

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PLZEŇ, 2014

Bc. Diana Študentová

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Vybrané metody odhadů výnosových
křivek a jejich aplikace na reálná data**

**Selected yield curve estimation methods
and their real data applications**

PLZEŇ, 2014

Bc. Diana Študentová

Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 21. května 2014

.....
vlastnoruční podpis

Poděkování

Chtěla bych poděkovat RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za cenné připomínky a rady v průběhu psaní práce a své rodině za podporu během dosavadního studia.

Abstrakt

Cílem této práce je seznámení se s problematikou spotových výnosových křivek a s vybranými metodami jejich konstrukce. Z pohledu metod je zde rozpracováno několik interpolačních i extrapoláčních postupů. Jako interpolační metody byly vybrány polynomiální aproximace, proložení Gompertzovou křivkou, lineárně-logaritmickou křivkou a konečně interpolace kubickými splajny. Dále je práce zaměřena na dvě extrapoláční metody a to Nelson-Sieglův a Svenssonův model. V praktické části je uveden příklad vygenerované výnosové křivky pro ukázková data z České republiky, Německa a Rakouska.

Klíčová slova: výnosová křivka, Nelson-Sieglův model, Svenssonův model, aproximace polynomu, Gompertzova křivka, lineárně-logaritmická křivka, kubické splajny

Abstrakt

The primary aim of this thesis is to acquaint the reader with the issues connected to spot yield curves and their construction. In relation to yield curve estimation methods the thesis focuses on selected interpolation and extrapolation methods. Selected methods based on interpolation are polynomial approximation, Gompertz curve fitness, linear-logarithmic curve fitness and cubic spline interpolation. The thesis further focuses on the Nelson-Siegel and Svensson model as the extrapolation methods. At the end of this thesis simulations of modelling yield curves of Czech republic, Germany and Austria are presented.

Keywords: yield curve, Nelson-Siegel model, Svensson model, polynomial approximation, Gompertz curve, linear-logarithmic curve, cubic splines

Obsah

I	Úvod	1
II	Teoretická část	3
1	Několik základních druhů dluhopisů	3
2	Tvary výnosových křivek	5
3	Definice základních pojmů	6
3.1	Úrokové míry	7
3.2	Durace	11
3.3	Vybrané statistické pojmy	12
3.4	Zavedené značení	13
4	Teorie, které vysvětlují tvary výnosových křivek	14
4.1	Čistá teorie očekávání	14
4.2	Teorie preference likvidity	15
4.3	Teorie preferovaných tržních segmentů	15
4.4	Modifikovaná teorie očekávání	15
4.5	Teorie preferovaného umístění	16
5	Determinanty pohybu výnosových křivek	16
5.1	Měnově politická a fiskální opatření	16
5.2	Hospodářský cyklus	17
5.3	Další externí a interní faktory	17
III	Extrapoláční metody konstrukce výnosových křivek	18
6	Minimalizační funkce pro extrapoláční modely	19
7	Model Nelson-Siegla	19
7.1	Interpretace parametrů Nelson-Sieglova modelu	21
8	Svenssonův model	22
9	Odhad optimálních parametrů Nelson-Sieglova a Svenssonova modelu	23
10	Konfidenční množiny	24
IV	Interpoláční metody konstrukce výnosových křivek	26

11 Kriteriaální minimalizační funkce pro interpolační modely	26
12 Aproximace polynomu	27
12.1 Volba vhodného stupně polynomu	28
13 Gompertzova křivka	30
14 Lineárně - logaritmická křivka	31
15 Interpolace kubickými splajny	32
V Praktická část	35
16 Česká republika	35
16.1 Data	35
16.2 Extrapolace	37
16.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model	37
16.2.2 Konfidenční množiny	39
16.3 Interpolace	42
16.3.1 Aproximace polynomem	42
16.3.2 Gompertzova křivka	46
16.3.3 Lineárně-logaritmická křivka	49
16.3.4 Interpolace kubickými splajny	52
16.4 Interpretace výnosové křivky České republiky aktuální k datu 14.2.2014	54
16.5 Porovnání křivek České republiky pro dvě časová období	56
17 Spolková republika Německo	57
17.1 Data	57
17.2 Extrapolace	61
17.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model	61
17.2.2 Konfidenční množiny	63
17.3 Interpolace	65
17.3.1 Aproximace polynomem	65
17.3.2 Gompertzova křivka	69
17.3.3 Lineárně-logaritmická křivka	72
17.3.4 Interpolace kubickými splajny	74
17.4 Interpretace výnosové křivky Německa aktuální k datu 14.2.2014	75
17.5 Porovnání křivek Německa pro dvě časová období	76
18 Rakousko	77
18.1 Data	77
18.2 Extrapolace	78
18.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model	78
18.2.2 Konfidenční množiny	79

18.3	Interpolace	81
18.3.1	Aproximace polynomem	81
18.3.2	Gompertzova křivka	82
18.3.3	Lineárně-logaritmická křivka	84
18.3.4	Interpolace kubickými splajny	85
18.4	Interpretace výnosové křivky Rakouska aktuální k datu 14.2.2014	86
19	Srovnání a celková interpretace	87
VI	Závěr	88
VII	Literatura	89

Část I

Úvod

Časová struktura úrokových měr neboli výnosová křivka vyjadřuje vztah mezi výnosem aktiva a jeho splatností. Výnosové křivky se sestavují z různých derivátů, například ze swapů nebo státních dluhopisů, a dělí se z hlediska zobrazovaných úrokových měr na forwardové a spotové.

Spotová výnosová křivka zobrazuje závislost mezi očekávaným výnosem daného derivátu (např. dluhopisu) do určité splatnosti a splatností. Tato práce se soustředí právě na spotové výnosové křivky a metody jejich konstrukce ze státních dluhopisů, proto bude nadále pro tento pojem používáno zkrácené označení výnosová křivka.

Forwardové výnosové křivky naproti tomu zobrazují strukturu spotových úrokových měr k určitým časovým okamžikům v budoucnosti za podmínky nulové forwardové prémie, která vyjadřuje rozdíl mezi forwardovou sazbou a budoucí spotovou očekávanou sazbou. Takové míry se tedy počítají z promptních (spotových) úrokových měr. Pokud je spotová výnosová křivka rostoucí, forwardové úrokové míry jsou pro každou splatnost vyšší než míry spotové. V případě klesající spotové křivky je tomu naopak.

Výnosové křivky státních dluhopisů slouží k mnoha účelům. Například z nich banky odhadují krátkodobé úrokové sazby. Za předpokladu, že lze považovat státní dluhopisy za bezrizikové investice, slouží výnosové křivky investorům k predikci úrokových měr a ohodnocování rizikovějších investic. K těmto účelům je zapotřebí spojitá křivka. Bohužel obecně není na trzích (zejména na trzích zde zkoumaných tří zemí) k dispozici velké množství dluhopisů se splatností nad jeden rok, proto je nutné tuto křivku namodelovat. V literatuře (např. [16], [18], [4], [14]) se vyskytuje několik modelů pro různé účely použití.

Tato práce se zaměřuje na dva základní pohledy konstrukce výnosových křivek. Prvním pohledem je snaha o co nejuvěrnější aproximaci dat. Za tímto účelem zde bude diskutován výběr ze čtyř interpolačních modelů. Kritériem pro porovnání prvních tří z nich budou hodnoty dvou vybraných chybových funkcí. Vybranými trendovými křivkami jsou polynomická funkce, Gompertzova křivka a lineárně-logaritmická křivka. Dále zde bude implementována interpolace kubickými splajny. Výše uvedené interpolační modely byly vybrány tak, aby byly vzájemně dobře porovnatelné. Interpolace kubickými splajny byla zvolena na základě využití několika evropskými bankami (Norsko, Belgie, Itálie), kde je tento model používán k doplnění níže uvedených extrapolací (viz [22]).

Druhým rozpracovaným pohledem budou extrapoláční modely, které sledují cíl dobrých predikčních vlastností. Pro predikci se v dnešní době používá především Svenssonův a Nelson-Sieglův model. Pro tyto modely byla přijata hypotéza na 5% hladině významnosti o statisticky nevýznamném rozdílu od tzv. arbitrage-less modelů. Důkaz pro Nelson-Siegelův model lze najít v [9].

Pro praktickou část bylo zvoleno pět sad dat. Vybrané sady českých státních dluhopisů jsou aktuální k datu 13.4.2012 a k datu 14.2.2014. Záměrně byly zvoleny dvě sady dat, aby existovala možnost porovnání tvarů výnosových křivek jednou metodou pro obě sady. Se stejným záměrem byly vybrány sady státních dluhopisů Spolkové republiky Německo, které jsou opět aktuální k datům 13.4.2012 a 14.2.2014. Poslední zkoumaná křivka byla sestrojena z dluhopisů Rakouské republiky, jejichž data jsou aktuální k 14.2.2014.

Poslední část práce se zabývá interpretací výsledků, porovnáváním jednotlivých přístupů a vykreslením konfidenčních množin pro vybrané dvojice koeficientů extrapoláčních modelů.

Část II

Teoretická část

1 Několik základních druhů dluhopisů

Následující část textu využívá poznatků sepsaných ve zdrojích [6], [28] a [12].

Dluhopis je cenný papír, který vznikl již v 17. století. Tehdy se emisí státních dluhopisů získávaly prostředky pro financování válek. Dnes dluhopisy emitují nejen vládní instituce, ale také soukromí investoři. Prostřednictvím dluhopisu si emitent opatřuje svůj úvěrový kapitál. S dluhopisy se obchoduje na sekundárním trhu mnoha zemí spolu s akciemi.

Při zakoupení dluhopisu od emitenta podstupuje investor zejména dva typy rizik: riziko kurzové a reinvestiční. Velikost těchto dvou rizik závisí na druhu zakoupeného dluhopisu. Kurzové riziko představuje změnu úrokové sazby při neměnných (či méně flexibilních) podmínkách výplat dluhopisu. Takové riziko je nejvyšší u tzv. „zero“bondů. Reinvestiční riziko je spojeno s reinvesticí kuponových plateb. Jednotlivé platby se však mohou lišit (např. u dluhopisů s variabilním kuponem) stejně tak jako úroková míra v době vyplácení kuponů.

Ve spojení s investicí do dluhopisu existují tři druhy výnosu. Takzvaný kuponový výnos, výnos do splatnosti a běžný výnos. Kuponový výnos je dán procentuální hodnotou kuponu k nominální hodnotě dluhopisu. Výnos do splatnosti (anglicky „yield to maturity“) označuje vnitřní výnosovou míru pro danou investici. Běžný výnos je dán poměrem následujícího kuponu k nominální hodnotě dluhopisu.

Výše zmíněný výnos do splatnosti nezávisí jen na době do splatnosti dluhopisu, ale také na výši kuponu. Dluhopis se stejnou splatností a nižším kuponem bude mít vyšší výnos do splatnosti než dluhopis s vyšším kuponem. Proto je nutné „převést“ dluhopisy na tzv. bezkuponové, aby je bylo možno porovnat v grafu výnosové křivky. Vybrané postupy jsou popsány níže v této práci. Dále je nutné dodržovat konzistenci vybraných dat. Zvolené dluhopisy by se měly lišit pouze dobou do splatnosti. Tento předpoklad je v reálných podmínkách velice těžké dodržet. Přesto by měla mít data alespoň stejný režim zdanění, typ dluhopisu, riziko nesplacení a likviditu.

V této sekci jsou představeny některé z nejčastějších druhů dluhopisů, které se na světě obchodují. Typy dluhopisů se obvykle v České republice rozlišují dle své splatnosti na

- státní pokladniční poukázky (doba splatnosti do 1 roku),
- krátkodobé dluhopisy (do 5 let),
- střednědobé dluhopisy (přibližně 5-10 let),
- dlouhodobé dluhopisy (nad 10 let).

Dalším způsobem rozdělení dluhopisů je dělení na základě úroků neboli dle druhů plateb pro investora.

Jednoduchý dluhopis s pevným kuponem. Obecně se jedná o nejrozšířenější druh dluhopisu. V případě České republiky dochází v pevně stanovené datum k výplatě nominální hodnoty dluhopisu a pevně stanovené výše kuponu. Hodnota kuponu zůstává neměnná po celou dobu držení dluhopisu investorem. K výplatě kuponů dochází nejčastěji jednou ročně, ale frekvence výplat může být stanovena i jinak. K nevýhodám tohoto druhu dluhopisu patří právě neproměnná výše kuponu. To znamená, že je dluhopis citlivý na změnu úrokové míry. Zmíněnou citlivost lze kvantifikovat prostřednictvím durace a konvexity.

Dluhopis s variabilním kuponem. Nevýhodu jednoduchého dluhopisu s pevným kuponem se snaží řešit dluhopis s proměnlivým úročením. Výše úrokové sazby se přizpůsobuje s určitým zpožděním aktuální úrokové míře na základě některé mezibankovní sazby např. PRIBOR (Prague InterBank Offered Rate), LIBOR (London InterBank Offered Rate) aj. Pokud roste úroková míra, obliba trhu dluhopisů s pevným kuponem klesá, neboť se reálný výnos takových dluhopisů snižuje. Jako příklad lze uvést Proti-inflační státní dluhopisy emitované českou vládou 12.12.2013.

Dluhopis s nulovým kuponem („zero bond“). V České republice jsou tyto dluhopisy emitovány např. státem v podobě státních pokladničních poukázek s področní splatností. Nicméně zero bondy můžou mít i vyšší splatnost než je jeden rok. Tyto dluhopisy jsou prodávány s diskontem za cenu nižší, než je jejich nominální hodnota. V době splatnosti se očekává výplata nominální hodnoty dluhopisu. Kapitálový výnos z tohoto dluhopisu tedy reflektuje rozdíl mezi nominální hodnotou a prodejní cenou. Pro emitenta mají tyto druhy obligací výhodu v tom, že je možné použít peníze z dluhopisu na investici, která z počátku nevynáší. Investor se při nákupu tohoto druhu dluhopisu nemusí zabývat otázkou reinvestice kuponů, čelí však velkému kurzovému riziku.

Konzola („perpetual bond“). Konzola neboli věčný dluhopis je druh obligace, která nemá stanovený datum splatnosti. Kupony z tohoto dluhopisu jsou vypláceny doživotně v pravidelných intervalech od doby nákupu. Většinou jsou kupony v poměru k nominální hodnotě nízké. Pokud je však v kupní smlouvě uvedena níže uvedená podmínka, může dojít k ukončení smluvního vztahu, a tím i k zastavení výplat. Jako podmínku si vládní instituce kladou většinou překročení výše tržní úrokové míry kuponovou mírou.

Holé dluhopisy („strips“). Tyto dluhopisy vznikají oddělením kuponových plateb a jistiny. Obě části lze obchodovat nezávisle na sobě. Nominální část má pak vlastnosti dluhopisu s nulovým kuponem. Díl obsahující kuponové platby je vyplácen anuitně. Podle platné právní úpravy [27] lze v České republice obchodovat všechny kupony samostatně.

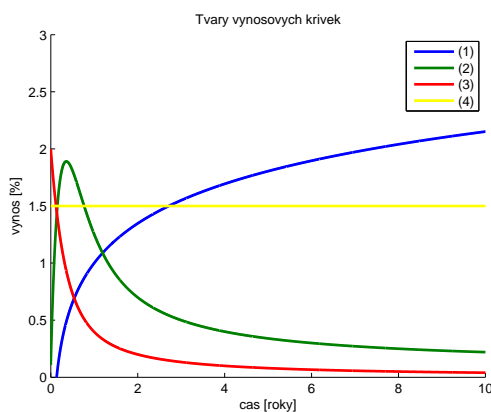
Duální dluhopis. Zvláštností těchto dluhopisů je fakt, že je nominální hodnota obchodována v jiné měně než kuponové platby.

2 Tvary výnosových křivek

Tvary výnosových křivek z velké části determinují jejich interpretaci. Z tohoto důvodu je vhodné shrnout základní poznatky v této oblasti. Inspirací k napsání této části byly zdroje [2], [12], [13] a [16].

Na základě empirických zkušeností bylo v průběhu času na trzích pozorováno několik základních tvarů výnosových křivek. Jednotlivé tvary se liší úrovní, sklonem a mírou zakřivení. Jako sklon křivky se označuje rozdíl mezi dlouhodobým a krátkodobým výnosem. Většinou se jedná o rozdíl hodnot v bodech 10 let a 1 rok do splatnosti. Tvar křivky je ovlivněn různými determinanty. Ty jsou popsány v kapitole 5. Na obrázku 2.1 jsou vykresleny 4 základní tvary křivek.

Jako krátký konec křivky se označuje část křivky do 1 - 2 let splatnosti, střední část pak od 2 do 10 let splatnosti a část pro delší splatnosti nad 10 let se označuje v literatuře jako delší konec výnosové křivky. V této práci se slovní spojení výnosová křivka a struktura úrokových měr pokládají za synonymní výrazy.



Obrázek 2.1: Demonstrace různých tvarů výnosových křivek. Na obrázku je červeně vyznačena klesající, zeleně zhoupaná, modře rostoucí a žlutě plochá křivka.

(1) Rostoucí výnosová křivka. Rostoucí struktura úrokových měr je nejčastěji objevující se tvar křivky. Dluhopisy kratších splatností mají nižší výnosnost než dluhopisy s delší dobou do splatnosti. Tento tvar podporuje čistou i modifikovanou teorii očekávání. Rostoucí křivka je indikátorem stabilní ekonomiky a ekonomického růstu.

(2) Zhoupnutá výnosová křivka. Anomální zhoupnutý tvar křivky se vyskytuje pokud mají střednědobé dluhopisy vyšší výnosnost než krátkodobé a dlouhodobé. Tento tvar křivky umožňuje bezrizikovou arbitráž, proto jej nelze některými teoriemi křivek vysvětlit. Zhoupnutá křivka signalizuje neočekávaný vývoj na trhu.

(3) Klesající výnosová křivka. Klesající křivka může být určitým indikátorem ekonomické recese či zpomalení ekonomiky. V polovině 90. let se tato křivka objevila v České republice, kdy indikovala recesi v roce 1997. Krátkodobé dluhopisy mají v tomto případě vyšší výnosnost než dlouhodobé. Dle [13] signalizuje klesající výnosová křivka očekávaný pokles úrokových sazeb.

(4) Plochá výnosová křivka. Tato křivka je přechodem mezi rostoucí a klesající strukturou úrokových měr. Dluhopisy různých splatností mají stejný výnos. Pokud se předtím na trhu vyskytoval klesající tvar křivky, lze předpokládat, že investoři averzní k riziku nesplacení dají při nákupu dluhopisů přednost kratším splatnostem. Pak se zvýší poptávka po dluhopisech s nižší splatností a krátkodobé úrokové míry poklesnou. Křivka poté přejde do rostoucího tvaru. Tento tvar křivky je také pro svoji jednoduchost používán pro analýzy při oceňování rizikovějších investic.

3 Definice základních pojmů

Následující kapitola zavádí formální definice a pojmy, jež jsou používány v celé práci. Z důvodu konzistence značení je na konci kapitoly uveden souhrn označení jednotlivých pojmů. Popisované označení je částečně převzato z [29].

Při zpracování této kapitoly byly použity zdroje [7], [6], [12] a [15]. Speciálně statistická část byla zpracována dle [10] a [11].

Definice 3.1. Necht' je každý dluhopis (anglicky „bond“) B charakterizován následujícím vektorem parametrů

$$B = [n, \mathbf{C}, \mathbf{t}, F, P], \quad (3.1)$$

kde

n je počet kuponových období do splatnosti dluhopisu,

$\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_n)$ představuje vektor všech nominálních hodnot kuponů daného dluhopisu,

$\mathbf{t} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ představuje vektor všech časů, kdy se vyplácí kupon daného dluhopisu,

F je nominální hodnota dluhopisu,

P je tržní cena dluhopisu v čase nákupu. \square

V pořadí k -tý bond je označen jako

$$B_k = [n_k, \mathbf{C}_k, \mathbf{t}_k, F_k, P_k], \quad (3.2)$$

přičemž $k \in (1, 2, \dots, K)$ a K je celkový počet dluhopisů.

3.1 Úrokové míry

Definice 3.2. (Úrok)

Z pohledu věřitele se jedná o odměnu, kterou obdrží za půjčení prostředků emitentovi na určité časové období t . Emitent vnímá úrokovou míru jako cenu za vypůjčení prostředků od věřitele. \square

Definice 3.3. (Úroková míra)

Úrokovou mírou se rozumí relativní (procentuelní) vyjádření úroku z hodnoty kapitálu. Označení úrokové míry na dobu t je v této práci i_t . \square

Jako spotová úroková míra se označuje roční tržní úroková míra aplikovatelná na finančním trhu okamžitě (anglicky „on the spot“).

Výše úroku souvisí především s rizikem investice a očekávanou mírou inflace. Používaný standard úročení je ACT/360, jde tedy o mezinárodní standard úročení.

Definice 3.4. (Akumulační faktor)

Akumulační faktor $A(t_1, t_2)$ pro $0 \leq t_1 \leq t_2$ určuje hodnotu v čase t_2 pro jednotkovou částku investovanou v čase t_1 . Z podstaty věci vyplývá kladnost akumulačního faktoru a pro složené úročení platí

$$A(t_1, t_2) = A(t_1, t) \cdot A(t, t_2) \quad \forall t : t_1 \leq t \leq t_2. \quad \square \quad (3.3)$$

Tato vlastnost je v literatuře označována jako princip konzistence.

Akumulační faktor lze přepsat dle [15] pro jednotlivé druhy úročení. Nechť je $A(t_1, t_2)$ spojitá funkce. Pak lze vyjádřit akumulaci mezi dobou t_1 a t_2

- pro jednoduché úročení: $A(t_1, t_2) = (1 + i \cdot (t_2 - t_1))$,
- pro složené úročení: $A(t_1, t_2) = (1 + i)^{t_2 - t_1}$,
- pro spojitě úročení s konstantní intenzitou: $A(t_1, t_2) = e^{i(t_2 - t_1)}$.

Definice 3.5. (Intenzita úročení)

Jako intenzita úročení v čase t se označuje veličina $\delta(t)$, za podmínky, že existuje limita pro každé t

$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(0, t+h) - A(0, t)}{h \cdot A(0, t)}. \quad \square \quad (3.4)$$

Definice 3.6. (Diskontní faktor)

Nechť jsou uvažovány stejné druhy úročení jako při zavádění akumulaciho faktoru. Pak lze diskontní faktor zavést

- pro jednoduché úročení: $v(t) = \frac{1}{1+i \cdot t}$,
- pro složené úročení: $v(t) = \frac{1}{(1+i)^t}$,
- pro spojitě úročení s konstantní intenzitou: $v(t) = e^{-it}$. \square

Pomocí akumulaciho faktoru lze diskontní faktor vyjádřit jako

$$v(t) = \frac{1}{A(0, t)}, \quad A(0, t) \neq 0.$$

Definice 3.7. (Efektivní míra úročení) (citace z [15])

Efektivní úroková míra pro období délky h začínající v čase t je přírůstek hodnoty jednotkové investice z času t do času $t + h$. Tedy pomocí akumulaciho faktoru

$$i_{ef} = A(t, t+h) - 1. \quad \square \quad (3.5)$$

Definice 3.8. (Forwardová úroková sazba)

Jako forwardová úroková sazba $f(t_1, t_2)$ se označuje očekávaná spotová úroková sazba k určitému období v budoucnosti (t_1, t_2) , pro kterou platí

$$(1 + i_{t_1})^{t_1} \cdot (1 + f(t_1, t_2))^{t_2 - t_1} = (1 + i_{t_2})^{t_2}. \quad \square \quad (3.6)$$

Definice 3.9. (Alikvotní úrokový výnos)

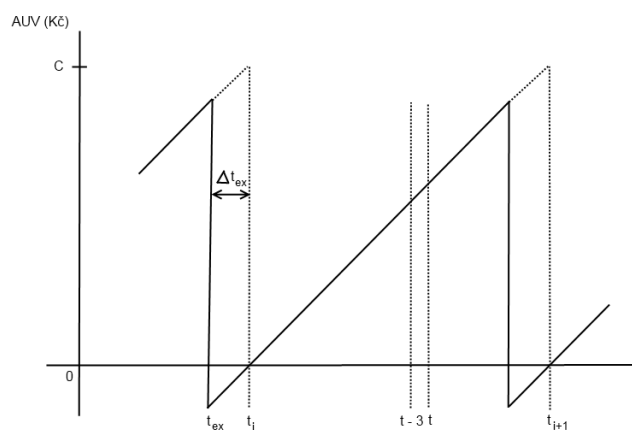
Nechť jsou uvažovány pouze jednoduché dluhopisy s pevným kuponem. Pak je alikvotní úrokový výnos v čase t definován jako

$$AUV(t) = C_{i+1} \cdot \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \quad t \in (t_i, t_{i+1}), \quad (3.7)$$

kde C_{i+1} vyjadřuje hodnotu kuponu vyplaceného v čase t_{i+1} a dvě po sobě jdoucí výplaty kuponů probíhají v časech t_i, t_{i+1} . \square

Poznámka. Dle aktuálních standardů platných pro obchodování v České republice na Burze cenných papírů Praha se v souvislosti s alikvotním úrokovým výnosem zavádí tzv. datum ex-kupon. Tímto datem se rozumí 1 den po rozhodném dni výplaty kuponu. V takovém případě platí, že čas $t \in (t_i - \Delta t_{ex}, t_{i+1} - \Delta t_{ex})$, kde je jako Δt_{ex} označeno období mezi datem ex-kupon a výplatou kuponu. Pokud investor zakoupí dluhopis v tomto období, nemá již nárok na nejbližší kuponovou platbu. Dluhopis je pak prodáván za tržní cenu, ke které je přičten tzv. záporný alikvotní úrokový výnos.

Na základě platných pravidel je dále nutné vzít v úvahu vypořádání $t + 3$. Toto vypořádání označuje počet dní, které uplynou po zadání příkazu k nákupu na burze, po jejichž uplynutí je dluhopis skutečně zakoupen. Aby byl dluhopis pořízen za aktuální tržní cenu je nutno zadat příkaz o tři pracovní dny dříve. Průběh alikvotního úrokového výnosu je vyznačen plnou čarou na obrázku 3.1.



Obrázek 3.1: Ilustrace alikvotního úrokového výnosu. Tečkovaná čára znázorňuje naběhlou část kuponu a plná čára vykresluje průběh alikvotního úrokového výnosu dle standardu Burzy cenných papírů Praha.

Definice 3.10. (Současná hodnota)

Současná hodnota dluhopisu (anglicky „present value“) PV je označení současné hodnoty všech budoucích plateb plynoucích z dluhopisu $B = [n, \mathbf{C}, \mathbf{t}, F, P]$. Pomocí akumulčního a diskontního faktoru lze současnou hodnotu vyjádřit takto

$$\begin{aligned} PV(B) &= \sum_{j=1}^n C_j \cdot \frac{1}{A(0, t_j)} + F \cdot \frac{1}{A(0, t_n)} \\ &= \sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) + F \cdot v(t_n), \quad A(0, t_j) \neq 0, j \in (1, 2, \dots, n). \quad \square \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nechť je dán vektor úrokových sazeb v jednotlivých časech plateb $\mathbf{i} = (i_1, i_2, \dots, i_n)$. Pak lze pro spojitě úročení s konstantními intenzitami vyjádřit současnou hodnotu jako

$$PV(B, \mathbf{i}) = PV(B, (i_1, i_2, \dots, i_n)) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot e^{-i_j \cdot t_j} + F \cdot e^{-i_n \cdot t_n}. \quad (3.9)$$

Při použití složeného úročení je možné vyjádřit současnou hodnotu následujícím způsobem

$$PV(B, (i_1, i_2, \dots, i_n)) = \sum_{j=1}^n C_j \cdot \frac{1}{(1 + i_j)^{t_j}} + F \cdot \frac{1}{(1 + i_n)^{t_n}}, \quad (3.10)$$

kde je C_j hodnota j -tého kuponu a n je počet kuponových období do splatnosti.

Definice 3.11. (Výnos do splatnosti)

Jako výnos do splatnosti se označuje vnitřní výnosová míra, která je spojena s investicí do dluhopisu. Nechť jsou všechny výnosové míry pro konkrétní dluhopis konstantní, tzn. $i_1 = i_2 = \dots = i_{n-1} = i_n$. Pokud platí, že $PV(B, i^*) = P$, pak je konstantní úroková míra i^* označována jako výnos do splatnosti (anglicky „yield to maturity“). \square

Definice 3.12. (Riziková prémie)

Dodatečný výnos z investice za podstoupení vyššího rizika (například nižší likvidity), který obdrží věřitel od emitenta, se nazývá rizikovou premií. \square

Cílem této práce je získat různé modely úrokové sazby. Proto následuje obecná definice takového modelu.

Definice 3.13. (Model úrokové sazby)

Modelem úrokové sazby se v této práci rozumí funkce

$$i(n; \Theta), \quad (3.11)$$

kde Θ je vektor parametrů modelu.

Definice 3.14. (Reziduální rozptyl)

Nechť jsou dány napozorované hodnoty výnosu $\mathbf{i}^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_K^*)$ v časech t_1, t_2, \dots, t_K a hodnoty výnosu \mathbf{i} vypočítané dle vybraného modelu. Nechť má dále obecný model $i(n; \Theta)$ celkem p parametrů. Reziduálním rozptylem se rozumí výraz

$$s_p^2(\Theta) = \sum_{k=1}^K \frac{(i(n_k, \Theta) - i_k^*)^2}{K - p}, \quad (3.12)$$

kde K je počet dluhopisů (tzn. délka vektorů \mathbf{i}^* a \mathbf{i}). \square

3.2 Durace

Duraci lze dle [6] zadefinovat několika způsoby. Jedná se o duraci dle Fredericka Macaulay z roku 1938, modifikovanou duraci a dolarovou duraci. První jmenovaná definice se používá nejčastěji.

Definice 3.15. (Durace) Matematické vyjádření durace D je

$$D = \frac{\sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) \cdot t_j + F \cdot v(t_n) \cdot n}{\sum_{j=1}^n C_j \cdot v(t_j) + F \cdot v(t_n)}. \quad \square \quad (3.13)$$

Jako durace se označuje míra citlivosti ceny dluhopisu na změnu úrokové sazby, neboť změnu ceny dluhopisu při změně výnosu do splatnosti lze formulovat jako

$$\Delta PV \approx -D \cdot \frac{\Delta i^*}{1 + i^*} \cdot PV. \quad (3.14)$$

Největší duraci mají dluhopisy s nulovým kuponem, neboť jsou nejcitlivější na změnu tržní úrokové míry. Pro investory je informace o duraci zajímavá, protože v bodě durace je citlivost hodnoty dluhopisu na změnu úrokové míry nulová. Pomocí durace mohou tedy investoři porovnávat jednotlivé instrumenty z pohledu citlivosti na změnu úrokových sazeb.

Pojem durace dluhopisu však může být interpretován i jako průměrná doba pro získání příjmů, které jsou spojeny s dluhopisem. Jedná se totiž o vážený průměr dob výplat všech budoucích plateb plynoucích z držení daného dluhopisu. Příslušnou vahou je podíl současné hodnoty jednotlivé platby k součtu současných hodnot všech plateb z dluhopisu.

Kromě výše kuponových plateb závisí durace také na době do splatnosti a na tržní úrokové míře. Dluhopis s delší dobou do splatnosti bude mít (pokud $C_j > i_j, \forall j$) vyšší duraci, než dluhopis se stejnými parametry a nižší dobou do splatnosti. Výše tržní úrokové míry jde naopak proti duraci. S rostoucí tržní úrokovou mírou velikost durace klesá.

3.3 Vybrané statistické pojmy

Vzhledem k tomu, že se v části pojednávající o metodách výnosových křivek testují významnosti koeficientů, je vhodné zadefinovat několik základních statistických pojmů.

Definice 3.16. (Hladina významnosti)

Hladina významnosti α je určena pravděpodobností chyby prvního druhu. Jako chyba prvního druhu se označuje pravděpodobnost zamítnutí hypotézy H_0 (tzn. testovaná statistika leží v kritickém oboru hodnot), přičemž hypotéza H_0 zároveň platí. \square

Definice 3.17. (P hodnota) (citace z [10])

P hodnota testu je u testů, kde má tato definice smysl, pravděpodobnost, s jakou testovací statistika nabývá hodnot „horších“ (více sovědčících proti testované hypotéze), než je pozorovaná hodnota statistiky. \square

Definice 3.18. (F rozdělení) Nechť jsou dány dvě náhodné nezávislé veličiny $M \sim \chi^2(m)$ a $N \sim \chi^2(n)$. Potom má veličina

$$F = \frac{M}{m} / \frac{N}{n}$$

Fisherovo Snedecorovo F rozdělení se stupni volnosti $m, n \in \mathbf{N}$, ozn. $F_{n,m}$. F rozdělení je spojitě na množině kladných čísel a pro $x > 0$ má hustotu

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}} \cdot x^{\frac{m}{2}-1} \left(1 + \frac{m}{n}x\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad (3.15)$$

zatímco pro $x < 0$ je hustota nulová. \square

Podrobnosti o použité funkci Gamma lze najít v [11].

Definice 3.19. (Studentovo rozdělení)

Nechť jsou dány dvě nezávislé náhodné veličiny, které mají následující rozdělení $U \sim N(0, 1)$ a $Y \sim \chi^2(\nu)$, kde ν je počet stupňů volnosti rozdělení chí kvadrát. Náhodná veličina

$$t = \frac{U}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

má Studentovo rozdělení s $\nu \in \mathbf{N}$ stupni volnosti. Hustota této veličiny vyjádřená pomocí funkce Gamma má tvar

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \sqrt{\pi\nu}} \cdot \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad x \in \mathbf{R}. \quad \square \quad (3.16)$$

3.4 Zavedené značení

V dalším textu bude aplikováno následující značení:

- i_t je úroková míra, kde t je uvedeno v letech, viz definice 3.3,
- PV je současná hodnota dluhopisu, viz definice 3.10,
- $f(t_1, t_2)$ je forwardová úroková míra na období od t_1 do t_2 , viz definice 3.8,
- i^* je výnos do splatnosti, viz definice 3.11,
- K je počet dluhopisů,
- n je počet kuponových plateb dluhopisu.

Pokud nebude uvedeno nic jiného, předpokládá se splnění těchto podmínek:

- nominální hodnoty všech kuponových plateb pro jednotlivé dluhopisy jsou stejné, tedy $C_j = C; j = 1, 2, \dots, n$,
- nominální (jmenovitá) hodnota dluhopisu se vyplácí vždy v datum splatnosti dluhopisu společně s poslední kuponovou platbou a daň z kuponu je splatná v době výplaty,
- kupony jsou vypláceny jednou ročně,
- rovnovážná tržní cena dluhopisu je rovna současné hodnotě a řídí se podle vzorce (3.8) tak, že $PV = P$,
- na trhu je k dispozici dostatečně velké množství dluhopisů.

4 Teorie, které vysvětlují tvary výnosových křivek

V průběhu doby, kdy se ekonomové snažili vysvětlit tvary výnosových křivek, se vyvinula řada teorií. Většina z nich obsahuje ve své čisté podobě mnoho nereálných omezení. Vzniklo tudíž několik modifikovaných teorií, které sdružují základní teorie do sebe a dávají tak silnější nástroj k interpretaci tvarů křivek. První tři představené teorie v této části práce patří do kategorie nemodifikovaných teorií. Poslední dvě pak některé teoretické poznatky spojují.

Nejvýznamnější teorie výnosových křivek jsou shrnuty v [2], [6], [12] a [13], odkud bylo čerpáno při psaní této sekce.

4.1 Čistá teorie očekávání

Základní teorií výnosových křivek je teorie očekávání ve své původní podobě. Předpokládá se, že investoři jsou indiferentní vůči volbě délky splatnosti dluhopisu. Při platnosti této teorie se vychází z myšlenky, že odhady dlouhodobých výnosů lze vyjádřit jako geometrický průměr všech odpovídajících krátkodobých výnosů. Některá literatura hovoří dokonce o předpokladu nestrannosti takových odhadů.

Dle teorie čistého očekávání, není pro investora důležité, zda investovat jednou do dluhopisu se splatností 2 roky nebo dvakrát po sobě do dluhopisu se splatností 1 rok. Vždy se na konci předpokládá stejná výše výnosu. Jde tedy o konzistentnost akumulačního faktoru.

Tuto situaci lze vyjádřit následujícími rovnicemi

$$(1 + i_1) \cdot (1 + f(1, 1)) = (1 + i_2)^2 \quad (4.1)$$

$$1 + i_1 + f(1, 1) + i_1 \cdot f(1, 1) = 1 + i_2^2 + 2i_2 \quad (4.2)$$

$$f(1, 1) = i_2^2 + 2i_2 - i_1 - i_1 \cdot f(1, 1) \quad (4.3)$$

$$f(1, 1) \approx 2i_2 - i_1. \quad (4.4)$$

Rovnice (4.1) porovnává dvě strategie. Na levé straně rovnice jde o strategii investování do ročního dluhopisu s výnosem i_1 a následném reinvestování po roce do dluhopisu s forwardovou úrokovou sazbou $f(1, 1)$. Naproti tomu na druhé straně rovnice je předpokládána strategie investování do dvouletého dluhopisu s výnosem i_2 .

Pokud se předpokládá, že čistá teorie očekávání platí, pak lze pomocí tohoto vztahu vypočítat přibližně forwardovou úrokovou sazbu $f(1, 1)$ jako v rovnici (4.4). Vzhledem k tomu, že výnosy jsou malá čísla a jejich mocniny ještě menší, lze členy $i_2^2 - i_1 \cdot f(1, 1)$ zanedbat. Zmíněné forwardové úrokové sazby odrážejí očekávání trhu ohledně budoucích sazeb a inflace.

Pomocí čisté teorie očekávání lze vysvětlit rostoucí tvar výnosové křivky. V tomto případě se očekává růst krátkodobých úrokových měr. Odhady vypočtené výše uvedeným způsobem však podle empirických studií nestranné nejsou. Výsledky odhadů se spíše ukázaly jako nadhodnocené, neboť tato teorie neuvažuje existenci prémie.

4.2 Teorie preference likvidity

Jestliže chce investor vložit své peníze do dluhopisů, vybere si raději krátkodobou variantu. Pokud by měl uvažovat o dlouhodobější investici, musela by mu být nabídnuta tzv. prémie za likviditu. Za těchto podmínek by pak forwardová úroková sazba vypočtená ze spotových úrokových měr byla menší, než kdyby se předpokládala platnost teorie čistého očekávání. Pro výše uvažovaný příklad by proto platilo

$$(1 + i_1) \cdot (1 + f(1,1)) \geq (1 + i_2)^2. \quad (4.5)$$

Nevýhodou této hypotézy je zanedbání vlivu poptávky a nabídky na trhu dluhopisů. Předpokládá se, že jediným faktorem, který ovlivňuje sklon výnosové křivky, je prémie za likviditu. Čím vyšší splatnost dluhopisu, tím bude i vyšší výnos. Uvedená hypotéza však nedokáže vysvětlit inverzní či zhoupnutý tvar výnosové křivky.

4.3 Teorie preferovaných tržních segmentů

Hypotéza vychází z předpokladu striktně oddělených trhů pro krátkodobé a dlouhodobé dluhopisy bez jakékoli provázanosti. Na jednotlivých trzích se střetává poptávka s nabídkou a vytváří tak jednotlivé výše výnosů. Existují investoři s preferencemi pouze krátkodobých investic (například banky kvůli krátkodobým závazkům), i ti, kteří dávají přednost dlouhodobějšímu investování. Jedná se například o penzijní fondy či pojišťovny.

Dle této teorie se rostoucí tvar křivky vysvětlí větším počtem investorů na trhu dluhopisů s kratšími splatnostmi. Z tohoto důvodu roste poptávka při stejné nabídce, což tlačí výnosy dolů. Naopak na dlouhém konci křivky je investorů méně. Neexistuje zde propojení mezi jednotlivými segmenty ve formě forwardových úrokových sazeb. Proto nelze touto hypotézou vysvětlit posun celé výnosové křivky po vertikální ose.

4.4 Modifikovaná teorie očekávání

Na základě uvažované teorie očekávání ve spojení s výše uvedenými teoriemi, je v [13] prezentována modifikace.

Namísto použití rovnice (4.1) je navržena následující úprava

$$(1 + i_1) \cdot (1 + f(1,1)) = (1 + i_2 - D_2)^2, \quad (4.6)$$

kde D_2 je riziková prémie pro dluhopisy s vyšší durací. V tomto případě se jedná o dluhopisy s durací 2 oproti dluhopisům s durací 1. Díky uvažované prémii za riziko se posune forwardová výnosová křivka níže. Odhady dlouhodobých sazeb tedy nebudou tolik nadhodnocené v porovnání s čistou teorií očekávání.

4.5 Teorie preferovaného umístění

Tato teorie spojuje výhody modifikované teorie očekávání a teorie preference tržních segmentů. Lze připustit, že investor, který původně preferoval určitou dobu splatnosti dluhopisů, je ochoten přestoupit do jiného segmentu a zakoupit dluhopis s jinou splatností. Děje se tak pouze v případě, kdy je za ochotu investorovi poskytnuta určitá prémie. Tato prémie má tedy jiný důvod, než tomu bylo u modifikované teorie očekávání.

Výhoda hypotézy tkví v tom, že dokáže vysvětlit všechny typy výnosových křivek. Například plochou strukturu úrokových měr vysvětluje budoucím poklesem výnosů z důvodu existence výše popsané prémie.

5 Determinanty pohybu výnosových křivek

Problémem determinantů, které ovlivňují posun výnosových křivek, se zabývá zdroj [2], z něhož se vycházelo při psaní tohoto úseku. Níže uvedené determinanty lze aplikovat při interpretaci výnosových křivek a napomáhají pochopení jejich významu.

5.1 Měnově politická a fiskální opatření

Centrální banka zajišťuje nastavení výše krátkodobých úrokových sazeb. Tento fakt přímo ovlivňuje nejkratší konec křivky. Za předpokladu platnosti teorie očekávání je touto změnou ovlivněn také střední a delší konec křivky. Zmíněný vliv je dán zprostředkovaně přes očekávání investorů, kde je zahrnutý fakt o zvýšení krátkodobých sazeb již několik období dopředu. Měnová rozhodnutí se totiž tvoří na základě předcházejících ekonomických situací.

Dalším politickým determinantem tvaru křivky je například nadměrná emise dluhopisů vládou. Nárůst nabídky zvýší výnosnost dluhopisů a zároveň toto rozhodnutí zvýší i cenovou hladinu. Z tohoto důvodu bude kladen tlak na ještě větší výnosnost dluhopisů, aby se zachoval reálný výnos.

5.2 Hospodářský cyklus

Korelace mezi hospodářským cyklem a tvarem výnosové křivky je ovlivněna rozvinutostí finančních trhů (tzn. jejich liberalizací a likviditou). Na evropských trzích je tato závislost velmi silná.

Výnosová křivka predikuje hospodářský vývoj země na několik kvartálů dopředu, neboť v sobě odráží (následuje citace z [2])

- (i) měnovou politiku,
- (ii) poptávku po úvěrech,
- (iii) očekávání investorů,
- (iv) mezní produktivitu kapitálu.

Rostoucí křivka souvisí s očekávanou ekonomickou expanzí. Při ekonomickém růstu očekávají trhy vyšší inflaci a posléze vyšší krátkodobou sazbu stanovenou centrální bankou. V tomto případě je rozdíl mezi dlouhodobou a krátkodobou úrokovou sazbou pozitivní.

Naopak klesající výnosová křivka může signalizovat budoucí ekonomickou recesi, kdy se předpokládá pokles inflace. Dříve byla inverzní křivka jasným indikátorem ekonomické recese. V dnešních podmínkách však determinuje křivku tolik okolností, že toto tvrzení ztrácí na významu.

Pokud jsou krátkodobé úrokové sazby vysoko, předpokládá se, že produkt dosáhl maxima v hospodářském cyklu. Tento případ je spojen s očekáváním vyšší inflace a nízkou nezaměstnaností.

5.3 Další externí a interní faktory

Mezi další faktory ovlivňující charakter výnosové křivky patří například ceny a cenová očekávání jiných investičních příležitostí.

- **Externí faktory** - Změny cen ropy a zemního plynu, sentiment na světových finančních trzích nebo válečné konflikty, i tyto determinanty ovlivňují výnosovou křivku.
- **Interní faktory** - Jako příklad lze uvést zlepšení systému řízení rizik ve firmách, který povede k vyššímu výnosu, neboť se tím snižuje riziko nesplacení závazků firmy.

Část III

Extrapoláční metody konstrukce výnosových křivek

Následující část textu popisuje vybrané metody odhadů spotových výnosových křivek sestrojených ze státních dluhopisů. Právě státní dluhopisy jsou většinou považovány za bezrizikové aktivum a tzv. „benchmark“ (srovnávací bod) při oceňování rizikovějších derivátů.

Je vhodné zdůraznit, že ve výběru dat, ze kterých se výnosová křivka konstruuje, je nutné dodržet konzistenci ve smyslu likvidity, rizika a daňového režimu. Ideální křivka by také měla být sestrojena z dluhopisů s nulovým kuponem. Zamezilo by se tak tzv. kuponovému efektu, což v praxi znamená, že pro stejnou dobu do splatnosti má dluhopis s vyšším kuponem vyšší výnos do splatnosti než dluhopis s kuponem nižším. Optimální by tedy bylo použití k odhadu „zero bondy“, neboli dluhopisy s nulovým kuponem. Ty však mají v České republice podobu státních pokladničních poukázek s področní splatností. Nelze jimi tedy odhadovat dlouhodobou časovou strukturu úrokových měr.

Dalším problémem je nevelký počet emitovaných dluhopisů v České republice a Rakousku. Proto bylo nutné upustit od požadavku, aby dluhopisy měly stejnou velikost kuponu a stejný čas výplat. Byla vyvinuta řada různých postupů, jak z cen kuponových dluhopisů odvodit výnosy dluhopisů s nulovým kuponem. Jedná se například o Nelson-Sieglovu a Svenssonovu metodu.

Použití metod závisí kromě počtu emitovaných dluhopisů také na cíli použití odhadnuté křivky. V případě, kdy jde investorovi o co nejpřesnější odhad výnosu v bodě mezidobí a není emitován dluhopis s požadovanou výnosností, se volí proložení interpolačními funkcemi. Je tedy potřeba, aby odhadnutá křivka co nejlépe aproximovala dané body.

Cílem extrapoláčních modelů je zajistit dobré predikční podmínky, tj. prodloužit výnosovou křivku až za nejdleší splatnost. Při odhadování parametrů extrapoláčních modelů se v této práci používá minimalizace kvadrátu odchylky tržních cen dluhopisů od současné hodnoty plateb z dluhopisu. Zmíněná funkce, přes horší výsledky u proložení kratšího konce křivky, přináší dobré odhady v časovém horizontu překračující nejdleší výnos.

Nelson-Sieglově a Svenssonově metodě se věnují práce [14], [16], [22] a [18]. Část věnovaná modelování konfidenčních množin byla vypracována na základě [30].

6 Minimalizační funkce pro extrapoláční modely

Nechť je dán model úrokové míry $i(n; \Theta)$, kde Θ je vektor parametrů tohoto modelu. Parametr n takového modelu označuje, za předpokladu pravidelných kuponových plateb jednou za rok, počet kuponových plateb do splatnosti dluhopisu. V této práci budou uvažovány celkem dva modely úrokové sazby: Nelson-Sieglův model a Svenssonův model.

Při hledání optimálních extrapoláčních modelů se vychází z minimalizace vhodně zvolené chybové funkce $S(\Theta)$, která je pro složené úročení definována předpisem

$$S(\Theta) = \sum_{k=1}^K \left[P_k - \left(\sum_{j=1}^{n_k} \frac{C_k}{(1 + i(t_{j,k}; \Theta))^{t_{j,k}}} + \frac{F_k}{(1 + i(t_{n_k,k}; \Theta))^{t_{n_k,k}}} \right) \right]^2. \quad (6.1)$$

Vzhledem k použitým extrapoláčním modelům je vhodné použít tvar funkce pro spojitě úročení

$$S(\Theta) = \sum_{k=1}^K \left[P_k - \left(\sum_{j=1}^{n_k} C_k \cdot e^{-i(t_{j,k}; \Theta) \cdot t_{j,k}} + F_k \cdot e^{-i(t_{n_k,k}; \Theta) \cdot t_{n_k,k}} \right) \right]^2 = \sum_{k=1}^K [P_k - PV_k]^2. \quad (6.2)$$

Za optimální model v rámci parametrické skupiny modelů $i(n; \Theta)$ bude pak považován model s parametry $\Theta_{opt.} = \operatorname{argmin}_{\Theta} S(\Theta)$.

Neboť se jedná o minimalizaci nelineární funkce, je nutné použít k výpočtu nelineární metody. K řešení byly použity numerické metody optimalizace, konkrétně funkce *fmincon* implementovaná v softwaru MATLAB. Funkce pracuje na základě lokálního numerického algoritmu Interior point a je tudíž závislá na vhodné volbě počátečních parametrů. Lokální numerický algoritmus totiž nachází lokální, nikoli globální, minimum vstupní funkce. Metodika tohoto algoritmu je popsána například v [3]. Funkce $S(\Theta)$ je v průběhu výpočtu minimalizována pro různé kombinace vstupních parametrů.

Dále je možné použít jiné funkce a metody pro minimalizaci, například globální minimalizaci pomocí genetického algoritmu. Ten je také zabudovaný ve výpočetním softwaru MATLAB. Technikou odhadu se podrobněji zabývá kapitola 9.

7 Model Nelson-Siegla

Parametrický model dle Charlese R. Nelsona a Andrewa F. Siegla se dnes řadí k nejpoužívanějším metodám odhadů spotových křivek vůbec. Důvodem je dle [18] poměrně snadná implementace a výborné predikční vlastnosti. Pokud je na lokálním trhu emitováno nevelké (tzn. cca do 30 ks) množství dluhopisů jedná se o model, který je dostatečně flexibilní na to, aby byl schopen popsat všechny základní známé tvary výnosových křivek. V případě, že je na trhu emitováno více dluhopisů, může být vhodnější použít Svenssonův model popsany v následující kapitole, který je schopen popsat výnosovou křivku z určitého pohledu přesněji (viz níže).

Motivací ke zkoumání třídy funkcí, která snadno generuje typické tvary výnosových křivek, byla dle [18] teorie očekávání. Tato třída funkcí je spojena s řešeními diferenciálních rovnic. Pokud jsou spotové úrokové míry generovány diferenciální rovnicí, pak jsou forwardové úrokové míry (odhady budoucích měř) řešením takových diferenciálních rovnic. Dalšími požadavky na model jsou hladkost, dobrá aproximace naměřených hodnot a hlavně schopnost popsat nejrozšířenější tvary výnosových křivek.

Nechť je tedy forwardová úroková míra řešením diferenciální rovnice druhého řádu s reálnými a nestejnými kořeny s konstantní pravou stranou

$$f''(n) + a^* f'(n) + b^* f(n) = c^*, \quad a^*, b^*, c^* > 0, \quad a^*, b^*, c^* \in R. \quad (7.1)$$

Potom je charakteristická rovnice pro homogenní rovnici popsána výrazem

$$\lambda^2 + a^* \lambda + b^* = 0, \quad (7.2)$$

s kořeny

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a^* \pm \sqrt{a^{*2} - 4 \cdot b^*}}{2}. \quad (7.3)$$

Řešení homogenní rovnice má následující tvar

$$f(n) = \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot n} + \beta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot n}, \quad (7.4)$$

proto je obecné řešení původní diferenciální rovnice druhého řádu dáno rovnicí

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot n} + \beta_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot n}. \quad (7.5)$$

Z důvodu lepší ekonomické interpretace bylo zvoleno dosazení za $\lambda_1 = -\frac{1}{\tau_1}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_2}$, proto platí

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_2}}. \quad (7.6)$$

V rovnici (7.6) jsou označeny τ_1, τ_2 coby časové konstanty a koeficienty $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ jsou určeny počátečními podmínkami. Rovnice generuje křivky, které demonstrují různé tvary výnosových křivek (např. klesající, rostoucí, zhoupnuté křivky) dle nastavení jednotlivých parametrů.

Spotový výnos v bodě splatnosti se určí jako průměrná forwardová úroková míra

$$i(n; \Theta) = \frac{1}{n} \int_0^n f(s) ds. \quad (7.7)$$

Uvedené řešení diferenciální rovnice však popisuje pro několik vybraných kombinací parametrů stejnou křivku. Model je tedy z tohoto pohledu přeparametrizovaný. Proto se autoři zaměřili na řešení diferenciální rovnice druhého řádu se dvěma stejnými kořeny.

Charakteristická rovnice je tedy stejná jako u původní diferenciální rovnice s tím rozdílem, že člen $a^{*2} - 4 \cdot b^* = 0$, tzn. $\lambda_1 = \lambda_2$. Konečné řešení diferenciální rovnice má tedy tvar

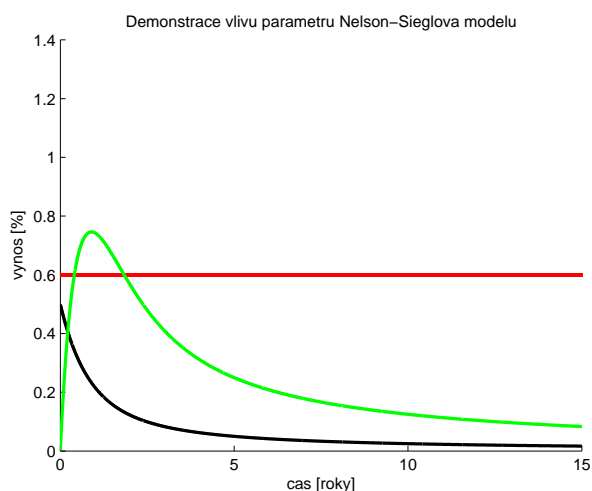
$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau}} + \beta_2 \cdot \left(\frac{n}{\tau} \cdot e^{-\frac{n}{\tau}}\right). \quad (7.8)$$

Nyní již lze z (7.8) určit zintegrováním dle (7.7) výraz, který popisuje spotovou výnosovou křivku

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}}\right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau}}}{\frac{n}{\tau}} - e^{-\frac{n}{\tau}}\right). \quad (7.9)$$

7.1 Interpretace parametrů Nelson-Sieglova modelu

Nelson-Sieglův model obsahuje celkem čtyři parametry $\Theta = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau$. Každý z těchto parametrů se určitým způsobem podílí na tvaru křivky pro různé splatnosti, proto má každý svou ekonomickou interpretaci. Dle rovnice (7.9) lze vysledovat pro první tři parametry jejich chování, pokud se ostatní parametry položí rovny nule a parametr τ se pevně zvolí. Na obrázku 7.1 je zobrazena demonstrace pro vybranou sadu parametrů, jak se jednotlivé komponenty podílí na tvaru výnosové křivky.



Obrázek 7.1: Demonstrace vlivu třech parametrů Nelson-Sieglova modelu. Funkce $i(n; \beta_0 = 1, 2; \beta_1 = 0; \beta_2 = 0; \tau = 0, 3)$ je zobrazena červeně, funkce $i(n; \beta_0 = 0; \beta_1 = 1, 2; \beta_2 = 0; \tau = 0, 3)$ je zobrazena černě a funkce $i(n; \beta_0 = 0; \beta_1 = 0; \beta_2 = 2; \tau = 0, 3)$ je znázorněna zeleně. Hodnoty parametrů byly vybrány vzhledem k přehlednosti obrázku.

Parametr τ ovlivňuje míru klesání funkce $e^{-\frac{n}{\tau}}$ tzn. v jakém časovém horizontu bude výnosová křivka nejlépe aproximována. Při nižší míře klesání je lépe odhadnut delší konec výnosové křivky a naopak. Platí, že $\lim_{n \rightarrow \infty} i(n; \Theta) = \beta_0$. Proto lze parametr β_0 interpretovat jako dlouhodobou spojitou úrokovou sazbu. Dále lze z limitního chování $\lim_{n \rightarrow 0} i(n; \Theta) = \beta_0 + \beta_1$ vysledovat interpretace součtu $\beta_0 + \beta_1$, který označuje krátkodobou spojitou úrokovou sazbu. Samotný parametr β_1 pak udává sklon výnosové křivky, tzn. rozdíl mezi dlouhodobou a krátkodobou úrokovou sazbou. Koeficient β_2 se interpretuje jako střednědobý faktor a určuje velikost „hrbolu“ funkce.

Z výše uvedených limit také plynou základní hraniční podmínky pro parametry Nelson-Sieglova modelu

$$\begin{aligned} \beta_0 &> 0, \\ \beta_0 + \beta_1 &> 0, \\ \tau &> 0, \end{aligned} \tag{7.10}$$

protože existují jen nezáporné úrokové sazby.

8 Svenssonův model

V roce 1994 přišel Svensson s rozšířením modelu Nelson-Siegla o další dva parametry β_3 a τ_2 . Tento novější model je flexibilnější, neboť dokáže popsat křivku s více než jedním lokálním extrémem. Takový poznatek je užitečný především, pokud se očekává, že křivka bude mít některý z méně častých tvarů. Například se může jednat o zhoupanutou křivku či o tzv. S křivku (ta obsahuje více lokálních extrémů).

Opět se vychází ze vztahu pro forwardovou úrokovou míru

$$f(n) = \beta_0 + \beta_1 \cdot e^{-\frac{n}{\tau_1}} + \beta_2 \cdot \left(\frac{n}{\tau_1} e^{-\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{n}{\tau_2} \cdot e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right), \tag{8.1}$$

kde platí, že $\beta_0, \tau_1, \tau_2 > 0$.

Pokud se provede integrace dle (7.7) vznikne vyjádření pro spotovou křivku

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau_1, \tau_2) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\tau_1} \right) + \beta_2 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_1}}}{\tau_1} - e^{-\frac{n}{\tau_1}} \right) + \beta_3 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{\tau_2}}}{\tau_2} - e^{-\frac{n}{\tau_2}} \right). \tag{8.2}$$

Jako každý model má i tento své nevýhody. Je vhodné zmínit alespoň některé z nich. Oproti Nelson-Sieglově modelu může dojít při příliš nízkém počtu dluhopisů k přeparametrizování modelu. Dále je Svenssonův model dle [14] více náchylný k chybám, které vznikají při použití odlehlých pozorování a vlastní výpočet je časově náročnější než u Nelson-Sieglova modelu.

9 Odhad optimálních parametrů Nelson-Sieglova a Svenssonova modelu

Prvním krokem před vlastním odhadováním křivky určitým modelem je výběr relevantních dluhopisů, které mohou být zahrnuty do výpočtů. Z výpočtu je nutné odstranit dluhopisy, které jsou nekonzistentní ve smyslu jiného daňového režimu, proměnlivé výše kuponových plateb, malé likvidity a podobně. Samozřejmě se musí při této selekci vzít v úvahu celkový počet emitovaných dluhopisů.

Každému k -tému dluhopisu zahrnutému do výpočtu je přiřazen vektor výplat (výše jednotlivých kuponů včetně poslední platby navýšené o hodnotu jistiny) a hodnota počtu plateb z dluhopisu n_k . Diskontováním plateb spojitou úrokovou sazbou (dle definice (3.6)) je získána současná hodnota budoucích plateb plynoucích z dluhopisu, tzn. teoretická cena. Pomocí změn parametrů modelu je optimalizována funkce (9.1), kdy je minimalizován součet čtverců chyb teoretické ceny dluhopisu a aktuální rovnovážné tržní ceny.

Na problém odhadu lze pohlížet dvěma způsoby:

- (i) zvolí se implicitně parametr τ (jen v případě Nelson-Sieglova modelu) a ostatní parametry se odhadnou již některou z lineárních metod, například metodou nejmenších čtverců,
- (ii) na úlohu se pohlíží jako na model s nelineárními parametry, proto je nutné odhadnout tyto parametry některou z nelineárních metod. Práce [22] doporučuje použít některé z numerických metod. Například Newtonovu metodu a její modifikace, kdy se odhadují všechny parametry současně. Metoda je také součástí algoritmu Interior point funkce *fmincon* v softwaru MATLAB.

V této práci je pro odhad parametrů aplikován druhý výše uvedený postup, který je založen na minimalizaci funkce $S(\Theta)$ vůči parametrům Θ . Funkce je dána předpisem

$$S(\Theta) = \sum_{k=1}^K \left[P_k - \left(\sum_{j=1}^{n_k} C_k \cdot e^{-i(t_{j,k};\Theta) \cdot t_{j,k}} + F_k \cdot e^{-i(t_{n_k,k};\Theta) \cdot t_{n_k,k}} \right) \right]^2 = \sum_{k=1}^K [P_k - PV_k]^2 \rightarrow \min(\Theta), \quad (9.1)$$

přičemž je vektor parametrů Θ omezen množinou Ω , tzn. $\Theta \in \Omega$. Množina omezení vychází ze zvolených modelů úrokové sazby (7.9) nebo (8.2).

Při odhadu parametrů se naráží na následující dva problémy. Prvním z nich je volba počátečních hodnot vstupních parametrů, neboť vybrané numerické metody jsou často lokálními minimizátory. Tento problém lze vyřešit například omezením na co nejmenší intervaly a aplikací minimalizace na různé sady vstupních parametrů. Z těchto sad je pak vybrána ta, která má nejmenší hodnotu chybové funkce.

Dalším problémem je určení chybové funkce. Tato práce se zaměřila na chybovou funkci definovanou rovnicí (9.1). Někdy se však lze setkat také s minimalizací čtverců chyb výnosů do splatnosti. Minimalizací cenových chyb se příkládá menší význam kratším výnosům do splatnosti.

Proto je tímto způsobem lépe odhadnut delší konec výnosové křivky. Zmíněný postup je tedy vhodný, pokud by měla sloužit odhadnutá křivka pro rozhodnutí o regulaci cen.

Jestliže je důvodem k sestrojování křivky řízení krátkodobých úrokových sazeb, je dle Svenssona vhodnější použít minimalizaci rozdílů čtverců výnosů do splatnosti. Kvůli náročnosti výpočtu minimalizace výnosu do splatnosti se však často upouští od této metody a obecně je bankami častěji používána minimalizace cen, jak je uvedeno v [22]. Nicméně je nutné dbát opatrnosti při interpretaci takto sestrojených křivek.

Pro eliminaci rizik plynoucích z lokálního charakteru minimalizačních algoritmů byla použita matice sad různých počátečních parametrů. Po spuštění minimalizace pro všechny sady parametrů byly jako optimální vybrány takové parametry, po jejichž použití byla hodnota minimalizační funkce (9.1) nejnižší.

10 Konfidenční množiny

Jedním ze způsobů, jak u nelineárních modelů zjistit vliv nelinearity na kvalitu odhadů, je využití tzv. konfidenčních množin, které vychází z principů nelineární regrese [30]. Pokud je model lineární v parametrech, je dvourozměrná konfidenční množina pravidelná elipsa. Jestliže se graf množiny nějak odlišuje od tvaru elipsy, pak je zde patrný vliv nelinearity.

Dvě výše uvedené metody odhadu výnosových křivek jsou obecně v parametrech nelineární. Aby bylo možné graficky znázornit konfidenční množiny pro parametry, je vhodné zaměřit se na dvojice parametrů $(\beta_1, \tau); (\beta_2, \tau)$ u Nelson-Sieglova modelu a $(\beta_1, \tau_1); (\beta_2, \tau_1); (\beta_3, \tau_2)$ u Svenssonova modelu. Právě u těchto dvojic parametrů byla zkoumána možná nelinearita dle tvaru konfidenční množiny, která je odvozena na základě testu poměrem věrohodností.

Nechť je dán nelineární model $Y = f(x; \Theta) + \varepsilon$, kde $\varepsilon \sim N(0; \sigma^2 \mathbf{I})$ a odhad parametrů založený na minimalizaci funkce

$$S(\Theta) = \sum_{i=1}^n (Y_i - f(x_i; \Theta))^2.$$

Vychází se z jednoduché hypotézy $\Theta^* = \Theta^0$ a z testu poměrem věrohodnosti. Veličina Θ^* je vektor přesného řešení (vektor parametrů) a Θ^0 je jeho odhad. Dále se předpokládá, že $\hat{\Theta}^* = \mathbf{L}$ je vektor odhadnutého přesného řešení minimalizující funkci $S(\Theta)$.

Za platnosti testované hypotézy přibližně platí, že

$$\frac{S(\Theta^0) - S(\mathbf{L})}{m \cdot s^2} \sim F_{m, K-m}, \quad (10.1)$$

kde s^2 je odhad rozptylu, $m + 1$ je počet parametrů modelu, K je počet dat vstupovaných do modelu (v tomto případě počet dluhopisů), S je funkce (zde (9.1)) a $F_{m, K-m}$ je Fisherovo rozdělení s m a $K - m$ stupni volnosti. Pokud bude stanovena hladina významnosti $\alpha = 5\%$, pak je přibližný kritický obor dán nerovností

$$S(\Theta^0) \geq S(\mathbf{L}) + m \cdot s^2 \cdot F_{m, K-m}(\alpha) \quad (10.2)$$

s kritickou hodnotou $F_{m, K-m}(\alpha)$.

Pokud se odhad rozptylu vyjádří pomocí hodnoty funkce $S(\mathbf{L})$ jako

$$s^2 = \frac{S(\mathbf{L})}{K - m}, \quad (10.3)$$

vznikne vyjádření věrohodnostní konfidenční množiny

$$K_{LR} = \left\{ \Theta^0 \in \Omega : S(\Theta^0) < S(\mathbf{L}) \cdot \left(1 + \frac{m}{K - m} \cdot F_{m, K-m}(\alpha) \right) \right\}. \quad (10.4)$$

Odchylna tvaru této konfidenční množiny od pravidelné elipsy pak zobrazuje vliv nelinearity na kvalitu odhadnutých parametrů.

Část IV

Interpolační metody konstrukce výnosových křivek

Cílem následujících metod je co nejuvěrnější proložení dat vybraným modelem. Na rozdíl od předchozí kapitoly se u interpolačních metod často stává, že limitní vlastnosti funkcí mimo interpolační oblast naprosto nevyhovují požadavkům pro predikci. Pokud je však potřeba zjistit výnos v bodě, pro který není emitován žádný dluhopis, jsou tyto modely vhodnější než například Svenssonův model. Pro investory, kteří obchodují na sekundárním trhu, je minimalizace celkové chyby klíčová. Právě interpolační modely by měly být pro ně z tohoto pohledu vhodné.

Aproximací polynomy a testováním statistické významnosti koeficientů se zabývají [16], [17] a [1]. Teorie Gompertzova trendu v této kapitole je inspirována [8] a interpolací kubickými splajny se zabývá [4]. Speciálně lineárně-logaritmický model je rozpracován v [21].

11 Kriteriaální minimalizační funkce pro interpolační modely

Nechť je na počátku dána množina K dluhopisů ozn. B_1, B_2, \dots, B_K , množina splatností těchto dluhopisů $\mathbf{T} = (t_1, t_2, \dots, t_K)$ a množina spotových výnosností $\mathbf{I}^* = (i_1^*, i_2^*, \dots, i_K^*)$. Interpolační model úrokové míry je vyjádřen lineárním nebo nelineárním vztahem a lze ho obecně označit $i(t; \Theta)$. Při hledání optimálních parametrů následujících tří modelů byly minimalizovány dvě chybové funkce vzhledem k vektoru parametrů Θ . Tyto funkce jsou dány předpisem

$$\begin{aligned} f_1(\Theta) &= \sum_{k=1}^K (i_k^* - i_k(t_k; \Theta))^2, \\ f_2(\Theta) &= \sum_{k=1}^K |i_k^* - i_k(t_k; \Theta)|, \end{aligned} \tag{11.1}$$

kde i_k^* je pozorovaná hodnota výnosu k -tého dluhopisu a $i_k(t_k; \Theta)$ je odhadnutá hodnota výnosu k -tého dluhopisu daným modelem.

Vybranými třemi interpolačními modely jsou aproximace polynomy, Gompertzova křivka a lineárně-logaritmická křivka.

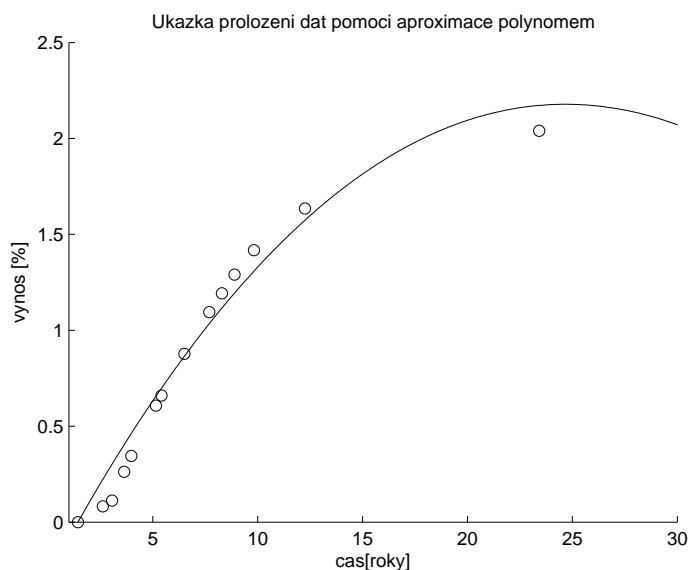
Za optimální model v rámci vybrané parametrické skupiny modelů je pak považován model s parametry $\Theta_{opt} = \operatorname{argmin} f_1(\Theta)$, resp. $\Theta_{opt} = \operatorname{argmin} f_2(\Theta)$.

12 Aproximace polynomu

Prvním popisovaným modelem bude aproximace polynomiální funkcí stupně d . Polynomy se v praxi jako interpolační model používají nejčastěji. Tvar hledaného zobrazení množiny T do množiny I^* je dán rovnicí

$$i(t; a_0, a_1, \dots, a_d) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d. \quad (12.1)$$

V případě modelu proložení polynomem nastává otázka volby nejvhodnějšího stupně polynomu. Pokud by byl zvolen příliš velký stupeň, došlo by k velkým oscilacím modelu a nereálnému zakřivení odhadnuté výnosové křivky. Dále je nutné zdůraznit, že polynomiální model je velmi citlivý na malé odchylky v datech a na odlehlé hodnoty. Při zvolení příliš nízkého stupně polynomu však dochází k poměrně velkým odchylkám odhadnutých výnosů a naměřených hodnot a křivka neodpovídá skutečnosti. Dle [1] dochází při dosažení optimálního stupně polynomu k ustálení residuálního rozptylu s_{d+1}^2 . Jak vypadá proložení polynomiálních modelů je ilustrováno na obr. 12.1, kde jsou kolečky vyznačena data a spojitou čarou proložená křivka polynomu druhého stupně.



Obrázek 12.1: Ukázka proložení dat polynomem druhého stupně.

12.1 Volba vhodného stupně polynomu

Při volbě parametru d se vychází z metodiky založené na minimalizaci funkce $f_1(\Theta)$.

Nechť se odhad optimálního stupně polynomu přibližně rovná optimálnímu stupni $\hat{d} \approx d_0$ (viz dále). Úkolem je najít pro množství dat K mezi všemi stupni $1 < d < K$ takový, který bude roven \hat{d} . Pokud je stupeň polynomu d , je počet koeficientů polynomiální funkce $d + 1$. Nechť je s_{d+1}^2 residuální rozptyl. Dle literatury lze ukázat, že pokud $d + 1 < \hat{d} + 1$, tak $E(s_{d+1}^2) > \sigma^2$ a pokud $d + 1 \geq \hat{d} + 1$, tak $E(s_{d+1}^2) = \sigma^2$. Uvedená hodnota σ^2 je rozptyl residuí polynomiálního modelu zadaného vztahem (12.7).

Dříve se používala pro optimalizaci odhadu stupně polynomu funkce (12.2), kde w je označení pro penaltovou funkci, která nabývá velkých hodnot pro malý počet pozorování a naopak.

Za odhad optimálního počtu koeficientů polynomiální funkce lze považovat hodnotu d , která minimalizuje funkci

$$A_{d+1} = s_{d+1}^2(1 + (d + 1) \cdot w). \quad (12.2)$$

Za obecných podmínek lze dle [1] dokázat, že pokud pro penalizační funkci platí $w > 0$ pro $w \rightarrow 0$ a $K \cdot w \rightarrow \infty$ pro $K \rightarrow \infty$, pak odhad $\hat{d} + 1$ konverguje podle pravděpodobnosti k $d_0 + 1$.

V této práci byly namísto (12.2) použity následující čtyři často používaná kritéria: Akaikeho kritérium ve tvaru (12.3), Geweke Messeovo kritérium (12.4), Schwarz Rissanenovo kritérium (12.5) a Hannah Quinnovo kritérium (12.6) pro $c = 2$ (což je obvykle používaná hodnota dle [17]).

$$AIC_{d+1} = \ln s_{d+1}^2 + \frac{2(d + 1)}{K} \quad (12.3)$$

$$GM_{d+1} = s_{d+1}^2 \cdot \left(1 + \frac{(d + 1)}{\sqrt[4]{K}}\right) \quad (12.4)$$

$$SR_{d+1} = \ln(s_{d+1}^2) + \left(\frac{(d + 1) \cdot \ln(K)}{K}\right) \quad (12.5)$$

$$HQ_{d+1} = \ln(s_{d+1}^2) + \frac{2c \cdot (d + 1) \cdot \ln(\ln(n))}{n} \quad (12.6)$$

Při výpočtu byla po minimalizaci uvedených kritérií vybrána nejčastější hodnota počtu koeficientů a ta aplikována na data. Nicméně Akaikeho kritérium často nadhodnocuje (jak uvádí [1]) tzn., že udává optimální počet koeficientů vyšší než ostatní kritéria. Toto tvrzení je tedy nutno brát v úvahu při volbě optimálního stupně polynomu.

Test významnosti koeficientů

Nechť je model úrokové sazby chápán ve formě lineárního regresního modelu tvaru

$$i(t; \Theta) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d + \varepsilon_t, \quad (12.7)$$

kde je $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$. Náhodná veličina ε_t symbolizuje nesystematickou chybu modelu, která má vlastnosti bílého šumu. Pak lze testovat významnost koeficientů polynomiální funkce takzvaným t-testem. T-testy významnosti koeficientů testují nulovou hypotézu H_0 proti alternativě H_1 , kde

$$\begin{aligned} H_0 : a_i &= 0, \\ H_1 : a_i &\neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, d. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Testovací statistika (12.9) se porovnává s kvantily Studentova rozdělení s $K - d$ stupni volnosti. Jako b_i je označen odhad koeficientu a_i a d je stupeň polynomu.

Testové kritérium má tvar

$$T_i = \frac{b_i}{\sqrt{s_d^2 \cdot v_{ii}}}, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad (12.9)$$

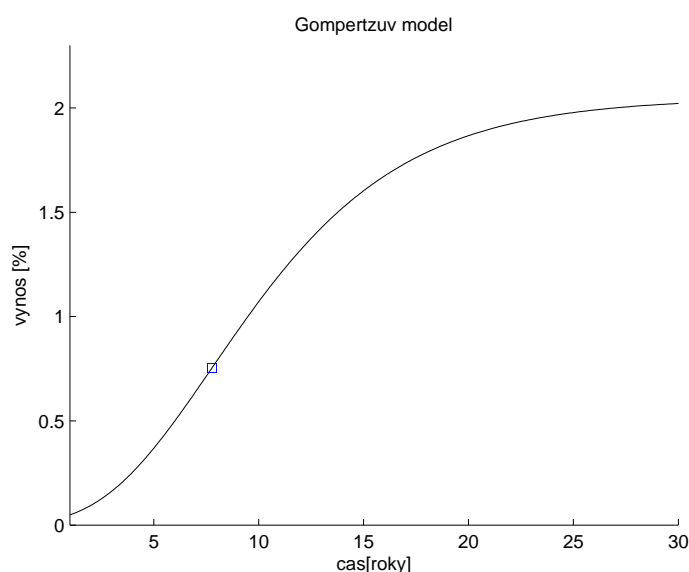
kde v_{ii} je odhad rozptylu parametru b_{ii} . Hypotéza H_0 se tedy zamítá pokud $|T_i| > t_{K-d}(\alpha)$, kde $t_{K-d}(\alpha)$ je kritická hodnota pro $1 - \frac{\alpha}{2}$ % kvantil Studentova rozdělení. Hladina významnosti je v tomto případě zvolena jako $\alpha = 5$ %.

13 Gompertzova křivka

Křivka ve tvaru Gompertzova trendu vzniká transformací modifikovaného exponenciálního trendu. Gompertzovu křivku lze zapsat v několika tvarech. Nejobvyklejší tvar je následující

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{\gamma + \alpha \beta^t} \quad (\beta > 0). \quad (13.1)$$

Na levé straně rovnice figurují odhady výnosů na základě tohoto modelu v bodech naměřených splatností. Cílem je najít takové tři parametry modelu α, β, γ , aby byly chybové funkce (11.1) minimalizovány.



Obrázek 13.1: Demonstrace Gompertzova trendu. Čtvercem je vyznačen inflexní bod konkrétní křivky.

Gompertzova křivka má pro hodnoty parametrů $\alpha < -1$ a $0 < \beta < 1$ inflexní bod pro $t = \frac{-\ln(-\alpha)}{\ln(\beta)}$. Parametr γ je někdy považován za parametr nasycení, neboť určuje, v jaké hladině vertikální osy dojde k tzv. „nasycení“ modelu. Za výše uvedených podmínek pro parametry modelu platí

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^\gamma. \quad (13.2)$$

Funkce Gompertzova trendu má tedy asymptotu rovnoběžnou s horizontální osou ve výšce e^γ .

Gompertzova křivka je protáhlejší doprava, proto se řadí mezi tzv. S - křivky, jež jsou nesymetrické kolem inflexního bodu. Na obrázku 13.1 lze nahlédnout, jak taková křivka vypadá pro parametr $\gamma = 0,7$ s asymptotou $e^\gamma \doteq 2,01$.

Dle [8] lze výše uvedený model parametrizovat i jiným způsobem

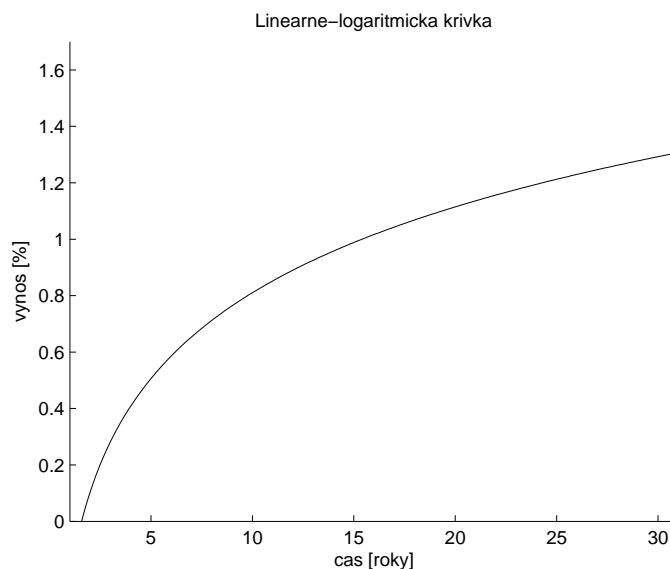
$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = \frac{\gamma}{e^{\alpha\beta^t}}. \quad (13.3)$$

14 Lineárně - logaritmická křivka

Třetím aplikovaným interpolačním modelem v této práci je lineárně-logaritmický trend. Křivku lze matematicky vyjádřit jako

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot a + b. \quad (14.1)$$

Tento model vyžaduje odhad dvou parametrů a, b . Opět bude postup odhadu parametrů obdobný jako v případě Gompertzova trendu, tedy minimalizace chybových funkcí (11.1). Na obrázku 14.1 je zobrazena demonstrace tvaru lineárně logaritmické křivky.



Obrázek 14.1: Demonstrace tvaru lineárně-logaritmické křivky.

15 Interpolace kubickými splajny

Posledním zkoumaným modelem bude interpolace kubickými splajny. Interpolace splajny se řadí mezi neparametrické polynomiální metody. Tato metoda byla vyvinuta pro potřeby návrhářů pro vykreslování hladkých křivek. Cílem je tedy hladkost. Způsobů odhadu je více, například metoda nejmenších čtverců nebo některé vyhlazovací metody. Nevýhodou metodologie kubických splajnů je velký sklon k oscilacím, zejména pokud jsou uzly blízko u sebe a nejsou v jedné horizontální rovině.

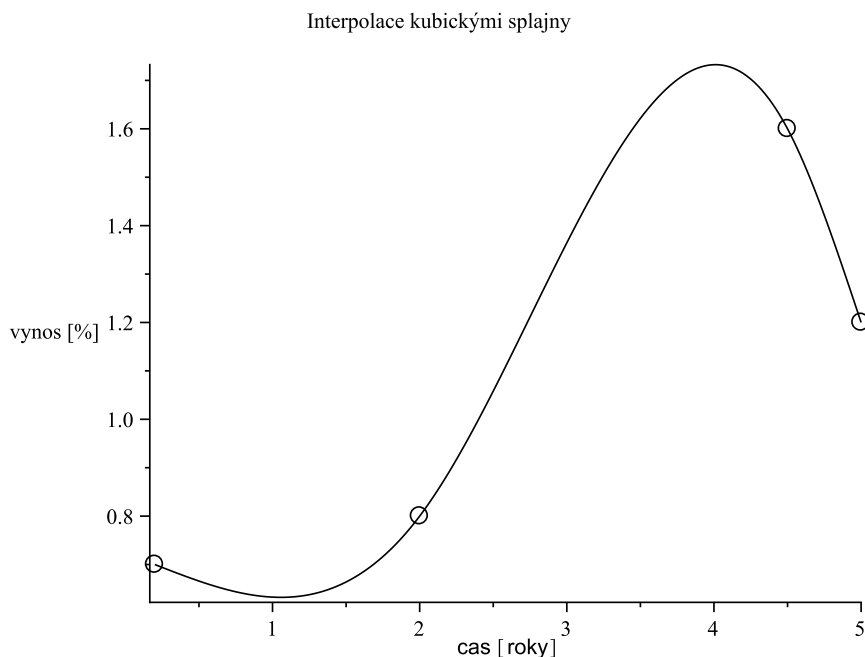
Jedná se vlastně o proložení polynomů třetího stupně, jejichž začátek a konec je vždy mezi dvěma zadanými body, tzv. uzly. Volba uzlů je již předmětem dalšího zkoumání. Při aplikaci této metody na odhady výnosových křivek se volí např. uzly vzniklé po provedení metody bootstrapping na dluhopisy. Pokud není dluhopisů mnoho, nebo se jejich vzdálenosti markantně neliší, lze (jako v této práci) za uzly považovat přímo dané doby do splatnosti dluhopisů. Kubické splajny jsou oblíbené pro dobrý poměr mezi jednoduchostí implementace a přesností.

Technický postup určování koeficientů jednotlivých kubických funkcí stojí na čtyřech požadavcích, které musí být dodrženy a od nichž se odvíjí algoritmus výpočtu

- (i) hodnota každého polynomu je v bodě uzlu shodná s naměřenou výnosností,
- (ii) první derivace každého polynomu se rovná v bodě uzlu první derivaci naměřené výnosnosti,
- (iii) druhá derivace každého polynomu se rovná v bodě uzlu první derivaci naměřené výnosnosti,
- (iv) druhá derivace každého polynomu je mezi uzly spojitá.

Z důvodu složitosti algoritmu této metody a potřeby mnoha proměnných, bylo zavedeno pro tuto podkapitolu vlastní značení, které je popsáno níže. Splajn je po částech polynomiální funkce, která vzniká z jednotlivých segmentů. Tyto segmenty jsou navzájem spojeny v bodech, kterým se říká uzlové body. Kubický splajn je tedy poskládan z polynomiálních funkcí stupně tři a v každém uzlu musí být zakřivení a sklon kubických funkcí shodný.

Ukázka proložení kubického splajnu je na obrázku 15.1.



Obrázek 15.1: Demonstrace kubického splajnu

Nechť je segment splajnové funkce obecně tvaru $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Druhá derivace je pak $y'' = 6ax + 2b$. Jedná se tedy o lineární funkci, která je vždy spojitá mezi uzly, proto je čtvrtý požadavek splněn vždy. Z tohoto důvodu se v dalším textu této kapitoly bude vycházet jen z prvních tří požadavků.

Tento text si neklade za cíl sloužit k podrobnému popisu algoritmu, který lze nalézt v [4]. Je zde pouze naznačen způsob výpočtu.

Nechť je N označení obecně N -tého segmentu spline. Pomocí značení $N - 1, N + 1$ atd. budou popisovány vztahy mezi uzly v okolí N -tého uzlu. Existují dva způsoby nastavení okrajových podmínek při proložení spline funkce.

- **Přirozený spline**

V tomto případě se stanoví $y''_0 = y''_N = 0$.

- **Clamped spline**

Pokud jsou použity okrajové podmínky $y'_0 = f(x_0)'$ a $y'_N = f(x_N)'$ jedná se o proložení tzv. Clamped spline funkce.

Nechť je

$$X_N = x_{N+1} - x_N. \quad (15.1)$$

Na základě výše uvedených kritérií jsou sestaveny následující rovnice

$$y_N = d_N, \quad (15.2)$$

$$d_{N+1} = a_N X_N^3 + b_N X_N^2 + c_N X_N + d_N, \quad (15.3)$$

$$c_{N+1} = 3a_N X_N^2 + 2b_N X_N + c_N, \quad (15.4)$$

$$a_N = \frac{b_{N+1} - b_N}{3X_N}. \quad (15.5)$$

Parametr a lze vypočítat z rovnice (15.5). Poté lze získat parametr c z následující rovnice

$$c_N = -X_N \frac{b_{N+1} + 2b_N}{3} + \frac{d_{N+1} - d_N}{X_N}. \quad (15.6)$$

Po několika úpravách týkajících se dosazení některých rovnic do ostatních atp. vznikne rekurzivní vztah pro výpočet parametru b

$$b_{N+2} = \frac{-2X_N b_{N+1} - X_N b_N - 2X_{N+1} b_{N+1} - 3 \frac{d_{N+1} - d_N}{X_N} + 3 \frac{d_{N+2} - d_{N+1}}{X_{N+1}}}{X_{N+1}}. \quad (15.7)$$

Další otázkou je, jak co nejjednodušeji vyřešit výše uvedené rovnice pro všechny proměnné. Rovnici (15.7) lze upravit jako

$$X_{N+1} b_{N+2} + 2(X_N + X_{N+1}) b_{N+1} + X_N b_N = -3 \frac{d_{N+1} - d_N}{X_N} + 3 \frac{d_{N+2} - d_{N+1}}{X_{N+1}}. \quad (15.8)$$

Neboť se v této práci uplatňují přirozené podmínky pro spline, stanoví se $b_0 = b_1 = 0$. Systém vzniklých rovnic lze zapsat v matici o rozměrech $(N-2) \times (N+1)$ (jedná se tedy o tzv. třídiagonální matici) jako

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} X_0 & 2(X_0 + X_1) & X_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \left(\frac{d_1 - d_0}{X_0} - \frac{d_2 - d_1}{X_1} \right) \\ 0 & X_1 & 2(X_1 + X_2) & X_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \left(\frac{d_2 - d_1}{X_1} - \frac{d_3 - d_2}{X_2} \right) \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{N-2} & 2(X_{N-2} + X_{N-1}) & X_{N-1} & 0 & -3 \left(\frac{d_{N-1} - d_{N-2}}{X_{N-2}} - \frac{d_N - d_{N-1}}{X_{N-1}} \right) \end{array} \right)$$

Řešením výše uvedeného systému rovnic je množina hodnot b_0, b_1, \dots, b_N . Jednotlivé sady parametrů pak jednoznačně určují segmenty kubického splajnu.

Část V

Praktická část

Pro praktickou aplikaci konstrukce spotových výnosových křivek byla vybrána ukázková data pro celkem tři státy, jmenovitě Českou republiku, Spolkovou republiku Německo a Rakousko. Pro první dvě vyjmenované země byly kromě aktuálních dat (konkrétně s datem vypořádání 14.2.2014) ještě pro porovnání zvoleny informace o dluhopisech s datem vypořádání 13.4.2012. Pro všechny datové sady je dána konečná cena dluhopisu součtem tržní ceny a alikvotního úrokového výnosu.

V tabulkách je vždy uveden název dluhopisu (tedy jeho označení na burze), rovnovážná tržní cena dluhopisu, alikvotní úrokový výnos, výše nezdaněné kuponové platby, datum splatnosti dluhopisu a čistý výnos do splatnosti v procentech. U odhadů interpolačními metodami jsou pro názornost zobrazeny i původní data včetně odhadnutých křivek.

Na závěr této části je provedeno porovnání modelů sestavených z dluhopisů do splatnosti 10 let.

16 Česká republika

16.1 Data

Státní dluhopisy České republiky byly zpracovány pro dva časové okamžiky z důvodu interpretace a porovnání dvou výnosových křivek stejného státu pro dvě různá časová období.

Informace o státních dluhopisech České republiky byla čerpána z oficiálních stránek Patria a.s. [20]. Jedná se o přímého obchodníka na Burze cenných papírů Praha (BCCP), proto lze považovat tento zdroj a posléze i data za důvěryhodná. Jako zdroj uvádí tyto stránky Českou obchodní banku (ČSOB). Dle zákona o dluhopisech [27] podléhají kapitálové výnosy v České republice 15% dani.

V níže uvedených tabulkách jsou uvedeny nezdaněné kuponové výnosy. Z obou sad zdrojových dat byly vyloučeny dluhopisy s variabilním kuponem z důvodu konzistence dat v tomto směru. V tabulce 16.1 jsou uvedena použitá data pro Českou republiku aktuální k datu vypořádání 13.4.2012. Novější použitá sada dat s datem vypořádání 14.2.2014 je popsána v tabulce 16.2.

Tabulka 16.1: Tabulka dat státních dluhopisů České republiky s datem vypořádání 13.4.2012

Dluhopis	Cena (Kč)	AUV (Kč)	Kupon (Kč)	Splatnost	Čistý YTM [%]
3,55/12	10321,96	178,49	355	18.10.2012	0,62
3,70/13	10628,12	311,42	370	16.6.2013	0,92
3,80/15	10648,84	8,44	380	11.4.2015	1,56
6,95/16	12057,62	160,24	695	26.1.2016	1,68
4,00/17	10893,59	8,89	400	11.4.2017	2,08
4,60/18	11581,98	307,94	460	18.8.2018	2,37
5,00/19	11539,80	11,11	500	11.4.2019	2,54
3,75/20	10881,72	226,04	375	12.9.2020	2,81
3,85/21	10937,68	213,89	385	29.9.2021	2,91
4,70/22	11740,81	283,31	470	12.9.2022	2,99
4,20/36	11635,21	157,50	420	4.12.2036	3,25
4,85/57	12094,04	192,65	485	26.11.2057	3,86

Tabulka 16.2: Tabulka dat státních dluhopisů České republiky s datem vypořádání 14.2.2014

Dluhopis	Cena (Kč)	AUV (Kč)	Kupon (Kč)	Splatnost	Čistý YTM [%]
2,75/14	10274,29	243,68	275	31.3.2014	0,06
3,40/15	10674,57	158,67	340	1.9.2015	0,03
6,95/16	11363,72	44,40	695	26.1.2016	0,12
0,50/16	10071,14	27,92	50	28.7.2016	0,32
4,00/17	11421,88	342,22	400	11.4.2017	0,52
4,60/18	11910,19	231,28	460	18.8.2018	0,78
5,00/19	12443,09	427,78	500	11.4.2019	0,96
1,50/19	10188,73	45,83	150	29.10.2019	1,23
3,75/20	11646,22	163,54	375	12.9.2020	1,36
3,85/21	11720,69	149,72	385	29.9.2021	1,62
4,70/22	12524,14	204,97	470	12.9.2022	1,74
5,70/24	13910,07	418,00	570	25.5.2024	1,90
2,50/28	10082,99	120,83	250	25.8.2028	2,50
4,20/36	12300,87	87,50	420	4.12.2036	2,82
4,85/57	12874,91	111,82	485	26.11.2057	3,52

Pro konečné tvary výnosových křivek byly použity dluhopisy s dobou splatnosti do 10 let. Ostatní musely být vyloučeny z důvodu menší likvidity. Pro úplnost a porovnání českých křivek ze dvou období však budou představeny i křivky odhadnuté z dluhopisů všech dostupných splatností. Nelson-Sieglův a Svenssonův model prokládá lépe výnosovou křivku pro delší splatnosti (díky volbě minimalizační funkce), proto je nezbytné dbát opatrnosti při interpretaci takto sestrojených křivek.

16.2 Extrapolace

16.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model

Nejdříve bude pracováno se starší sadou dat (tzn. aktuální k datu 13.4.2012). Na obrázku 16.1 je zobrazena výsledná odhadnutá křivka pro Nelson-Sieglův model červeně a pro Svenssonův model zeleně. Optimální parametry minimalizující funkci (9.1) jsou pro Nelson-Sieglův model

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = 0,071767 - 0,051778 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{30}}}{\frac{n}{30}} - e^{-\frac{n}{30}} \right) - \quad (16.1)$$

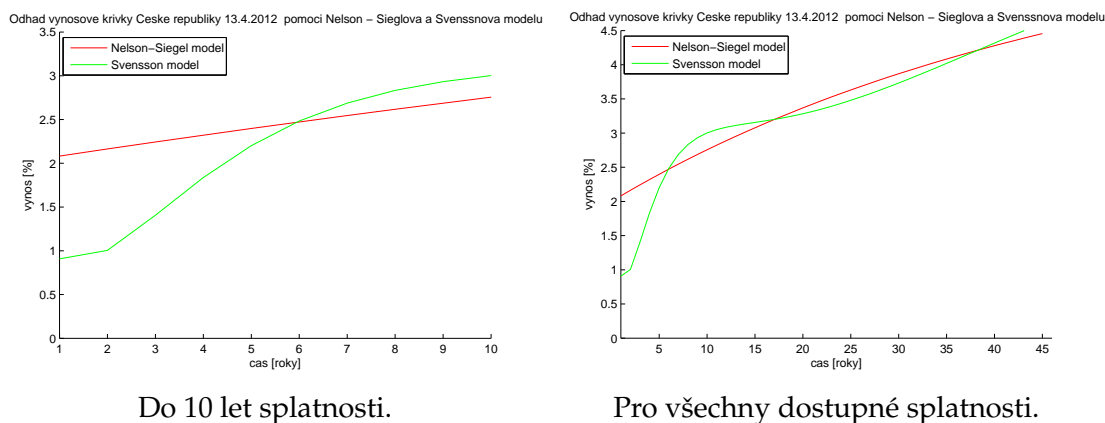
$$- 0,001345 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{30}}}{\frac{n}{30}} - e^{-\frac{n}{30}} \right).$$

Pro Svenssonův model jsou optimální parametry, které opět minimalizují funkci (9.1) následující

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) = 0,089536 - 0,071434 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{1,403}}}{\frac{n}{1,403}} \right) - \quad (16.2)$$

$$- 0,106948 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{1,403}}}{\frac{n}{1,403}} - e^{-\frac{n}{1,403}} \right) -$$

$$- 0,15000 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{13,387}}}{\frac{n}{13,387}} - e^{-\frac{n}{13,387}} \right).$$



Obrázek 16.1: Nelson-Sieglův a Svenssonův model pro starší česká data.

Výnosová křivka České republiky odhadnutá z novějších dat má tvar, který lze vypočítat z obrázku 16.2. Opět pro Nelson-Sieglův model jsou optimální parametry minimalizující funkci (9.1)

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = 0,052625 - 0,054845 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{8,821}}}{\frac{n}{8,821}} \right) - \quad (16.3)$$

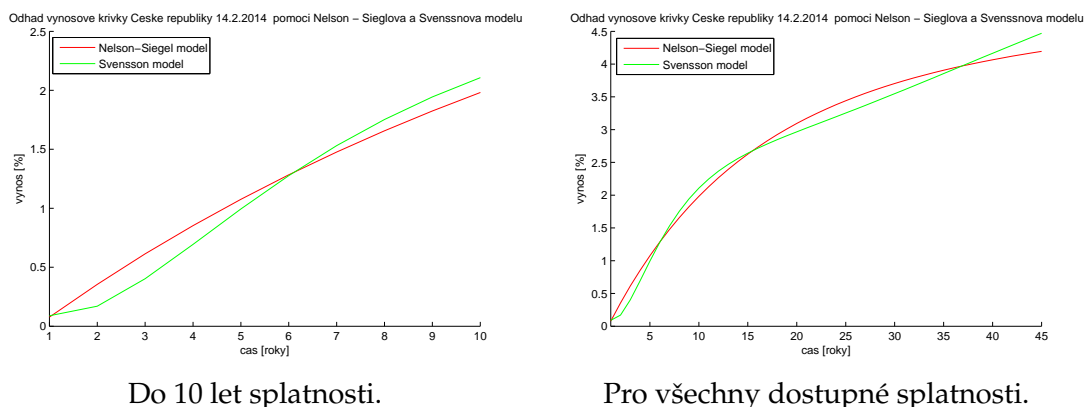
$$- 0,000001 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{8,821}}}{\frac{n}{8,821}} - e^{-\frac{n}{8,821}} \right).$$

Výsledky pro Svenssonův model jsou

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) = 0,094286 - 0,091096 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{2,367}}}{\frac{n}{2,367}} \right) - \quad (16.4)$$

$$- 0,089415 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{2,367}}}{\frac{n}{2,367}} - e^{-\frac{n}{2,367}} \right) -$$

$$- 0,150000 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{15,038}}}{\frac{n}{15,038}} - e^{-\frac{n}{15,038}} \right).$$



Obrázek 16.2: Nelson-Sieglův a Svenssonův model pro novější česká data.

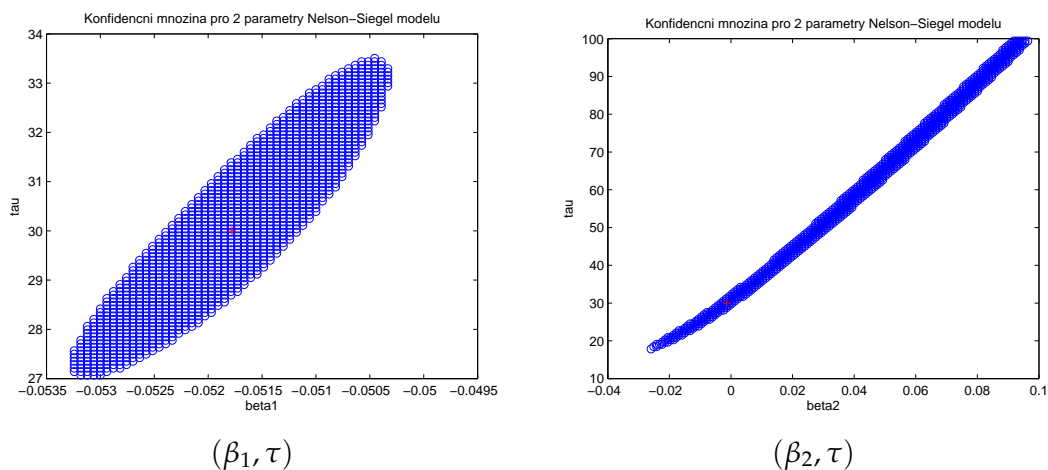
16.2.2 Konfidenční množiny

Z důvodu zjištění vlivu nelinearity na odhady parametrů je část týkající se extrapolacních metod doplněna o ilustrace konfidenčních množin. Tyto konfidenční množiny zobrazují závislost vždy dvou vybraných parametrů modelu. Červeným bodem je zakreslen odhad parametrů a modře je vykreslená množina dle metodiky v kapitole 10, která zobrazuje odchylky od optimálního bodu v rámci zvolené hladiny významnosti 5 %.

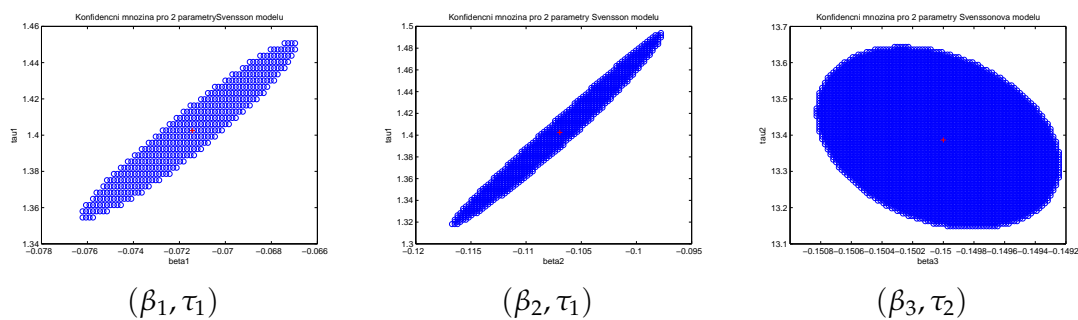
Konfidenční množiny byly namodelovány pro obě sady dat a to pro následující dvojice parametrů

- pro Nelson-Sieglův model
 - (β_1, τ) ,
 - (β_2, τ) ,
- pro Svenssonův model
 - (β_1, τ_1) ,
 - (β_2, τ_1) ,
 - (β_3, τ_2) .

Pro starší česká data jsou zobrazeny konfidenční množiny na sadách obrázků 16.3 a 16.4. Zejména u dvojice parametrů (β_2, τ) u Nelson-Sieglöva modelu si lze všimnout výraznějšího odchýlení od klasického tvaru elipsy. V tomto případě je vliv nelinearity patrný.

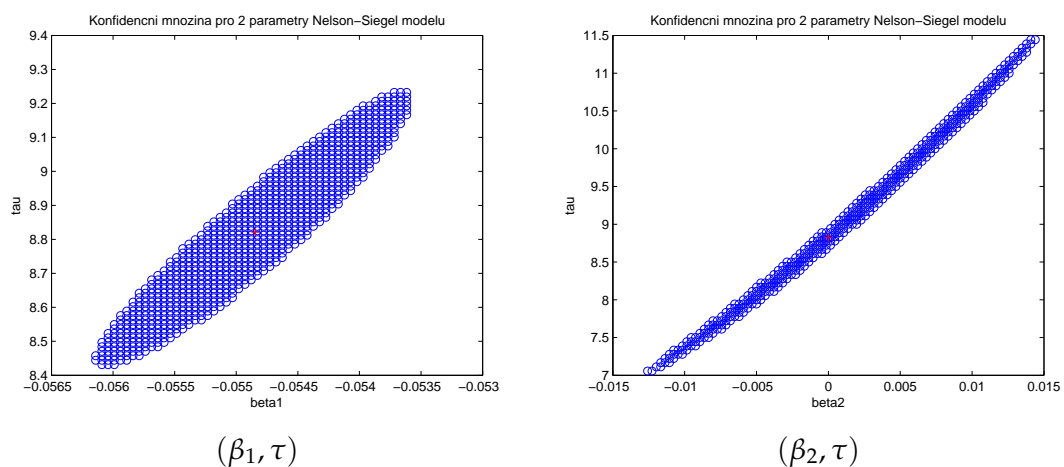


Obrázek 16.3: Konfidenční množiny pro Nelson-Sieglův model starší česká data.

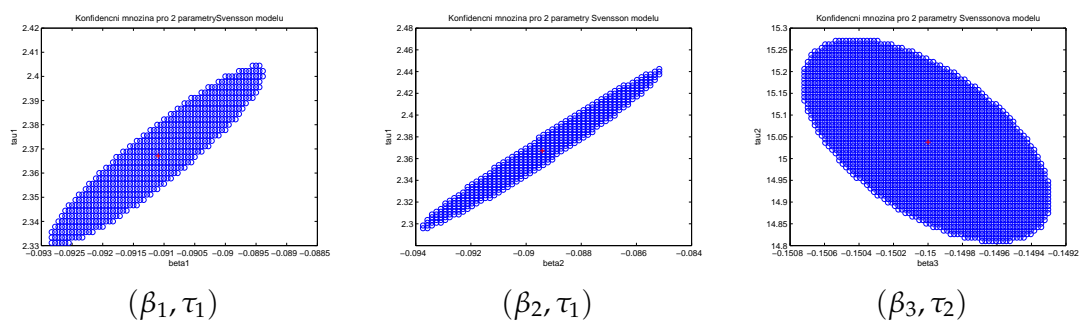


Obrázek 16.4: Konfidenční množiny pro Svenssonův model starší česká data.

Pro novější česká data jsou konfidenční množiny vykresleny na sadách obrázků 16.5 a 16.6. I v tomto případě je vliv nelinearity na odhad parametrů je nejvíce zřejmý u dvojice parametrů (β_2, τ) Nelson-Sieglůva modelu. Konfidenční množina má podlouhlý tvar a na levém konci je mírně zahnutá.



Obrázek 16.5: Konfidenční množiny pro Nelson-Sieglův model novější česká data.



Obrázek 16.6: Konfidenční množiny pro Svenssonův model novější česká data.

16.3 Interpolace

16.3.1 Aproximace polynomem

Prvním vybraným interpolačním modelem je aproximace výnosové křivky polynomy. Pro každou sadu dat jsou prezentovány vybrané dva obrázky. První obrázek vždy popisuje výnosovou křivku sestavenou z dluhopisů do 10 let splatnosti, kdy jsou vyloučeny méně likvidní dluhopisy.

Další prezentovanou křivkou je výnosová křivka aproximovaná polynomem třetího stupně. Tento stupeň je zvolen implicitně z důvodu vzájemné porovnatelnosti. Stupeň prvního modelu sestaveného z dat do 10 let splatnosti je určen minimalizací funkcí (12.3),(12.4),(12.5) a (12.6).

Jelikož je výsledků větší množství, byly tyto údaje zpracovány do dvou tabulek 16.3 a 16.4 pro jednotlivé sady dat.

Ve sloupci Křivka je uvedeno, z jaké množiny dat je model sestaven, dále jsou zde vypsány všechny koeficienty pro odhadnuté mocniny nezávislé proměnné, jejich p hodnoty, které určují významnost koeficientů na základě provedených t -testů a pro porovnání také hodnoty chybových funkcí (11.1). P hodnoty a významnost koeficientů jsou uvedeny pro modely sestavené na základě minimalizace funkce $f_1(\Theta)$.

Hladina významnosti byla zvolena pro všechny sady dat v této práci na 5 %. Pro všechny tabulky v praktické části práce je aplikováno jednotné označení, z jaké sady dat byla křivka odhadována. Pro odhad křivky z dat do 10 let splatnosti je použito označení „kratší“ a pro křivku odhadnutou z dat všech dostupných splatností je použito označení „delší“.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 13.4.2012

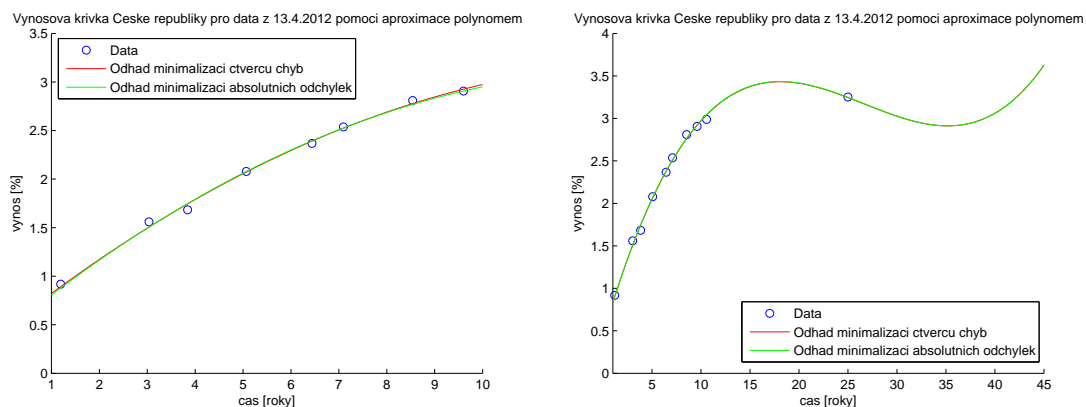
Tabulka 16.3: Tabulka výsledků aproximací polynomem pro starší česká data.

Křivka	Mocnina u t	Koeficient	P hodnota	Významnost	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	t^2	-0,0139	0,0002	významný	0,1010	
	t^1	0,3915	6,33673E-07	významný		
	t^0	0,4453	2,62462E-05	významný		
Opt. dle f1 delší	t^3	0,0002	2,45117E-09	významný	0,0138	
	t^2	-0,0167	5,65391E-10	významný		
	t^1	0,3982	2,95608E-11	významný		
	t^0	0,4479	4,85474E-07	významný		
Opt. dle f2 kratší	t^2	-0,0151				0,2425
	t^1	0,4045				
	t^0	0,4169				
Opt. dle f2 delší	t^3	0,0002				0,3273
	t^2	-0,0167				
	t^1	0,3981				
	t^0	0,4510				

Pro polynomiální funkci (12.1) má rovnice výnosové křivky, sestavené z českých starších dat do 10 let splatnosti minimalizací funkce f_1 , tvar

$$i(t; a_0, a_1, a_2) = 0,4453 + 0,3915 \cdot t - 0,0139 \cdot t^2. \quad (16.5)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 16.7. V pravé části stejného obrázku je vykreslena křivka sestavená z dat všech dostupných splatností po proložení polynomem 3.stupně. Zobrazené křivky pro odhady parametrů pomocí minimalizace funkcí $f_1(\Theta)$ a $f_2(\Theta)$ téměř splývají.



Data do 10 let spl., polynom 2.stupně.

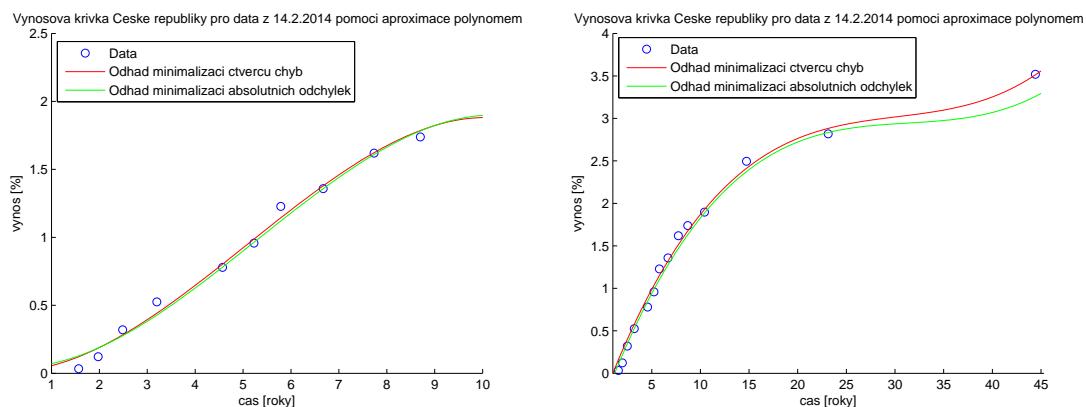
Celá data, polynom 3.stupně.

Obrázek 16.7: Výnosová křivka pro starší česká data, aproximace polynomem.

Výsledky pro data České republiky se dnem vypořádání 14.2.2014

Tabulka 16.4: Tabulka výsledků aproximací polynomem pro novější česká data.

Křivka	Mocnina u t	Koeficient	P hodnota	Významnost	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	t^3	-0,0038	0,0048	významný	0,0340	
	t^2	0,0577	0,0034	významný		
	t^1	-0,0121	0,4188	nevýznamný		
	t^0	0,0135	0,6029	nevýznamný		
Opt. dle f1 delší	t^3	0,0001	0,0028	významný	0,1964	
	t^2	-0,0094	0,0002	významný		
	t^1	0,3000	0,0000	významný		
	t^0	-0,2899	0,0068	významný		
Opt. dle f2 kratší	t^3	-0,0038				0,4825
	t^2	0,0599				
	t^1	-0,0346				
	t^0	0,0496				
Opt. dle f2 delší	t^3	0,0001				1,5220
	t^2	-0,0094				
	t^1	0,3014				
	t^0	-0,3461				



Data do 10 let spl., polynom 3.stupně.

Celá data, polynom 3.stupně.

Obrázek 16.8: Výnosová křivka pro novější česká data, aproximace polynomem.

Pro polynomiální funkci (12.1) má rovnice pro výnosovou křivku sestavenou z českých novějších dat do 10 let splatnosti tvar

$$i(t; a_0, a_1, a_2) = 0,0135 - 0,0121 \cdot t + 0,0577 \cdot t^2 - 0,0038 \cdot t^3. \quad (16.6)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 16.8. V pravé části stejného obrázku je vykreslena křivka sestavená z dat všech dostupných splatností po proložení polynomem 3.stupně.

16.3.2 Gompertzova křivka

Výsledky pro modelování Gompertzovy křivky a lineárně logaritmické křivky jsou pro každou sadu dat rozčleněny na 4 podmodely. V následující tabulce jsou uvedeny tyto hodnoty

- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 (11.1) (absolutní odchylka), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 (11.1) (absolutní odchylka), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce.

Pro obě sady dat jsou zde vždy uvedeny křivky odvozené z dat do 10 let splatnosti a ze všech dat. V tabulkách s výsledky je uveden příslušný typ optimalizace dle výše uvedeného rozdělení, hodnoty koeficientů a hodnota inflexního bodu. Inflexní bod křivky označuje bod, ve kterém přechází křivka z konvexního do konkávního tvaru či naopak.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 13.4.2012

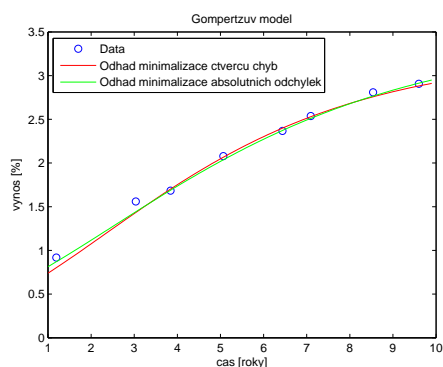
Tabulka 16.5: Tabulka výsledků aproximací Gompertzovým trendem pro starší česká data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	Inflexe [roky]	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	alfa	-1,9807	2,3513	0,0376	
	beta	0,7478			
	gamma	1,1799			
Opt. dle f1 delší	alfa	-1,9851	2,3603	0,0378	
	beta	0,7479			
	gamma	1,1819			
Opt. dle f2 kratší	alfa	-1,8549	2,5047		0,3951
	beta	0,7814			
	gamma	1,2430			
Opt. dle f2 delší	alfa	-2,0934	2,5008		0,4511
	beta	0,7442			
	gamma	1,1820			

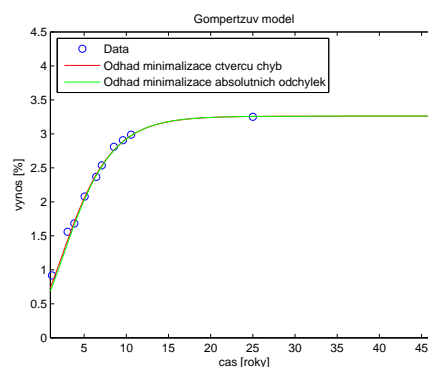
Pro funkci Gompertzova trendu (13.1) má výnosová křivka sestavená ze starších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{1,1799 - 1,9807 \cdot 0,7478^t}. \quad (16.7)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 16.9 červenou barvou. Uvedená křivka však téměř splývá s křivkou vzniklou minimalizací funkce $f_2(\Theta)$.



Data do 10 let splatnosti.



Celá data.

Obrázek 16.9: Výnosová křivka pro starší česká data, proložení Gompertzovou křivkou.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 14.2.2014

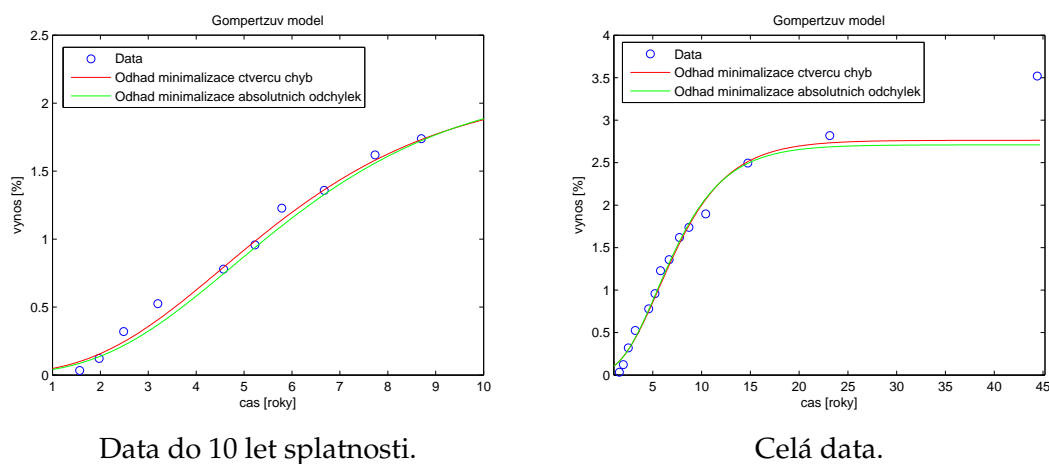
Tabulka 16.6: Tabulka výsledků aproximací Gompertzovým trendem pro novější česká data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	Inflexe [roky]	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	alfa	-5,5218	4,5478	0,0310	
	beta	0,6868			
	gamma	0,7594			
Opt. dle f1 delší	alfa	-4,2220	5,6046	0,1070	
	beta	0,7734			
	gamma	1,0164			
Opt. dle f2 kratší	alfa	-5,7342	4,7706		0,4811
	beta	0,6934			
	gamma	0,7820			
Opt. dle f2 delší	alfa	-4,2750	5,4444		0,9242
	beta	0,7658			
	gamma	0,9967			

Pro funkci Gompertzova trendu (13.1) má výnosová křivka sestavená z novějších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{0,7594 - 5,5218 \cdot 0,6868^t}. \quad (16.8)$$

Tato křivka je opět zobrazena v levé části obrázku 16.10 červeně.



Data do 10 let splatnosti.

Celá data.

Obrázek 16.10: Výnosová křivka pro novější česká data, proložení Gompertzovou křivkou.

16.3.3 Lineárně-logaritmická křivka

V této sekci jsou uvedeny výsledky proložení dat lineárně-logaritmickou křivkou. Kromě vlastních obrázků jsou zde uvedeny také hodnoty minimalizačních funkcí a numerické odhady obou koeficientů křivky. Dále je v kapitole zařazen vzorec lineárně-logaritmické křivky pro data sestavená do 10 let splatnosti odhadnuté minimalizací čtvercových chyb.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 13.4.2012

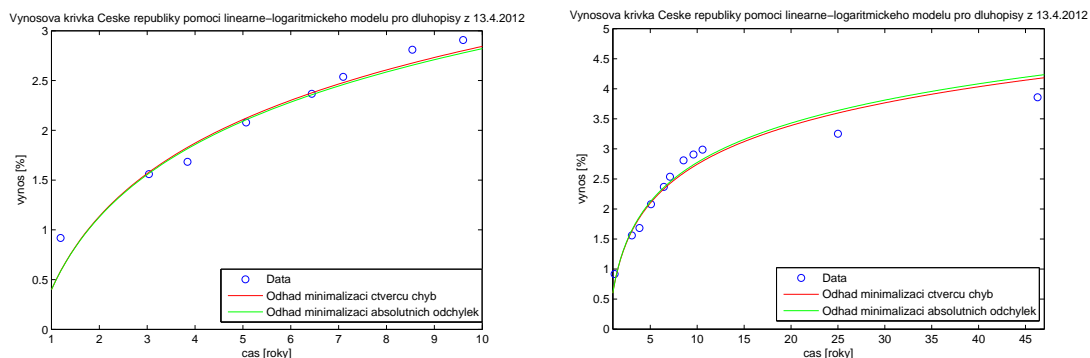
Tabulka 16.7: Tabulka výsledků aproximací lineárně logaritmickou křivkou pro starší česká data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	a	1,0611	0,1568	
	b	0,4000		
Opt. dle f1 delší	a	0,9308	0,2961	
	b	0,6000		
Opt. dle f2 kratší	a	1,0510		0,9042
	b	0,4000		
Opt. dle f2 delší	a	0,9441		1,4339
	b	0,6000		

Pro funkci (14.1) má výnosová křivka sestavená ze starších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot 1,0611 + 0,4000. \quad (16.9)$$

Křivka je zobrazena červeně v levé části obrázku 16.11.



Data do 10 let splatnosti.

Celá data.

Obrázek 16.11: Výnosová křivka pro starší česká data, proložení lineárně-logaritmickou křivkou.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 14.2.2014

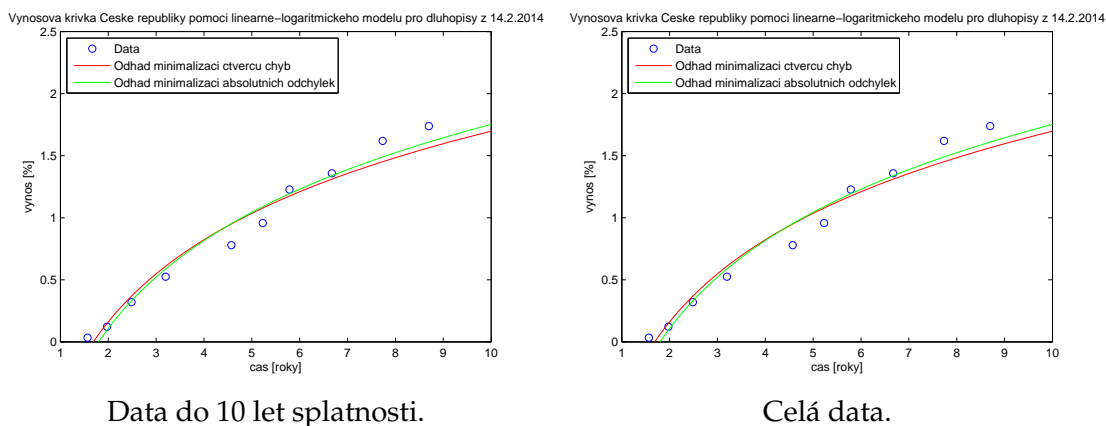
Tabulka 16.8: Tabulka výsledků aproximací lineárně logaritmickou křivkou pro novější česká data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	a	0,9542	0,4535	
	b	-0,5000		
Opt. dle f2 delší	a	1,0000	0,6826	
	b	-0,5500		
Opt. dle f1 kratší	a	1,0216		1,5375
	b	-0,6000		
Opt. dle f2 delší	a	1,1000		2,7509
	b	-0,5500		

Pro funkci (14.1) má výnosová křivka sestavená z novějších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot 0,95421 - 0,5000. \quad (16.10)$$

Křivka je zobrazena červeně v levé části obrázku 16.12.



Data do 10 let splatnosti.

Celá data.

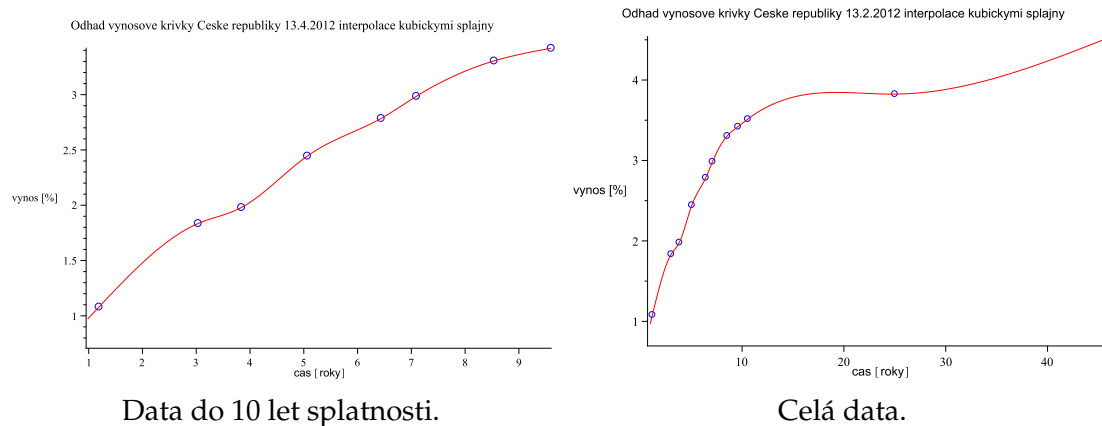
Obrázek 16.12: Výnosová křivka pro novější česká data proložení lineárně-logaritmickou křivkou.

16.3.4 Interpolace kubickými splajny

Pro data České republiky byl proveden odhad výnosových křivek kubickými splajny v softwaru MAPLE dle metodiky v kapitole 15. Na níže uvedených obrázcích jsou předvedeny výsledky pro novější i starší česká data. Opět jsou zde prezentovány výsledky pro odhad křivek s použitím dat do 10 let splatnosti a s použitím všech dostupných dat.

Jsou zde uvedeny celkem 4 grafy popisující odhad výnosových křivek pro obě sady dat. Pro každou sadu je uveden odhad křivky opět z dat do 10 let splatnosti a poté odhad křivky ze všech dostupných dat.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 13.4.2012

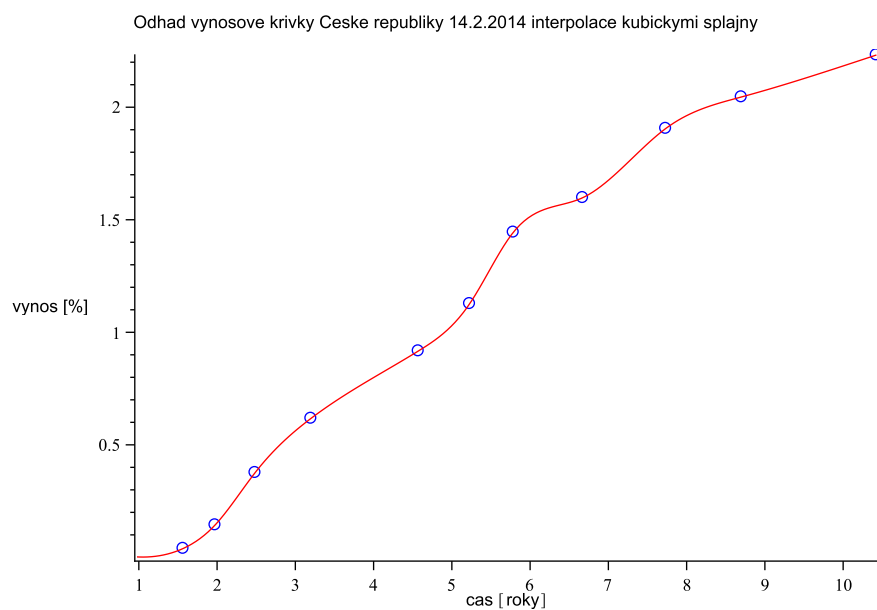


Data do 10 let splatnosti.

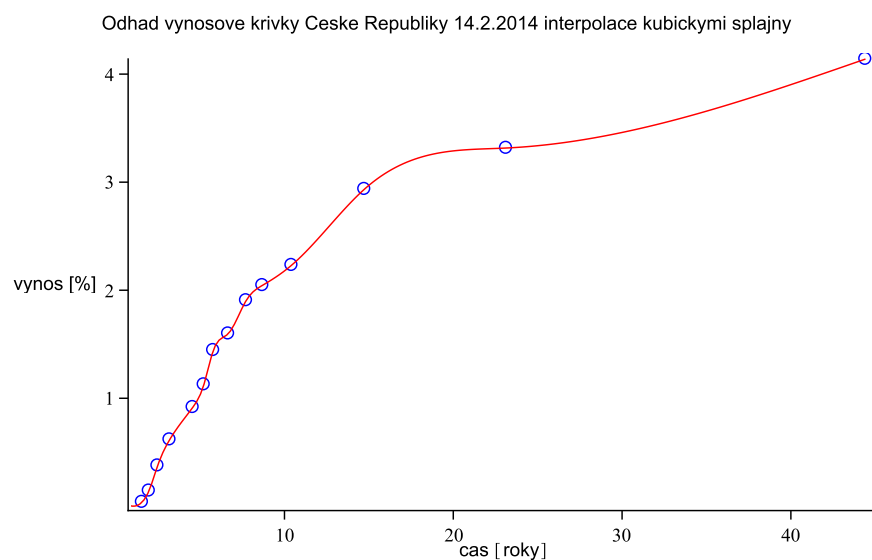
Celá data.

Obrázek 16.13: Výnosová křivka pro starší česká data proložení kubickým splajnem.

Výsledky pro data České republiky s datem vypořádání 14.2.2014



Obrázek 16.14: Výnosová křivka pro novější česká data do 10 let splatnosti proložení kubickým splajnem.



Obrázek 16.15: Výnosová křivka pro novější česká data proložení kubickým splajnem.

16.4 Interpretace výnosové křivky České republiky aktuální k datu 14.2.2014

V této části je popsána interpretace spotové výnosové křivky České republiky, která je sestavena z dluhopisů s datem vypořádání 14.2.2014. Vzhledem k tomu, že se tato práce zaměřuje na extrapolační i interpolační metody, bude nejprve prezentována interpretace z hlediska predikce extrapolačních modelů a poté bude vybrán nejlepší model (z hlediska minimalizace funkce (16.11)) pro interpolaci křivky.

Výnosová křivka má pro modely Nelson-Siegla i Svenssona téměř stejný tvar. Jedním z důvodů je rovnoměrnější rozložení dluhopisů v horizontu do 10 let splatnosti. Důvodem ke strmější rostoucímu charakteru křivky je hodnota parametru τ u Nelson-Sieglova modelu. Ta naznačuje, že se křivka snaží lépe vystihnout střední konec křivky, než nejdlejší doby do splatnosti. Svenssonův model je flexibilnější, proto vystihuje i kratší část křivky přesněji.

Tzv. spread mezi dlouhodobou (10 let) a krátkodobou úrokovou mírou (3 měsíce) je dle namodelovaných extrapolačních křivek přibližně roven 2. Spread, vypočtený dle [13], vypovídá o pravděpodobnosti recese v příštích 4 kvartálech. Taková pravděpodobnost se zvyšuje, pokud je spread příliš nízký či dokonce záporný. Menší spread pak naznačuje plochou či dokonce inverzní výnosovou křivku. Česká křivka je však pozitivně skloněná, což implikuje, že je ekonomika zdravá, případně může v budoucnu dojít k případnému zploštění křivky na delším konci. Kratší konec křivky nejlépe vystihuje výnosová křivka sestavená z pokladničních poukázek, proto zde nelze vyvozovat závěry z namodelovaných křivek v této práci. Dále se očekává v horizontu 10 let inflace kolem 2.1 %. Dle konfidenční množiny z obrázku 16.5 je patrná nelinearita mezi parametry (β_2, τ) , která má vliv na odhad střednědobého parametru.

Z pohledu interpolace, tedy snahy o co nejlepší odhad výnosů v období nejkratší a nejdlejší splatnosti, je klíčová tabulka 16.9. K porovnání byla použita funkce

$$F = \frac{f_i}{K - p}, \quad i = 1, 2, \quad (16.11)$$

kde f_i je hodnota jedné z minimalizačních funkcí (11.1), K je počet použitých dluhopisů a p je počet parametrů modelu. Tato funkce byla použita pro porovnání modelů i u ostatních datových sad.

Vzhledem k vyřazení méně likvidních dluhopisů s dobou do splatnosti vyšší než jedno desetiletí, bude zde porovnávána právě část do 10 let splatnosti.

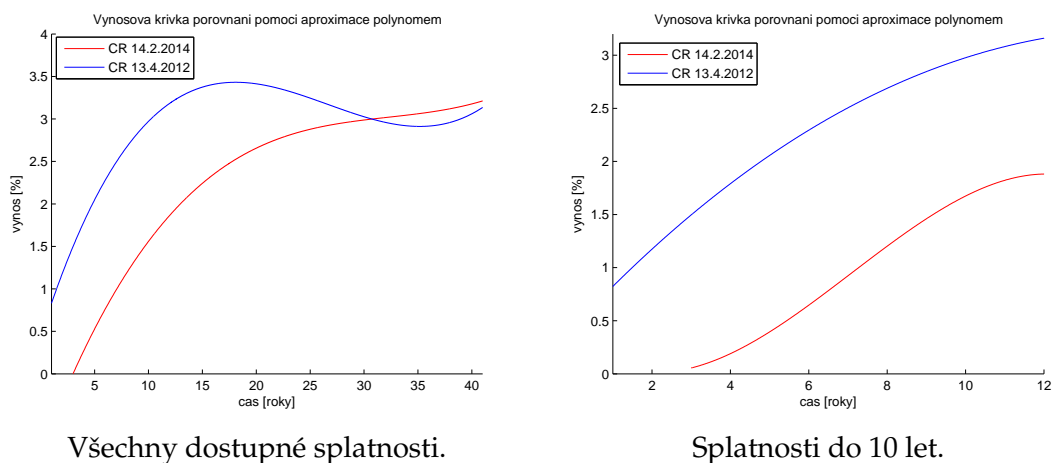
Tabulka 16.9: Tabulka porovnání hodnot minimalizačních funkcí pro novější česká data.

Model	Počet parametrů	Chybová funkce	Porovnávací funkce
Polynom 3.stupně (minim. f1)	4	0,0340	0,0043
Polynom 3.stupně (minim. f2)	4	0,4825	0,0603
Gompertzova křivka (minim. f1)	3	0,0310	0,0034
Gompertzova křivka (minim. f2)	3	0,4811	0,0535
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f1)	2	0,4535	0,0454
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f2)	2	1,5375	0,1538

Z pohledu minimalizace obou funkcí byla nejlepším modelem Gompertzova křivka z levé části obrázku 16.10. Tyto výsledné křivky mohou být použity investory, pokud potřebují zjistit spotovou výnosnost mimo emitované splatnosti. Křivky jsou rostoucí s výnosností přibližně 1,9 % pro splatnost 10 let.

16.5 Porovnání křivek České republiky pro dvě časová období

Tato část je zaměřena na vzájemné porovnání výnosových křivek jedné země pro dvě různá období. Aby byly křivky porovnatelné, byla použita shodná metodika a odhad polynomem 3.stupně. Pro lepší názornost je v levé části na obrázku 16.16 znázorněn průběh funkcí pro všechny dostupné splatnosti a v pravé části jen pro splatnosti do 10 let.



Všechny dostupné splatnosti.

Splatnosti do 10 let.

Obrázek 16.16: Výnosová křivka pro novější česká data vyznačená červeně a pro starší česká data vyznačená modře.

Z pravé části obrázku 16.16 vyplývá, že výnosová křivka (odhadnutá polynomem 3.stupně) České republiky poklesla přibližně o 1,2 procentního bodu po celé délce splatnosti do 10 let. Zatímco 13.4.2012 byla výnosnost 10 letých dluhopisů okolo 3 %, v době 14.2.2014 měly dluhopisy se stejnou splatností výnosnost 1,8 %. Obě křivky jsou rostoucí a mírně strmé. Jedním z důvodů snížení výnosů v mezidobí je ukončení mírné ekonomické recese, ve které se Česká republika v roce 2012 pohybovala. Státní dluhopisy ČR se staly důvěryhodnější investicí, ekonomika zaznamenala růst HDP, a tudíž zde vznikly tlaky na nižší výnosy ve střednědobém horizontu. Pro úplnost je vhodné dodat, že česká ekonomika je závislá na německé, která se (i když menší měrou) dostala v roce 2012 také do mírné recese.

Co se týče dlouhodobého horizontu, významné změny ve výnosech nenastaly, proto se zvýšila strmost křivky na kratším konci. Tento fakt by mohl dle teorie výnosových křivek naznačovat, že se ČR nachází ve fázi ekonomické expanze a v budoucnu se očekává, že splatnosti pro delší časová období poklesnou nebo se zvýší krátkodobé úrokové míry. Vyplývá to z obecné tendence křivek, které v průběhu ekonomických cyklů mění svůj tvar z rostoucích na ploché či invertované a naopak.

17 Spolková republika Německo

17.1 Data

Pro Spolkovou republiku Německo byly použity dvě sady dat, tak jako v případě České republiky. Obě sady pocházejí od stejného důvěryhodného zdroje, tzn. z oficiálních stránek finanční agentury Spolkové republiky Německo [23]. Datum vypořádání je pro starší data 13.4.2012 a pro novější data 14.2.2014. Ve všech výpočtech je zahrnuta daň z kapitálových výnosů 26,375 % platná pro Německo (dle [25]). Jednotlivé ceny jsou uvedeny v eurech.

V tabulce 17.1 je zobrazen výpis použitých dluhopisů s datem vypořádání 13.4.2012 a v tabulce 17.2 se pak nachází výpis použitých dluhopisů s datem vypořádání 14.2.2014. Některé dluhopisy byly vyřazeny kvůli variabilním kuponům a z důvodu záporného nebo nulového čistého výnosu do splatnosti, neboť by došlo k narušení určité konzistence dat. Zobrazené tabulky jsou již bez vyřazených dluhopisů. Toto tvrzení platí pro obě sady dat.

Tabulka 17.1: Tabulka dat státních dluhopisů pro Německo s datem vypořádání 13.4.2012.

Dluhopis	Cena (euro)	AUV (euro)	Kupon (euro)	Splatnost	Čistý YTM [%]
BSA 10	100,49	0,42	0,50	15.6.2012	0,03
Bund 02 II	104,99	3,93	5,00	4.7.2012	0,05
BSA10	100,74	0,44	0,75	14.9.2012	0,03
BO S 151	104,22	2,18	4,25	12.10.2012	0,05
BSA 10	100,98	0,34	1,00	14.12.2012	0,03
Bund 03	104,46	1,28	4,50	4.1.2013	0,05
BSA 11	101,44	0,14	1,50	15.3.2013	0,06
BO S 152	103,43	0,05	3,50	12.4.2013	0,07
BSA 11	103,42	1,63	1,75	14.6.2013	0,07
Bund 03	107,41	2,95	3,75	4.7.2013	0,07
BSA 11	101,40	0,50	0,75	13.9.2013	0,07
BO S 153	107,87	2,07	4,00	11.10.2013	0,08
BSA 11	100,37	0,10	0,25	13.12.2013	0,08
Bund 03	108,37	1,21	4,25	4.1.2014	0,07
BSA 12	100,33	0,04	0,25	14.3.2014	0,09
BO S 154	104,36	0,04	2,25	11.4.2014	0,07
Bund 04	112,51	3,34	4,25	4.7.2014	0,1
BO S 155	107,21	1,30	2,50	10.10.2014	0,11

Dluhopis	Cena (euro)	AUV (euro)	Kupon (euro)	Splatnost	Čistý YTM [%]
Bund 04	110,81	1,07	3,75	4.1.2015	0,15
BO S 156	107,02	0,34	2,50	27.2.2015	0,16
BO S 157	106,19	0,04	2,25	10.4.2015	0,18
Bund 05	112,31	2,56	3,25	4.7.2015	0,2
BO S 158	106,13	0,91	1,75	9.10.2015	0,24
Bund 05	112,91	1,00	3,50	4.1.2016	0,27
BO S 159	106,79	0,28	2,00	26.2.2016	0,3
BO S 160	109,60	0,07	2,75	8.4.2016	0,33
Bund 86 II	127,98	16,00	6,00	20.6.2016	0,42
Bund 06	118,33	3,15	4,00	4.7.2016	0,36
Bund 86	125,79	3,23	5,63	20.9.2016	0,46
BO S 161	104,26	0,68	1,25	14.10.2016	0,43
Bund 06	116,36	1,07	3,75	4.1.2017	0,46
BO S 162	101,29	0,20	0,75	24.2.2017	0,5
Bund 07 II	122,34	3,34	4,25	4.7.2017	0,54
Bund 07	120,03	1,14	4,00	4.1.2018	0,62
Bund 08	124,82	3,34	4,25	4.7.2018	0,7
Bund 08	120,46	1,07	3,75	4.1.2019	0,77
Bund 09	121,10	2,75	3,50	4.7.2019	0,86
Bund 09	118,06	0,92	3,25	4.1.2020	0,93
Bund 10	118,08	2,36	3,00	4.7.2020	0,99
Bund 10	111,07	1,39	2,25	4.9.2020	1,03
Bund 10	112,47	0,71	2,50	4.1.2021	1,07
Bund 11	120,92	3,15	3,25	4.7.2021	1,13
Bund 11	110,75	1,44	2,25	4.9.2021	1,18
Bund 11	107,67	0,79	2,00	4.1.2022	1,21
Bund 12	105,74	0,02	1,75	4.7.2022	1,28
Bund 94	153,95	1,78	6,25	4.1.2024	1,38
Bund 97	170,52	5,12	6,50	4.7.2027	1,6
Bund 98	155,74	1,60	5,63	4.1.2028	1,66
Bund 98 II	146,32	3,74	4,75	4.7.2028	1,7
Bund 00	170,49	1,78	6,25	4.1.2030	1,7
Bund 00	161,00	1,56	5,50	4.1.2031	1,73
Bund 03	158,36	3,74	4,75	4.7.2034	1,74
Bund 05	145,76	1,14	4,00	4.1.2037	1,74
Bund 07 I	157,45	3,34	4,25	4.7.2039	1,72
Bund 08	170,78	3,74	4,75	4.7.2040	1,71
Bund 10	137,59	2,56	3,25	4.7.2042	1,73

Tabulka 17.2: Tabulka dat státních dluhopisů pro Německo s datem vypořádání 14.2.2014.

Dluhopis	Cena (euro)	AUV (euro)	Kupon (euro)	Splatnost	Čistý YTM [%]
BSA 12	100,25	0,23	0,25	14.3.2014	0,04
BO S 154	102,24	1,92	2,25	11.4.2014	0,08
BSA 12	99,98	0,00	0,00	13.6.2014	0,06
Bund 04	104,21	2,66	4,25	4.7.2014	0,09
BSA 12	99,97	0,00	0,00	12.9.2014	0,06
BO S 155	102,45	0,89	2,50	10.10.2014	0,07
BSA 12	99,95	0,00	0,00	12.12.2014	0,06
Bund 04	103,69	0,45	3,75	4.1.2015	0,06
BO S 156	104,93	2,43	2,50	27.2.2015	0,07
BSA 13	100,44	0,25	0,25	13.3.2015	0,06
BO S 157	104,43	1,93	2,25	10.4.2015	0,06
BSA 13	99,92	0,00	0,00	12.6.2015	0,06
Bund 05	106,40	2,03	3,25	4.7.2015	0,07
BSA 13	100,41	0,12	0,25	11.9.2015	0,06
BO S 156	103,40	0,63	1,75	9.10.2015	0,06
BSA 13	99,87	0,00	0,00	11.12.2015	0,07
Bund 05	106,88	0,42	3,50	4.1.2016	0,06
BO S 159	105,85	1,95	2,00	26.2.2016	0,07
BSA 14	100,58	0,00	0,25	11.3.2016	0,08
BO S 160	108,07	2,37	2,75	8.4.2016	0,08
Bund 86	117,77	3,98	6,00	20.6.2016	0,09
Bund 06	111,77	2,50	4,00	4.7.2016	0,09
Bund 86	116,50	2,31	5,63	20.9.2016	0,13
BO S 161	103,45	0,43	1,25	14.10.2016	0,11
Bund 06	110,88	0,45	3,75	4.1.2017	0,12
BO S 162	102,51	0,74	0,75	24.2.2017	0,16
BO S 163	101,46	0,43	0,50	7.4.2017	0,17
Bund 07	116,30	2,66	4,25	4.7.2017	0,19
BO S 164	101,15	0,17	0,50	13.10.2017	0,23
Bund 07	114,98	0,48	4,00	4.1.2018	0,24
BO S 165	101,28	0,55	0,50	23.2.2018	0,3
BO S 166	99,84	0,21	0,25	13.4.2018	0,34
Bund 08	119,65	2,66	4,25	4.7.2018	0,33
BO S 167	103,01	0,45	1,00	12.10.2018	0,42
Bund 08	116,54	0,45	3,75	4.1.2019	0,41
BO S 168	103,49	0,08	1,00	22.2.2019	0,49
Bund 09	118,10	2,19	3,50	4.7.2019	0,49
Bund 09	115,76	0,39	3,25	4.1.2020	0,58

Dluhopis	Cena (euro)	AUV (euro)	Kupon (euro)	Splatnost	Čistý YTM [%]
Bund 10	116,48	1,87	3,00	4.7.2020	0,65
Bund 10	110,94	1,02	2,25	4.9.2020	0,69
Bund 10	111,96	0,30	2,50	4.1.2021	0,75
Bund 11	116,15	2,03	3,25	4.7.2021	0,81
Bund 11	108,93	1,02	2,25	4.9.2021	0,85
Bund 11	106,46	0,24	2,00	4.1.2022	0,91
Bund 12	107,12	1,09	1,75	4.7.2022	0,99
Bund 12	104,45	0,68	1,50	4.9.2022	1,03
Bund 13	104,85	0,01	1,50	15.2.2023	1,1
Bund 13	104,21	1,14	1,50	15.5.2023	1,14
Bund 13	108,44	1,02	2,00	15.8.2023	1,16
Bund 94	148,38	0,75	6,25	4.1.2024	1,12
Bund 14	106,53	0,08	1,75	15.2.2024	1,23
Bund 97	165,67	4,06	6,50	4.7.2027	1,4
Bund 98	152,12	0,68	5,63	4.1.2028	1,48
Bund 98	144,16	2,97	4,75	4.7.2028	1,52
Bund 00	165,59	0,75	6,25	4.1.2030	1,58
Bund 00	156,86	0,66	5,50	4.1.2031	1,64
Bund 03	154,05	2,97	4,75	4.7.2034	1,73
Bund 05	141,24	0,48	4,00	4.1.2037	1,79
Bund 07	151,98	2,66	4,25	4.7.2039	1,79
Bund 08	164,80	2,97	4,75	4.7.2040	1,77
Bund 10	133,00	2,03	3,25	4.7.2042	1,82
Bund 12	115,81	1,56	2,50	4.7.2044	1,86

17.2 Extrapolace

Při sestrování extrapoláčních modelů byl použit postup popsáný v kapitole 9, kdy se na úlohu odhadu parametrů pohlíží jako na nelineární funkci, jejíž parametry je nutné odhadnout numericky.

17.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model

Nejdříve bude pracováno se sadou dat s vypořádáním k 13.4.2012. Na následujících obrázcích je vykreslena výsledná odhadnutá křivka pro Nelson-Sieglův model červeně a pro Svenssonův model zeleně. Optimální parametry minimalizující funkci (9.1) jsou pro Nelson-Sieglův model

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = 0,00001 - 0,008848 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{10,780}}}{\frac{n}{10,780}} \right) + \quad (17.1)$$

$$+ 0,075673 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{10,780}}}{\frac{n}{10,780}} - e^{-\frac{n}{10,780}} \right).$$

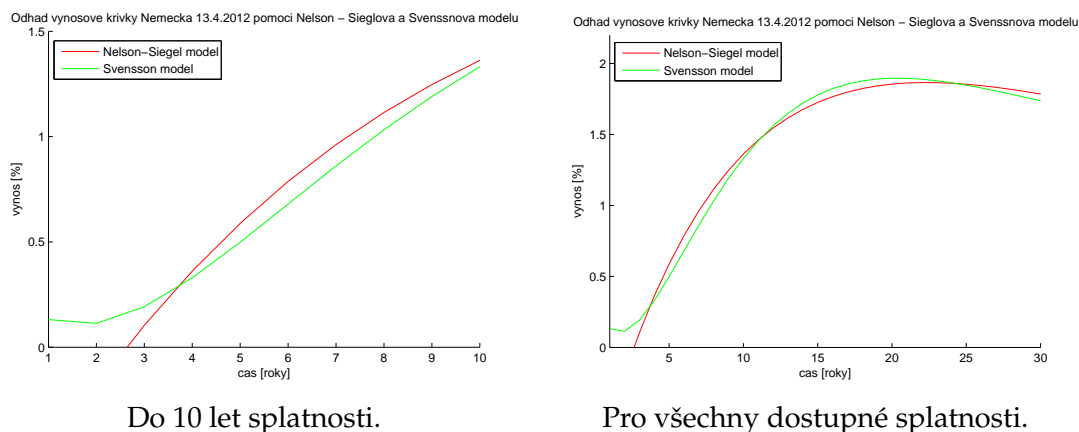
Pro Svenssonův model jsou optimální parametry, které opět minimalizují funkci (9.1) následující

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) = 0,005321 - 0,002323 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{4,234}}}{\frac{n}{4,234}} \right) - \quad (17.2)$$

$$- 0,150000 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{4,234}}}{\frac{n}{4,234}} - e^{-\frac{n}{4,234}} \right) +$$

$$+ 0,175506 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{5,946}}}{\frac{n}{5,946}} - e^{-\frac{n}{5,946}} \right) \quad (17.3)$$

Příslušné křivky k těmto rovnicím jsou zobrazeny na obrázku 17.1.



Obrázek 17.1: Nelson-Sieglův a Svenssonův model pro starší německá data.

Výnosová křivka Německa odhadnutá z novějších dat (s datem vypořádání 14.2.2014) je vykreslena na obrázku 17.2. Křivka odpovídá rovnicím pro Nelson-Sieglův model s optimálními parametry

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = 0 - 0,006433 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{13,161}}}{\frac{n}{13,161}} \right) + \quad (17.4)$$

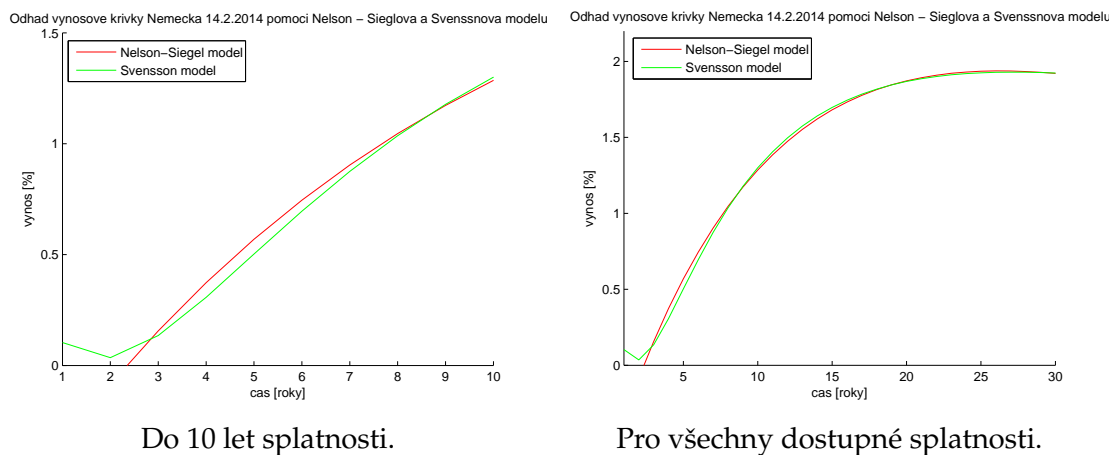
$$+ 0,074599 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{13,161}}}{\frac{n}{13,161}} - e^{-\frac{n}{13,161}} \right).$$

Pro Svenssonův model jsou optimální parametry následující

$$i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) = 0,01043 - 0,005302 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{1,868}}}{\frac{n}{1,868}} \right) - \quad (17.5)$$

$$- 0,037066 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{1,868}}}{\frac{n}{1,868}} - e^{-\frac{n}{1,868}} \right) +$$

$$+ 0,040909 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{11,276}}}{\frac{n}{11,276}} - e^{-\frac{n}{11,276}} \right).$$



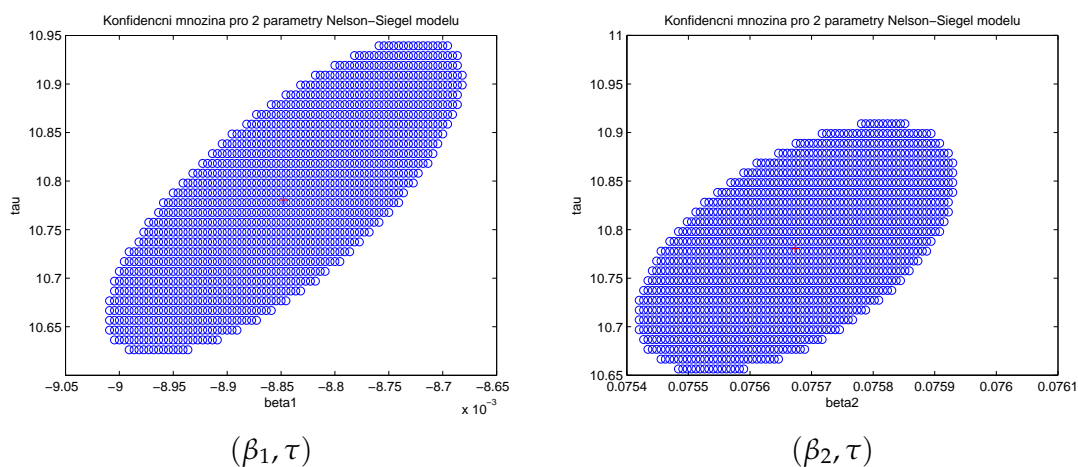
Obrázek 17.2: Nelson-Sieglův a Svenssonův model pro novější německá data.

17.2.2 Konfidenční množiny

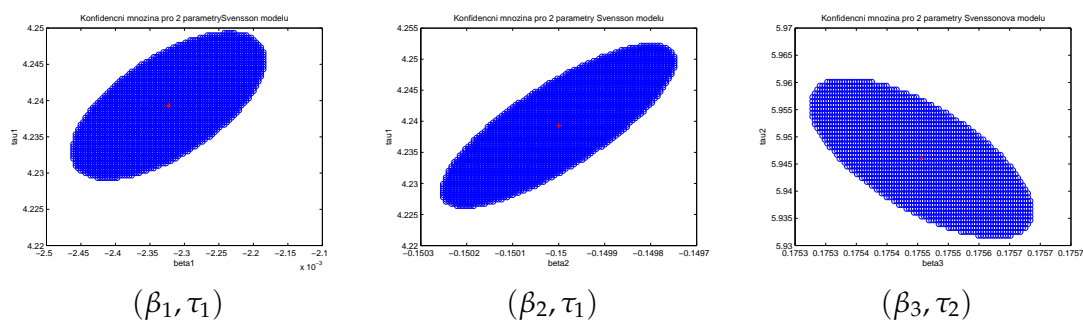
V této podkapitole jsou vykresleny konfidenční množiny pro následující dvojice parametrů

- pro Nelson-Sieglův model
 - (β_1, τ) ,
 - (β_2, τ) ,
- pro Svenssonův model
 - (β_1, τ_1) ,
 - (β_2, τ_1) ,
 - (β_3, τ_2) .

Pokud se konfidenční množina liší od tvaru pravidelné elipsy, lze pozorovat vliv nelinearity dvou vybraných parametrů. Pro starší německá data si lze množiny prohlédnout na sadě obrázků 17.3 a 17.4. Vliv nelinearity není v tomto případě nijak výrazný u žádné ze zkoumaných dvojic parametrů.

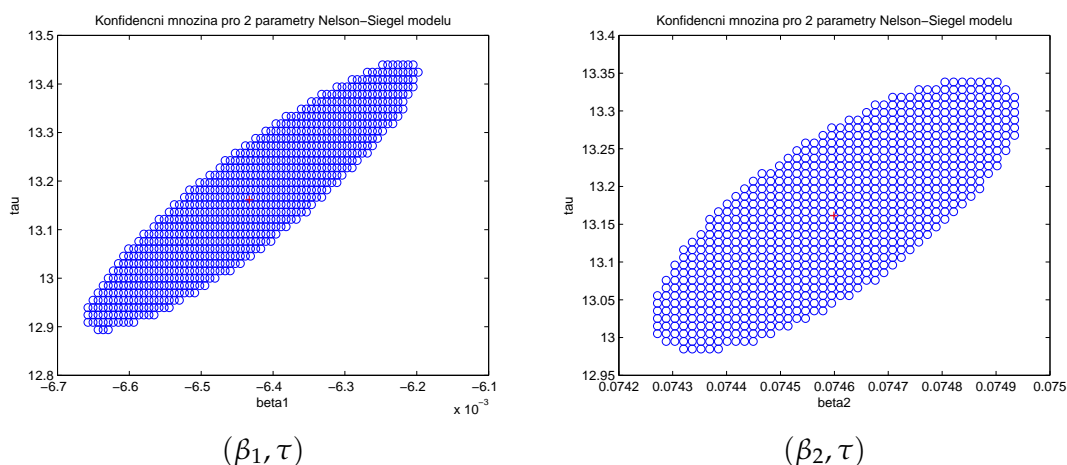


Obrázek 17.3: Konfidenční množiny pro Nelson-Sieglův model starší německá data.

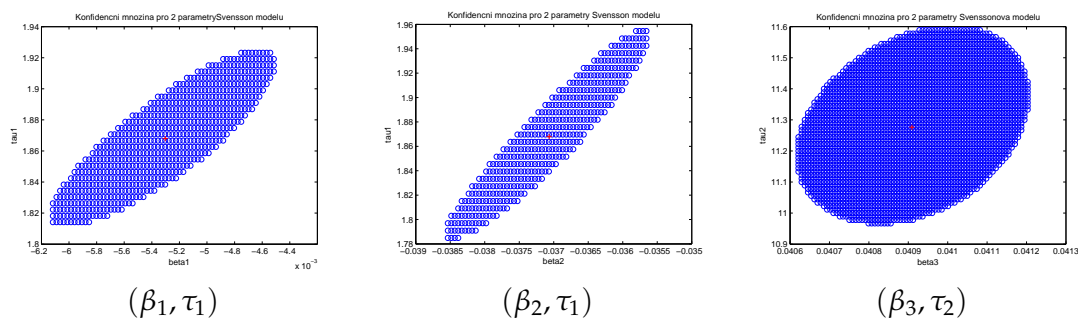


Obrázek 17.4: Konfidenční množiny pro Svenssonův model starší německá data.

Pro novější data jsou zobrazeny odpovídající množiny na sadě obrázků 17.5 a 17.6. Vliv nelinearity u zkoumaných dvojic parametrů není opět nijak výrazný.



Obrázek 17.5: Konfidenční množiny pro Nelson-Sieglův model novější německá data.



Obrázek 17.6: Konfidenční množiny pro Svenssonův model novější německá data.

17.3 Interpolace

17.3.1 Aproximace polynomem

Výsledky pro odhady výnosových křivek budou v této části prezentovány pomocí tabulek 17.3 pro starší německá data a 17.4 pro novější německá data. Ve sloupci tabulky Křivka je uvedeno označení, z jaké množiny dat byl model sestaven, dále jsou zde vypsány všechny koeficienty pro odhadnuté polynomy. Pro křivky odhadnuté minimalizací funkce $f_1(\Theta)$ jsou v tabulce uvedeny p hodnoty, které určují významnost koeficientů na základě provedených t -testů. Pro porovnání obsahují tabulky také hodnoty minimalizačních funkcí (11.1).

Stupeň polynomu pro kratší model je určen minimalizací funkcí (12.3), (12.4), (12.5) a (12.6). Pro sestavení kratšího modelu bylo použito prvních 44 dat z tabulky 17.1 a prvních 49 dat z tabulky 17.2. Stupeň delšího modelu je určen implicitně z důvodu vzájemné porovnatelnosti.

Výsledky pro Německo s datem vypořádání 13.4.2012

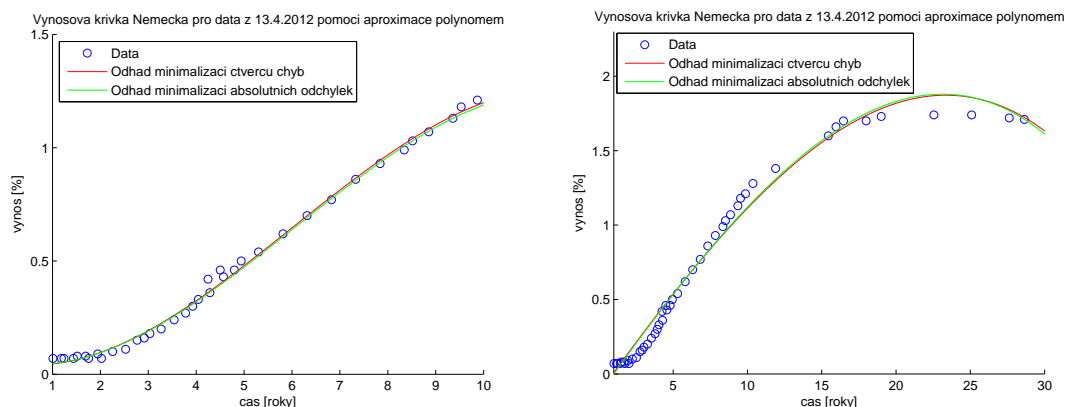
Tabulka 17.3: Tabulka výsledků aproximací polynomem pro starší německá data.

Křivka	Mocnina u t	Koeficient	P hodnota	Významnost	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	t^3	-0,0019	1,0397E-12	významný	0,0189	
	t^2	0,0348	1,4466E-15	významný		
	t^1	-0,0406	6,0887E-04	významný		
	t^0	0,0532	2,4428E-05	významný		
Opt. dle f1 delší	t^3	-0,0001	1,0994E-02	významný	0,3516	
	t^2	-0,0009	3,1720E-01	nevýznamný		
	t^1	0,1398	1,1342E-18	významný		
	t^0	-0,1308	7,0826E-06	významný		
Opt. dle f2 kratší	t^3	-0,0019				0,7152
	t^2	0,0348				
	t^1	-0,0427				
	t^0	0,0573				
Opt. dle f2 delší	t^3	-0,0001				3,7736
	t^2	-0,0009				
	t^1	0,1414				
	t^0	-0,1415				

Pro polynomiální funkci (12.1) má rovnice pro výnosovou křivku, sestavenou z německých starších dat do 10 let splatnosti minimalizací funkce f_1 , tvar

$$i(t; a_0, a_1, a_2, a_3) = 0,0532 - 0,0406 \cdot t + 0,0348 \cdot t^2 - 0,0019 \cdot t^3. \quad (17.6)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 17.7. V pravé části stejného obrázku je vykreslena křivka sestavená z dat všech dostupných splatností. Zobrazené křivky pro odhady parametrů pomocí minimalizace funkcí $f_1(\Theta)$ a $f_2(\Theta)$ téměř splývají. Lze si povšimnout nevyhovujících limitních vlastností na delším konci křivky v pravé části obrázku 17.7.



Data do 10 let spl., polynom 3.stupně.

Celá data, polynom 3.stupně.

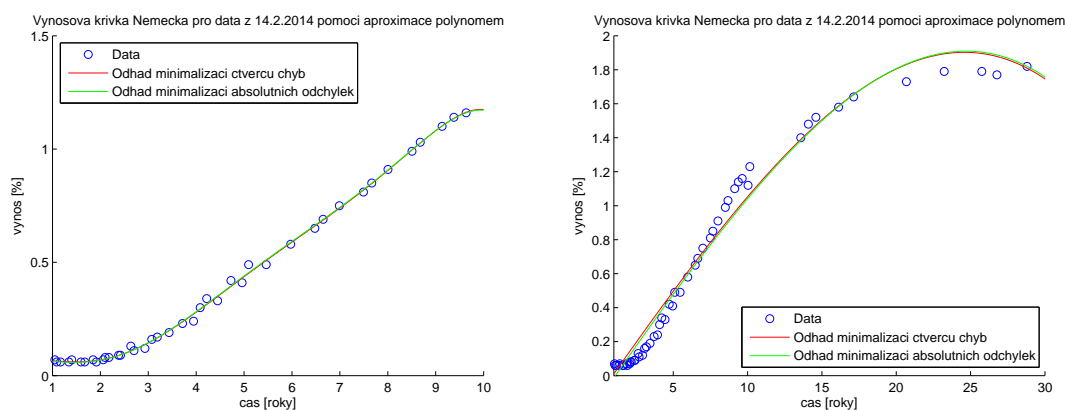
Obrázek 17.7: Výnosová křivka pro starší německá data, aproximace polynomem.

Výsledky pro Německo se dnem vypořádání 14.2.2014

Při interpolaci polynomem (12.1) má rovnice pro výnosovou křivku, sestavenou z německých novějších dat do 10 let splatnosti minimalizací funkce f_1 , tvar

$$i(t; a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) = 0,0500 + 0,0896 \cdot t - 0,1276 \cdot t^2 + 0,0648 \cdot t^3 - \quad (17.7) \\ - 0,0125 \cdot t^4 + 0,0011 \cdot t^5 - 0,00004 \cdot t^6.$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 17.8. V pravé části stejného obrázku je vykreslena křivka sestavená z dat všech dostupných splatností. Zobrazené křivky pro odhady parametrů pomocí minimalizace funkcí $f_1(\Theta)$ a $f_2(\Theta)$ téměř splývají.



Data do 10 let spl., polynom 6.stupně.

Celá data, polynom 3.stupně.

Obrázek 17.8: Výnosová křivka pro novější německá data, aproximace polynomem.

Tabulka 17.4: Tabulka výsledků aproximací polynomem pro novější německá data.

Křivka	Mocnina u t	Koeficient	P hodnota	Významnost	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	t^6	-3,6310E-05	3,3614E-05	významný	0,0081	
	t^5	0,0011	1,4376E-05	významný		
	t^4	-0,0125	6,8571E-06	významný		
	t^3	0,0648	7,0611E-06	významný		
	t^2	-0,1276	2,1227E-04	významný		
	t^1	0,0896	1,0666E-02	významný		
	t^0	0,0500	6,3546E-05	významný		
Opt. dle f1 delší	t^3	-0,0001	9,6931E-03	významný	0,5060	
	t^2	-0,0001	0,9366	nevýznamný		
	t^1	0,1241	3,7646E-16	významný		
	t^0	-0,1136	1,0518E-04	významný		
Opt. dle f2 kratší	t^6	-3,6313E-05				0,4530
	t^5	0,0011				
	t^4	-0,0125				
	t^3	0,0648				
	t^2	-0,1277				
	t^1	0,0919				
	t^0	0,0450				
Opt. dle f2 delší	t^3	-0,0001				4,7631
	t^2	-0,0001				
	t^1	0,1255				
	t^0	-0,1382				

17.3.2 Gompertzova křivka

Konečné výsledky pro modelování Gompertzovou křivkou a lineárně logaritmickou křivkou jsou rozčleněny pro každou sadu dat na následující 4 podmodely. Proto jsou následujících tabulkách 17.5 a 17.6 uvedeny tyto hodnoty

- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 (11.1) (absolutní odchylka), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 , (11.1) (absolutní odchylka), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce.

Pro starší sadu dat se počítá s prvními 44 dluhopisy se splatností do 10 let a pro novější sadu je dluhopisů se splatností do 10 let celkem 49. V tabulkách jsou také uvedeny pro jaké splatnosti se objevují v modelech inflexní body. Pokud je křivka konvexní roste rychleji, než když je konkávní. To znamená, že rychlost nárůstu výnosností je bodu inflexe vyšší.

Výsledky pro Německo s datem vypořádání 13.4.2012

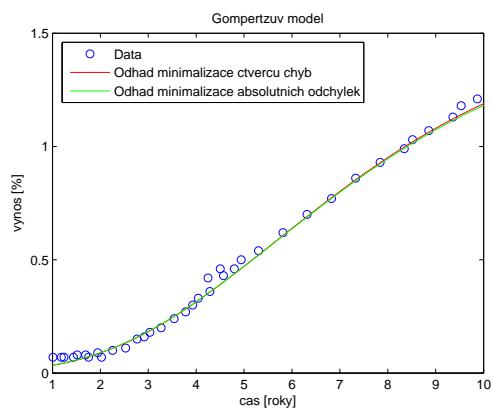
Tabulka 17.5: Tabulka výsledků aproximací Gompertzovou křivkou pro starší německá data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	Inflexe [roky]	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	alfa	-5,1302	5,6629	0,0192	
	beta	0,7492			
	gamma	0,4588			
Opt. dle f1 delší	alfa	-4,8939	6,1171	0,0316	
	beta	0,7714			
	gamma	0,5635			
Opt. dle f2 kratší	alfa	-5,0880	5,6477		0,6837
	beta	0,7497			
	gamma	0,4519			
Opt. dle f2 delší	alfa	-4,9252	6,1418		1,0499
	beta	0,7714			
	gamma	0,5610			

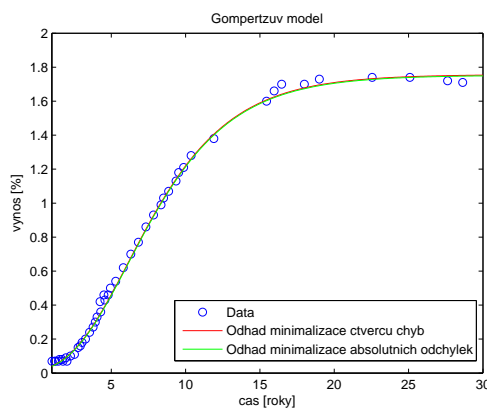
Pro funkci Gompertzova trendu (13.1) má výnosová křivka sestavená ze starších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{0,4588 - 5,1302 \cdot 0,7492^t}. \quad (17.8)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 17.9.



Data do 10 let splatnosti.



Celá data.

Obrázek 17.9: Výnosová křivka pro starší německá data, proložení Gompertzovou křivkou.

Výsledky pro Německo s datem vypořádání 14.2.2014

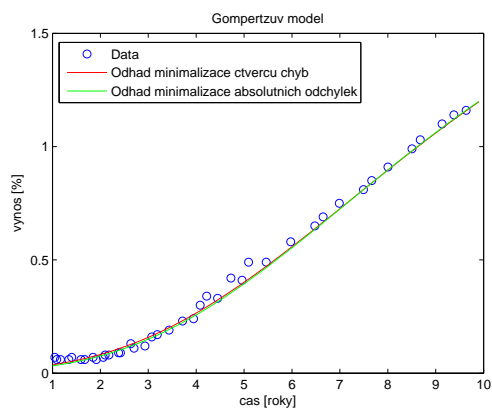
Tabulka 17.6: Tabulka výsledků aproximací Gompertzovou křivkou pro novější německá data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	Inflexe [roky]	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	alfa	-5,0455	7,1896	0,0249	
	beta	0,7984			
	gamma	0,7235			
Opt. dle f1 delší	alfa	-5,0245	6,5570	0,0562	
	beta	0,7818			
	gamma	0,5764			
Opt. dle f2 kratší	alfa	-5,2224	7,1275		0,8341
	beta	0,7930			
	gamma	0,7079			
Opt. dle f2 delší	alfa	-5,3070	6,5493		1,4592
	beta	0,7750			
	gamma	0,5766			

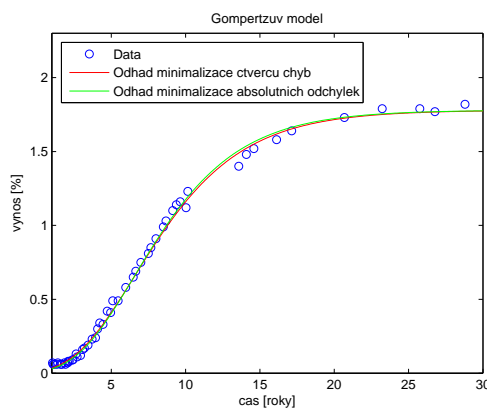
Pro funkci Gompertzova trendu (13.1) má výnosová křivka sestavená z novějších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{0,7235 - 5,0455 \cdot 0,7984^t}. \quad (17.9)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 17.10.



Data do 10 let splatnosti.



Celá data.

Obrázek 17.10: Výnosová křivka pro novější německá data, proložení Gompertzovou křivkou.

17.3.3 Lineárně-logaritmická křivka

Odhady výnosových křivek lineárně-logaritmickou křivkou jsou opět shrnuty do dvou tabulek 17.7 a 17.8. V obou tabulkách jsou vypsány hodnoty chybových funkcí (11.1) a numerické odhady obou koeficientů křivky.

Výsledky pro Německo s datem vypořádání 13.4.2012

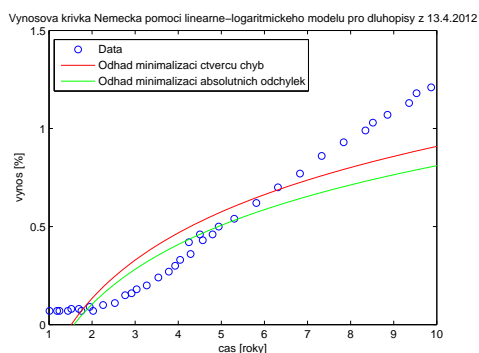
Tabulka 17.7: Tabulka výsledků aproximací lineárně-logaritmickou křivkou pro starší německá data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	a	0,4815	1,1492	
	b	-0,2000		
Opt. dle f1 delší	a	0,6564	2,6793	
	b	-0,4000		
Opt. dle f2 kratší	a	0,4388		6,0738
	b	-0,2000		
Opt. dle f2 delší	a	0,6531		9,9146
	b	-0,4000		

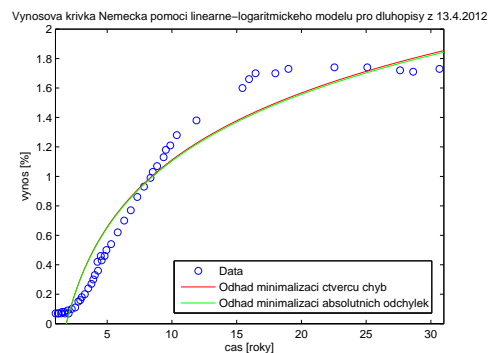
Pro funkci (14.1) má výnosová křivka sestavená ze starších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot 0,4815 - 0,2000. \quad (17.10)$$

Křivka je zobrazena červeně v levé části obrázku 17.11.



Data do 10 let splatnosti.



Celá data.

Obrázek 17.11: Výnosová křivka pro starší německá data, proložení lineárně-logaritmickou křivkou.

Výsledky pro Německo s datem vypořádání 14.2.2014

Tabulka 17.8: Tabulka výsledků aproximací lineárně logaritmickou křivkou pro novější německá data.

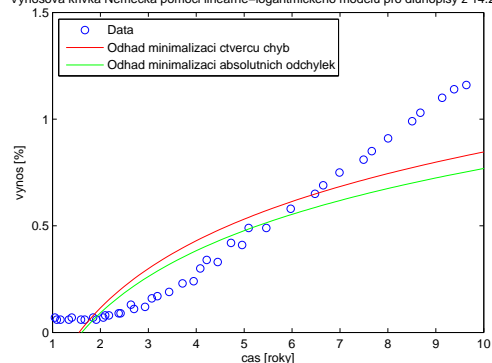
Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	a	0,4543	1,3982	
	b	-0,2000		
Opt. dle f1 delší	a	0,6419	3,2175	
	b	-0,4000		
Opt. dle f2 kratší	a	0,4207		6,9964
	b	-0,2000		
Opt. dle f2 delší	a	0,6575		11,3496
	b	-0,4000		

Pro funkci (14.1) má výnosová křivka sestavená z novějších dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb tvar

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot 0,6419 - 0,4000. \quad (17.11)$$

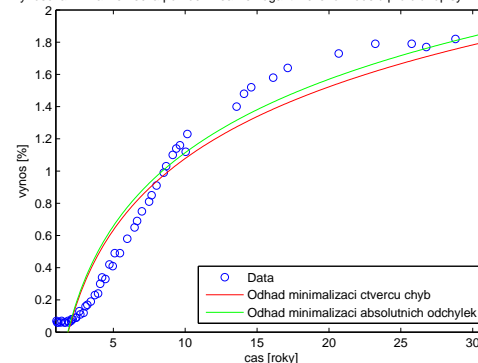
Výše popsaná křivka je zobrazena v levé části obrázku 17.12. Tento obrázek také demonstruje skutečnost, že interpolace lineárně-logaritmickou křivkou nemusí být vždy vhodné řešení.

Výnosová křivka Německa pomocí lineárně-logaritmického modelu pro dluhopisy z 14.2.2014



Data do 10 let splatnosti.

Výnosová křivka Německa pomocí lineárně-logaritmického modelu pro dluhopisy z 14.2.2014



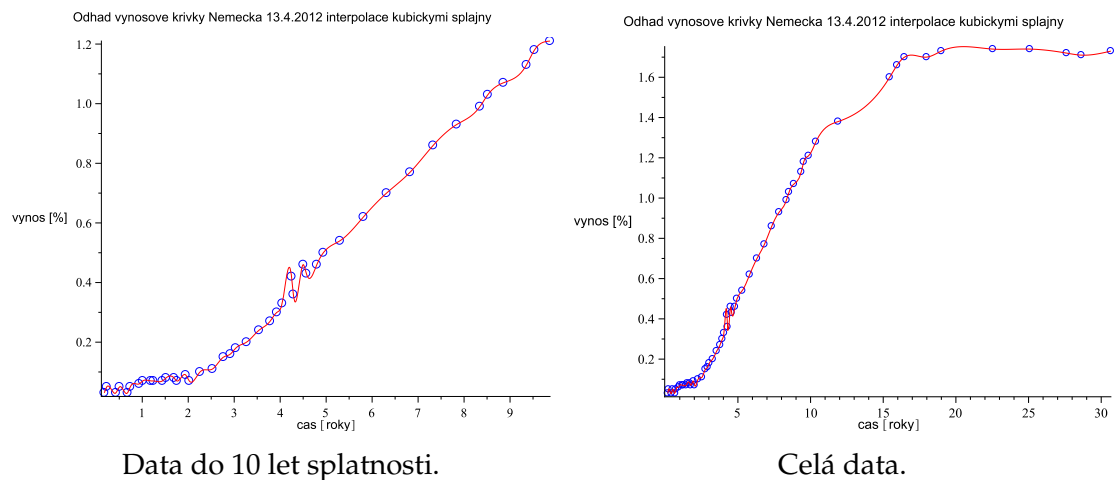
Celá data.

Obrázek 17.12: Výnosová křivka pro novější německá data, proložení lineárně-logaritmickou křivkou.

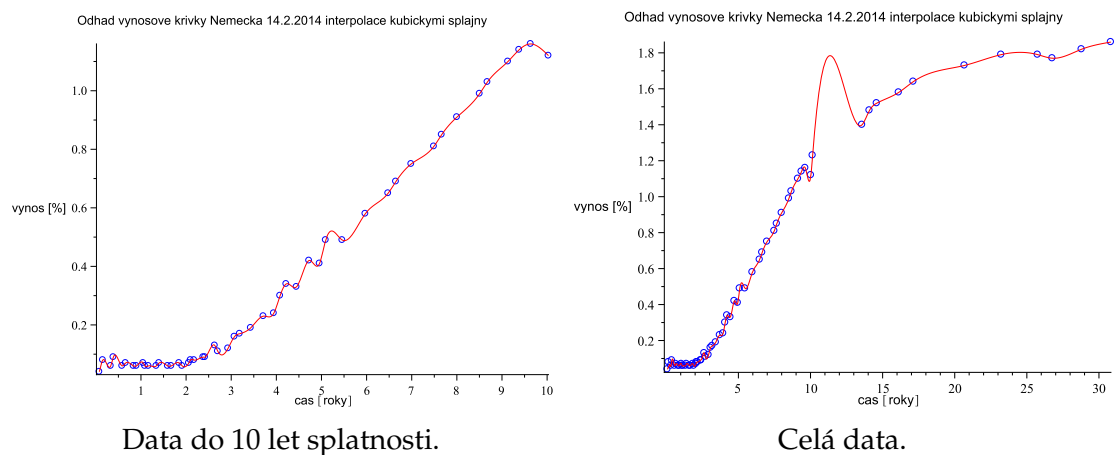
17.3.4 Interpolace kubickými splajny

S použitím dat z Německa byla provedena v softwaru MAPLE dle metodiky v kapitole 15 interpolace kubickými splajny. Na níže uvedených obrázcích jsou předvedeny výsledky pro novější i starší data.

V pravé části obrázku 17.14 je jasně vidět nevýhoda splajnových funkcí a to oscilace pro dva blízké body různě vysoko postavené vzhledem ke svislé ose. Z tohoto důvodu není pro novější německá data vhodná interpolace splajny dle výše uvedené metodiky.



Obrázek 17.13: Výnosová křivka pro starší německá data proložení kubickým splajnem.



Obrázek 17.14: Výnosová křivka pro novější německá data proložení kubickým splajnem.

17.4 Interpretace výnosové křivky Německa aktuální k datu 14.2.2014

Tato část práce se soustředí na interpretaci výnosové křivky pro novější data Německa ze dvou pohledů.

Prvním pohledem je interpretace extrapoláčních modelů, tzn. cílem je predikce průměrných úrokových sazeb v blízké budoucnosti. Namodelované křivky Nelson-Siegelovým a Svenssonovým modelem se téměř neliší a jejich tvar je pro delší splatnosti stejný. Výnosová křivka Německa je pomalu rostoucí. Namodelovaná křivka Nelson-Siegelovým modelem dává důraz na aproximaci delších splatností. Z tohoto důvodu je pro kratší splatnosti vhodnější použít některý z interpolačních modelů. Dalším řešením by bylo zvolit nižší parametr τ v proceduře odhadování parametrů. Odhad extrapoláčním modelem Nelson-Siegla se zde však zaměřil na střednědobé výnosnosti. V horizontu 10 let mají německé dluhopisy výnosnost 1,3 %. Ekonomika Německa je vyspělá a riziko nesplacení dluhopisů je velmi nízké. Spotová křivka určuje průměrnou hodnotu dlouhodobých úrokových sazeb, která činí 1,8 %. Dle tvaru pozitivně skloněné křivky lze vyvodit hospodářský růst země a zdravou ekonomiku.

Z pohledu investora je vhodné získat dostatečně přesný model na to, aby bylo možné odhadnout výnos pro jakoukoli splatnost (v daných mezích). Tento problém se snaží řešit interpolační metody.

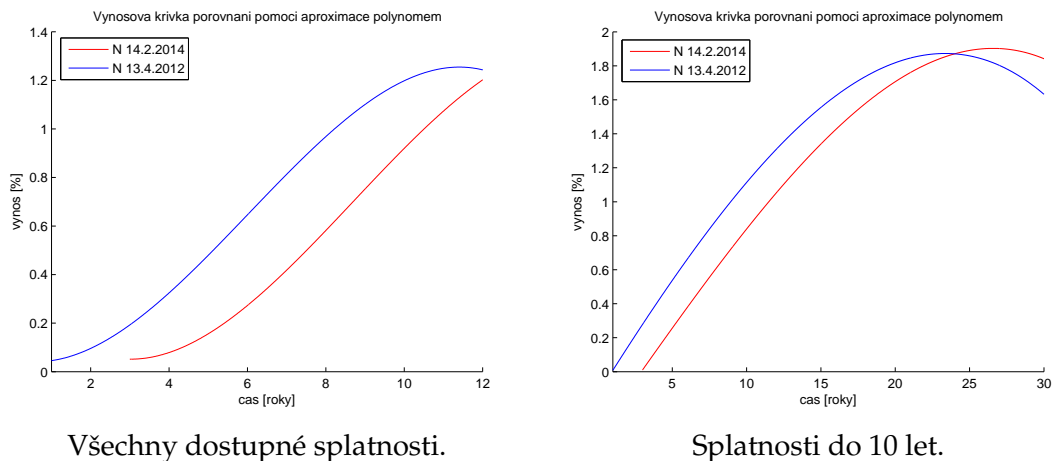
Tabulka 17.9: Tabulka porovnání hodnot minimalizačních funkcí pro novější německá data.

Model	Počet parametrů	Chybová funkce	Porovnávací funkce
Polynom 3.stupně (minim. f1)	4	0,0081	0,0002
Polynom 3.stupně (minim. f2)	4	0,4530	0,0101
Gompertzova křivka (minim. f1)	3	0,0192	0,0004
Gompertzova křivka (minim. f2)	3	0,6837	0,0149
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f1)	2	1,3982	0,0297
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f2)	2	6,9964	0,1489

Dle tabulky 17.9 byly nejlepšími odhady pro krátkodobý horizont (z pohledu minimalizace obou zvolených funkcí) odhady aproximací polynomem 3.stupně. V horizontu 10 let mají dluhopisy dle tohoto modelu výnosnost 1,17 %. Naopak jako nevhodné se ukázalo použití kubického splajnu pro německá data. Z důvodu velkého množství emitovaných dluhopisů docházelo často k oscilacím modelu (viz obrázek 17.14). Proto vznikaly křivky, u nichž by existovala arbitráž. Přitom právě extrapoláční modely se snaží arbitráži zabránit (jak dokazuje [5]), neboť se jedná o nežádoucí jev.

17.5 Porovnání křivek Německa pro dvě časová období

Argumentem pro použití shodné metodiky odhadu polynomem 3.stupně byla vzájemná porovnatelnost křivek. Pro lepší názornost je na obrázku 17.15 vlevo znázorněn průběh funkcí pro všechny dostupné splatnosti. V pravé části obrázku je vykreslen graf křivky, která je sestavena jen z dluhopisů se splatností do 10 let.



Všechny dostupné splatnosti.

Splatnosti do 10 let.

Obrázek 17.15: Výnosová křivka pro novější německá data vyznačená červeně a pro starší německá data vyznačená modře.

V průběhu času došlo k mírnému posunu výnosové křivky Německa směrem dolů. Tento posun však není tak výrazný jako v případě České republiky. Německá ekonomika je velmi silná a krize v roce 2012 ji ovlivnila méně než sousední Českou republiku. Přestože se jedná o jednu z nejdominantnějších ekonomik v Evropě, je z velké části ovlivněna ostatními ekonomikami eurozóny.

18 Rakousko

18.1 Data

Informace o dluhopisech Rakouska byly získány z oficiálních stránek rakouské banky Erste Bank, která je součástí skupiny Erste Group. Jedná se o jednu z největších a nejdůvěryhodnějších bank v Rakousku. Z tohoto důvodu lze data považovat za důvěryhodná. Data aktuální k datu 14.2.2014 byla stažena z adresy [26]. Ceny použitých dluhopisů, které jsou vypsány v tabulce 18.1, jsou vyjádřeny v eurech. Z původních dat byly vyřazeny dluhopisy s variabilním kuponem. Příjmy z kapitálových výnosů jsou daněny v Rakousku celkem 25 % (dle [24]).

Tabulka 18.1: Tabulka dat státních dluhopisů pro Rakousko s datem vypořádání 14.2.2014

Dluhopis	Cena (euro)	AUV (euro)	Kupon (euro)	Splatnost	Čistý YTM [%]
AT0000386073	1043,00	24,96	43,00	15.7.2014	0,00
AT0000A0CL73	1034,00	10,58	34,00	20.10.2014	0,00
AT0000386198	1070,00	19,83	35,00	15.7.2015	0,00
AT0000A011T9	1117,71	15,11	40,00	15.9.2016	0,08
AT0000A0GLY4	1124,39	30,04	32,00	20.2.2017	0,11
AT0000A06P24	1161,69	15,65	43,00	15.9.2017	0,26
AT0000385745	1171,02	1,16	46,50	15.1.2018	0,35
AT0000A08968	1226,55	36,85	43,50	15.3.2019	0,61
AT0000A0VRF9	1080,19	11,38	19,50	18.6.2019	0,66
AT0000386115	1210,20	19,18	39,00	15.7.2020	0,88
AT0000A001X2	1188,08	10,69	35,00	15.9.2021	1,10
AT0000A0N9A0	1219,68	25,65	36,50	20.4.2022	1,19
AT0000A0U3T4	1180,85	3,49	34,00	22.11.2022	1,29
AT0000A105W3	1034,46	3,16	17,50	20.10.2023	1,42
AT0000A0DXC2	1392,51	36,11	48,50	15.3.2026	1,64
AT0000A04967	1418,33	24,21	41,50	15.3.2037	2,04
AT0000A0VRQ6	1252,10	6,65	31,50	20.6.2044	2,09

18.2 Extrapolace

18.2.1 Nelson-Sieglův a Svenssonův model

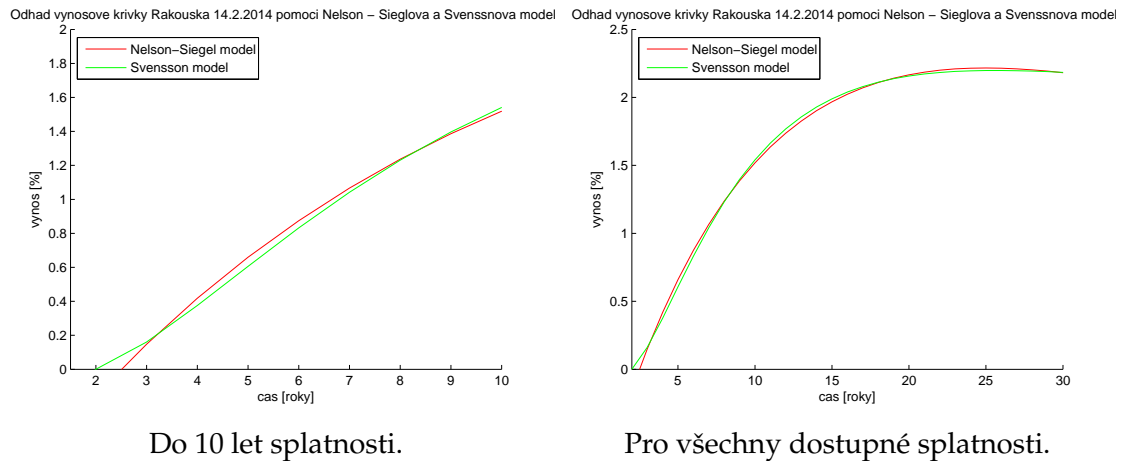
Tato kapitola shrnuje výsledky pro extrapoláční modely vypočítané na základě rakouské sady dat. Na obrázku 18.1 je zobrazena výsledná odhadnutá křivka pro Nelson-Sieglův model a pro Svenssonův model.

Optimální parametry minimalizující funkci (9.1) jsou pro Nelson-Sieglův model

$$\begin{aligned}
 i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \tau) = & 0,002079 - 0,010722 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{11,899}}}{\frac{n}{11,899}} \right) + \\
 & + 0,083163 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{11,899}}}{\frac{n}{11,8295}} - e^{-\frac{n}{11,899}} \right).
 \end{aligned} \tag{18.1}$$

Pro Svenssonův model jsou optimálními parametry, které opět minimalizují funkci (9.1) následující

$$\begin{aligned}
 i(n; \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \tau_1, \tau_2) = & 0,016641 - 0,015262 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{2,383}}}{\frac{n}{2,383}} \right) - \\
 & - 0,044398 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{2,383}}}{\frac{n}{2,383}} - e^{-\frac{n}{2,383}} \right) + \\
 & + 0,042399 \cdot \left(\frac{1 - e^{-\frac{n}{7,872}}}{\frac{n}{7,872}} - e^{-\frac{n}{7,872}} \right).
 \end{aligned} \tag{18.2}$$



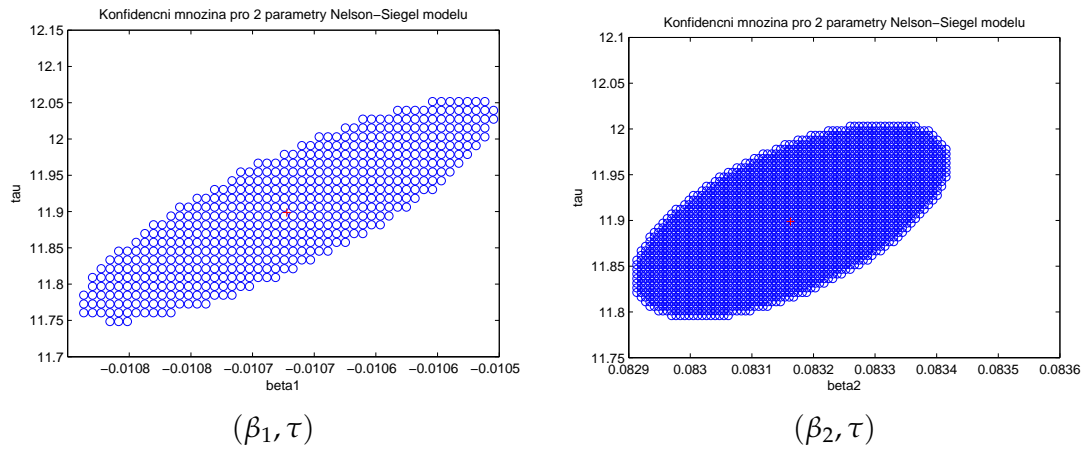
Obrázek 18.1: Nelson-Sieglův a Svenssonův model pro rakouská data.

18.2.2 Konfidenční množiny

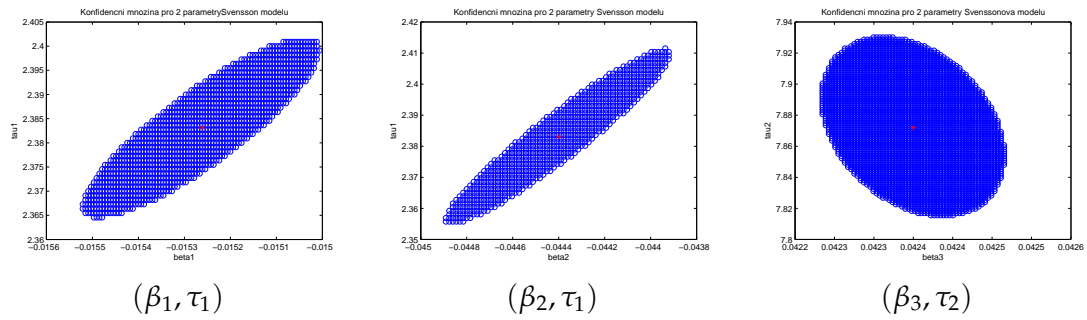
V této části jsou zobrazeny grafy konfidenčních množin pro vybrané dvojice parametrů

- pro Nelson-Sieglův model
 - (β_1, τ) ,
 - (β_2, τ) ,
- pro Svenssonův model
 - (β_1, τ_1) ,
 - (β_2, τ_1) ,
 - (β_3, τ_2) .

Pro rakouská data jsou konfidenční množiny zobrazeny na sadách obrázků 18.2 a 18.3. Z množin nelze pozorovat výraznější známky nelinearity.



Obrázek 18.2: Konfidenční množiny pro Nelson-Sieglův model pro a rakouská data.



Obrázek 18.3: Konfidenční množiny pro Svenssonův model a rakouská data.

18.3 Interpolace

18.3.1 Aproximace polynomem

Podobně jako pro ostatní sady dat i zde jsou prezentovány výsledky odhadu výnosových křivek pomocí aproximace polynomem. Nejprve je prezentována tabulka 18.2, ve které jsou shrnuty informace o koeficientech a jejich významnosti pro křivky sestrojené minimalizací funkce $f_1(\Theta)$. Protože bude v interpretaci provedeno porovnání metod s použitím chybových funkcí (11.1), jsou v tabulce uvedeny i tyto hodnoty.

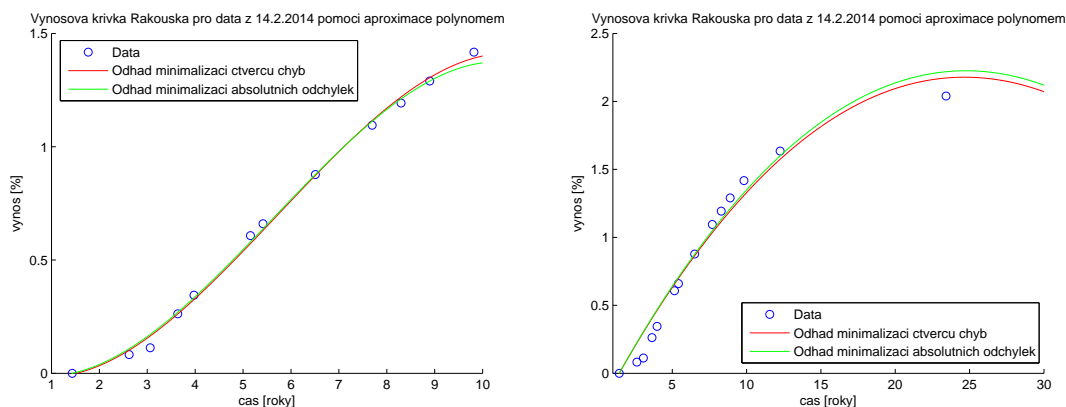
Tabulka 18.2: Tabulka výsledků aproximací polynomem pro rakouská data.

Křivka	Mocnina u t	Koeficient	P hodnota	Významnost	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	t^3	-0,0033	8,7285E-06	významný	0,0078	
	t^2	0,0560	2,7634E-06	významný		
	t^1	-0,0964	0,0032	významný		
	t^0	0,0287	0,3276	nevýznamný		
Opt. dle f1 delší	t^3	1,0363E-05	0,8614	významný	0,2091	
	t^2	-0,0046	0,0919	významný		
	t^1	0,2061	4,6784E-06	nevýznamný		
	t^0	-0,2860	0,0035	nevýznamný		
Opt. dle f1 kratší	t^3	-0,0033				0,2532
	t^2	0,0564				
	t^1	-0,0949				
	t^0	0,0301				
Opt. dle f1 delší	t^3	7,7991E-06				1,5504
	t^2	-0,0045				
	t^1	0,2078				
	t^0	-0,2881				

Při interpolaci polynomem (12.1) má rovnice pro výnosovou křivku, sestavenou z rakouských dat do 10 let splatnosti minimalizací funkce f_1 , tvar

$$i(t; a_0, a_1, a_2) = 0,0287 - 0,0964 \cdot t + 0,0560 \cdot t^2 - 0,0033 \cdot t^3. \quad (18.3)$$

Tato křivka je zobrazena v levé části obrázku 18.4. V pravé části stejného obrázku je vykreslena křivka sestrojená z dat všech dostupných splatností.



Data do 10 let spl., polynom 3.stupně.

Celá data, polynom 3.stupně.

Obrázek 18.4: Výnosová křivka pro rakouská data, aproximace polynomem.

18.3.2 Gompertzova křivka

Výsledky pro modelování Gompertzovou křivkou a lineárně-logaritmickou křivkou jsou rozčleněny na 4 modely pro každou sadu dat. V následující tabulce budou uvedeny tyto hodnoty:

- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_1 (11.1) (nejmenší čtverce chyb), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 (11.1) (absolutní odchylka), pro data do 10 let splatnosti, včetně hodnoty minimalizované funkce,
- optimalizace dle minimalizace funkce f_2 (11.1) (absolutní odchylka), pro všechna data, včetně hodnoty minimalizované funkce.

Opět pro starší sadu dat se počítá s prvními 14 dluhopisy se splatností do 10 let. Tabulka výsledků 18.3 uvádí kromě koeficientů také body inflexe a hodnoty minimalizačních funkcí.

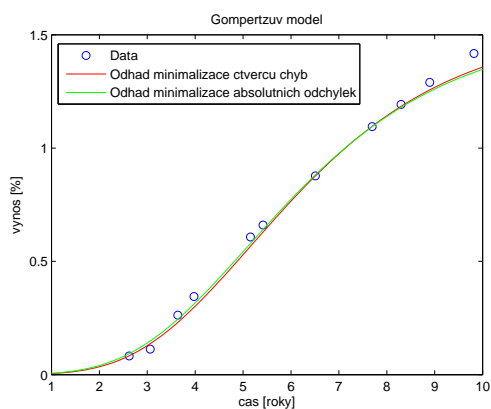
Pro funkci Gompertzova trendu (13.1) má výnosová křivka, která je sestavená z rakouských dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb, tvar

$$i(t; \alpha, \beta, \gamma) = e^{0,4357 - 8,8237 \cdot 0,6559^t}. \quad (18.4)$$

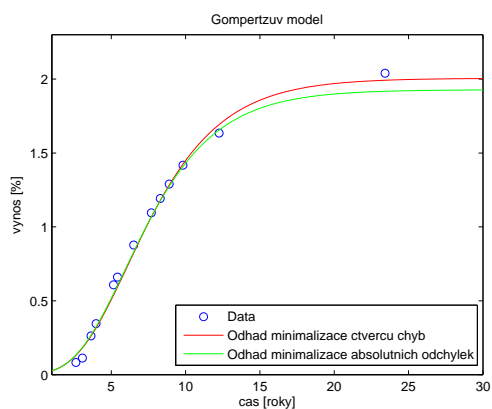
Tato křivka je zobrazena červeně v levé části obrázku 18.5.

Tabulka 18.3: Tabulka výsledků aproximací Gompertzovým trendem pro rakouská data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	Inflexe [roky]	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	alfa	-8,8237	5,1636	0,0043	
	beta	0,6559			
	gamma	0,4357			
Opt. dle f1 delší	alfa	-5,8139	6,1056	0,0236	
	beta	0,7495			
	gamma	0,6961			
Opt. dle f2 kratší	alfa	-8,3876	5,0892		0,1621
	beta	0,6584			
	gamma	0,4267			
Opt. dle f2 delší	alfa	-5,8202	5,9264		0,4270
	beta	0,7429			
	gamma	0,6566			



Data do 10 let splatnosti.



Celá data.

Obrázek 18.5: Výnosová křivka pro rakouská data, proložení Gompertzovou křivkou.

18.3.3 Lineárně-logaritmická křivka

V této sekci jsou uvedeny výsledky proložení dat lineárně-logaritmickou křivkou. V tabulce výsledků 18.4 jsou také uvedeny pro všechny 4 podmodely odhadnuté koeficienty.

Kromě vlastních obrázků jsou zde dále vypsány hodnoty chybových funkcí a numerické odhady obou koeficientů křivky.

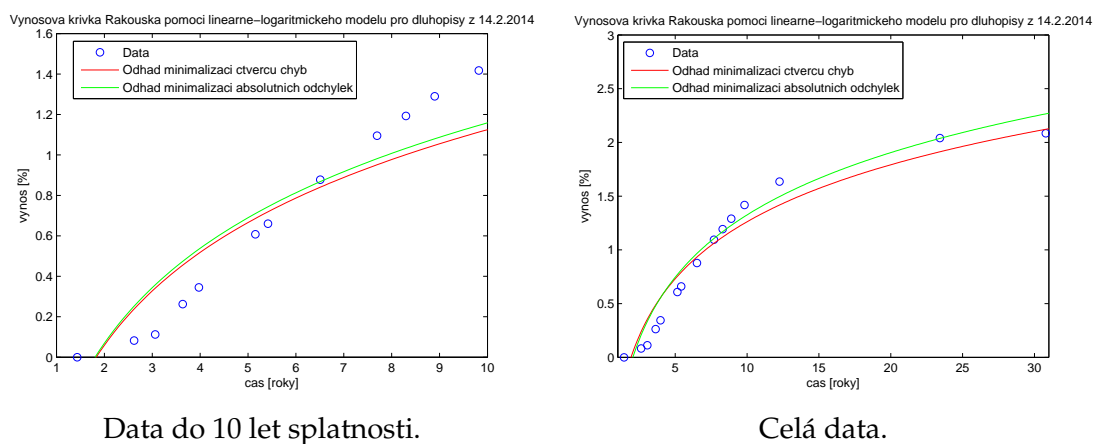
Tabulka 18.4: Tabulka výsledků aproximací lineárně logaritmickou křivkou pro rakouská data.

Křivka	Typ koeficientu	Koeficient	f1	f2
Opt. dle f1 kratší	a	0,6623	0,6337	
	b	-0,4000		
Opt. dle f1 delší	a	0,7651	0,9123	
	b	-0,5000		
Opt. dle f2 kratší	a	0,6770		2,4980
	b	-0,4000		
Opt. dle f2 delší	a	0,8362		3,1070
	b	-0,6000		

Pro funkci (14.1) má výnosová křivka, sestavená z rakouských dat do 10 let splatnosti minimalizací čtverců chyb, tvar

$$i(t; a, b) = \ln(t) \cdot 0,6623 - 0,4000. \quad (18.5)$$

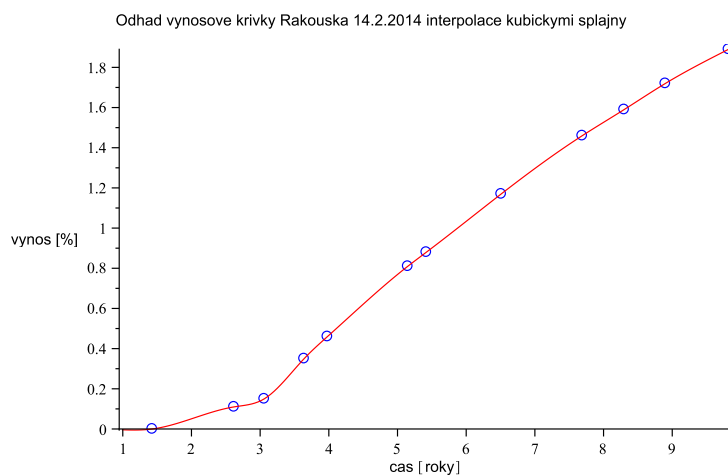
Křivka je zobrazena červeně v levé části obrázku 18.6.



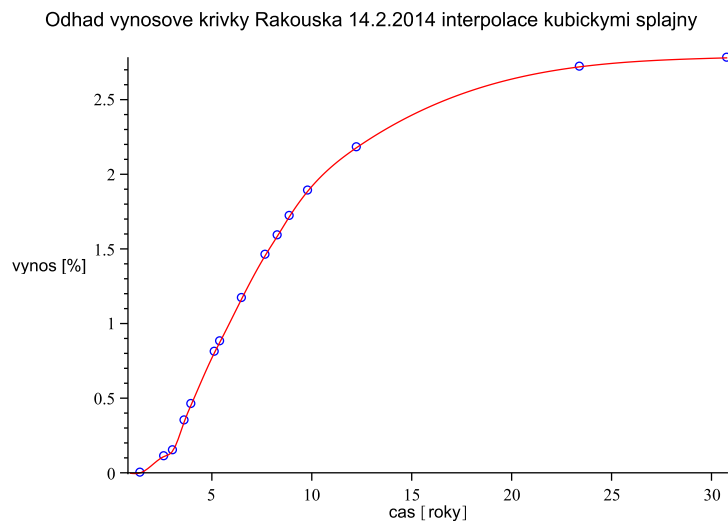
Obrázek 18.6: Výnosová křivka pro rakouská data, proložení lineárně-logaritmickou křivkou.

18.3.4 Interpolace kubickými splajny

Pomocí softwaru MAPLE byly vypočteny odhady křivky kubickými splajny. Na obrázcích 18.8 a 18.7 jsou přestaveny výsledné odhady křivek pro Rakousko.



Obrázek 18.7: Výnosová křivka pro rakouská data proložení kubickým splajnem do 10 let splatnosti.



Obrázek 18.8: Výnosová křivka pro rakouská data proložení kubickým splajnem.

18.4 Interpretace výnosové křivky Rakouska aktuální k datu 14.2.2014

Výnosová křivka Rakouska namodelovaná Nelson-Sieglovým a Svenssonovým modelem, je v období do 10 let splatnosti rostoucí. Jelikož Svenssonův model dokáže vystihnout přesněji tvar křivky, je tato křivka více vypovídající v krátkodobém horizontu než model Nelson-Siegla. O tom se lze přesvědčit na obrázku 18.1. Naopak pro delší splatnosti (z důvodu vyššího parametru τ) byl odhadnut přesněji delší konec křivky Nelson-Sieglovým modelem. Výnosová křivka Rakouska je rostoucí a má nejobvyklejší tvar spotových výnosových křivek. Lze očekávat, že forwardové sazby v období 10 let dosáhnou výše okolo 1,5 %. V horizontu 30 let splatnosti jsou očekávány průměrné úrokové sazby ve výši 2,2 %. Interpolace pomocí kubických splajnů dává v případě rakouské sady dat uspokojivé výsledky, jak potvrzuje obrázek 18.8. Důvodem může být rovnoměrnější rozdělení dluhopisů pro zkoumané doby do splatnosti.

Nejlepším interpolačním modelem byla vybrána, na základě minimalizace funkce (16.11), Gompertzova křivka. Jedná se o výsledek odhadu pro křivky sestrojené z dluhopisů do 10 let splatnosti. Toto tvrzení vychází z tabulky 18.5.

Tabulka 18.5: Tabulka porovnání hodnot minimalizačních funkcí pro rakouská data.

Model	Počet parametrů	Chybová funkce	Porovnávací funkce
Polynom 3.stupně (minim. f1)	4	0,0078	0,0008
Polynom 3.stupně (minim. f2)	4	0,2532	0,0253
Gompertzova křivka (minim. f1)	3	0,0043	0,0004
Gompertzova křivka (minim. f2)	3	0,1621	0,0147
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f1)	2	0,6337	0,0528
Lineárně-logaritmická křivka (minim. f2)	2	2,4980	0,2082

Gompertzova křivka obsahuje inflexní bod. Zde se konkrétně tento bod nachází v bodě doby splatnosti dluhopisu přibližně 5 let. Proto je dle odhadnutého modelu nárůst výnosů do období 5 let menší a poté dochází k rychlejšímu narůstání výnosnosti. Strmost křivky se mění právě v bodě inflexe. Rakouská ekonomika je vyspělá také díky rozvinutému systému bankovníctví a pojišťovnictví. Tato skutečnost přispívá k nižšímu riziku nesplacení státních dluhopisů této země.

Dle [19] je rakouská ekonomika ve velmi dobré „kondici“. Po recesi v roce 2008 nastalo v eurozóně mírné oživení. O několik let později se však eurozóna opět ocitla v recesi. Rakouské ekonomice se v tomto období podařilo naopak mírně růst. Nezaměstnanost Rakouska patří k několika nejnižším v celé Evropě, a proto jsou výnosy na poměrně nízké úrovni. Do budoucna se očekává významnější růst ekonomiky.

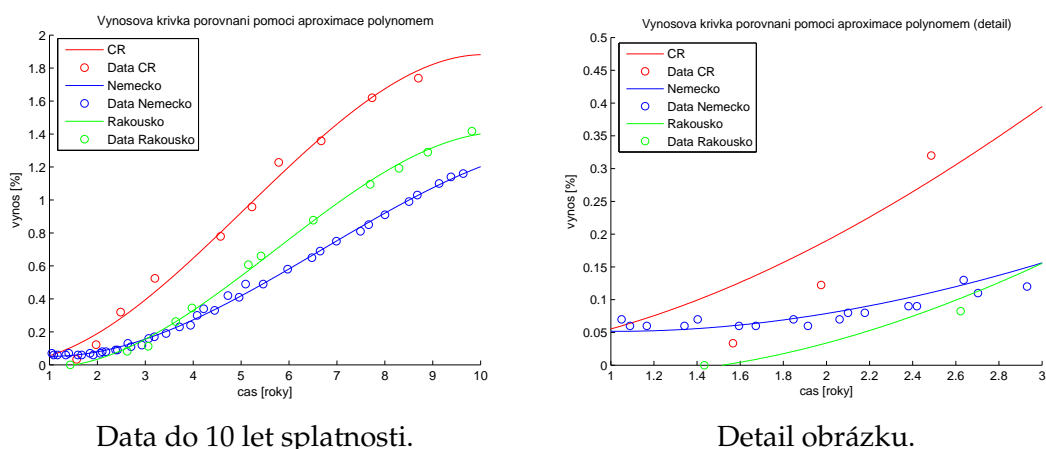
19 Srovnání a celková interpretace

Na obrázku 19.1 jsou uvedeny odhady výnosových křivek pro Českou republiku, Německo a Rakousko s datem vypořádání 14.2.2014. Pro představu jsou zde, ve stejných barvách jako křivky jednotlivých zemí, zobrazeny malými kolečkami také jednotlivé dluhopisy. Všechny modely vychází z minimalizace funkce $f_1(\Theta)$ (11.1).

Česká republika dosahuje nejvyšších úrokových sazeb ze všech tří zemí. Nejnižší položená je křivka Německa. Z grafického zobrazení lze také posoudit ekonomickou vyspělost jednotlivých zemí. Pokud se jedná o zemi, které investoři důvěřují (např. má vysoký rating od mezinárodních ratingových agentur jako je Moody's a jiné), pravděpodobnost nesplacení dluhopisů klesá, tudíž je výnosnost nižší. Z tohoto důvodu lze usoudit, že Rakousko je na tom ekonomicky hůře než Německo, ale zároveň je na tom z tohoto pohledu lépe, než Česká republika. Nejvyšší inflace ze všech zkoumaných zemí dosahuje Česká republika.

Z detailu obrázku 19.1 plyne zajímavá skutečnost. Pro krátkodobé dluhopisy do splatnosti cca 3 roky je výnosová křivka Rakouska níže než křivka Německa. Tento fakt je pravděpodobně způsoben absencí většího počtu dluhopisů pro krátkodobé splatnosti narozdíl od Německa.

Pro srovnání byl vybrán právě interpolační model do 10 let, neboť jsou v tomto časovém horizontu spotové křivky nejpřesněji odhadnutelné (viz [12]). Pokud je cílem výzkumu co nejpřesnější aproximace v mezidobí emitovaných dluhopisů, jsou interpolační metody vhodnější než extrapolací.



Obrázek 19.1: Odhad polynomem třetího stupně pro všechny tři země, data z 14.2.2014.

Část VI

Závěr

Smyslem této práce bylo přiblížit čtenáři několik extrapoláčních a interpolačních metod odhadů spotových výnosových křivek a využít získané poznatky pro praktickou aplikaci na celkem pěti sadách dat. Z extrapoláčních metod byly vybrány dvě v dnešní době nejpoužívanější, a to Nelson-Sieglova a Svenssonova metoda. Pro interpolaci byly zvoleny celkem čtyři metody, jmenovitě aproximace polynomem, Gompertzova křivka, lineárně-logaritmická křivka a kubický splajn. Na základě funkce (16.11) byly vybrány pro sady dat s vypořádáním k 14.2.2014 vždy neoptimalnější z prvních tří interpolačních metod.

Pro data České republiky a Rakouska byla takovým modelem Gompertzova křivka. Naopak data Spolkové republiky Německo approximovala nejlépe polynomiální funkce.

Vzhledem k tomu, že byly k dispozici vždy dvě sady dat pro stejnou zemi (Česká republika a Německo), bylo provedeno porovnání dvojic výsledných křivek. Křivka České republiky se posunula v průběhu cca 2 let směrem dolů o přibližně 1,2 procentního bodu, zatímco křivka Německa ve stejném časovém období tak výrazný posun nezaznamenala.

Na závěr práce bylo provedeno srovnání křivek pro všechny tři vybrané země, tedy Českou republiku, Německo a Rakousko. Z důvodu porovnatelnosti byl pro všechna data zvolen odhad polynomem 3.stupně. Výnosnost dluhopisů se splatností 10 let je v České republice dvojnásobná oproti Německu.

Zajímavým námětem pro další rozšíření by mohlo být porovnání výnosových křivek nejen spotových, ale i forwardových. Dále lze navrhnout sledování vývoje neevropských ekonomik, například Spojené státy americké, Japonsko nebo Čína.

Část VII

Literatura

Reference

- [1] J. ANDĚL, *Statistické metody*, Praha, Matfyzpress, 1997, ISBN 80-867-3208-8.
- [2] J. BUREŠ, *Úvod do problematiky výnosových křivek [online]*, [cit. 1.4.2014], http://ksp.vse.cz/KHP/WCMS_KHP.nsf/files/5HP501_vynosove_krivky_pdf_zs07/file/5HP501_vynosove_krivky_pdf_zs07.pdf.
- [3] R.H. BYRD, M.E. HRIBAR, and J. NOCEDAL, *An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming*, *SIAM Journal on Optimization* 9 (1999), no. 4, 877–900.
- [4] R. PIENAAR M. CHOUDHRY, *Fitting the term structure of interest rates: the practical implementation of cubic spline methodology [online]*, [cit. 16.3.2014], http://www.yieldcurve.com/mktresearch/files/\pienaarchoudhry_cubicspline2.pdf.
- [5] J.H.E. CHRISTENSEN, F.X. DIEBOLD, and G.D. RUDEBUSCH, *The affine arbitrage-free class of Nelson - Siegel term structure models [online]*, [cit. 5.4.2014], <http://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp874.pdf>.
- [6] T. CIPRA, *Matematika cenných papírů*, Praha, HZ Praha, spol. s.r.o., 2000, ISBN 80-86009-35-1.
- [7] ———, *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, Praha, Ekopress s.r.o., 2005, ISBN 80-86119-91-2.
- [8] ———, *Finanční ekonometrie*, 1.vyd. Praha: Ekopress, 2008, ISBN 978-80-86929-43-9.
- [9] L. CORONEO, K. NYHOLM, and R. VIDOVA-KOLEVA, *How arbitrage-free is the Nelson-Siegel model?[online]*, [cit. 31.3.2014], <http://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/scpwps/ecbwp874.pdf>.
- [10] M. FRIESL, *Pravděpodobnost a statistika hypertextově [online]*, [cit. 10.4.2014], <http://home.zcu.cz/~friesl/hpsb/phodn.html>.
- [11] J. HÁTLE and J. LIKEŠ, *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*, 2.vyd. SNTL - Nakladatelství technické literatury ALFA, Praha, 1974, ISBN 0-471-24195-4.
- [12] J. JÍLEK, *Finanční trhy*, Praha, Grada Publishing, 1997, ISBN 80-7169-453-3.
- [13] P. KOHOUT, *Ekonomická analýza výnosových křivek*, *Statistika* 3 (2005), 211–226, ISSN: 0322-78.

- [14] A. GEYER R. MADER, *Estimation of the term structure of interest rates a parametric approach [online]*, [cit. 8.4.2014], Working paper No.37 (1999), ISSN 0713-7931, ISBN 0-662-27602-7, <http://www.oenb.at/en/Publications/Economics/Working\discretionary{-}{-}{-}Papers/1999/Working-Paper-37.html>.
- [15] P. MAREK, *Přednášky z předmětu finanční a pojistná matematika [online]*, [cit. 20.4.2014], http://www.kma.zcu.cz/main.php?KMAfile=./CLENOVE/main.php&DRC=./STRUCTURE/02_pracovnici/.
- [16] J. MÁLEK, J. RADOVÁ, and F. ŠTĚRBA, *Konstrukce výnosové křivky pomocí vládních dluhopisů v České republice [online]*, [cit. 31.3.2014], *Politická ekonomie*, 2007 (2006), no. 6, 792–807, <http://www.vse.cz/polek/download.php?jnl=polek&pdf=624.pdf>.
- [17] J. MORÁVKA, *Odhad optimálního stupně regresního polynomu [online]*, [cit. 5.4.2014], <http://akce.fs.vsb.cz/2001/\asr2001/Proceedings/papers/44.pdf>.
- [18] Ch. NELSON and A. SIEGEL, *Parsimonious modeling of yield curves [online]*, [cit. 8.4.2014], *The Journal of Business* 60 (1987), no. 4, 473–489, <http://www.math.ku.dk/~rolf/teaching/NelsonSiegel.pdf>.
- [19] Patria Online, *Rakousko zatím mezi ekonomickými premianty [online]*, 2013 [cit. 18.4.2014], <http://www.patria.cz/zpravodajstvi/2479783/rakousko-zatim-mezi-ekonomickymi-premianty.html>.
- [20] ———, *Zdroj dat státních dluhopisů České republiky [online]*, [cit. 14.2.2014], <http://www.patria.cz/kurzy/online/dluhopisy.html>.
- [21] K. SCHMIDHEINY, *Functional form in the linear model*, Univerzitat Basel, [cit. 18.4.2014] 3 (2013), <http://kurt.schmidheiny.name/teaching/functionalform2up.pdf>.
- [22] M. SLAVÍK, *Odhad časové struktury úrokových sazeb z cen domácích dluhopisů [online]*, [cit. 31.3.2014], *Finance a úvěr* 51 (2001), no. 11, 591–605, http://journal.fsv.cuni.cz/storage/776_200111ms.pdf.
- [23] *Webová stránka, Zdroj dat státních dluhopisů spolkové republiky německo [online]*, [cit. 13.4.2012], http://www.deutsche-finanzagentur.de/fileadmin/Material_Deutsche_Finanzagentur/PDF/Aktuelle_Informationen/kredit_renditetabelle.pdf.
- [24] ———, *Aktuelle regelung der wertpapierbesteuerung und verlustausgleich zurück | aktualisieren für österreichische privatanleger [online]*, [cit. 14.2.2014], http://www.boerse-live.at/eBusiness/blive_template1/212251493524270627-215937578154582211-698101085122025837-\NA-NA-NA-NA-NA.html.

- [25] ———, *Einkommensteuergesetz § 43a estg einkommensteuergesetz § 43a estg bemessung der kapitalertragsteuer [online]*, [cit. 14.2.2014], <http://gesetze.com.de/Einkommensteuergesetz/43a-EStG.htm>.
- [26] ———, *Zdroj dat státních dluhopisů rakouska [online]*, [cit. 14.2.2014], https://produkte.erstegroup.com/Retail/de/Products/Bonds/Sites/All_Products/.
- [27] ———, *Česká republika. zákon o dluhopisech zákon č. 190/2004 sb. [online]*, [cit. 15.3.2014], <http://www.mfcr.cz/cs/legislativa/legislativni-dokumenty/2004/zakon-c-190-2004-sb-3572>.
- [28] ———, *Spořicí státní dluhopisy České republiky, základní parametry vánoční emise [online]*, [cit. 21.4.2014], <http://www.sporicidluhopisycr.cz/cs/o-dluhopisech/typy-dluhopisu/vanocni-emise-12-12-2013-578>.
- [29] D. ŠTUDENTOVÁ, *Odhady výnosových křivek*, Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni. Fakulta aplikovaných věd. Katedra matematiky. Vedoucí práce RNDr. Blanka Šedivá, Ph.D., 2012.
- [30] K. ZVÁRA, *Regrese*, 1.vyd. Praha: Matfyzpress, 2008, ISBN 978-80-7378-041-8.