frac{1}{5}}$$

$$s = \frac{1}{5}$$

Součet nekonečné číselné řady je roven hodnotě $\frac{1}{5}$.

c) Pro výpočet prvních sedmi členů řady stačí dosadit do výše vyjádřeného vzorce pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů $s_n = \frac{1}{5} \cdot (1 - 5^{-n})$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$s_7 = \frac{1}{5} \cdot (1 - 5^{-7})$$

Součet prvních sedmi členů posloupnosti je roven hodnotě $\frac{78124}{390625}$, kterou zaokrouhlíme na hodnotu 0,2.

4 Vybraná kritéria konvergence nekonečných číselných řad

4.1 Nutná podmínka konvergence

Je-li řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentní, potom musí platit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. [1, s. 50]

4.2 Podílové kritérium

Existuje-li číslo q: $0 < q < 1$ takové, že od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. [1, s. 52]

4.2.1 Limitní podílové kritérium

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ s kladnými členy a nechť existuje limita $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Potom

a) je-li $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje;

b) je-li $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje;

c) je-li $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, nelze o konvergenci $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ rozhodnout. [12]

4.3 Odmocninové kritérium

Existuje-li číslo q: $0 < q < 1$ takové, že od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje.

Jestliže od určitého členu počínaje (tj. pro $n \geq n_0$) platí

$\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, potom řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje. [1, s. 54]

4.3.1 Limitní odmocninové kritérium

Mějme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ s kladnými členy a nechť existuje limita $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Potom

a) je-li $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje;

b) je-li $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje;

c) je-li $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, nelze o konvergenci $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ rozhodnout. [12]

4.4 Srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy takové, že pro skoro všechna n platí $0 \leq a_n \leq b_n$. Potom

a) když konverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, konverguje také $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$;

b) když diverguje $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, diverguje také $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ se nazývá *majorantou* řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se nazývá *minorantou* řady $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$. [12]

4.4.1 Limitní srovnávací kritérium

Nechť $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ jsou řady takové, že $\forall n \in N$: $a_n \geq 0$ a $b_n \geq 0$.

Pokud existuje vlastní limita $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$, potom

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ konverguje,

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverguje $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ diverguje. [12]

4.5 Řešené příklady na kritéria konvergence nekonečných číselných řad

Př. 1. Pomocí limitního podílového kritéria rozhodněte, zda nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ je konvergentní nebo divergentní. [12]

Řešení:

Pro určení konvergence řady použijeme vzorec $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)(2n!)(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2(2n!)}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}$$

Takto upravenou limitu vypočítáme. Zjistíme, že $\lim_{n\to+\infty}\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}=4$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ je tedy divergentní.

Př. 2. Pomocí limitního odmocninového kritéria rozhodněte, zda nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^{2n-1}}$ je konvergentní nebo divergentní.

Řešení:

Pro určení konvergence řady použijeme vzorec $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^{2n-1}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^3\cdot\sqrt[n]{2}}{n^2\cdot\sqrt[n]{n^{-1}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$$

Takto upravenou limitu vypočítáme. Limitu $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}$ rozložíme podle činitelů na $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^2}=0$, $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$ a $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Jednotlivé výsledky rozdělené limity vynásobíme a zjistíme, že $\lim_{n\to+\infty}\frac{8}{n^2}\cdot\sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{n}=0$. Řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{3n+1}}{n^{2n-1}}$ je tedy konvergentní.

Př. 3. Pomocí limitního srovnávacího kritéria rozhodněte, zda nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n}$ je konvergentní nebo divergentní. [12]

Řešení:

Nejprve ověříme, zda je splněna nutná podmínka konvergence nekonečné číselné řady. Zjistíme, že $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n^2+7n} = 0$ a nutná podmínka je tedy splněna. Nyní použijeme srovnávací kritérium. Zadanou řadu budeme srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. O této řadě víme, že je konvergentní. Zbývá jen dosadit do vzorce limitního srovnávacího kritéria $\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n}$ a dále upravit následujícím způsobem:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^2 + 7n}}{\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2(1 + \frac{7}{n})}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{7}{n}}$$

Takto upravenou limitu vypočítáme. Zjistíme, že $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{7}{n}} = 1 > 0$. V tomto případě platí, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentní, a proto je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+7n}$ také konvergentní.

5 Řešené příklady

Př. 1. Je dána posloupnost $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$.

a) Vypočítejte limitu $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

b) Rozhodněte o konvergenci posloupnosti $\{a_n\}$.

c) Určete maximum, minimum, supremum a infimum posloupnosti $\{a_n\}$.

d) Určete alespoň jeden index n takový, že $a_n = \frac{1}{276}$.

e) Vyjádřete členy a_{k-8} a a_{k-9}.

f) Načrtněte graf posloupnosti $\{a_n\}$. [12]

Řešení:

a) Limitu $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$ nejprve pomocí vytýkání upravíme do následujícího tvaru:

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2(1+\frac{9}{n}+\frac{20}{n^2})}$$

Do takto upravené limity již můžeme „dosadit" za n hodnotu $+\infty$. Jelikož proměnná n^2 ve jmenovateli se blíží $+\infty$ a výraz $(-1)^n$ v čitateli nabývá střídavě kladných a záporných hodnot ± 2, bude výsledek $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20} = 0$.

b) Pro určení konvergence posloupnosti využijeme výpočet limity, který jsme provedli v předchozím úkolu. Jelikož je výsledek $\lim_{n\to+\infty} -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20} = 0$ je posloupnost $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$ konvergentní.

c) Jako první krok musíme určit monotonii posloupnosti $\{a_n\}$. Výraz $(-1)^n$ v čitateli způsobí pravidelné střídání znamének a tudíž posloupnost $\{a_n\}$ není monotónní. Abychom nastínili podobu posloupnosti $\{a_n\}$, je dobré určit, jakým způsobem se bude chovat posloupnost $b_n = -\frac{2}{n^2+9n+20}$. K tomu využijeme vztah $b_{n+1} > b_n$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$-\frac{2}{(n+1)^2+9(n+1)+20} > -\frac{2}{n^2+9n+20}$$

$$-2(n^2 + 9n + 20) > -2(n^2 + 11n + 30)$$

$$4n > -20$$

$$n > -5$$

Z výsledku nerovnosti je zřejmé, že posloupnost $b_n = -\frac{2}{n^2+9n+20}$ je ostře rostoucí. Z toho důvodu určíme jako maximum posloupnosti první kladný člen a_1 a jako minimum posloupnosti pak první záporný člen a_2. Dále víme, že pokud existuje maximum (minimum), jeho hodnota je shodná se supremem (s infimem).

Výsledné hodnoty posloupnosti $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$ jsou: maximum je rovno $\frac{1}{15}$, supremum je rovno $\frac{1}{15}$, minimum je rovno $-\frac{1}{21}$ a infimum je rovno $-\frac{1}{21}$.

d) Pro určení indexu n tak, aby se $a_n = \frac{1}{276}$ bychom mohli postupovat následovně. Nejprve dosadíme za $a_n = \frac{1}{276}$ do předpisu pro n-tý člen posloupnosti $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$. Získáme tak rovnici o jedné neznámé $\frac{1}{276} = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$, kterou dále upravíme následujícím způsobem:

$$\frac{1}{276} = -\frac{2(-1)^n}{n^2 + 9n + 20}$$

$$(n^2 + 9n + 20) = -276 \cdot 2(-1)^n$$

$$(n + 5)(n + 4) = -552(-1)^n$$

$$(n + 5)(n + 4) = 552 \cdot (-1) \cdot (-1)^n$$

$$(n + 5)(n + 4) = 552(-1)^{n+1}$$

Jelikož je číslo $\frac{1}{276}$ kladné, musí být exponent $n + 1$ sudý, tudíž proměnou n budeme volit z lichých čísel. Hodnotu 552 rozložíme na součin dvou po sobě jdoucích čísel, který nalezneme prvočíselným rozkladem.

$$552 = 2^3 \cdot 3 \cdot 23$$

$$552 = 23 \cdot 24$$

Získaný rozklad dosadíme do rovnice.

$$(n + 5)(n + 4) = 23 \cdot 24 \cdot (-1)^{n+1}$$

Z takto upravené rovnice vyplývá, že hledané n musí splňovat následující tvrzení:

$$n + 5 = 24 \wedge n + 4 = 23$$

Výsledným hledaným indexem n posloupnosti $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$ je tedy hodnota 19.

e) Hodnoty a_{k-8} a a_{k-9} získáme dosazením do předpisu pro n-tý člen posloupnosti $a_n = -\frac{2(-1)^n}{n^2+9n+20}$ a upravíme.

Pro a_{k-8}:

$$a_{k-8} = -\frac{2(-1)^{k-8}}{(k-8)^2 + 9(k-8) + 20}$$

$$a_{k-8} = -\frac{2(-1)^{k-8}}{k^2 - 7k + 12}$$

Pro a_{k-9}:

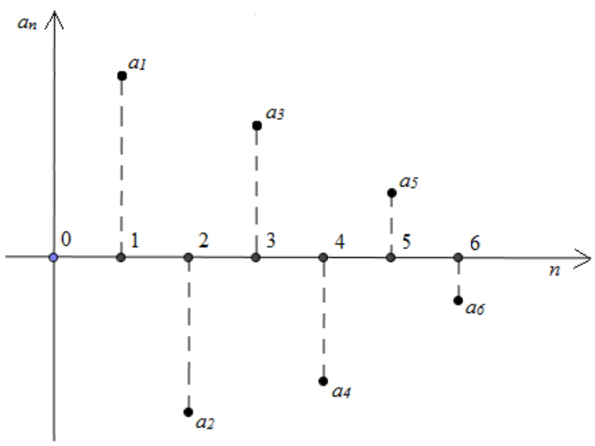
$$a_{k-9} = -\frac{2(-1)^{k-9}}{(k-9)^2 + 9(k-9) + 20}$$

$$a_{k-9} = -\frac{2(-1)^{k-9}}{k^2 - 9k + 20}$$

Výsledkem jsou tedy členy $a_{k-8} = -\frac{2(-1)^{k-8}}{k^2-7k+12}$ a $a_{k-9} = -\frac{2(-1)^{k-9}}{k^2-9k+20}$.

f) Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů, které odpovídají hodnotám členů a_n. Na osu x vynášíme hodnoty nezávislé proměnné n a na osu y pak hodnoty a_n posloupnosti $\{a_n\}$.

Obrázek č. 6: Graf nekonečné číselné řady k příkladu č. 1 (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



Př. 2. Je dána posloupnost $a_n = \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2}$.

a) Vyšetřete monotonii posloupnosti $\{a_n\}$.

b) Vypočítejte limitu $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

c) Určete maximum, minimum, supremum a infimum posloupnosti $\{a_n\}$.

d) Určete alespoň jeden index n takový, že $a_n = \frac{1}{18}$.

e) Určete, zda platí nerovnost $a_n < 0{,}2$, $\forall n \in N$.

f) Načrtněte graf posloupnosti $\{a_n\}$. [12]

Řešení:

a) Pokud budeme dosazovat za $n \in N$ do výrazu $\cos(\frac{\pi n}{2})$, zjistíme, že čitatel členů posloupnosti bude nabývat periodicky hodnot $0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots$ Dochází tedy k pravidelnému střídání kladných a záporných znamének členů posloupnosti $a_n = \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2}$ a z toho důvodu posloupnost $\{a_n\}$ není monotónní.

b) Víme, že pro výraz v čitateli platí nerovnost $-1 \leq \cos(\frac{\pi n}{2}) \leq 1$ a tedy můžeme limitu $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2}$ rozložit následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+2} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2} \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2}$$

Limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+2}$ a $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2}$ se rovnají hodnotě 0. A jelikož svírají $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2}$, je z tohoto vztahu patrné, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2} = 0$.

c) K určení hodnot maxima a minima posloupnosti $\{a_n\}$ využijeme výpočtů limity a monotonie z předchozích bodů příkladu. Jelikož již víme, že posloupnost $\{a_n\}$ není monotónní, pro zjištění maxima a minima vyřešíme monotonii a limitu po částech vybraných podposloupností s koeficienty $n = 4k$ a $n = 4k - 2$, tedy $c_n = \frac{\cos(2\pi k)}{4k+2}$ a $d_n = \frac{\cos[\pi(2k-1)]}{4k}$. Nejprve vypočítáme limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos(2\pi k)}{4k+2} 0$ a $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos[\pi(2k-1)]}{4k} = 0$. Po té určíme monotonii podposloupností c_n a d_n. V případě posloupnosti $c_n = \frac{\cos(2\pi k)}{4k+2}$ se jedná o klesající posloupnost kladných čísel a v případě posloupnosti $d_n = \frac{\cos[\pi(2k-1)]}{4k}$ se jedná o rostoucí posloupnost záporných čísel. Nyní již můžeme určit hodnoty pro maximum a minimum posloupnosti $\{a_n\}$. Jako maximum posloupnosti první kladný člen a_4 a jako minimum posloupnosti pak první záporný člen a_2. Dále víme, že pokud existuje maximum (minimum), jeho hodnota je shodná se supremem (s infimem).

Výsledné hodnoty posloupnosti $a_n = \frac{\cos(\frac{\pi n}{2})}{n+2}$ jsou: maximum je rovno $\frac{1}{6}$, supremum je rovno $\frac{1}{6}$, minimum je rovno $-\frac{1}{4}$ a infimum je rovno $-\frac{1}{4}$.

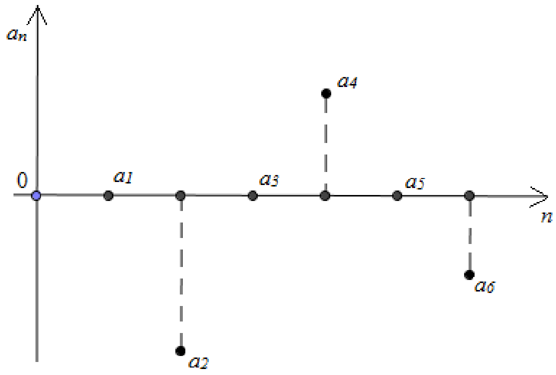
d) Jelikož hledáme $a_n = \frac{1}{18}$ a hledaný výsledný člen má kladnou hodnotu, budeme hledat mezi sudými členy s indexy $n = 4k$, jejichž čitatel je roven 1. Dále víme, že musí platit vztah $\frac{1}{n+2} = \frac{1}{18}$. Tuto rovnici dále upravíme a získáme hledaný index $n = 16$.

e) Pro ověření pravdivosti nerovnice $a_n < 0{,}2,\ \forall n \in N$ využijeme hodnotu maxima $\frac{1}{6}$ vypočtenou v předchozím bodu příkladu. Hodnotu maxima dosadíme za člen a_n a porovnáme s hodnotou 0,2. Zjistíme, že $\frac{1}{6} < 0{,}2$. Tím jsme dokázali, že nerovnost $a_n < 0{,}2,\ \forall n \in N$ je pravdivá.

Pro ověření pravdivosti výpočtů též můžeme využít následující postup. Z řešení monotonie posloupnosti $\{a_n\}$ víme, že liché členy posloupnosti budou nulové a sudé členy posloupnosti budou pravidelně měnit znaménko. Dále určíme, jakým způsobem se bude chovat posloupnost $b_n = \frac{1}{n+2}$. Zjistíme, že posloupnost $\{b_n\}$ je ostře klesající. To znamená, že pro vyřešení nerovnice $a_n < 0{,}2,\ \forall n \in N$ nám stačí porovnat první kladný člen posloupnosti a_4 s hodnotou 0,2. Výsledná nerovnost je pravdivá, a tudíž je pravdivá i celá nerovnost $a_n < 0{,}2,\ \forall n \in N$.

f) Grafem posloupnosti je množina izolovaných bodů, které odpovídají hodnotám členů a_n. Na osu *x* vynášíme hodnoty nezávislé proměnné n a na osu *y* pak hodnoty a_n posloupnosti $\{a_n\}$.

Obrázek č. 7: Graf nekonečné číselné řady k příkladu č. 2 (Zdroj: vlastní zpracování dle Geogebra)



Př. 3. Vypočítejte limitu posloupnosti $\{a_n\}$

a) $a_n = \frac{n(n+2)!-(n+3)!}{(n+3)!}$

b) $a_n = (\frac{9n+1}{9n})^{n+2}$

Řešení:

a) Limitu $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)!-(n+3)!}{(n+3)!}$ budeme řešit následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)! - (n+3)(n+2)!}{(n+3)(n+2)!}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)! \cdot [n-(n+3)]}{(n+2)!\,(n+3)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-n+3}{n+3}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n+3} = 0$$

Výsledek limity $\lim_{n\to+\infty} \frac{n(n+2)!-(n+3)!}{(n+3)!} = 0.$

b) Limitu $\lim_{n\to+\infty} (\frac{9n+1}{9n})^{n+2}$ budeme řešit následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{9n}{9n} + \frac{1}{9n}\right)^{n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{9n}\right)^{9n}\right]^{\frac{n+2}{9n}}$$

Nyní provedeme úpravu podle vztahu $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Dále tedy:

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n+2}{9n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{n(1+\frac{2}{n})}{9n}}$$

Proměnné n v exponentu se zkrátí a výraz $\frac{2}{n}$ se blíží k 0. Výsledkem je tedy $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{9}} = e^{\frac{1}{9}}$.

Př. 4. Je dána nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde $a_n = \frac{-1}{n^2+9n+20}$.

a) Určete předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů (s_n).

b) Vypočítejte součet nekonečné číselné řady.

c) Sečtěte prvních dvanácti členů posloupnosti (a_n).

d) Rozhodněte o konvergenci nekonečné číselné řady. [12]

Řešení:

a) Jako první krok provedeme rozklad na parciální zlomky řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2+9n+20}$.

$$\frac{-1}{n^2+9n+20} = \frac{a}{n+5} - \frac{b}{n+4}$$

$$-1 = a(n+4) - b(n+5)$$

Nyní porovnáme jednotlivé proměnné n.

$$n^0: -1 = 4a - 5b$$

$$n^1: 0 = a - b$$

Porovnáním jsme získali soustavu dvou rovnic o dvou neznámých a, b. Soustavu vyřešíme a získáme hodnoty $a = 1$, $b = 1$.

Pomocí parciálních zlomků tedy upravíme řadu do konečné podoby $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+4})$.

Nyní nalezneme předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů (s_n). Součet řady rozepíšeme následujícím způsobem:

$$s_n = \underbrace{\frac{1}{6} - \frac{1}{5}}_{a_1} + \underbrace{\frac{1}{7} - \frac{1}{6}}_{a_2} + \underbrace{\frac{1}{8} - \frac{1}{7}}_{a_3} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+2}}_{a_{n-2}} + \underbrace{\frac{1}{n+4} - \frac{1}{n+3}}_{a_{n-1}} + \underbrace{\frac{1}{n+5} - \frac{1}{n+4}}_{a_n}$$

V takto rozepsaném součtu řady vidíme, že většina zlomků, například $\frac{1}{6}$ a $-\frac{1}{6}$ nebo $\frac{1}{n+4}$ a $-\frac{1}{n+4}$, se odečtou, tím pádem se členy a_2 až a_{n-1} odečtou a z prvního a posledního členu zůstanou pouze výrazy $-\frac{1}{5}$ a $\frac{1}{n+5}$. Hledaný předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů je tedy $s_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{n+5}$.

b) Součet nekonečné číselné řady spočítáme pomocí vzorce $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$. Do vzorce dosadíme a získáme výslednou limitu $\lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{5} + \frac{1}{n+5} = -\frac{1}{5}$. Součet nekonečné číselné řady je tedy roven hodnotě $-\frac{1}{5}$.

c) Pro výpočet součtu prvních dvanácti členů posloupnosti (a_n) stačí dosadit do předpisu pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů $s_n = -\frac{1}{5} + \frac{1}{n+5}$. Po dosazení získáme rovnici $s_{12} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{12+5}$. Součet prvních dvanácti členů posloupnosti (a_n) je hodnota $-\frac{12}{85}$.

d) Nejprve ověříme, zda je splněna nutná podmínka konvergence nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Zjistíme, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2+9n+20} = 0$ a nutná podmínka je tedy splněna. Pro zjištění konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ použijeme limitní srovnávací kritérium $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Zadanou řadu budeme srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2}$. O této řadě víme, že je konvergentní. Do vzorce dosadíme a upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+9n+20}}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-1n^2}{-1n^2(1+\frac{9}{n}+\frac{20}{n^2})}$$

Proměnné $-1n^2$ v čitateli a jmenovateli se zkrátí, výrazy $\frac{9}{n}$ a $\frac{20}{n^2}$ se blíží k 0 a výsledek $\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{-1}{n^2+9n+20}}{-\frac{1}{n^2}} = 1 > 0$. V tomto případě platí, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{n^2}$ je konvergentní, a proto je řada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{n^2+9n+20}$ také konvergentní.

Př. 5. Je dána nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde $a_n = \ln\left(\frac{n+5}{n+6}\right)$.

a) Určete předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů (s_n).

b) Vypočítejte součet nekonečné číselné řady.

c) Sečtěte prvních šest členů posloupnosti (a_n).

d) Rozhodněte o konvergenci nekonečné číselné řady. [12]

Řešení:

a) Nejprve si upravíme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+5}{n+6}\right)$ na $\sum_{n=1}^{+\infty}[\ln(n+5) - \ln(n+6)]$.

Nyní nalezneme předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů (s_n). Součet řady rozepíšeme následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} s_n = {} & \underbrace{\ln 6 - \ln 7}_{a_1} + \underbrace{\ln 7 - \ln 8}_{a_2} + \underbrace{\ln 8 - \ln 9}_{a_3} + \cdots \\ & + \underbrace{\ln(n+3) - \ln(n+4)}_{a_{n-2}} + \underbrace{\ln(n+4) - \ln(n+5)}_{a_{n-1}} \\ & + \underbrace{\ln(n+5) - \ln(n+6)}_{a_n} \end{aligned}$$

V takto rozepsaném součtu řady vidíme, že většina logaritmů, například $-\ln 7$ a $\ln 7$ nebo $-\ln(n+5)$ a $\ln(n+5)$, se odečtou, tím pádem se členy a_2 až a_{n-1} odečtou a z prvního a posledního členu zůstanou pouze výrazy $\ln 6$ a $-\ln(n+6)$. Hledaný předpis pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů je tedy $s_n = \ln 6 - \ln(n+6)$.

b) Součet nekonečné číselné řady spočítáme pomocí vzorce $s = \lim_{n\to+\infty} s_n$. Do vzorce dosadíme a získáme výslednou limitu $\lim_{n\to+\infty} \ln 6 - \ln(n+6) = -\infty$. Součet nekonečné číselné řady je tedy roven hodnotě $-\infty$.

c) Pro výpočet součtu prvních šesti členů posloupnosti (a_n) stačí dosadit do předpisu pro n-tý člen posloupnosti částečných součtů $s_n = \ln 6 - \ln(n+6)$. Po dosazení získáme rovnici $s_6 = \ln 6 - \ln(6+6)$. Součet prvních dvanácti členů posloupnosti (a_n) je hodnota $\ln\frac{1}{2} \cong -0{,}6931$.

d) Pro zjištění konvergence řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ použijeme limitní odmocninové kritérium $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln\left(\frac{n+5}{n+6}\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln\left(\frac{n(1+\frac{5}{n})}{n(1+\frac{6}{n})}\right)}$$

Proměnné n v čitateli a jmenovateli se zkrátí, výrazy $\frac{5}{n}$ a $\frac{6}{n}$ se blíží k 0 a dále víme, že $\ln 1 = 0$. Výsledkem tedy je $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\ln\left(\frac{n+5}{n+6}\right)} = 0 < 1$ a řada $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentní.

Př. 6. Pomocí vhodného limitního kritéria rozhodněte o konvergenci nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, kde

a) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

b) $a_n = \frac{2}{5^{n-1}+n-1}$

Řešení:

a) Nejprve ověříme, zda je splněna nutná podmínka konvergence nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Zjistíme, že $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} = 0$ a nutná podmínka je tedy splněna. Nyní postupně vyzkoušíme podílové, odmocninové a srovnávací limitní kritérium konvergence, vybereme vyhovující kritérium a s jeho pomocí rozhodneme o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Jako první vyzkoušíme limitní podílové kritérium $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2+2n}}{\sqrt{n^2+4n+3}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n^2(1+\frac{2}{n})}}{\sqrt{n^2(1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2})}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}}{n\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}}}$$

Proměnné n před odmocninami se zkrátí, výrazy $\frac{2}{n}$, $\frac{4}{n}$ a $\frac{3}{n^2}$ se blíží k 0 a výsledek $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+3)}}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}=1$. Pomocí limitního podílového kritéria tedy o konvergenci nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ nelze rozhodnout. Zkusíme tedy využít limitní odmocninové kritérium $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[2n]{n^2+2n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n^2+2n)^{\frac{1}{2n}}}$$

Exponent $\frac{1}{2n}$ se blíží k 0 a tedy celý výraz ve jmenovateli $(n^2+2n)^{\frac{1}{2n}}$ se blíží k 1, tudíž výsledek $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}=1$ a ani pomocí limitního odmocninového kritéria o konvergenci nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ nelze rozhodnout. Zda je řada $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergentní nebo divergentní tedy určíme pomocí limitního srovnávacího kritéria

$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Zadanou řadu budeme srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$. O této řadě víme, že je divergentní. Dosadíme do vzorce a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n\sqrt{1+\frac{2}{n}}}$$

Proměnné n v čitateli a jmenovateli se zkrátí, výraz $\frac{2}{n}$ se blíží k 0 a výsledek $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}}{\frac{1}{n}}=1>0$. V tomto případě platí, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentní, a proto je řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ také divergentní.

b) Nejprve ověříme, zda je splněna nutná podmínka konvergence nekonečné číselné řady $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$. Zjistíme, že $\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}=0$ a nutná podmínka je tedy splněna. Nyní postupně vybereme vyhovující kritérium a s jeho pomocí rozhodneme o konvergenci řady $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Začneme s limitním podílovým kritériem $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Do vzorce dosadíme a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{5^n+n}}{\frac{2}{5^{n-1}+n-1}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{5^n(5^{-1}+\frac{n}{5^n}-\frac{1}{5^n})}{5^n(1+\frac{n}{5^n})}$$

Výrazy 5^n v čitateli a jmenovateli se zkrátí, výrazy $\frac{n}{5^n}$ a $\frac{1}{5^n}$ se blíží k 0 a výsledek $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}<1$. Nekonečná číselná řada $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ je tedy konvergentní. Pro ověření správnosti předchozího řešení můžeme využít limitní srovnávací kritérium $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$. Zadanou řadu budeme srovnávat s řadou $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$. O této řadě víme, že je konvergentní. Dosadíme do vzorce a dále upravíme následujícím způsobem:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{5^{n-1}+n-1}}{\left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2\cdot 5^n}{5^n(5^{-1}+\frac{n-1}{5^n})}$$

Mocniny 5^n v čitateli a jmenovateli se zkrátí, výraz $\frac{n-1}{5^n}$ se blíží k 0 a výsledek $\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2}{5^{n-1}+n-1}}{\left(\frac{1}{5}\right)^n}=10>0$. V tomto případě platí, že řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ je konvergentní, a proto je řada $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{5^{n-1}+n-1}$ také konvergentní.

Závěr

V úvodu teoretické části mé bakalářské práce jsem se zabývala definicí posloupnosti, jejími základními vlastnostmi a limitou posloupností. Dále jsem probírala základní látku nekonečných číselných řad a kritéria konvergence. Vše jsem rozšířila o jednoduché řešené příklady, které mají čtenáři napomoci k pochopení probrané teorie.

V praktické části se pak nachází kapitola řešených příkladů. Tyto úlohy jsou komplexnější a složitější na výpočet než příklady z teoretické části práce. Jejich zadání jsem volila z internetové sbírky úloh Trial z Fakulty aplikovaných věd a samostatně uvedla jednu z možností jejich řešení. Příklady by měly čtenáři osvětlit výpočet posloupností, limit, nekonečných číselných řad a konvergence, které patří k základní problematice matematické analýzy.

Cílem mé bakalářské práce bylo podat ucelený a přehledný výklad posloupností a nekonečných číselných řad. Tuto teorii jsem se dále snažila rozšířit o řešené příklady tak, aby celkový obsah práce čtenáři napomohl k pochopení této problematiky. Nejdůležitějšími body práce se tedy staly definice posloupnosti a nekonečné číselné řady, limita posloupnosti a konvergence nekonečné číselné řady a nástin jejich výpočtu.

V teoretické části práce jsem se zabývala řadou příkladů řešících výpočet základních posloupností a nekonečných číselných řad. Objevily se zde příklady pracující s vlastnostmi posloupností a jejich limitou, a také příklady k aritmetické a geometrické posloupnosti. Dále pak úlohy na základní kritéria konvergence nekonečných číselných řad. V kapitole řešených příkladů v praktické části práce se pak jednalo o šest komplexnějších příkladů, kde při jejich řešení bylo využito složitějších výpočtů než v teoretické části práce.

Resumé

This bachelor thesis pursues the issue of sequence and infinite series. At first I define the term of sequence and infinite series. I write also about basic characteristic of sequences and series and about computation of their limits and convergence. This theoretical part is explained by easy examples which help to understand this issue better. The second part of my bachelor thesis contains several exercises with solutions. Here I separately solve exercises which are taken from internet task collection called „Trial z Fakulty aplikovaných věd".

Reference

[1] DRÁBEK, Pavel., MÍKA, Stanislav. *Matematická analýza I.* 5. vydání, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010, 158 s., ISBN 55-096-10

[2] HORA, Jaroslav. *Matematická analýza.* 1. Vydání, Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1990, 115 s., ISBN 559-114-90

[3] HORA, Jaroslav. *Matematická analýza – Pomocný učební text pro studenty 1. ročníku.* 5. vydání, Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2004, 116 s., ISBN 55-063-04

[4] JARNÍK, Vojtěch. *Diferenciální počet I.* 7. vydání, Praha: Academia, 1984, 392 s., ISBN 104-21-852

[5] MÁDROVÁ, Vladimíra., MAREK, Jaroslav. *Řešené příklady a cvičení z matematické analýzy I.* 1. vydání, Olomouc: Univerzita Palackého v Olomouci, 2004, 321 s., ISBN 80-244-0958-5

[6] ODVÁRKO, Oldřich. *Matematika pro gymnázia – Posloupnosti a řady*. 3. vydání, Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 2008, 126 s., ISBN 978-80-7196-195-6

[7] PETÁKOVÁ, Jindra. *MATEMATIKA – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy.* 1. vydání, Praha: Prometheus, spol. s. r. o., 2008, 287 s., ISBN 978-80-7196-099-7

[8] POLÁK, J. *Přehled středoškolské matematiky*. 6. vydání, Praha: Prometheus, 1998, 608 s., ISBN 80-85849-78-X

[9] ZACH, Jiří. *Posloupnosti a řady*. 1. vydání, Plzeň: Pedagogická fakulta v Plzni, 1984, 100 s., ISBN 59 – 074 -84

[10] ČVUT, Fakulta elektrotechnická. *Posloupnosti, geometrická řada a kombinatorika* [online]. [26. 3. 2014]. Dostupné z: http://math.feld.cvut.cz/0educ/predpokl/msu5.pdf

[11] Digitální učební materiály. *Aritmetická posloupnost* [online]. [26. 3. 2014]. Dostupné z: http://dum.rvp.cz/materialy/stahnout.html?s=qbdqedci

[12] Trial. *Matematická analýza I.* [online]. [26. 3. 2014]. Dostupné z: http://trial.zcu.cz

Seznam obrázků