

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Fučíkovo spektrum nesymetrického diferenčního operátoru
a řešitelnost okrajových úloh

Plzeň 2014

Iveta Looseová

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....
podpis

Poděkování

Chtěla bych velmi poděkovat vedoucímu diplomové práce Ing. Petru Nečesalovi, Ph.D. za metodické vedení, věcné připomínky, vstřícný přístup, ochotu a trpělivost při zpracování celé práce.

Abstrakt

Tato diplomová práce je zaměřena na studium vlastností Fučíkova spektra nesymetrického diferenčního operátoru a na řešitelnost okrajových úloh. Nejdříve vyšetřujeme vlastnosti Neumannova diferenčního operátoru. Hlavní výsledky se týkají popisu jeho Pareto spektra, polárního Pareto spektra a souvislosti s asymptotickým chováním větví Fučíkova spektra. Potom se zabýváme řešitelností okrajových úloh pro diferenční rovnice vzhledem k Fučíkovu spektru. Nakonec se zabýváme tvarem netriviálních řešení Dirichletovy okrajové úlohy definované množině, která obsahuje intervaly a diskrétní body.

Klíčová slova: Fučíkovo spektrum, Pareto spektrum, polární Pareto spektrum, okrajová úloha, diferenční operátor, nesymetrická matice, řešitelnost okrajové úlohy

Abstract

This Diploma Thesis is devoted to the study of properties of the Fučík spectrum of the asymmetric difference operator and solvability of boundary value problems. At first, the properties of the Neumann difference operator are studied. The main results concern description of its Pareto spectrum, polar Pareto spectrum and relationship to an asymptotic behaviour of curves of its Fučík spectrum. After that, solvability of the boundary value problems for difference equations with respect to the Fučík spectrum is investigated. Finally, the nontrivial solutions of the Dirichlet boundary value problem defined on the set which contains intervals and discrete points are investigated.

Keywords: the Fučík spectrum, the Pareto spectrum, the polar Pareto spectrum, the boundary value problem, the difference operator, asymmetric matrix, solvability of the boundary value problem

Obsah

Úvod	1
1 Neumannův diferenční operátor	2
1.1 Fučíkovo spektrum	5
1.2 Pareto spektrum a polární Pareto spektrum	10
1.3 Asymptotické chování větví Fučíkova spektra	22
2 Řešitelnost okrajových úloh pro diferenční rovnice	33
2.1 Lineární úloha	33
2.2 Nelineární úloha	38
2.2.1 Úloha mimo rezonanci vzhledem k Fučíkovu spektru	39
2.2.2 Úloha v rezonanci vzhledem k Fučíkovu spektru	44
3 Dirichletova okrajová úloha	54
3.1 Kombinace diferenciálních a diferenčních rovnic	56
3.1.1 Metoda střelby	57
3.1.2 Modifikovaná metoda střelby	59
3.2 Časové škály	62
Shrnutí	64
Literatura	65

Úvod

Tato diplomová práce je zaměřena na studium vlastností Fučíkova spektra nesymetrického diferenčního operátoru.

V kapitole 1 se zabýváme vlastnostmi Neumannova diferenčního operátoru reprezentovaného nesymetrickou čtvercovou maticí

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Popíšeme část Pareto spektra a polárního Pareto spektra matice \mathbf{A} a ukážeme souvislost s asymptotickým chováním větví Fučíkova spektra matice \mathbf{A} .

V kapitole 2 se zabýváme řešitelností úlohy

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{g}(\mathbf{u}),$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

V kapitole 3 hledáme netriviální řešení úlohy

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (-q, -p) \cup (+p, +q), \\ \nabla \Delta u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p, -p + h, \dots, -p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \right\}, \\ \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h, \dots, -p + nh, +p \right\}, \\ u(-q) = u(+q) = 0. \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < p \in \mathbb{R}$, $p < q \in \mathbb{R}$, $h = \frac{2p}{n+1}$.

Kapitola 1

Neumannův diferenční operátor

Uvažujme lineární diferenciální operátor $L : L^2(0, 1) \rightarrow L^2(0, 1)$ definovaný jako

$$\begin{aligned}(Lu)(x) &= -u''(x), \\ D(L) &= \{u \in C^1((0, 1)) \cap C^2(0, 1) : u'(0) = u'(1) = 0\}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Podmínkám $u'(0) = u'(1) = 0$ budeme říkat *Neumannovy okrajové podmínky*.

Definice 1.1 ([3]). Mějme operátor $T : H \rightarrow H$, kde H značí Hilbertův prostor. Číslo $\lambda \in \mathbb{C}$ nazveme *vlastním číslem* operátoru T , existuje-li nenulový prvek $u \in H$ tak, že

$$Tu = \lambda u.$$

Příslušné řešení u nazveme *vlastním prvkem* operátoru T (odpovídající vlastnímu číslu λ). Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* a značí se $\sigma(T)$. \square

Následující věta popisuje bodové spektrum $\sigma(L)$ operátoru L . Vybrané vlastní funkce operátoru L jsou znázorněny na obrázku 1.1.

Věta 1.2. *Vlastní čísla operátoru L definovaného v (1.1) mají tvar $\lambda_k = (k\pi)^2$, $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. K nim příslušné vlastní funkce mají tvar $u_k(x) = \cos(k\pi x)$.*

Důkaz. Operátor L je symetrický, protože pro všechny prvky $u, v \in D(L)$ platí

$$\begin{aligned}\langle u, Lv \rangle_{L^2(0,1)} &= \int_0^1 -u(x)v''(x)dx = [-u(x)v'(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x)dx \\ &= \int_0^1 u'(x)v'(x)dx = [u'(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u''(x)v(x)dx \\ &= \int_0^1 -u''(x)v(x)dx = \langle Lu, v \rangle_{L^2(0,1)}.\end{aligned}$$

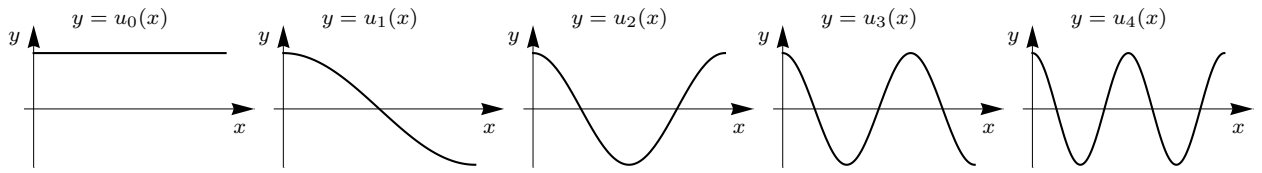
Vlastní čísla symetrického operátoru jsou reálná (zdůvodnění lze nalézt v [3]), stačí se tedy omezit na $\lambda \in \mathbb{R}$. Odvození pro $\lambda \in \mathbb{R}$ můžeme najít v [11]. \blacksquare

Nechť $f = f(x)$ je reálná funkce. Její kladnou částí rozumíme funkci $f^+ : x \mapsto \max\{f(x), 0\}$ a zápornou částí funkci $f^- : x \mapsto \max\{-f(x), 0\}$. Zřejmě platí $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$. Příklad funkce f , její kladné a záporné části je na obrázku 1.2.

Mějme úlohu

$$Lu = \alpha u^+ - \beta u^-, \tag{1.2}$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.



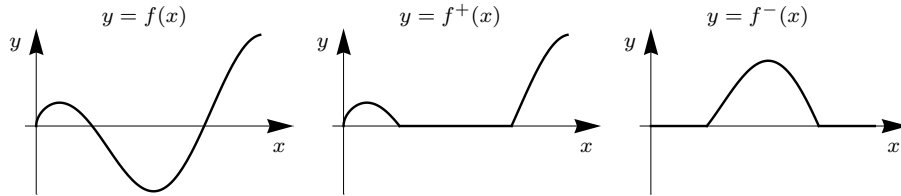
Obrázek 1.1: Některé vlastní funkce operátoru L .

Definice 1.3. Množina

$$\Sigma(L) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : Lu = \alpha u^+ - \beta u^- \text{ má netriviální řešení}\}$$

se nazývá *Fučíkovo spektrum* operátoru L . □

Informace o Fučikově spektru jsou v [6].



Obrázek 1.2: Kladná a záporná část funkce.

Pro každé reálné $\lambda \in \sigma(L)$ je $(\lambda, \lambda) \in \Sigma(L)$, neboť $u = u^+ - u^-$, tedy

$$\{(\lambda, \lambda) \in \mathbb{R}^2 : \lambda \in \sigma(L)\} \subset \Sigma(L).$$

Fučíkovo spektrum je symetrické vzhledem k přímce $\beta = \alpha$, což můžeme zformulovat jako následující lemma.

Lemma 1.4. *Nechť $\Sigma(L)$ je Fučíkovo spektrum operátoru L definovaného v (1.1). Potom platí*

$$(\alpha, \beta) \in \Sigma(L) \iff (\beta, \alpha) \in \Sigma(L).$$

Důkaz. Dokažme implikaci zleva doprava, opačná implikace se dokazuje zcela analogicky. Nechť $(\alpha, \beta) \in \Sigma(L)$. Potom existuje prvek u , $\|u\| = 1$ tak, že platí $Lu = \alpha u^+ - \beta u^-$. Zvolme $v = -u$. Potom $\|v\| = 1$, $v^+ = u^-$, $v^- = u^+$ a

$$\alpha u^+ - \beta u^- = Lu = L(u^+ - u^-) = L(v^- - v^+) = L(-v),$$

tj. $L(-v) = \alpha v^- - \beta v^+$. Díky linearitě operátoru L platí $Lv = \beta v^+ - \alpha v^-$ a tedy $(\beta, \alpha) \in \Sigma(L)$. ■

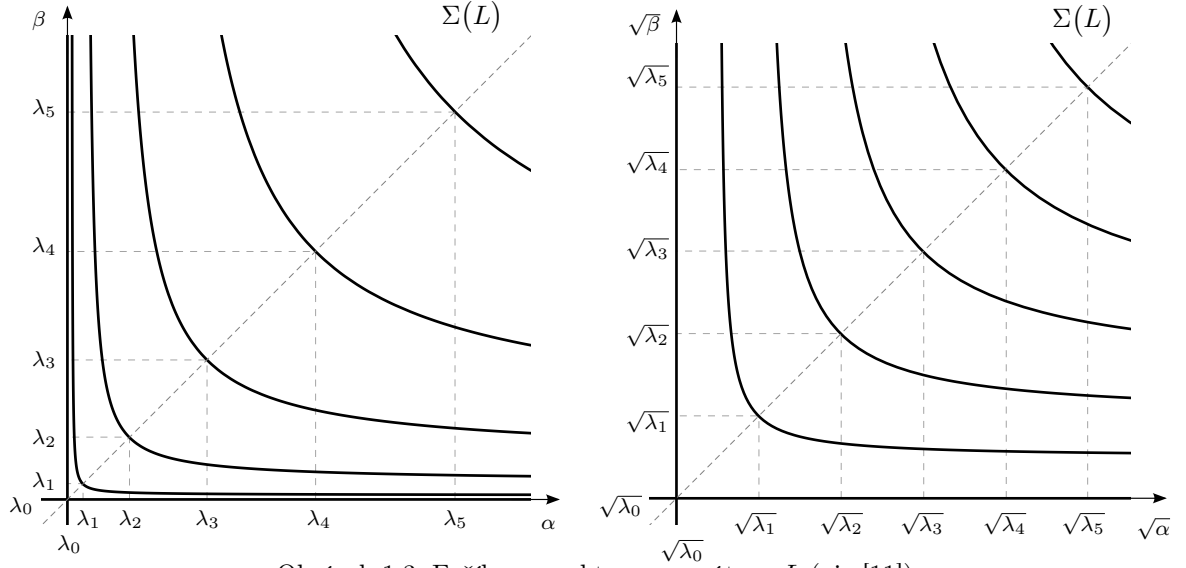
Uveďme, jak vypadá Fučíkovo spektrum $\Sigma(L)$ operátoru L (viz obrázek 1.3).

Věta 1.5. *Fučíkovo spektrum operátoru L definovaného v (1.1) je dáno jako*

$$\Sigma(L) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} K_m,$$

kde $K_0 = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha\beta = 0\}$, $K_m = \left\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \frac{m\pi}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{m\pi}{2\sqrt{\beta}} = 1\right\}$ pro $m \geq 1$.

Důkaz. Odvození můžeme najít v [11]. ■



Obrázek 1.3: Fučíkovo spektrum operátoru L (viz [11]).

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Uvažujme úlohu

$$\begin{cases} u''(x) + \alpha u^+(x) - \beta u^-(x) = 0, & x \in (0, n-1), \\ u'(0) = u'(n-1) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Úlohu (1.3) můžeme zapsat jako

$$L_n u = \alpha u^+ - \beta u^-,$$

kde operátor $L_n : L^2(0, n-1) \rightarrow L^2(0, n-1)$ je definován jako

$$\begin{aligned} (L_n u)(x) &= -u''(x), \\ D(L_n) &= \{u \in C^1((0, n-1)) \cap C^2(0, n-1) : u'(0) = u'(n-1) = 0\}. \end{aligned}$$

Zavedením substituce pro $x \in (0, n-1)$

$$t = \frac{x}{n-1},$$

dostaneme diferenciální rovnici v (1.3) ve tvaru

$$u''(t(n-1)) + \alpha u^+(t(n-1)) - \beta u^-(t(n-1)) = 0. \quad (1.4)$$

Označme $v(t) = u(t(n-1))$. Pak

$$v'(t) = (n-1)u'(t(n-1)), \quad v''(t) = (n-1)^2 u''(t(n-1)).$$

Tedy, rovnice v (1.4) má tvar

$$v''(t(n-1)) + (n-1)^2 \alpha v^+(t(n-1)) - (n-1)^2 \beta v^-(t(n-1)) = 0, \quad t \in (0, 1).$$

Z věty 1.2 pak plyne, že vlastní čísla λ operátoru L_n mají tvar

$$\lambda = \left(\frac{k\pi}{n-1} \right)^2, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

1.1 Fučíkovo spektrum

V této části provedeme diskretizaci úlohy (1.3). Uvažujme množiny $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ a $\hat{\mathbb{T}} = \{-1, 0, \dots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Nechť $\mathbf{u} : \hat{\mathbb{T}} \rightarrow \mathbb{R}$. Definujme kladnou a zápornou část \mathbf{u} jako $\mathbf{u}^+ : t \mapsto \max\{\mathbf{u}(t), 0\}$ a zápornou částí funkci $\mathbf{u}^- : t \mapsto \max\{-\mathbf{u}(t), 0\}$. Definujme centrální poměrnou diferenci δ_c

$$\delta_c \mathbf{u}(t) = \frac{\mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t-1)}{2}, \quad t \in \mathbb{T}.$$

Potom

$$\delta_c \mathbf{u}(0) = \frac{\mathbf{u}(1) - \mathbf{u}(-1)}{2}, \quad \delta_c \mathbf{u}(n-1) = \frac{\mathbf{u}(n) - \mathbf{u}(n-2)}{2}.$$

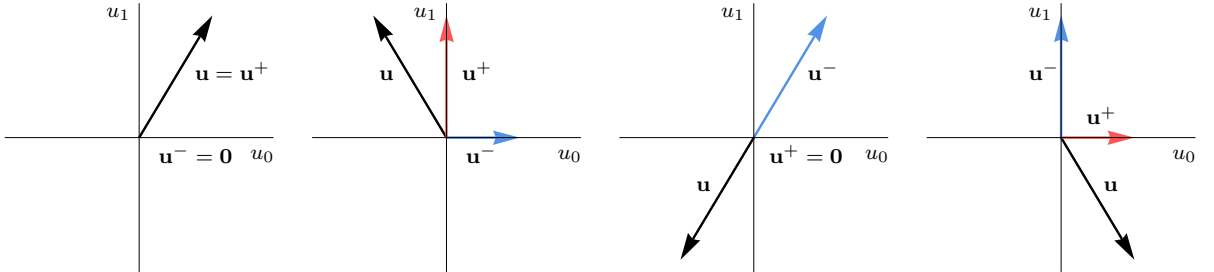
Užitím dopředné diference (definujeme ji jako $\Delta \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t)$) a zpětné diference (definujeme ji jako $\nabla \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1)$) dostaneme

$$\begin{aligned} \Delta \nabla \mathbf{u}(t) &= \Delta(\nabla \mathbf{u}(t)) = \Delta(\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t-1)) = \Delta \mathbf{u}(t) - \Delta \mathbf{u}(t-1) \\ &= \mathbf{u}(t+1) - \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t-1) = \mathbf{u}(t+1) - 2\mathbf{u}(t) + \mathbf{u}(t-1). \end{aligned}$$

Diskretizace úlohy (1.3) má tvar

$$\begin{cases} \Delta \nabla \mathbf{u}(t) + \alpha \mathbf{u}^+(t) - \beta \mathbf{u}^-(t) = 0, & t \in \mathbb{T}, \\ \delta_c \mathbf{u}(0) = \delta_c \mathbf{u}(n-1) = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Uvědomme si, že definiční obor řešení $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ úlohy (1.5) je závislý na hodnotě n .



Obrázek 1.4: Kladná \mathbf{u}^+ (červeně) a záporná \mathbf{u}^- (modře) část vektoru $\mathbf{u} = [u_0, u_1]^T$.

Rozepíšeme-li operátorovou rovnici v (1.5), dostaneme n rovnic tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(1) - 2\mathbf{u}(0) + \mathbf{u}(-1) + \alpha \mathbf{u}^+(0) - \beta \mathbf{u}^-(0) &= 0, \\ \mathbf{u}(2) - 2\mathbf{u}(1) + \mathbf{u}(0) + \alpha \mathbf{u}^+(1) - \beta \mathbf{u}^-(1) &= 0, \\ &\vdots \\ \mathbf{u}(n-1) - 2\mathbf{u}(n-2) + \mathbf{u}(n-3) + \alpha \mathbf{u}^+(n-2) - \beta \mathbf{u}^-(n-2) &= 0, \\ \mathbf{u}(n) - 2\mathbf{u}(n-1) + \mathbf{u}(n-2) + \alpha \mathbf{u}^+(n-1) - \beta \mathbf{u}^-(n-1) &= 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Z Neumannovy okrajové podmínky v (1.5) plyne

$$\mathbf{u}(-1) = \mathbf{u}(1), \quad \mathbf{u}(n) = \mathbf{u}(n-2). \quad (1.7)$$

Po dosazení (1.7) do (1.6) mají první a poslední rovnice v (1.6) tvar

$$\begin{aligned} 2\mathbf{u}(1) - 2\mathbf{u}(0) + \alpha \mathbf{u}^+(0) - \beta \mathbf{u}^-(0) &= 0, \\ -2\mathbf{u}(n-1) + 2\mathbf{u}(n-2) + \alpha \mathbf{u}^+(n-1) - \beta \mathbf{u}^-(n-1) &= 0. \end{aligned}$$

Zaveďme maticový tvar úlohy (1.5). Označíme-li

$$u_0 = \mathbf{u}(0), u_1 = \mathbf{u}(1), \dots, u_{n-1} = \mathbf{u}(n-1),$$

je $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{n-1}]^T$, $\mathbf{u}^\pm = [u_0^\pm, u_1^\pm, \dots, u_{n-1}^\pm]^T$.

Celkem úlohu (1.5) můžeme zapsat v ekvivalentním maticovém tvaru jako

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^-, \quad (1.8)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

je třídiagonální matice rozměru $n \times n$, která není symetrická.

Pokud v dalším textu použijeme matici \mathbf{A} , vždy budeme mít na mysli matici \mathbf{A} definovanou v (1.9). Pokud budeme používat obecnou matici, nejčastěji ji budeme značit \mathbf{B} a vždy uvedeme, o jakou matici se jedná (jakého typu). Dále budeme často vektory $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{n-1}]^T$ psát ve tvaru $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$, $t \in \mathbb{T}$ a naopak. Pro $n = 2$ můžeme jednoduše znázornit (viz obrázek 1.4), jak vypadá kladná a záporná část vektoru v libovolném kvadrantu. Množinu všech reálných čtvercových matic typu $n \times n$ budeme značit \mathbb{M}_n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Definice 1.6. Řekneme, že matice \mathbf{M}, \mathbf{N} stejného řádu jsou *podobné*, existuje-li regulární matice \mathbf{D} taková, že

$$\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}. \quad \square$$

Lemma 1.7. Necht matice $\mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{M}_n$ jsou podobné. Potom mají stejná vlastní čísla, tj.

$$\sigma(\mathbf{M}) = \sigma(\mathbf{N}).$$

Důkaz. Necht $\lambda \in \sigma(\mathbf{M})$, tj.

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}.$$

Necht je $\mathbf{M} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}$. Pak dostaneme využitím podobnosti matic

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{-1}\mathbf{N}\mathbf{D}\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{u}, \\ \mathbf{N}\mathbf{D}\mathbf{u} &= \lambda\mathbf{D}\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Označíme-li $\mathbf{v} = \mathbf{D}\mathbf{u}$, je

$$\mathbf{N}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

a tedy pro matici \mathbf{N} je $\lambda \in \sigma(\mathbf{N})$. ■

Lemma 1.8. Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$ je symetrická matice. Potom pro ni platí $\sigma(\mathbf{B}) \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Vlastní čísla symetrického operátoru jsou reálná (zdůvodnění lze nalézt v [3]). ■

Lemma 1.9. Necht \mathbf{A} je matice definovaná v (1.9). Potom $\sigma(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$.

Důkaz. Necht \mathbf{D} je diagonální matice typu $(n \times n)$ tvaru

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

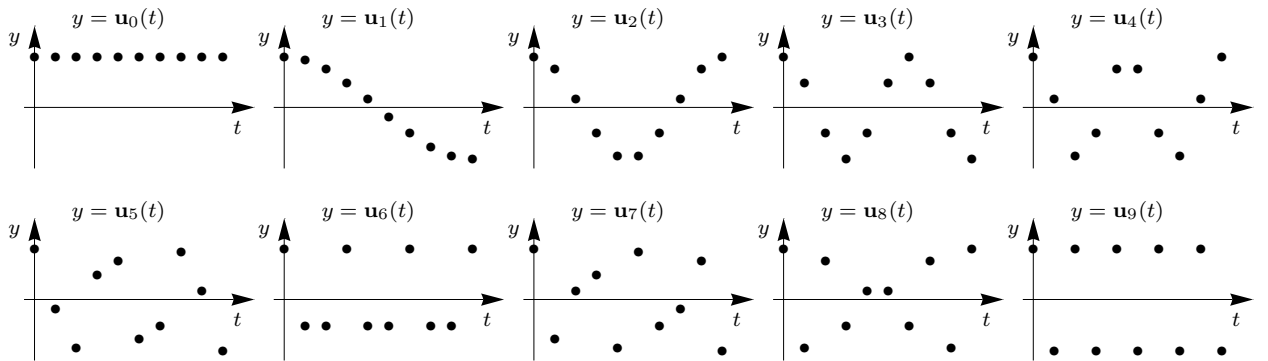
Matice \mathbf{D} je regulární. Označíme-li $\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D}$, pak má \mathbf{B} tvar

$$\mathbf{B} = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \sqrt{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \sqrt{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \frac{\sqrt{2}}{2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \frac{\sqrt{2}}{2} & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} & & & \\ -\sqrt{2} & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 & -\sqrt{2} \\ & & & & & -\sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

a tedy \mathbf{B} je symetrická matice. Protože matice \mathbf{A} a \mathbf{B} jsou podobné, plyne z lemmatu 1.7, že mají stejná vlastní čísla. Vlastní čísla reálné symetrické matice jsou podle lemmatu 1.8 reálná. A proto i vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou reálná. ■

Na obrázku 1.5 vidíme vlastní vektory matice \mathbf{A} pro $n = 10$. Jejich tvar popisuje věta 1.10.



Obrázek 1.5: Vlastní vektory matice \mathbf{A} pro $n = 10$.

Věta 1.10. *Nechť \mathbf{A} je matice definovaná v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou jednoduchá, platí pro ně*

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{n-1} = 4$$

a mají tvar

$$\lambda_k = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n-1)}, \quad \mathbf{u}_k(t) = \cos \frac{k\pi t}{n-1}, \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad t \in \mathbb{T},$$

kde \mathbf{u}_k je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_k .

Důkaz. Z lemmatu 1.9 plyne, že vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou reálná. Úloha nalezení vlastních čísel matice \mathbf{A} je tedy ekvivalentní úloze nalezení takových $\lambda \in \mathbb{R}$, pro které má diferenční úloha

$$\begin{cases} \Delta \nabla \mathbf{u}(t) + \lambda \mathbf{u}(t) = 0, & t \in \mathbb{T}, \\ \mathbf{u}(-1) - \mathbf{u}(1) = 0, \quad \mathbf{u}(n) - \mathbf{u}(n-2) = 0, \end{cases} \quad (1.10)$$

netriviální řešení, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Protože diferenční rovnici v (1.10) můžeme zapsat jako

$$\mathbf{u}(t+1) + \mathbf{u}(t)(\lambda - 2) + \mathbf{u}(t-1) = 0,$$

má odpovídající charakteristická rovnice tvar

$$m^2 + (\lambda - 2)m + 1 = 0.$$

Její kořeny mají tvar

$$m_{1,2} = \frac{(2 - \lambda) + \left(\sqrt{(\lambda - 2)^2 - 4} \right)_{\mathbb{C}}}{2}. \quad (1.11)$$

Z tvaru charakteristické rovnice je zřejmé $m_{1,2} \neq 0$. Další postup rozdělíme na tři případy a to podle znaménka diskriminantu charakteristické rovnice, tj. na $|\lambda - 2| = 2$, $|\lambda - 2| > 2$ a $|\lambda - 2| < 2$.

1. Je-li $|\lambda - 2| = 2$, existuje pouze jeden kořen charakteristické rovnice, který označíme m . Potom má obecné řešení diferenciální rovnice v (1.10) tvar

$$\mathbf{u}(t) = C_1 m^t + C_2 t m^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Z okrajových podmínek v (1.10) dostaneme

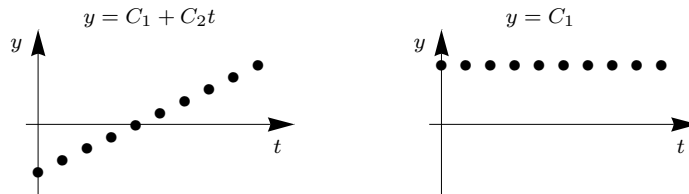
$$\begin{aligned} C_1 m^{-1} - C_2 m^{-1} &= C_1 m + C_2 m, \\ C_1 m^n + C_2 n m^n &= C_1 m^{n-2} + C_2 (n-2) m^{n-2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Protože uvažujeme $|\lambda - 2| = 2$ a $\lambda \in \mathbb{R}$, dostaneme pouze $\lambda \in \{0, 4\}$.

Nejdříve uvažujme $\lambda = 0$, tj. $m = 1$. Potom má obecné řešení diferenciální rovnice v (1.10) tvar

$$\mathbf{u}(t) = C_1 + C_2 t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Pokud by platilo $C_2 \neq 0$, tj. případ jako na obrázku 1.6 vlevo, potom by nemohly být splněny Neumannovy okrajové podmínky v (1.10). Je tedy $C_2 = 0$ a tím dostaneme řešení ve tvaru $\mathbf{u}(t) = C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$, které vidíme na obrázku 1.6 vpravo. Číslo $\lambda = 0$ je proto vlastním číslem matice \mathbf{A} a jemu odpovídající vlastní vektor má tvar $\mathbf{u}(t) = 1$ (vektorově: $\mathbf{u} = [1, \dots, 1]^T$).



Obrázek 1.6: Obecné řešení rovnice (1.10) pro $m = 1$.

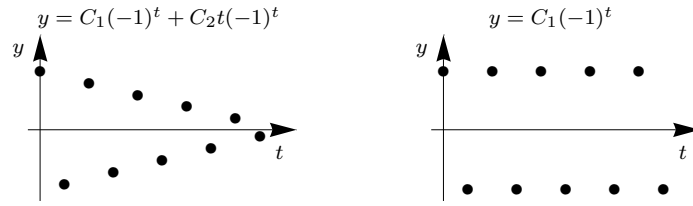
Uvažujme $\lambda = 4$, neboli $m = -1$. Pak má obecné řešení diferenciální rovnice v (1.10) tvar

$$\mathbf{u}(t) = C_1 (-1)^t + C_2 t (-1)^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Opět, pokud by platilo $C_2 \neq 0$, tj. případ jako na obrázku 1.7 vlevo, potom by nemohly být splněny Neumannovy okrajové podmínky v (1.10), neboť mají tvar

$$\begin{aligned} C_1 (-1)^{-1} - C_2 (-1)^{-1} &= -C_1 - C_2, \\ C_1 (-1)^n + C_2 n (-1)^n &= C_1 (-1)^{n-2} + C_2 (n-2) (-1)^{n-2}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Zvolíme-li $C_2 = 0$, pak je druhá rovnice v (1.13) splněna pro libovolné $C_1 \in \mathbb{R}$. Tak dostaneme řešení ve tvaru $\mathbf{u}(t) = C_1 (-1)^t$, $C_1 \in \mathbb{R}$, které vidíme na obrázku 1.7 vpravo. Číslo $\lambda = 4$ je proto vlastním číslem matice \mathbf{A} a jemu odpovídající vlastní vektor má tvar $\mathbf{u}(t) = (-1)^t$.

Obrázek 1.7: Obecné řešení rovnice (1.10) pro $m = -1$.

2. Je-li $|\lambda - 2| > 2$, obecné řešení diferenční rovnice v (1.10) má tvar

$$\mathbf{u}(t) = C_1 m_1^t + C_2 m_2^t, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Kořeny charakteristické rovnice vypočtené v (1.11) mají pro $|\lambda - 2| > 2$ tvar

$$m_{1,2} = \frac{(2 - \lambda) \pm \sqrt{(\lambda - 2)^2 - 4}}{2} \quad (1.14)$$

a tedy $m_{1,2} \in \mathbb{R}$ (protože $\lambda \in \mathbb{R}$).

Z okrajových podmínek v (1.13) dostaneme

$$\begin{aligned} C_1(m_1)^{-1} + C_2(m_2)^{-1} &= C_1 m_1 + C_2 m_2, \\ C_1(m_1)^n + C_2(m_2)^n &= C_1(m_1)^{n-2} + C_2(m_2)^{n-2}. \end{aligned}$$

Zjednodušením získáme podmínku existence netriviálního řešení ve tvaru

$$m_1^{n-1} - m_2^{n-1} = 0. \quad (1.15)$$

Uvažujeme $m_{1,2} \neq 0$, $m_{1,2} \in \mathbb{R}$ a tedy jediná reálná $m_{1,2}$ splňující (1.15) jsou $m_1 = m_2$ nebo $m_1 = -m_2$ (pouze pro n liché), $m_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Z (1.14) plyne, že ani jeden z těchto případů nenastane, neboť uvažujeme $|\lambda - 2| > 2$. Proto pro $|\lambda - 2| > 2$ neexistuje žádné λ , pro které by existovalo netriviální řešení úlohy (1.10).

3. Zabýváme se případem $|\lambda - 2| < 2$. Zaveďme substituci

$$\theta = \arccos \frac{2 - \lambda}{2}, \quad |\lambda - 2| < 2. \quad (1.16)$$

Tím dostaneme $\theta \in (0, \pi)$. Kořeny charakteristické rovnice mají pak tvar

$$\begin{aligned} m_{1,2} &= \frac{(2 - \lambda) + \left(\sqrt{(\lambda - 2)^2 - 4}\right)_{\mathbb{C}}}{2} = \frac{2 \cos \theta + \left(\sqrt{(-2 \cos \theta)^2 - 4}\right)_{\mathbb{C}}}{2} \\ &= \frac{2 \cos \theta + 2 \left(\sqrt{\cos^2 \theta - 1}\right)_{\mathbb{C}}}{2} = \cos \theta \pm i \sin \theta = e^{\pm i \theta}, \end{aligned}$$

a obecné řešení rovnice v (1.10) můžeme zapsat jako

$$\mathbf{u}(t) = C_1 \cos(\theta t) + C_2 \sin(\theta t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Okrajové podmínky v (1.10) mají tvar

$$\begin{aligned} C_1 \cos(-\theta) + C_2 \sin(-\theta) &= C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta, \\ C_1 \cos(n\theta) + C_2 \sin(n\theta) &= C_1 \cos((n-2)\theta) + C_2 \sin((n-2)\theta). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Z první rovnice v (1.17) dostaneme $C_2 \sin \theta = 0$. Proto je $C_2 = 0$, neboť uvažujeme $\theta \in (0, \pi)$. Dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$C_1 \left(\cos(n\theta) - \cos((n-2)\theta) \right) = 0.$$

To je pro $C_1 \neq 0$ splněno, pokud platí

$$\sin \frac{n\theta + (n-2)\theta}{2} \sin \frac{n\theta - (n-2)\theta}{2} = 0$$

neboli

$$\sin(\theta(n-1)) \sin \theta = 0,$$

což je splněno pro $\theta = \frac{k\pi}{n-1}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Protože má platit $\theta \in (0, \pi)$, je $k \in \{1, 2, \dots, n-2\}$.

Vlastní čísla λ_k mají tvar

$$\lambda_k = 2 - 2 \cos \frac{k\pi}{n-1} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n-1)}, \quad k \in \{1, 2, \dots, n-2\}.$$

Příslušné vlastní vektory \mathbf{u}_k mají tvar

$$\mathbf{u}_k(t) = \cos \frac{k\pi t}{n-1}.$$

Násobnost vlastních čísel již plyne z jejich tvaru a z konstrukce, kterou jsme je získali. ■

Pro diferenční operátory můžeme definovat Fučíkovo spektrum analogicky jako pro diferenciální operátory. Díky tomu, že diferenční operátory (je-li definiční obor operátoru množinou konečné dimenze) jsou reprezentovány maticí, definujeme Fučíkovo spektrum pro matici.

Definice 1.11. Necht' $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Fučíkovo spektrum matice \mathbf{B} má tvar

$$\Sigma(\mathbf{B}) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{B}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- \text{ má netriviální řešení}\}.$$

□

V článku [8] najdeme bližší informace, jak Fučíkovo spektrum pro matice získat. Na obrázku 1.8 vidíme Fučíkovo spektrum pro matici \mathbf{A} rozměru $n = 6$ a pro matici \mathbf{A} rozměru $n = 10$.

1.2 Pareto spektrum a polární Pareto spektrum

V této části definujeme pojmy Pareto spektrum matice a polární Pareto spektrum matice.

Necht' $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_{n-1}]^T$. Potom nerovností

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

budeme rozumět n nerovností

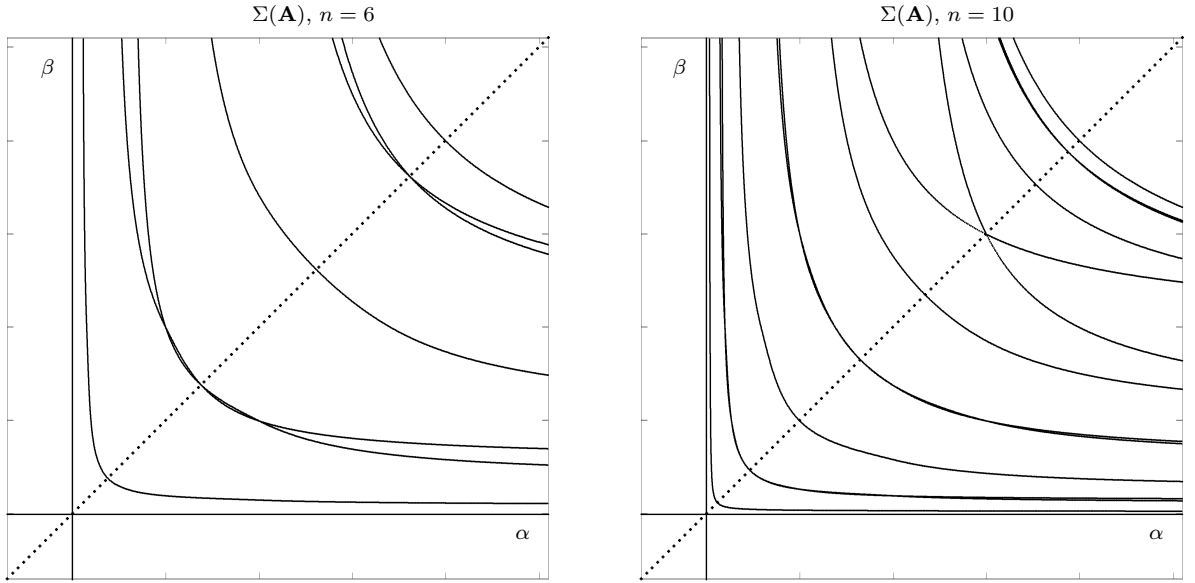
$$x_0 \geq 0, \dots, x_{n-1} \geq 0.$$

Analogicky (po složkách) chápeme i nerovnosti $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$, $\mathbf{x} < \mathbf{0}$. Skalárním součinem dvou prvků $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ budeme rozumět

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{v}.$$

Normou vektoru $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{n-1}]^T$, budeme rozumět eukleidovskou normu vektoru

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$


 Obrázek 1.8: Fučíkovo spektrum matice \mathbf{A} pro $n = 6$ (vlevo) a $n = 10$ (vpravo).

Definice 1.12 ([15]). Reálné číslo λ se nazývá *Pareto vlastním číslem* matice $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \rangle = 0. \quad (1.18)$$

V takovém případě se \mathbf{x} nazývá *Pareto vlastním vektorem* matice \mathbf{B} (příslušný k Pareto vlastnímu číslu λ). Množina všech Pareto vlastních čísel matice \mathbf{B} se nazývá *Pareto spektrum* matice \mathbf{B} a značí se $\sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B})$. \square

U matice nás nebude zajímat pouze její Pareto spektrum, ale i její tzv. *polární Pareto spektrum*, které definujeme následovně.

Definice 1.13. Reálné číslo λ se nazývá *polárním Pareto vlastním číslem* matice $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$, pokud existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ splňující

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \rangle = 0. \quad (1.19)$$

V takovém případě se \mathbf{x} nazývá *polárním Pareto vlastním vektorem* matice \mathbf{B} (příslušný k polárnímu Pareto vlastnímu číslu λ). Množina všech polárních Pareto vlastních čísel matice \mathbf{B} se nazývá *polární Pareto spektrum* matice \mathbf{B} a značí se $\sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{B})$. \square

Rozdíl v definici Pareto vlastních čísel a polárních Pareto vlastních čísel je v druhé nerovnosti v (1.18) a (1.19). Vzájemný vztah mezi Pareto vlastními čísly a polárními Pareto vlastními čísly dává následující lemma 1.14.

Lemma 1.14. *Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Potom*

$$\lambda \in \sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{B}) \iff -\lambda \in \sigma_{\text{pareto}}(-\mathbf{B}).$$

Důkaz. Nechť $\lambda \in \sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{B})$. Pak platí (1.19), tj.

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \leq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \rangle = 0.$$

Nerovnost $\mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \leq \mathbf{0}$ je ekvivalentní s nerovností $(-\mathbf{B})\mathbf{x} - (-\lambda)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. A rovnost $\langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \rangle = 0$ je ekvivalentní s rovností $\langle \mathbf{x}, (-\mathbf{B})\mathbf{x} - (-\lambda)\mathbf{x} \rangle = 0$. To ale znamená, že (1.19) je ekvivalentní s

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad (-\mathbf{B})\mathbf{x} - (-\lambda)\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \langle \mathbf{x}, \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \rangle = 0,$$

a proto $-\lambda \in \sigma_{\text{pareto}}(-\mathbf{B})$. ■

Pro matici $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$ máme odhad na počet δ_n Pareto vlastních čísel ve tvaru

$$1 \leq \delta_n \leq n2^{n-1} - (n-1).$$

Důkaz tohoto tvrzení můžeme najít v [13].

Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Označme její prvky b_{ij} , $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Nechť I je neprázdná podmnožina indexové množiny $N = \{0, \dots, n-1\}$. Hlavním minorem \mathbf{B}^I matice \mathbf{B} budeme rozumět čtvercovou matici získanou vyškrtnutím i -tého řádku a i -tého sloupce, pokud $i \notin I$. Symbolem $|I|$ značíme mohutnost množiny I . Dále definujeme $\text{Int}(\mathbb{R}_+^n) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} > \mathbf{0}\}$. Následující věta 1.15 říká, že pokud je číslo λ Pareto vlastním číslem, potom je vlastním číslem nějakého hlavního minoru. Ale opačná implikace neplatí.

Věta 1.15 ([15]). *Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Potom λ je Pareto vlastním číslem matice \mathbf{B} právě tehdy, když existuje neprázdná indexová množina $I \subset N$ a vektor $\eta \in \mathbb{R}^{|I|}$ tak, že*

$$\mathbf{B}^I \eta = \lambda \eta, \quad \eta \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^{|I|}), \quad \sum_{j \in I} b_{ij} \eta_j \geq 0 \quad \forall i \in N \setminus I. \quad (1.20)$$

Potom vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, který je definován po složkách jako

$$x_i = \begin{cases} \eta_i & \text{pro } i \in I, \\ 0 & \text{pro } i \in N \setminus I, \end{cases}$$

je Pareto vlastním vektorem příslušným Pareto vlastnímu číslu λ .

Poznámka 1.16. Pro polární Pareto vlastní čísla má věta 1.15 stejné znění, jen se změnila podmínka v (1.20) na

$$\sum_{j \in I} b_{ij} \eta_j \leq 0 \quad \forall i \in N \setminus I. \quad \square$$

Příklad 1.17. Na tomto příkladu ilustrujeme, že Pareto spektrum matice a polární Pareto spektrum matice může být odlišné, a že matice a její transpozice nemusí mít stejné Pareto spektrum. Nechť

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Označme její prvky b_{ij} , $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$.

1. Nejdříve zvolme $I = \{0, 1\}$. Tím dostaneme $\lambda \in \sigma(\mathbf{B}) = \{-2, 1\}$.

(a) Pro $\lambda = -2$ je příslušný vlastní vektor $\mathbf{u} = [1, 1]^T > \mathbf{0}$ a tedy $-2 \in \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B})$, $-2 \in \sigma_{\text{pareto}}^\circ(\mathbf{B})$.

(b) Pro $\lambda = 1$ je příslušný vlastní vektor $\mathbf{u} = [4, 1]^T > \mathbf{0}$ a tedy $1 \in \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B})$, $1 \in \sigma_{\text{pareto}}^\circ(\mathbf{B})$.

2. Zvolíme-li $I = \{0\}$, pak je $I \setminus N = \{1\}$ a hlavní minor matice bude pouze číslo 2, které je tedy současně vlastním číslem $\lambda = 2$ hlavního minoru. K němu příslušný vlastní vektor má tvar $u_0 = C$, $C > 0$ a tím je splněna podmínka $u_0 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+)$. Dále platí

$$\sum_{j \in I} b_{ij} \mathbf{u}_j = b_{10} u_0 = 1C > 0$$

a tedy $2 \in \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B})$, ale $2 \notin \sigma_{\text{pareto}}^\circ(\mathbf{B})$.

3. Zvolíme-li $I = \{1\}$, pak je $I \setminus N = \{0\}$ a hlavní minor matice bude pouze číslo -3 , které je tedy současně vlastním číslem $\lambda = -3$ hlavního minoru. K němu příslušný vlastní vektor má tvar $u_1 = C$, $C > 0$ a tím je splněna podmínka $u_1 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+)$. Dále platí

$$\sum_{j \in I} b_{ij} \mathbf{u}_j = b_{01} u_1 = -4C < 0$$

a tedy podmínka $\sum_{j \in I} b_{ij} \mathbf{u}_j \geq 0 \forall i \in N \setminus I$ není nikdy splněna a proto $-3 \notin \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B})$, ale $-3 \in \sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{B})$

Vyšetřeme Pareto spektrum matice \mathbf{B}^T , tj. matice

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

1. Nejdříve zvolme $I = \{0, 1\}$. Tím dostaneme $\lambda \in \sigma(\mathbf{B}^T) = \{2, -1\}$.
 - (a) Pro $\lambda = 2$ je příslušný vlastní vektor $\mathbf{u} = [-1, 4]^T$ a tedy $2 \notin \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}^T)$.
 - (b) Pro $\lambda = -1$ je příslušný vlastní vektor $\mathbf{u} = [-1, 1]^T$ a tedy $-1 \notin \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}^T)$.
2. Zvolíme-li $I = \{0\}$, pak je $I \setminus N = \{1\}$ a hlavní minor matice bude pouze číslo 2, které je tedy současně vlastním číslem $\lambda = 2$ hlavního minoru. K němu příslušný vlastní vektor má tvar $u_0 = C$, $C > 0$ a tím je splněna podmínka $u_0 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+)$. Dále platí

$$\sum_{j \in I} b_{ji} \mathbf{u}_j = b_{01}^T u_0 = -4C < 0$$

a tedy $2 \notin \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}^T)$.

3. Zvolíme-li $I = \{1\}$, pak je $I \setminus N = \{0\}$ a hlavní minor matice bude pouze číslo -3 , které je tedy současně vlastním číslem $\lambda = -3$ hlavního minoru. K němu příslušný vlastní vektor má tvar $u_1 = C$, $C > 0$ a tím je splněna podmínka $u_1 \in \text{Int}(\mathbb{R}_+)$. Dále platí

$$\sum_{j \in I} b_{ji} \mathbf{u}_j = b_{10} u_1 = 1C > 0$$

a tedy $-3 \notin \sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}^T)$.

Celkem dostaneme $\sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}) = \{-2, 1, 2\}$, $\sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{B}) = \{-3, -2, 1\}$, $\sigma_{\text{pareto}}(\mathbf{B}^T) = \{-3\}$. □

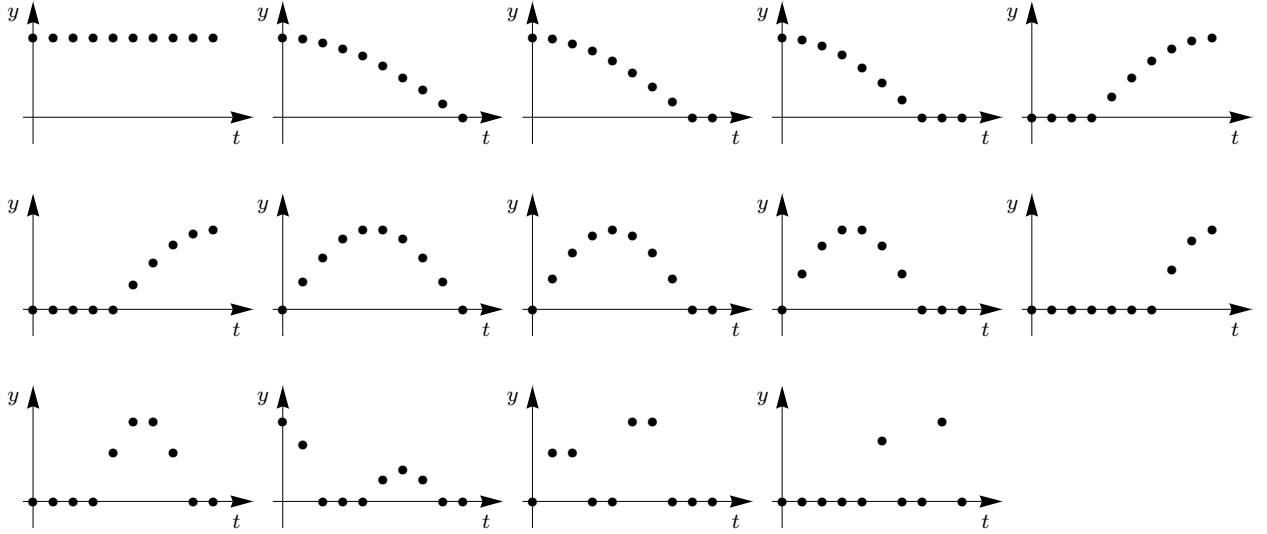
Počet podmnožin neprázdné množiny I je $2^n - 1$. Pro každou tuto množinu I získáme matici typu $|I| \times |I|$, pro kterou řešíme problém vlastních čísel. Pro každé vlastní číslo musíme ověřit, zda splňuje podmínku v (1.20). Z této konstrukce je zřejmé, že algoritmus hledající všechna Pareto vlastní čísla matice využívající větu 1.15, má exponenciální složitost.

Pro výpočet Pareto vlastních čísel a Pareto vlastních vektorů můžeme použít také semi-hladkou Newtonovu metodu (anglicky: semi-smooth Newton method), podrobnosti najdeme v [1]. Výhodou tohoto algoritmu je, že je pro nalezení několika Pareto vlastních čísel velmi rychlý, ale nevýhodou je to, že nemusí najít všechna Pareto vlastní čísla. A protože nevíme, kolik Pareto vlastních čísel pro obecnou matici existuje, nemusíme tímto algoritmem získat celé Pareto spektrum. Na obrázku 1.9 jsou polární Pareto vlastní vektory matice \mathbf{A} nalezené semi-hladkou Newtonovou metodou.

Dále se budeme zabývat konkrétním tvarem Pareto vlastních čísel a polárních Pareto vlastních čísel matice \mathbf{A} , která je definována v (1.9).

Věta 1.18. Číslo $\lambda_0 = 0$ je Pareto vlastním číslem a polárním Pareto vlastním číslem matice \mathbf{A} . Příslušný Pareto vlastní vektor a polární Pareto vlastní vektor má tvar $\mathbf{u}_0 = [1, \dots, 1]^T$.

Důkaz. Je-li $\lambda_0 = 0$, $\mathbf{u}_0 = [1, \dots, 1]^T$, jsou zřejmě podmínky v (1.18) i v (1.19) splněny, neboť $\mathbf{u}_0 \geq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{u}_0 = [0, \dots, 0]^T = \mathbf{0}$, $\langle \mathbf{u}_0, \mathbf{A}\mathbf{u}_0 \rangle = 0$. ■



Obrázek 1.9: Polární Pareto vlastní vektory matice \mathbf{A} nalezené semi-hladkou Newtonovou metodou pro $n = 10$.

Zavedme dvě číselné množiny S_n, L_n jako

$$\begin{aligned} S_n &= \{i : i = 2k, k \in \mathbb{N}, i \leq 2(n-1)\}, \\ L_n &= \{i : i = 2k+1, k \in \mathbb{N}, i \leq n-1\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Je-li například $n = 10$, potom mají množiny S_n, L_n tvar

$$S_{10} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}, \quad L_{10} = \{3, 5, 7, 9\}.$$

Na obrázku 1.10 vidíme polární Pareto vlastní vektory matice \mathbf{A} pro $n = 10$ (seřazeny podle velikosti příslušného polárního Pareto vlastního čísla), jejichž tvar dává následující věta 1.19.

Věta 1.19. *Nechť \mathbf{A} je matice definovaná v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom*

$$\lambda_p = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{p}, \quad p \in S_n \cup L_n,$$

jsou polární Pareto vlastní čísla matice \mathbf{A} . Odpovídající polární Pareto vlastní vektor pro $p \in S_n$ má tvar

$$\mathbf{u}_p(t) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{p}\pi t\right) & \text{pro } t \in \{0, \dots, \frac{p}{2}\}, \\ 0 & \text{pro } t \in \{\frac{p}{2} + 1, \dots, n-1\}, \end{cases}$$

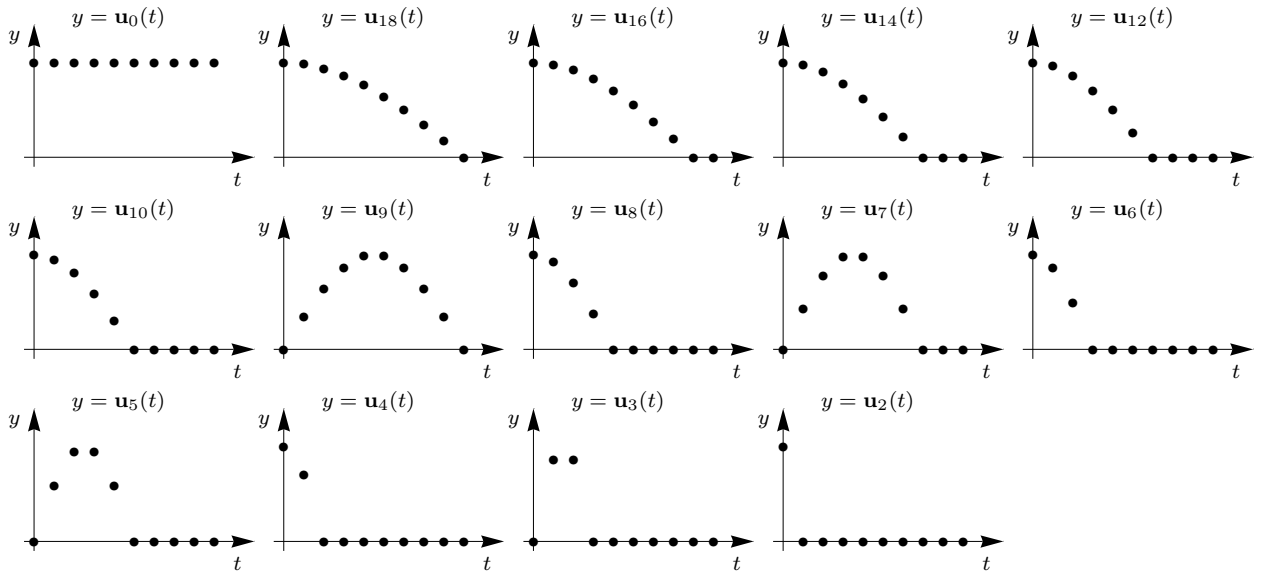
a pro $p \in L_n$ má tvar

$$\mathbf{u}_p(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{p}\pi t\right) & \text{pro } t \in \{0, \dots, p\}, \\ 0 & \text{pro } t \in \{p+1, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Důkaz. Připomeňme tvar matice \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Důkaz rozdělíme na dvě části (podle volby p). V každé části ukážeme, že pro takovou volbu jsou podmínky v (1.19) splněny.


 Obrázek 1.10: Polární Pareto vlastní vektory matice \mathbf{A} pro $n = 10$.

1. Uvažujme $p \in S_n$. Vektor $\mathbf{u}_p(t)$ zapíšeme jako

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{p} \cdot 0\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{p} \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi}{p} \left(\frac{p}{2} - 1\right)\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{p} \frac{p}{2}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Protože pro $i \in \{0, \dots, \frac{p}{2}\}$ platí $\cos\left(\frac{\pi}{p}i\right) \geq 0$, je podmínka $\mathbf{u}_p \geq \mathbf{0}$ splněna. Dále je

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}0\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{p}1\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p}2\right) \\ \vdots \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}(i-1)\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{p}i\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p}(i+1)\right) \\ \vdots \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-2\right)\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-1\right)\right) - \cos\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}\right)\right) \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-1\right)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Využitím součtového vzorce

$$\cos\left(\frac{\pi}{p}(i-1)\right) + \cos\left(\frac{\pi}{p}(i+1)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\cos\left(\frac{\pi}{p}i\right),$$

dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-1\right)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0},$$

protože $-\sin\frac{\pi}{p} \geq 0$ pro $p \in S$. Dále platí $\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p \rangle = 0$, neboť jediná nenulová složka vektoru $\mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p$ je na pozici $\frac{p}{2}$ a na této pozici je vektor \mathbf{u}_p nulový.

2. Pro $p \in L_n$ důkaz provedeme zcela analogicky. Vektor $\mathbf{u}_p(t)$ zapíšeme jako

$$\mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} \sin\left(\frac{\pi}{p} \cdot 0\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{p} \cdot 1\right) \\ \vdots \\ \sin\left(\frac{\pi}{p}(p-1)\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{p}p\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \geq \mathbf{0}.$$

Dále je

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} -2\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}0\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{p}1\right) - \sin\left(\frac{\pi}{p}2\right) \\ \vdots \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}(i-1)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{p}i\right) - \sin\left(\frac{\pi}{p}(i+1)\right) \\ \vdots \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-2\right)\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}-1\right)\right) - \sin\left(\frac{\pi}{p}\left(\frac{p}{2}\right)\right) \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}(p-1)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Využitím

$$\sin\left(\frac{\pi}{p}(i-1)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{p}(i+1)\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{p}\right)\sin\left(\frac{\pi}{p}i\right),$$

dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p = \begin{bmatrix} -2\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}(p-1)\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0}.$$

Dále platí $\langle \mathbf{u}_p, \mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p \rangle = 0$, neboť jediné dvě nenulové složky vektoru $\mathbf{A}\mathbf{u}_p - \lambda_p \mathbf{u}_p$ jsou na pozicích 0 a p a na těchto pozicích je vektor \mathbf{u}_p nulový. ■

Důsledek 1.20. *Nechť \mathbf{A} je matice definovaná v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Dolní odhad počtu polárních Pareto vlastních čísel matice \mathbf{A} je*

$$n + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1.$$

Důkaz. Dolní odhad počtu polárních Pareto vlastních dostaneme z počtu prvků v množinách S_n, L_n a z toho, že $0 \in \sigma_{\text{pareto}}^{\circ}(\mathbf{A})$, což plyne z věty 1.18. ■

V této části vysvětlíme některé další vlastnosti polárních Pareto vlastních vektorů matice \mathbf{A} . Zavedme následující značení. Nechť

$$\mathbf{u}_p(t) = [u_p(0), \dots, u_p(n-1)]^T$$

je polární Pareto vlastní vektor příslušný polárnímu Pareto vlastnímu číslu λ_p , který má tvar ve smyslu věty 1.19 nebo věty 1.18. Interval $\langle 0, n-1 \rangle$ je rozdělen na $(n-1)$ ekvidistantních podintervalů délky jedna

$$d_i = \langle i, i+1 \rangle, \quad i \in \{0, \dots, n-2\},$$

tj. $d_0 = \langle 0, 1 \rangle$, $d_1 = \langle 1, 2 \rangle$, \dots , $d_{n-2} = \langle n-2, n-1 \rangle$.

Nejdříve uvažujme polární Pareto vlastní číslo $\lambda_0 = 0$ a k němu příslušný polární Pareto vlastní vektor $\mathbf{u}_0 = [1, \dots, 1]^T$. Potom je zřejmé (z konstrukce důkazu věty 1.18), že libovolný kladný násobek vektoru \mathbf{u}_0 , tj.

$$\mathbf{u} = C\mathbf{u}_0, \quad C > 0,$$

je také polárním Pareto vlastním vektorem příslušným $\lambda_0 = 0$.

Pro vektor $\mathbf{u}(t)$ definujme množinu J jako

$$J = \{i \in \{0, \dots, n-2\} : \mathbf{u}(i) \neq 0 \vee \mathbf{u}(i+1) \neq 0\}. \quad (1.22)$$

Množina J obsahuje indexy i intervalů d_i , pro které je alespoň jedna hodnota \mathbf{u} v krajním bodu intervalu d_i nenulová.

Nechť $p \in S_n$, kde S_n je množina definovaná v (1.21). Označme polární Pareto vlastní vektor, který jsme získali z věty 1.19, jako \mathbf{u}_p . Potom číslo $\frac{p}{2}$ udává počet prvků v množině J .

Podobně jako pro případ $\lambda_0 = 0$, ani pro $p \in S_n$ není vektor \mathbf{u}_p jediným polárním Pareto vlastním vektorem. Opět je polárním Pareto vlastním vektorem libovolný kladný násobek polárního Pareto vlastního vektoru, ale to není vše a struktura je pro některá nastavení p a n mnohem bohatší.

Uveďme, jak získat další polární Pareto vlastní vektory příslušející témuž polárnímu Pareto vlastnímu číslu. Důvod, proč je ve větě 1.19 uveden vektor v takovém tvaru je ten, že pomocí něj můžeme vygenerovat další polární Pareto vlastní vektory. Vektor \mathbf{u}_p je tedy jakýmsi reprezentantem množiny polárních Pareto vlastních vektorů příslušejících jednomu polárnímu Pareto vlastnímu číslu λ_p .

Důkaz, že další vygenerované vektory jsou polárními Pareto vlastními vektory, je zcela analogický důkazu věty 1.19. Dále vždy uvedeme způsob, kterým lze získat daný vektor a potom ukážeme konkrétní případ pro $n = 10$.

Lemma 1.21. *Nechť $p \in S_n$. Vektor $\mathbf{u}_q(t) = \mathbf{u}_p(t - n + 1)$ je polárním Pareto vlastním vektorem.*

Důkaz. Vektor \mathbf{u}_q má tvar

$$\mathbf{u}_q(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \in \{0, \dots, n-2 - \frac{p}{2}\}, \\ \cos\left(\frac{1}{p}\pi(t - n + 1)\right) & \text{pro } t \in \{n-1 - \frac{p}{2}, \dots, n-1\}. \end{cases}$$

Důkaz, že \mathbf{u}_q je polární Pareto vlastní vektor, je zcela analogický důkazu věty 1.19. Jediná nenulová složka vektoru $\mathbf{A}\mathbf{u}_q - \lambda_p \mathbf{u}_q$ je na pozici $n-1 - \frac{p}{2}$ a je rovna $-\sin \frac{\pi}{p} < 0$. ■

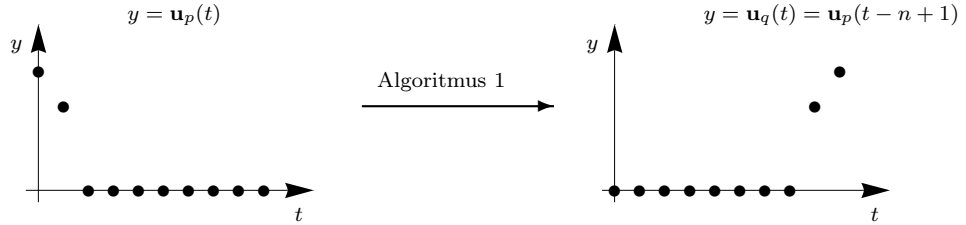
```

Data:  $n, \mathbf{u}_p$ 
Result:  $\mathbf{u}_q$ 
 $\mathbf{u}_q := NULL;$ 
 $i := 0;$ 
while  $i \leq n - 1$  do
    if  $\mathbf{u}_p(i) \neq 0$  then
         $\mathbf{u}_q(n - 1 - i) := \mathbf{u}_p(i);$ 
    else
         $\mathbf{u}_q(n - 1 - i) := 0;$ 
    end
     $i := i + 1;$ 
end
    
```

Algoritmus 1: Generování vektoru \mathbf{u}_q .

Poznámka 1.22. Vektor $\mathbf{u}_q(t) = \mathbf{u}_p(t - n + 1)$ můžeme snadno získat algoritmem 1. □

Příklad vektoru \mathbf{u}_q je na obrázku 1.11 pro $n = 10$ a $p = 4$.



Obrázek 1.11: Vektor \mathbf{u}_p a vektor \mathbf{u}_q vzniklý algoritmem 1 pro $n = 10$ a $p = 4$.

Lemma 1.23. *Nechť $p \in S_n$. Je-li $p \leq n - 1$, potom vektor \mathbf{u}_r získaný algoritmem 2, je polárním Pareto vlastním vektorem.*

Důkaz. Vektor \mathbf{u}_r , který vznikl pomocí algoritmu 2, má tvar

$$\mathbf{u}_r(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{p}\pi(t)\right) & \text{pro } t \in \{0, \dots, p\}, \\ 0 & \text{pro } t \in \{p + 1, \dots, n - 1\}. \end{cases}$$

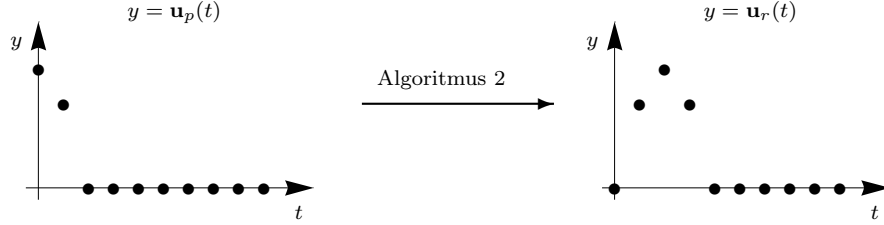
To je ovšem polární Pareto vlastní vektor, který jsme uvažovali pro $p \in L_n$. Důkaz je tedy stejný jako důkaz věty 1.19 pro $p \in L_n$. ■

```

Data:  $n, \mathbf{u}_p, p$ 
Result:  $\mathbf{u}_r$ 
 $\mathbf{u}_r := NULL;$ 
 $\mathbf{u}_r(0) := 0;$ 
 $i := 1;$ 
while  $i \leq n - 1$  do
    if  $i \leq \frac{p}{2}$  then
         $\mathbf{u}_r(i) := \mathbf{u}_p\left(\frac{p}{2} - i\right);$ 
         $\mathbf{u}_r(p - i) := \mathbf{u}_p\left(\frac{p}{2} - i\right);$ 
    end
    if  $i \geq p$  then
         $\mathbf{u}_r(i) := 0;$ 
    end
     $i := i + 1;$ 
end
    
```

Algoritmus 2: Generování vektoru \mathbf{u}_r .

Co dělá algoritmus 2 je zřejmé z obrázku 1.12. Podmínka $p \leq n - 1$ v lemmatu 1.23 zaručuje splnění Neumannovy okrajové podmínky definované v (1.5).



Obrázek 1.12: Vektor \mathbf{u}_p a vektor \mathbf{u}_r vzniklý algoritmem 2 pro $n = 10$ a $p = 4$.

Data: n, \mathbf{u}_r, a
Result: \mathbf{u}_s
 $\mathbf{u}_s := NULL;$
 $i := 0;$
while $i \leq n - 1$ **do**
 if $i \leq a - 1$ **then**
 $\mathbf{u}_s(i) := 0;$
 else
 $\mathbf{u}_s(i) := \mathbf{u}_r(i - a);$
 end
 $i := i + 1;$
end

Algoritmus 3: Generování vektoru \mathbf{u}_s .

Lemma 1.24. *Nechť $p \in S_n$. Je-li \mathbf{u}_r vektor získaný algoritmem 2, potom pro $a \in \{1, \dots, n - 1 - p\}$ jsou vektory $\mathbf{u}_{s,a}$ vzniklé algoritmem 3 polárními Pareto vlastními vektory.*

Důkaz. Vektor $\mathbf{u}_{s,a}$, který vznikl pomocí algoritmu 3, má tvar

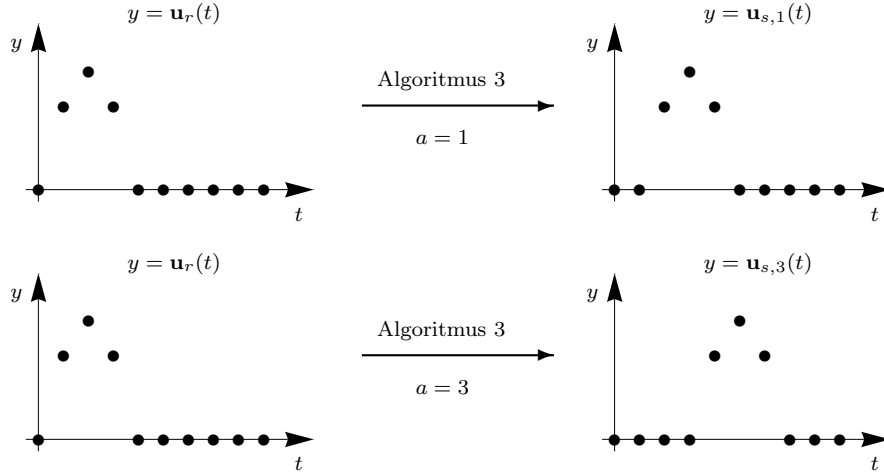
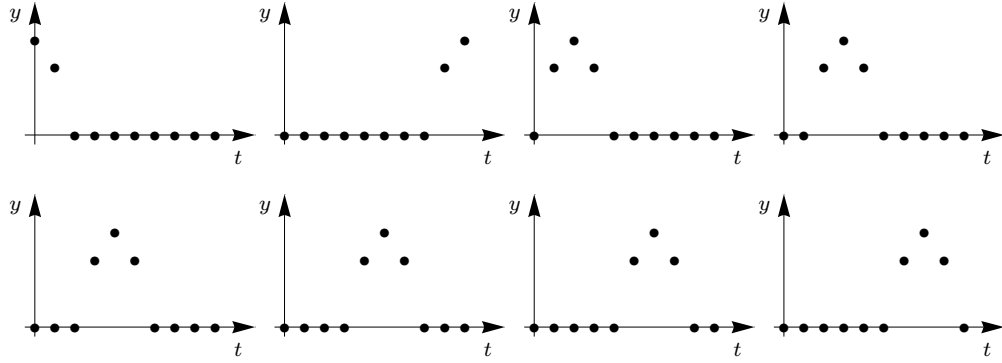
$$\mathbf{u}_{s,a}(t) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{p}\pi(t-a)\right) & \text{pro } t \in \{a, \dots, p+a\}, \\ 0 & \text{pro } t \in (\{0, \dots, n-1\} \setminus \{a, \dots, p+a\}). \end{cases}$$

Důkaz je podobný jako důkaz věty 1.19. Vektor $\mathbf{A}\mathbf{u}_{s,a} - \lambda_p\mathbf{u}_{s,a}$ má tvar

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_{s,a} - \lambda_p\mathbf{u}_{s,a} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ -2\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{p}\right) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \leq \mathbf{0},$$

kde nenulové složky jsou na pozicích $a, p+a$. ■

Algoritmus 3 „posouvá“ nenulové hodnoty vektoru o vzdálenost a . Tato „posunutí“ pro různá a jsou na obrázku 1.13.


 Obrázek 1.13: Vektor \mathbf{u}_r a vektory $\mathbf{u}_{s,1}$, $\mathbf{u}_{s,3}$ vzniklé algoritmem 3 pro $n = 10$ a $p = 4$.

 Obrázek 1.14: Vektory množiny V_S pro $n = 10$.

Definujme množinu V_S (viz obrázek 1.14) obsahující polární Pareto vlastní vektory z věty 1.19 a všechny polární Pareto vlastní vektory (existují-li) získané pomocí lemmat 1.21, 1.23, 1.24, tj. podle zavedeného značení

$$V_S = \{\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_r, \mathbf{u}_{s,1}, \dots, \mathbf{u}_{s,n-1-p}\}.$$

Věta 1.25. *Nechť $p \in S_n$. Nechť $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \in V_S$ a nechť J_k, J_l jsou k nim příslušné množiny definované v (1.22). Pokud platí*

$$J_k \cap J_l = \emptyset,$$

potom

$$\mathbf{u} = C_1 \mathbf{u}_k + C_2 \mathbf{u}_l, \quad C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, C_1 C_2 \neq 0,$$

je polárním Pareto vlastním vektorem příslušným polárnímu Pareto vlastnímu číslu λ_p .

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned} N_k &= \{i \in \{0, \dots, n-1\} : \mathbf{u}_k(i) \neq 0\}, \\ N_l &= \{i \in \{0, \dots, n-1\} : \mathbf{u}_l(i) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Pak z $J_k \cap J_l = \emptyset$ plyne, že

$$N_k \cap N_l = \emptyset$$

a

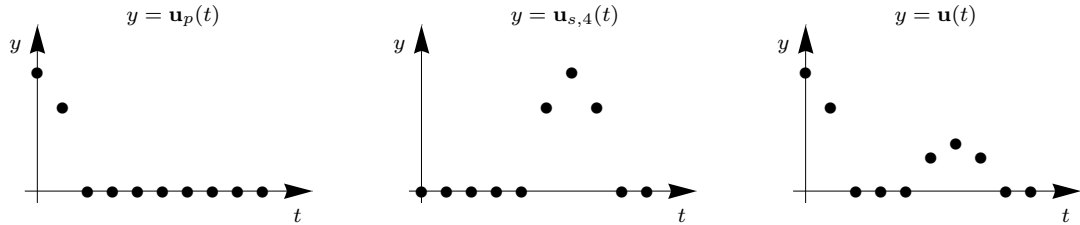
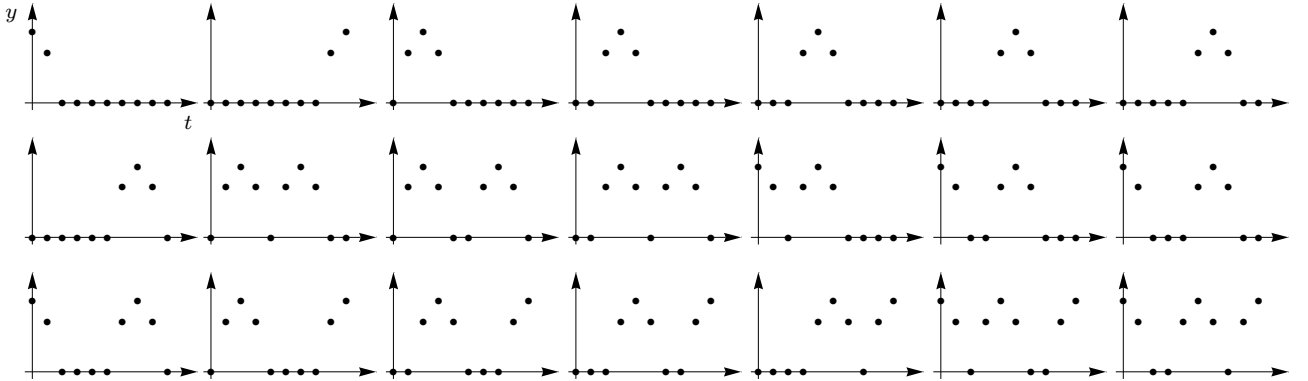
$$\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{u}_k(t) & \text{pokud } t \in N_k, \\ \mathbf{u}_l(t) & \text{pokud } t \in N_l, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Proto je

$$\mathbf{A}\mathbf{u}(t) - \lambda_p \mathbf{u} = \begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{u}_k(t) - \lambda_p \mathbf{u}_k(t) & \text{pokud } t \in N_k, \\ \mathbf{A}\mathbf{u}_l(t) - \lambda_p \mathbf{u}_l(t) & \text{pokud } t \in N_l, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

 tedy $\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda_p \mathbf{u} \leq \mathbf{0}$. ■

Na obrázku 1.15 vidíme, jak může například vypadat vektor \mathbf{u} z lemmatu 1.25, pro konkrétní volbu $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_p$, $\mathbf{u}_l = \mathbf{u}_{s,4}$, $C_1 = 1$ a $C_2 = 0,4$. A na obrázku 1.16 jsou všechny polární Pareto vlastní vektory, které získáme podle věty 1.25 pro volbu $C_1 = C_2 = 1$.


 Obrázek 1.15: Vektory \mathbf{u}_p , $\mathbf{u}_{s,4}$ a vektor $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + 0,4 \mathbf{u}_{s,4}$ pro $n = 10$ a $p = 4$.

 Obrázek 1.16: Některé polární Pareto vlastní vektory pro volbu $n = 10$, $p = 4$, tj. pro $\lambda_p = 2 - 2 \cos \frac{\pi}{4}$.

Pokud je $p \in L_n$, generování polárních Pareto vlastních vektorů je velmi podobné. Necht' \mathbf{u}_p je polární Pareto vlastní vektor ve smyslu lemmatu 1.19. Číslo p udává počet prvků v množině J . Opět je polárním Pareto vlastním vektorem libovolný kladný násobek polárního Pareto vlastního vektoru a platí následující lemma.

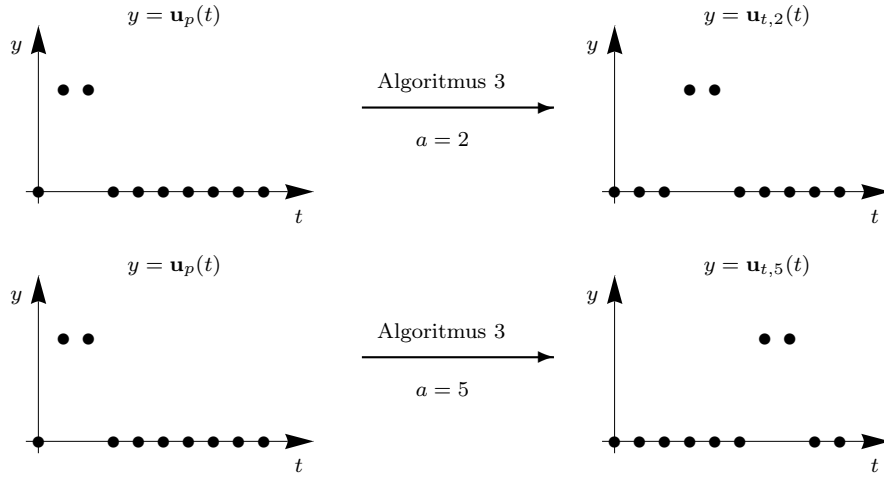
Lemma 1.26. *Necht' $p \in L_n$. Pro $a \in \{1, \dots, n-1-p\}$ je vektor $\mathbf{u}_{t,a}$ získaný algoritmem 3 (vstupním vektorem je \mathbf{u}_p) polárním Pareto vlastním vektorem.*

Důkaz. V důkazu postupujeme stejně jako v důkazu lemmatu 1.24. ■

Na obrázku 1.17 vidíme některé vektory $\mathbf{u}_{t,a}$ z lemmatu 1.26.

Množinu V_L definujeme jako

$$V_L = \{\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{t,1}, \dots, \mathbf{u}_{t,n-p-1}\}.$$


 Obrázek 1.17: Vektor \mathbf{u}_p a vektory $\mathbf{u}_{t,2}$, $\mathbf{u}_{t,5}$ z lemmatu 1.26 pro $n = 10$ a $p = 3$.

Věta 1.27. Necht $p \in L_n$. Necht $\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_l \in V_L$ a necht J_k, J_l jsou k nim příslušné množiny definované v (1.22). Pokud platí

$$J_k \cap J_l = \emptyset,$$

potom

$$\mathbf{u} = C_1 \mathbf{u}_k + C_2 \mathbf{u}_l, \quad C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, C_1 C_2 \neq 0,$$

je polárním Pareto vlastním vektorem příslušným polárnímu Pareto vlastnímu číslu λ_p .

Důkaz. Důkaz je zcela analogický důkazu věty 1.25. ■

1.3 Asymptotické chování větví Fučíkova spektra

V této části uvedeme souvislost mezi Pareto vlastními čísly a Fučíkovým spektrem matice \mathbf{A} . Zdefinujeme následující množiny.

Definice 1.28. Kouli o poloměru $r > 0$ v \mathbb{R}^n rozumíme množinu

$$\mathbf{B}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| < r\}.$$

Sférou o poloměru $r > 0$ v \mathbb{R}^n rozumíme množinu

$$\mathbf{S}_r = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x}\| = r\}.$$

Je-li $r = 1$, nazýváme příslušnou kouli a sféru jednotkovou koulí a jednotkovou sférou. □

Je-li $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$, pak normou matice budeme rozumět *Frobeniovu normu* matice, pro kterou platí (prvky matice \mathbf{B} označíme b_{ij})

$$\|\mathbf{B}\|_F = \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro libovolný vektor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ platí

$$\|\mathbf{B}\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{B}\|_F \|\mathbf{u}\|, \tag{1.23}$$

kde

$$\|\mathbf{u}\| = \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pro dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ budeme kolmost vektorů značit

$$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$$

a budeme tím rozumět

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0.$$

Věta 1.29. *Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Uvažujme posloupnosti $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty}, \{\beta_j\}_{j=1}^{+\infty}$ takové, že*

$$\forall j \in \mathbb{N}: (\alpha_j, \beta_j) \in \Sigma(\mathbf{B}), \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha_j = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \beta_j = -\infty.$$

Potom λ je Pareto vlastním číslem matice \mathbf{B} .

Důkaz. Protože pro libovolné $j \in \mathbb{N}$ je $(\alpha_j, \beta_j) \in \Sigma(\mathbf{B})$, existuje nenulový vektor \mathbf{u}_j , $\|\mathbf{u}_j\| = 1$, který splňuje

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_j = \alpha_j \mathbf{u}_j^+ - \beta_j \mathbf{u}_j^-. \quad (1.24)$$

Pro vektory \mathbf{u}_j^\pm platí

$$|\mathbf{u}_j(t)^\pm| = |\max\{\pm \mathbf{u}_j(t), 0\}| \leq |\mathbf{u}_j(t)|,$$

tj. $\|\mathbf{u}_j^\pm\| \leq \|\mathbf{u}_j\| = 1$. Celkem tedy máme posloupnosti $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty}, \{\mathbf{u}_j^+\}_{j=1}^{+\infty}, \{\mathbf{u}_j^-\}_{j=1}^{+\infty} \subseteq \overline{\mathbf{B}}_1$. Posloupnosti $\{\mathbf{u}_j\}, \{\mathbf{u}_j^+\}, \{\mathbf{u}_j^-\}$ jsou omezené, tedy můžeme z nich vybrat konvergentní podposloupnosti. Pro jednoduchost tyto posloupnosti označme opět $\{\mathbf{u}_j\}, \{\mathbf{u}_j^+\}, \{\mathbf{u}_j^-\}$. Jedná o konvergentní posloupnosti, tedy existují vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ takové, že

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j^+ = \mathbf{x}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j^- = \mathbf{y}.$$

Pro prvky \mathbf{x}, \mathbf{y} platí $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$, protože $\mathbf{u}_j^+ \perp \mathbf{u}_j^-$. Od dostatečně velkého $j \in \mathbb{N}$ je $-\beta_j \mathbf{u}_j^- \geq \mathbf{0}$, neboť $\mathbf{u}_j^- \geq \mathbf{0}$ a $\lim_{j \rightarrow +\infty} (-\beta_j) = +\infty$. Z posloupnosti $\{\mathbf{B}\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty}$ také můžeme vybrat konvergentní podposloupnost, protože $\{\mathbf{B}\mathbf{u}_j\}$ je omezená. Omezenost $\{\mathbf{B}\mathbf{u}_j\}$ plyne z omezenosti $\{\mathbf{u}_j\}$ a z (1.23). Tím dostaneme

$$\begin{aligned} \|\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+\| &\leq \|\mathbf{B}\mathbf{u}_j\| + \|\alpha_j \mathbf{u}_j^+\| \leq \|\mathbf{B}\|_F \|\mathbf{u}_j\| + |\alpha_j| \|\mathbf{u}_j^+\| \leq \|\mathbf{B}\|_F + |\alpha_j| \\ &= M + K < +\infty, \end{aligned} \quad (1.25)$$

kde $M = \|\mathbf{B}\|_F$, $K = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{|\alpha_j|\}$ (posloupnost $\{\alpha_j\}$ je konvergentní a tedy omezená). Pro $\beta_j \neq 0$ můžeme vyjádřit normu vektoru \mathbf{u}_j^- jako

$$\|\mathbf{u}_j^-\| = \left\| \frac{\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+}{-\beta_j} \right\| = \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+\|}{|\beta_j|}. \quad (1.26)$$

Protože čitatel v (1.26) je díky (1.25) omezený a $|\beta_j| \rightarrow +\infty$ dostaneme limitním přechodem v (1.26)

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}_j^-\| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+\|}{|\beta_j|} = 0.$$

Protože

$$\|\mathbf{y}\| = \left\| \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j^- \right\| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|\mathbf{u}_j^-\| = 0,$$

je

$$\mathbf{y} = \mathbf{0}.$$

Tím dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j = \lim_{j \rightarrow +\infty} (\mathbf{u}_j^+ - \mathbf{u}_j^-) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j^+ - \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_j^- = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{0} = \mathbf{x}.$$

Rovnici (1.24) můžeme napsat ve tvaru

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+ = -\beta_j \mathbf{u}_j^-. \quad (1.27)$$

Skalárním vynásobením rovnice (1.27) vektorem \mathbf{x} dostaneme

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+, \mathbf{x} \rangle = \langle -\beta_j \mathbf{u}_j^-, \mathbf{x} \rangle. \quad (1.28)$$

Protože $\mathbf{u}_j \rightarrow \mathbf{x}$, $\alpha_j \rightarrow \lambda$, $\mathbf{u}_j^+ \rightarrow \mathbf{x}$, je

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = C, \quad (1.29)$$

kde $C \in \mathbb{R}$. Díky (1.29) existuje i limita pravé strany rovnosti v (1.28), tj.

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle -\beta_j \mathbf{u}_j^-, \mathbf{x} \rangle = C.$$

Pro dostatečně velké $j \in \mathbb{N}$ platí následující. Uvažujme pevné t . Pokud je $\mathbf{u}_j(t) > 0$, pak platí $\mathbf{u}_j^+(t) > 0$, $\mathbf{x}(t) > 0$, $\mathbf{u}_j^-(t) = 0$, tj. $-\beta_j \mathbf{u}_j^-(t) \mathbf{x}(t) = 0$. Naopak, pokud je $\mathbf{u}_j(t) < 0$, pak platí $\mathbf{u}_j^+(t) = 0$, $\mathbf{x}(t) = 0$, $\mathbf{u}_j^-(t) > 0$, tj. $-\beta_j \mathbf{u}_j^-(t) \mathbf{x}(t) = 0$. Celkem dostaneme, že pro dostatečně velké $j \in \mathbb{N}$ je

$$\langle -\beta_j \mathbf{u}_j^-, \mathbf{x} \rangle = 0,$$

tj. limitně platí

$$C = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle -\beta_j \mathbf{u}_j^-, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Protože $C = 0$, dostaneme z (1.29)

$$\langle \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0. \quad (1.30)$$

Pro dostatečně velké $j \in \mathbb{N}$ je $-\beta_j \mathbf{u}_j^- \geq \mathbf{0}$ a tedy z (1.27) dostaneme

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_j - \alpha_j \mathbf{u}_j^+ \geq \mathbf{0}$$

a z (1.30) plyne, že

$$\mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Pro dostatečně velké $j \in \mathbb{N}$ je $\mathbf{u}_j \geq 0$, tedy

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Tím dostaneme

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda \mathbf{x} \perp \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Tedy λ splňuje definici 1.12 a je Pareto vlastním číslem matice \mathbf{B} . ■

Pro polární Pareto vlastní čísla můžeme zformulovat podobné tvrzení.

Věta 1.30. *Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Uvažujme posloupnosti $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty}$, $\{\beta_j\}_{j=1}^{+\infty}$ takové, že*

$$\forall j \in \mathbb{N}: (\alpha_j, \beta_j) \in \Sigma(\mathbf{B}), \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha_j = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \beta_j = +\infty.$$

Potom λ je polárním Pareto vlastním číslem matice \mathbf{B} .

Důkaz. Pro libovolné $j \in \mathbb{N}$ je $(\alpha_j, \beta_j) \in \Sigma(\mathbf{B})$ a tedy existuje nenulový vektor \mathbf{u}_j , $\|\mathbf{u}_j\| = 1$ splňující

$$\mathbf{B}\mathbf{u}_j = \alpha_j \mathbf{u}_j^+ - \beta_j \mathbf{u}_j^-. \quad (1.31)$$

Rovnice (1.31) je ekvivalentní s rovnicí

$$(-\mathbf{B})\mathbf{u}_j = (-\alpha_j) \mathbf{u}_j^+ - (-\beta_j) \mathbf{u}_j^-. \quad (1.32)$$

Označíme-li

$$\tilde{\alpha}_j = -\alpha_j, \quad \tilde{\beta}_j = -\beta_j,$$

pak z předpokladů

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha_j = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \beta_j = +\infty$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j = -\alpha_j &\rightarrow -\lambda \\ \tilde{\beta}_j = -\beta_j &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Označme $\tilde{\lambda} = -\lambda$. Pak (1.31) můžeme zapsat ve tvaru

$$(-\mathbf{B})\mathbf{u}_j = \tilde{\alpha}_j \mathbf{u}_j^+ - \tilde{\beta}_j \mathbf{u}_j^-$$

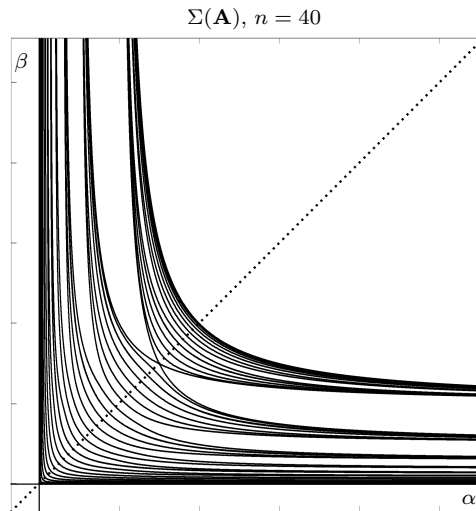
kde $\tilde{\alpha}_j \rightarrow \tilde{\lambda}$, $\tilde{\beta}_j \rightarrow -\infty$. Tím máme splněny předpoklady věty 1.29 a tedy $\tilde{\lambda} = -\lambda$ je Pareto vlastním číslem matice $(-\mathbf{B})$. Z definice 1.12 pro Pareto vlastní číslo $-\lambda$ matice $(-\mathbf{B})$ existuje vektor \mathbf{x} splňující

$$\mathbf{0} \leq -\mathbf{B}\mathbf{x} - (-\lambda)\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \geq \mathbf{0},$$

což můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{0} \geq \mathbf{B}\mathbf{x} - \lambda\mathbf{x} \perp \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

A tedy z definice 1.13 je λ polárním Pareto vlastním číslem matice \mathbf{B} . ■



Obrázek 1.18: Asymptotické chování Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ pro $n = 40$.

Věty 1.29, 1.30 daly spojitost mezi (polárními) Pareto vlastními čísly matice \mathbf{A} a asymptotickým chováním Fučíkových větví matice \mathbf{A} (viz obrázek 1.18). Fučíkovou větví (pro naše účely) nazveme posloupností v lemmatu 1.29 a 1.30, tj. $\{\alpha_j\}_{j=1}^{+\infty}, \{\beta_j\}_{j=1}^{+\infty}$ takové, že

$$\forall j \in \mathbb{N} : (\alpha_j, \beta_j) \in \Sigma(\mathbf{A}), \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \alpha_j = \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \beta_j = \pm\infty.$$

Díky lemmatu 1.4 (symetrie Fučíkova spektra) dostaneme záměnou α_j za β_j opět Fučíkovou větev.

Poznámka 1.31. Svislou polopřímku roviny $\alpha\beta$ s předpisem

$$\alpha = \lambda, \beta \geq 0,$$

budeme nazývat asymptotou Fučíkovy větve ve větě 1.30. Naopak, svislou polopřímku roviny $\alpha\beta$ s předpisem

$$\alpha = \lambda, \beta \leq 0,$$

budeme nazývat asymptotou Fučíkovy větve ve větě 1.29. \square

Máme-li Fučíkovu větev, která má asymptotické chování ve smyslu věty 1.29, potom její asymptotu určuje některé Pareto vlastní číslo. Opačná implikace ovšem neplatí. Tedy, ne každé Pareto vlastní číslo určuje asymptotu nějaké Fučíkovy větve. Zcela analogicky - máme-li Fučíkovu větev, která má asymptotické chování ve smyslu věty 1.30, potom její asymptotu určuje některé polární Pareto vlastní číslo. Opačná implikace ovšem opět neplatí. Tedy, ne každé polární Pareto vlastní číslo určuje asymptotu nějaké Fučíkovy větve.

V této části popíšeme, jak z množiny polárních Pareto vlastních čísel získaných z věty 1.19 vybrat ty, které určují asymptoty nějaké Fučíkovy větve. Tato část ale není dokázaná, proto budeme vše psát ve formě hypotéz.

Nejdříve zformulujeme hypotézu, která je kritériem pro určení, která polární Pareto vlastní čísla určují asymptoty, a následně vysvětlíme, proč je kritérium v takovém tvaru. Připomeňme, že množiny S_n, L_n jsou definované v (1.21).

Hypotéza 1.32. *Nechť \mathbf{A} je definována v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Polární Pareto vlastní číslo $\lambda = 0$ je asymptotou první Fučíkovy větve $\Sigma(\mathbf{A})$. Nechť $p \in S_n$. Pak polární Pareto vlastní číslo λ_p matice \mathbf{A} určuje asymptotu některé Fučíkovy větve $\Sigma(\mathbf{A})$ právě tehdy, když*

$$\exists i \in \{0, 1, 2\} \exists j \in \left\{0, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right\} \text{ ne obě nulová } \exists k \in \{0, \dots, i + j - 1\} \text{ tak, že } n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1.$$

Nechť $p \in L_n$. Pak polární Pareto vlastní číslo λ_p matice \mathbf{A} určuje asymptotu některé Fučíkovy větve $\Sigma(\mathbf{A})$ právě tehdy, když

$$\exists i \in \{0, 1\} \exists j \in \left\{1, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right\} \exists k \in \{0, \dots, j - 1\} \text{ tak, že } n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1.$$

Na obrázku 1.19 jsou zvýrazněny ty polární Pareto vlastní vektory, jejichž odpovídající polární Pareto vlastní číslo určuje podle hypotézy 1.32 asymptotu nějaké Fučíkovy větve $\Sigma(\mathbf{A})$ pro $n = 10$.

Polární Pareto vlastní číslo určuje asymptotu některé Fučíkovy větve, když jeho polární Pareto vlastní vektor splňuje určitá kritéria. Definujme množinu N_o

$$N_o = \{i \in \{1, \dots, n - 2\} : \mathbf{u}(i - 1) = 0 \wedge \mathbf{u}(i) = 0 \wedge \mathbf{u}(i + 1) = 0\} \\ \cup \{i = 0 : \mathbf{u}(i) = 0\} \cup \{i = n - 1 : \mathbf{u}(i) = 0\}.$$

Věta 1.33. *Nechť \mathbf{A} je definována v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud existuje vektor \mathbf{u} ve smyslu věty 1.25 a pokud pro tento vektor platí*

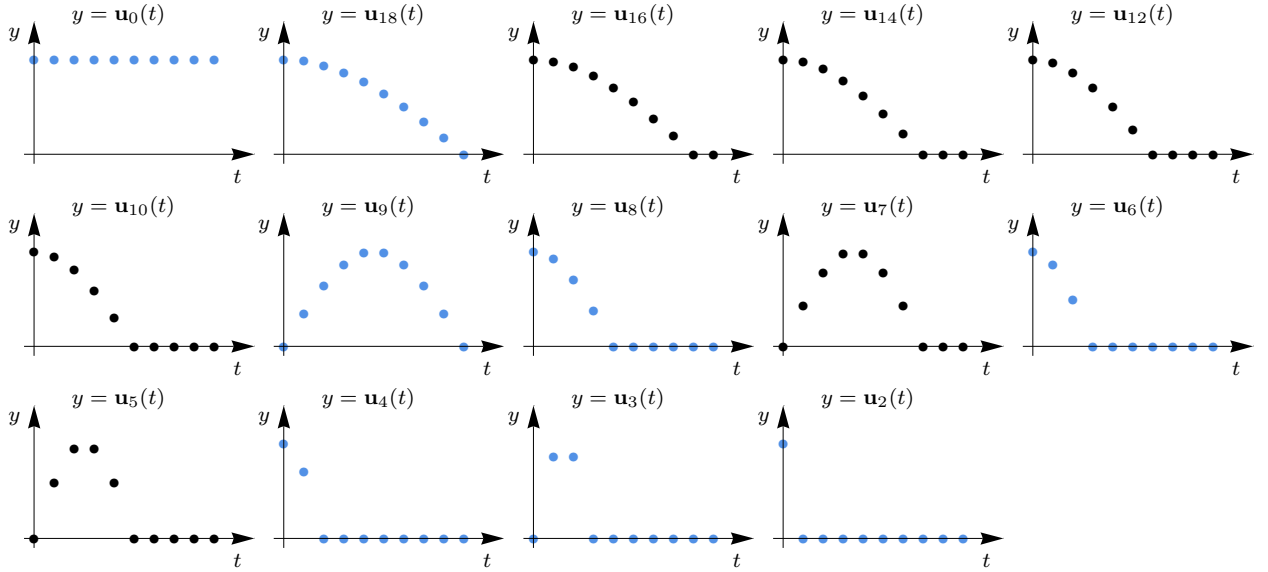
$$N_o = \emptyset,$$

pak splňuje podmínku

$$\exists i \in \{0, 1, 2\} \exists j \in \left\{0, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right\} \text{ ne obě nulová } \exists k \in \{0, \dots, i + j - 1\} \text{ tak, že} \\ n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1.$$

Důkaz. Uvažujme $p \in S_n$. Nechť λ_p je polární Pareto vlastní číslo a nechť \mathbf{u}_p , resp. \mathbf{u}_q , je jeho polární Pareto vlastní vektor z lemmatu 1.19, resp. získaný algoritmem 1. Připomeňme definice množiny J definované v (1.22), tj.

$$J = \{i : i \in \{0, \dots, n - 2\} : \mathbf{u}(i) \neq 0 \vee \mathbf{u}(i + 1) \neq 0\}.$$



Obrázek 1.19: Polární Pareto vlastní vektory (modře) odpovídající polárním Pareto vlastním číslům, které určují podle hypotézy 1.32 asymptoty Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ pro $n = 10$.

Množinu J_p , resp. J_q , budeme nazývat levým, resp. pravým, půlobloukem. Je zřejmé, že počet intervalů d_i , které tvoří body z množin J_p (J_q) je $\frac{p}{2}$. Dále nechť \mathbf{u}_r (existuje-li) je polární Pareto vlastní vektor získaný algoritmem 2. Potom množinu J_r budeme nazývat obloukem. Počet intervalů d_i , které tvoří body množiny J_r , je zřejmě p . Navíc, je-li $\mathbf{u}_{s,a}$ vektor pro nějaké a (existuje-li) získaný algoritmem 3, je opět $J_{s,a}$ obloukem a počet intervalů d_i , které tvoří body množiny $J_{s,a}$, je také p . Nazvěme levý půloblouk J_p , pravý půloblouk J_q a oblouky $J_r, J_{s,a}$ vzniklé algoritmy 2, 3 *elementy* e . Vektor \mathbf{u} (z předpokladu věty) splňuje

1. Vektor je složen z elementů e .
2. $0 \in e \wedge (n - 2) \in e$
3. Obsahuje-li vektor levý půloblouk J_p , resp. pravý půloblouk J_q , je $0 \in J_p$, resp. $(n - 2) \in J_q$.
4. Dva elementy e_1, e_2 nemají společný žádný prvek.
5. Pro dva sousední elementy e_1, e_2 (v tomto pořadí) s vlastností $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ existuje prvek j tak, že $j = \max e_1, j + 1 = \min e_2$ nebo $j = \max e_1, j + 2 = \min e_2$.

Označme i počet levých a pravých půloblouků. Potom, $i \in \{0, 1, 2\}$, což plyne z bodu 3. Tj., pro $i = 0$ žádný půloblouk neexistuje, pro $i = 1$ obsahuje vektor buď levý nebo pravý půloblouk a pro $i = 2$ obsahuje vektor levý i pravý půloblouk. Dále označme j počet oblouků a k počet prvků z bodu 5 s vlastností, že existuje prvek j tak, že $j = \max e_1, j + 2 = \min e_2$. Potom pro všechny přípustné tvary existuje kombinace čísel

$$\exists i \in \{0, 1, 2\} \exists j \in \left\{0, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right\} \text{ ne obě nulová } \exists k \in \{0, \dots, i + j - 1\} \text{ tak, že}$$

$$n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1.$$

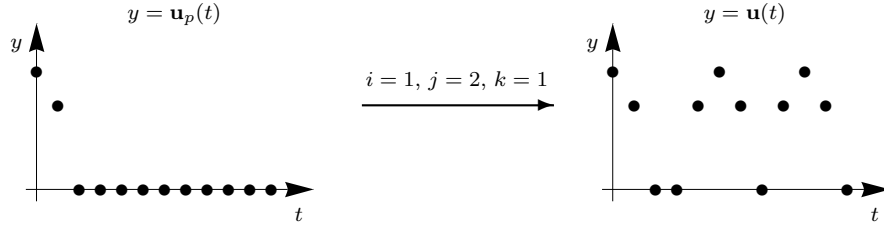
■

Na obrázku 1.20 je vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.33 pro $n = 12, p = 4$. Platí pro něj $i = 1, j = 2, k = 1$, tedy

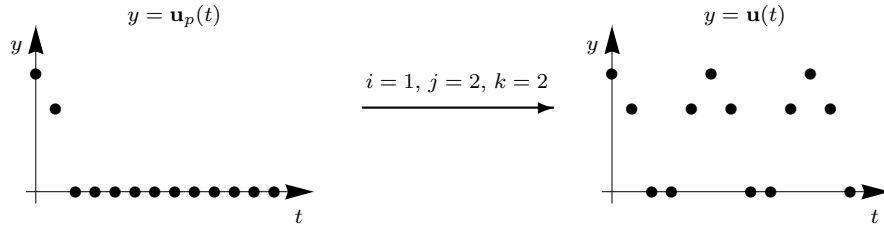
$$i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 + 1 = 12 = n.$$

A na obrázku 1.21 je vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.33 pro $n = 13, p = 4$. Platí pro něj $i = 1, j = 2, k = 2$, tedy

$$i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1 = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 2 + 1 = 13 = n.$$



Obrázek 1.20: Vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.33 pro $n = 12, p = 4$.



Obrázek 1.21: Vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.33 pro $n = 13, p = 4$.

Věta 1.34. *Nechť \mathbf{A} je definována v (1.9), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Pokud existuje vektor \mathbf{u} ve smyslu věty 1.27 a pokud pro tento vektor platí*

$$N_o = \emptyset \vee |N_o| = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil,$$

pak splňuje podmínku

$$\begin{aligned} \exists i \in \{0, 1\} \exists j \in \left\{1, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\right\} \exists k \in \{0, \dots, j-1\} \text{ tak, že} \\ n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1. \end{aligned}$$

Důkaz. Uvažujme $p \in L_n$. Množinu J_0 (definovanou v (1.22)) nazveme obloukem pro vektor \mathbf{u}_0 získaný ve smyslu lemmatu 1.19. Pro vektory $\mathbf{u}_{1,a}$ získané algoritmem 3 (vstupním vektorem je \mathbf{u}_0) opět nazveme množiny $J_{1,a}$ obloukem. Počet intervalů d_i , které tvoří body z množin J_0 ($J_{1,a}$), je p . Oproti případu $p \in S_n$ již nedefinujeme půloblouky. Nazvěme oblouky $J_0, J_{1,a}$ *elementy* e . Vektor \mathbf{u} (z předpokladu věty) splňuje

1. Vektor je složen z elementů e a nulových bodů N_o .
2. $0 \in e \wedge (n-2) \in e$
3. Existuje oblouk e , pro který platí $1 \in e$.
4. Dva oblouky e_1, e_2 nemají společný žádný prvek.
5. Pro dva sousední elementy e_1, e_2 (v tomto pořadí) s vlastností $e_1 \cap e_2 = \emptyset$ existuje prvek j tak, že $j = \max e_1, j+1 = \min e_2$ nebo $j = \max e_1, j+2 = \min e_2$.

Definujme $i = 0$, pokud $|N_o| = 0$ a $i = 1$, pokud $|N_o| = \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil$. Označme j počet oblouků a k počet prvků z bodu 5 s vlastností, že existuje prvek j tak, že $j = \max e_1, j+2 = \min e_2$. Potom pro všechny přípustné tvary existuje kombinace čísel

$$\begin{aligned} \exists i \in \{0, 1\} \exists j \in \{1, \dots, \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil\} \exists k \in \{0, \dots, j-1\} \text{ tak, že} \\ n = i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1. \end{aligned}$$

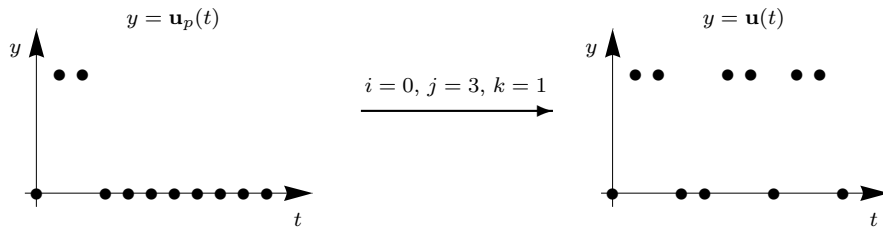
■

Na obrázku 1.22 je vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.34 pro $n = 11, p = 3$. Platí pro něj $i = 0, j = 3, k = 1$, tedy

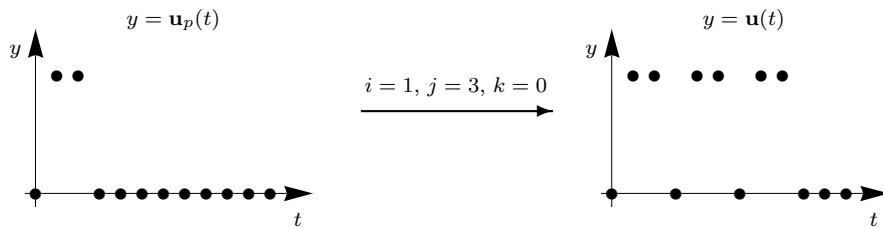
$$i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1 = 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 1 + 1 = 11 = n.$$

A na obrázku 1.23 je vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.34 pro $n = 12, p = 3$. Platí pro něj $i = 1, j = 3, k = 0$, tedy

$$i \left\lceil \frac{p}{2} \right\rceil + jp + k + 1 = 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 + 1 = 12 = n.$$



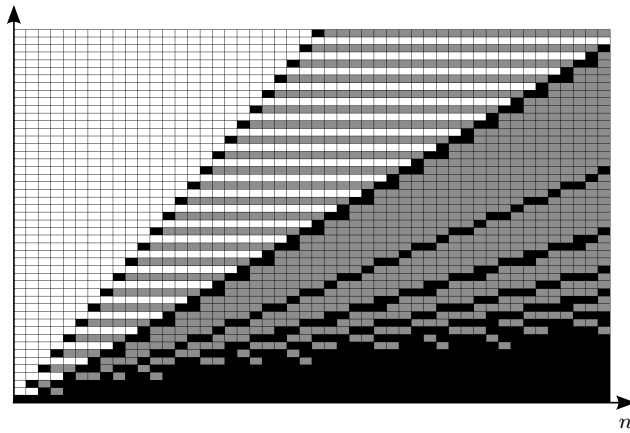
Obrázek 1.22: Vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.34 pro $n = 11, p = 3$.



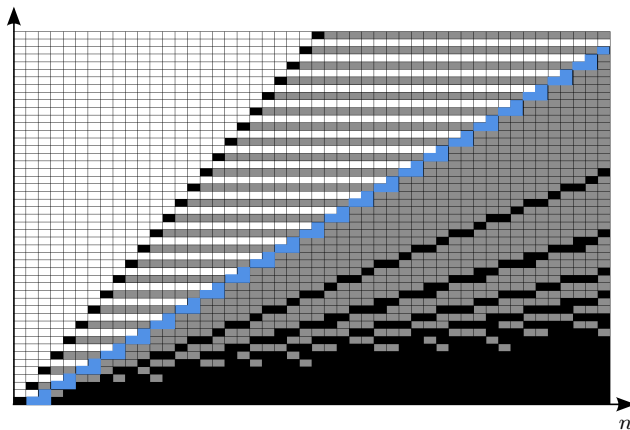
Obrázek 1.23: Vektor \mathbf{u} splňující podmínku ve větě 1.34 pro $n = 12, p = 3$.

Za předpokladu platnosti hypotézy 1.32 můžeme určit počet polárních Pareto vlastních čísel, které určují asymptoty některé Fučíkovy větve. Algoritmicky hledáme pro každé $p \in S, p \in L$, zda existuje trojice čísel $\{i, j, k\}$, pro které je splněna podmínka v hypotéze 1.32. Složitost výpočtu je tedy $O(n^3)$.

Naším cílem je najít rychlejší algoritmus. Tento algoritmus funguje následujícím způsobem. Polární Pareto vlastní čísla (získaná z věty 1.19) seřadí podle velikosti sestupně. Dvě největší z nich ($\lambda = 0$ a $\lambda_{2(n-1)}$) jsou asymptotami pro každé n . Pro žádné další $p \in S_n$, pro které platí $p > n - 1$, nemůže λ_p být asymptotou, neboť pro takové λ_p je $V_S = \{\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_q\}$ a tedy je $|N_o| = n - p + 1 \neq 0$. Polární Pareto vlastní číslo λ_{n-1} je asymptotou, neboť jeho příslušný polární Pareto vlastní vektor může mít tvar právě jednoho oblouku. Pro zbylá p , tj. pro $p \in L_n$ a $p \in S_n : p < n - 1$ můžeme najít závislost mezi n a pořadovým číslem λ_p . Na obrázku 1.24 je diagram D , který znázorňuje tuto závislost - diagram D je pouze ilustrační a nebudeme se tedy zabývat tím, co je na něm přesně zobrazeno. Je-li buňka v diagramu D zobrazena tmavou barvou, jedná se o polární Pareto vlastní číslo určující asymptotu, je-li vyznačena světlou barvou,

Obrázek 1.24: Diagram D .

polární Pareto vlastní číslo asymptotu neurčuje. Je zřejmé, že v diagramu se nacházejí jakési „struktury“ (viz obrázek 1.25, modře označené buňky). Náš algoritmus využívá analytický popis těchto „struktur“ a proto je složitost výpočtu pouze $O(n)$.

Obrázek 1.25: Diagram D se zvýrazněnými hodnotami pro $a = 2$.

Způsob, kterým popíšeme „struktury“, je následující (modře zvýrazněné „struktuře“ na obrázku 1.25 odpovídá $a = 2$).

- Polární Pareto vlastní čísla seřadíme podle velikosti sestupně a každému přiřadíme pořadové číslo $m \in \{1, \dots, n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$.
- Označíme $\tilde{n} = n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$.
- Polární Pareto vlastní čísla pro $m = 1, m = 2$ jsou asymptotami Fučíkových větví.
- Pro $a \in \{2, \dots, n\}$ určují asymptoty Fučíkových větví polární Pareto vlastní čísla s pořadovými

číslly

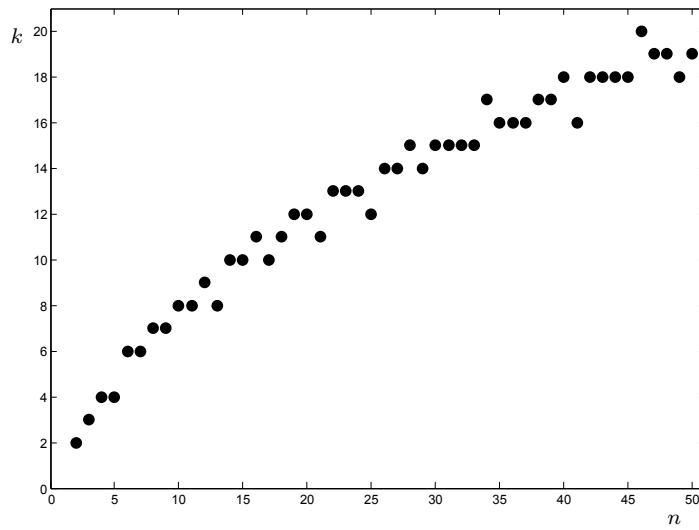
$$a \text{ liché} : m = \tilde{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)}{a} \right\rfloor + 2,$$

$$a \text{ sudé} : m = \tilde{n} - \left\lfloor \frac{2(n-1)}{a} \right\rfloor + 2,$$

a

$$m = \tilde{n} - \frac{2(n-1)\frac{a}{2}}{a} + 2, \text{ pokud platí } \left(\frac{2(n-1)\frac{a}{2}}{a} \right) \bmod 2 = 0.$$

Pro některá a dostaneme stejné pořadové číslo a to z toho důvodu, že „struktury“ pro různá a nejsou disjunktní.



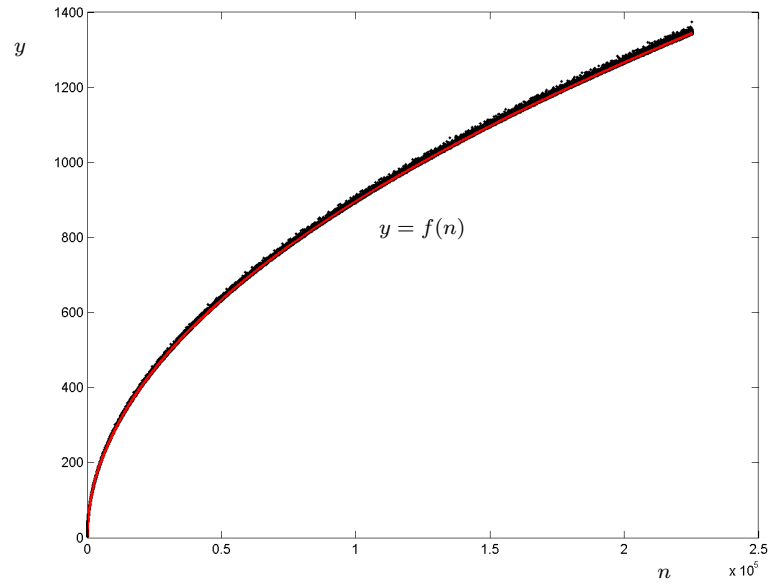
Obrázek 1.26: Závislost počtu asymptot Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ (označme počet k) na velikosti n .

Několik prvků posloupnosti počtu asymptot Fučíkových větví vidíme na obrázku 1.26. Její analytický popis jsme nenašli, ale regresní analýzou (provedenou v systému Matlab) jsme získali následující výsledek.

Hypotéza 1.35. *Funkce získaná regresní analýzou, která popisuje závislost počtu asymptot Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ na n , má předpis*

$$f(n) = 2,8517n^{0,4994}.$$

Na obrázku 1.27 je závislost počtu asymptot Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ na n pro velké $n \sim 10^5$.



Obrázek 1.27: Graf funkce f a závislost počtu asymptot Fučíkových větví $\Sigma(\mathbf{A})$ na velikosti n a funkce f (červeně).

Kapitola 2

Řešitelnost okrajových úloh pro diferenční rovnice

V této kapitole se budeme zabývat existencí řešení úlohy

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad (2.1)$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Z věty 1.10 plyne, že $\lambda = 0$ je vlastním číslem matice \mathbf{A} a tedy matice \mathbf{A} je singulární. Definujme matice $\mathbf{A}_\lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, jako

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u},$$

kde \mathbf{I} je jednotková matice typu $n \times n$. Označme vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušející vlastnímu číslu λ jako \mathbf{x} a vlastní vektor matice \mathbf{A}^T (tj. transpozice matice \mathbf{A}) příslušející vlastnímu číslu λ jako \mathbf{y} . V této kapitole budeme často pohlížet na matice jako na lineární operátory. Pokud budeme v následujícím textu pracovat s libovolnou reálnou maticí, budeme ji značit \mathbf{B} .

2.1 Lineární úloha

Uvažujme lineární úlohu

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad (2.3)$$

$\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, kterou získáme volbou $\alpha = \beta = \lambda$ a $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}$ v (2.1). Úlohu (2.3) můžeme zapsat jako

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} = \mathbf{b}.$$

Úloha (2.3) je pro $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ úlohou na vlastní čísla matice \mathbf{A}

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Pokud $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, pak má úloha (2.4) právě jedno řešení $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Pokud $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, pak je řešením úlohy (2.4) libovolný násobek vlastního vektoru \mathbf{x} matice \mathbf{A}

$$\mathbf{u} = C\mathbf{x}, \quad C \in \mathbb{R},$$

tj. existuje nekonečně mnoho řešení rovnice (2.3).

Dále uvažujme $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$.

Definice 2.1. Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Potom množinu

$$\ker(\mathbf{B}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{B}\mathbf{z} = \mathbf{0}\},$$

nazýváme *jádrem* matice \mathbf{B} . □

Definice 2.2. Necht $\mathbf{S} \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom množinu

$$\mathbf{S}^\perp = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : \forall \mathbf{s} \in \mathbf{S} \langle \mathbf{z}, \mathbf{s} \rangle = 0\},$$

nazýváme *ortogonálním doplňkem* \mathbf{S} . □

Následující věta se někdy uvádí pod názvem *Fredholmova alternativa* pro matice.

Věta 2.3 ([10]). Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom existuje řešení $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ úlohy

$$\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b}$$

právě tehdy, když

$$\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{B}^T)^\perp.$$

Důkaz. Podrobný důkaz lze nalézt v [10]. ■

Důsledek 2.4 ([10]). Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Potom zobrazení $\mathbf{B} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{b}$ je surjektivní právě tehdy, když $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ je jediným řešením úlohy

$$\mathbf{B}^T \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Důkaz. Opět můžeme důkaz najít v [10]. ■

Definice 2.5. Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Potom množinou E_λ budeme rozumět množinu jejich vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu λ . □

Abychom určili počet řešení úlohy (2.3), využijeme větu 2.3 pro $\mathbf{B} = \mathbf{A}_\lambda$. Tedy, \mathbf{u} je řešením úlohy (2.3) právě tehdy, když

$$\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp. \tag{2.5}$$

Rozepíšeme-li (2.5), dostaneme

$$\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp \iff \forall \mathbf{z} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T) : \langle \mathbf{b}, \mathbf{z} \rangle = 0.$$

A protože je

$$\ker(\mathbf{A}_\lambda^T) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : (\mathbf{A}^T - \lambda \mathbf{I})\mathbf{z} = \mathbf{0}\},$$

budou nás zajímat vlastní vektory matice \mathbf{A}^T . Pokud $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A}^T)$, platí $\ker(\mathbf{A}_\lambda^T) = \{\mathbf{0}\}$. Pokud ale $\lambda \in \sigma(\mathbf{A}^T)$, platí $\ker(\mathbf{A}_\lambda^T) = \text{span}(E_\lambda)$, kde $\text{span}(E_\lambda)$ je lineární obal množiny E_λ , která je tvořena vlastním vektorem matice \mathbf{A}^T příslušným vlastnímu číslu λ .

Lemma 2.6. Necht \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Potom platí

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A}^T)$$

a existuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice \mathbf{A}^T ve tvaru

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^{-1})^T,$$

kde \mathbf{X} , resp. \mathbf{Y} , je matice, která má ve sloupcích vlastní vektory matice \mathbf{A} , resp. matice \mathbf{A}^T .

Důkaz. Vlastní čísla λ matice \mathbf{A}^T získáme jako kořeny charakteristického polynomu $\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T)$. Protože determinant matice a determinant její transpozice jsou stejné, platí

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}^T) = \det((\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})^T) = \det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}),$$

tedy $\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A}^T)$. Navíc, matice \mathbf{A} má (viz věta 1.10) n různých vlastních čísel. Proto jsou Jordanovy matice \mathbf{J} příslušné maticím \mathbf{A} a \mathbf{A}^T stejné a mají tvar diagonální matice s vlastními čísly na diagonále. Matici \mathbf{A} můžeme rozložit jako

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1} \quad (2.6)$$

a matici \mathbf{A}^T jako

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{Y}\mathbf{J}\mathbf{Y}^{-1}, \quad (2.7)$$

kde \mathbf{X} , resp. \mathbf{Y} , je matice, která má ve sloupcích vlastní vektory (zapsané podle pořadí vlastních čísel zapsaných do Jordanovy matice \mathbf{J}) matice \mathbf{A} , resp. matice \mathbf{A}^T . Transponujeme-li matici \mathbf{A} v (2.6), potom

$$\mathbf{A}^T = (\mathbf{X}\mathbf{J}\mathbf{X}^{-1})^T = (\mathbf{X}^{-1})^T \mathbf{J}^T \mathbf{X}^T = (\mathbf{X}^{-1})^T \mathbf{J}\mathbf{X}^T. \quad (2.8)$$

Porovnáním (2.7) a (2.8) dostaneme

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^{-1})^T.$$

Protože matice $(\mathbf{X}^{-1})^T$ existuje a má plnou hodnotu, má i matice \mathbf{Y} plnou hodnotu a proto existuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů matice \mathbf{A}^T . ■

Poznámka 2.7. Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Pro matici \mathbf{B} se často vlastní vektory nazývají pravé vlastní vektory. Analogicky můžeme zadefinovat levé vlastní vektory jako netriviální řešení $\mathbf{v}^T \mathbf{B} = \lambda \mathbf{v}^T$. Uvažujme pevné $\lambda \in \sigma(\mathbf{B})$. Pak levé vlastní vektory matice \mathbf{B}^T , tj. $\mathbf{v}^T \mathbf{B}^T$, jsou pravými vlastními vektory matice \mathbf{B} , neboť

$$\mathbf{B}\mathbf{v} = (\mathbf{v}^T \mathbf{B}^T)^T = (\lambda \mathbf{v}^T)^T = \lambda \mathbf{v}. \quad \square$$

Nejdříve se zabýváme případem, kdy platí $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$.

Věta 2.8. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. Je-li $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, potom má úloha (2.3) právě jedno řešení.*

Důkaz. Mějme pevné $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, tj. úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

má pouze triviální řešení. To znamená, že $\ker(\mathbf{A}_\lambda) = \ker(\mathbf{A}_\lambda^T) = \{\mathbf{0}\}$. Zobrazení \mathbf{A}_λ^T je tedy prosté, neboť \mathbf{A}_λ^T je lineární zobrazení. Pro každé $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ platí $\langle \mathbf{z}, \mathbf{0} \rangle = 0$ a tedy

$$\ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp = \mathbb{R}^n,$$

tj. $\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp$. Z věty 2.5 plyne, že úloha (2.3) má alespoň jedno řešení. Z důsledku 2.4 plyne, že zobrazení $\mathbf{A}_\lambda : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{b}$ je surjektivní, neboť úloha $\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} = \mathbf{0}$ má pouze triviální řešení. Každé prosté surjektivní zobrazení je bijektivním zobrazením. Proto řešení \mathbf{u} úlohy (2.3) pro $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$ je právě jedno. ■

Protože $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, existuje inverze \mathbf{A}_λ^{-1} a řešení získáme jako $\mathbf{u} = \mathbf{A}_\lambda^{-1} \mathbf{b}$, což zformulujeme v následující poznámce.

Poznámka 2.9. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je-li $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, potom je řešení úlohy (2.3) ve tvaru*

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_\lambda^{-1} \mathbf{b}. \quad \square$$

Následující věta rozhoduje o řešitelnosti úlohy (2.3) pro $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$.

Věta 2.10. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je-li $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, potom má úloha (2.3) řešení právě tehdy, když*

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = 0,$$

kde \mathbf{y} je vlastní vektor matice \mathbf{A}^T příslušný vlastnímu číslu λ .

Důkaz. Matice \mathbf{A}^T má n lineárně nezávislých vlastních vektorů a n různých vlastních čísel, proto $\ker(\mathbf{A}_\lambda^T) = \text{span}(E_\lambda)$. Pokud je $\langle \mathbf{b}, \mathbf{y} \rangle = 0$, tj. $\mathbf{b} \perp \mathbf{y}$, kde \mathbf{y} je vlastní vektor matice \mathbf{A}^T příslušný vlastnímu číslu λ , pak platí $\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp$. Tvrzení již plyne z věty 2.3. ■

Dále uveďme způsob, jak získat řešení úlohy (2.3) pro $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ za předpokladu, že existuje, tj. pokud je $\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp$.

Definice 2.11 ([10]). Nechť $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. *Minimálním polynomem* matice \mathbf{B} rozumíme monický¹ polynom $\mu(x)$ nejmenšího stupně takový, že ${}^2\mu(\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ (takovému polynomu říkáme anihilující). □

Lemma 2.12. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a nechť $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Matice \mathbf{A}_λ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů a její vlastní čísla $\bar{\lambda}_i$ mají tvar*

$$\bar{\lambda}_i = \hat{\lambda}_i - \lambda,$$

kde $\hat{\lambda}_i \in \sigma(\mathbf{A})$, $i \in \{0, \dots, n-1\}$.

Důkaz. Mějme pevné $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Úlohu na vlastní čísla $\bar{\lambda}_i$ matice \mathbf{A}_λ

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = \bar{\lambda}_i \mathbf{u}.$$

můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = (\lambda + \bar{\lambda}_i)\mathbf{u}.$$

Označíme-li vlastní čísla matice \mathbf{A} jako $\hat{\lambda}_i$, potom

$$\hat{\lambda}_i = \lambda + \bar{\lambda}_i,$$

a odtud dostaneme $\bar{\lambda}_i = \hat{\lambda}_i - \lambda$. ■

Protože matice \mathbf{A}_λ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů (viz lemma 2.12) (takové matici se v anglické literatuře říká „semisimple“), má minimální polynom matice \mathbf{A}_λ tvar (důkaz najdeme v [12])

$$\mu(x) = x \prod_{\substack{\bar{\lambda}_i \in \sigma(\mathbf{A}_\lambda) \\ \bar{\lambda}_i \neq 0}} (x - \bar{\lambda}_i), \quad i \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Označme $\theta(x)$ polynom, pro který platí, že polynom

$$x(1 - x\theta(x)), \tag{2.9}$$

má stejné kořeny jako polynom $\mu(x)$ (tj. jako minimální polynom).

Lemma 2.13. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, $\mathbf{b} \in \ker(\mathbf{A}_\lambda^T)^\perp$. Potom všechna řešení úlohy (2.3) mají tvar*

$$\mathbf{u} = \theta(\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{b} + (\mathbf{I} - \theta(\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{A}_\lambda)\mathbf{z},$$

kde $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ je libovolný vektor.

Důkaz. Matice \mathbf{A}_λ má n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Důkaz pro matice s takovou vlastností najdeme v [12]. ■

¹Monický polynom p řádu n má tvar $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$, tj. koeficient u členu x^n je roven jedné.

²Mějme polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Potom výrazem $p(\mathbf{B})$ rozumíme $p(\mathbf{B}) = a_0\mathbf{I} + a_1\mathbf{B} + a_2\mathbf{B}^2 + \dots + a_n\mathbf{B}^n$.

V následujícím příkladu 2.14 vyšetříme řešitelnost úlohy (2.3) pro $n = 3$ s konkrétní volbou \mathbf{b} .

Příklad 2.14. Nechť $n = 3$. Potom má matice \mathbf{A} tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

a její vlastní čísla jsou $\sigma(\mathbf{A}) = \{0, 2, 4\}$. Nechť $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_1]^T$, $b_1 \neq \pm b_2$. Zajímá nás řešitelnost úlohy

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{u} = [b_1, b_2, b_1]^T, \quad b_1 \neq \pm b_2. \quad (2.10)$$

Je-li $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, potom existuje podle věty 2.8 právě jedno řešení \mathbf{u} , které získáme jako

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{b}.$$

Nechť $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Potom

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = (\mathbf{X}^{-1})^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

kde \mathbf{J} je Jordanova matice příslušná \mathbf{A} , \mathbf{X} je matice, která má ve sloupcích pravé vlastní vektory matice \mathbf{A} a podle lemmatu 2.6 má matice $\mathbf{Y} = (\mathbf{X}^{-1})^T$ ve sloupcích vlastní vektory matice \mathbf{A}^T .

Nejdříve uvažujme $\lambda = 0$. Příslušný vlastní vektor matice \mathbf{A}^T má tvar $\mathbf{y}_0 = [1, 2, 1]^T$. Potom

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_0 \rangle = [b_1, b_2, b_1] \cdot [1, 2, 1]^T = 2b_1 + 2b_2 \neq 0,$$

protože je $b_1 \neq \pm b_2$. Úloha (2.10) nemá podle věty 2.10 pro $\lambda = 0$ žádné řešení.

Dále nechť je $\lambda = 4$. Příslušný vlastní vektor matice \mathbf{A}^T má tvar $\mathbf{y}_4 = [1, -2, 1]^T$. Potom

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_4 \rangle = [b_1, b_2, b_1] \cdot [1, -2, 1]^T = 2b_1 - 2b_2 \neq 0,$$

protože je $b_1 \neq \pm b_2$. Úloha (2.10) nemá podle věty 2.10 ani pro $\lambda = 4$ žádné řešení.

Nakonec uvažujme $\lambda = 2$. Příslušný vlastní vektor matice \mathbf{A}^T má tvar $\mathbf{y}_2 = [-1, 0, 1]^T$. Potom

$$\langle \mathbf{b}, \mathbf{y}_2 \rangle = [b_1, b_2, b_1] \cdot [-1, 0, 1]^T = -b_1 + b_1 = 0,$$

tedy úloha (2.10) má podle věty 2.10 pro $\lambda = 2$ alespoň jedno řešení. Dále využijeme lemmatu 2.13 k nalezení tohoto řešení \mathbf{u} . Minimální polynom matice \mathbf{A}_2 (tj. matice \mathbf{A}_λ pro $\lambda = 2$) má tvar

$$\mu(x) = x(x+2)(x-2) = x^3 - 4x,$$

neboť vlastní čísla matice \mathbf{A}_2 mají tvar $\sigma(\mathbf{A}_2) = \{-2, 0, 2\}$. Polynom θ definovaný v (2.9) má pak tvar

$$\theta(x) = \frac{x}{4},$$

protože polynom

$$x(1 - x\theta(x)) = x - \frac{x^3}{4}$$

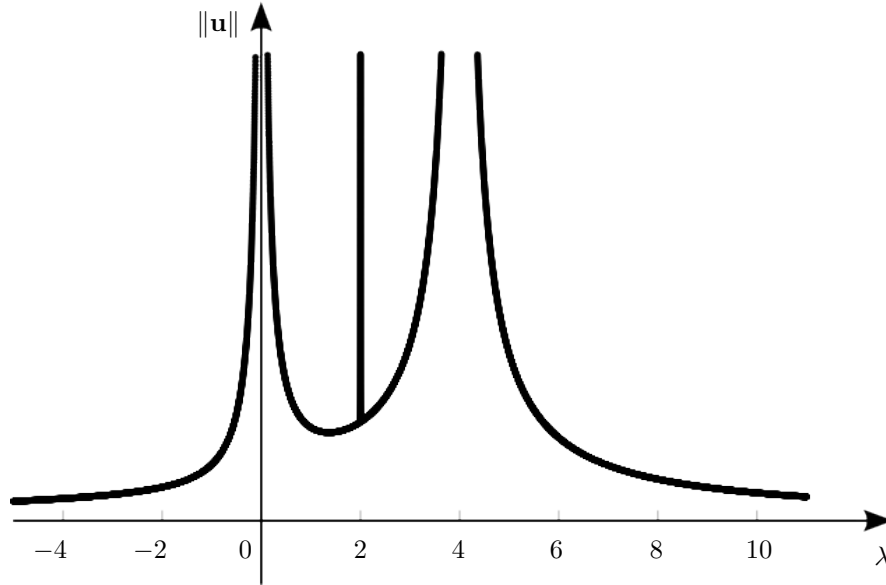
má stejné kořeny jako polynom μ . Tím dostaneme podle lemmatu 2.13 všechna řešení úlohy (2.10) pro $\lambda = 2$ ve tvaru

$$\mathbf{u} = \frac{1}{4}\mathbf{A}_2\mathbf{b} + \left(\mathbf{I} - \frac{1}{4}\mathbf{A}_2\mathbf{A}_2\right)\mathbf{z},$$

kde

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$b_1 \neq \pm b_2$ a $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ je libovolný vektor. Na obrázku 2.1 je zobrazena závislost normy řešení $\|\mathbf{u}\|$ na parametru λ pro konkrétní volbu $\mathbf{b} = [1, -2, 1]^T$. \square

Obrázek 2.1: Diagram řešení úlohy (2.3) pro $n = 3$ a $\mathbf{b} = [1, -2, 1]^T$.

2.2 Nelineární úloha

V této části budeme často používat v důkazech jednotlivých tvrzení *Brouwerův stupeň zobrazení*.

Věta 2.15 ([3]). *Nechť $r > 0$. Budiž \mathbf{F} spojité zobrazení definované na $\overline{\mathbf{B}_r}$ s hodnotami v \mathbb{R}^n takové, že*

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0} \text{ pro každé } \mathbf{x} \in \mathbf{S}_r.$$

Pak existuje celé číslo

$$\deg(\mathbf{F}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0})$$

(které nazýváme Brouwerův stupeň zobrazení \mathbf{F} vzhledem ke kouli \mathbf{B}_r a bodu $\mathbf{0}$) tak, že platí:

- (a) $\deg(\mathbf{I}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = 1$, kde \mathbf{I} je identita.
- (b) Jestliže $\deg(\mathbf{F}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) \neq 0$, pak existuje $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{B}_r$ takové, že $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$.
- (c) (*Invariance vzhledem k homotopii*) Nechť je $\mathbf{H}_\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\tau, \mathbf{x})$ spojité zobrazení množiny $\langle 0, 1 \rangle \times \overline{\mathbf{B}_r}$ do \mathbb{R}^n takové, že pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{x} \in \mathbf{S}_r$, je $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Potom $\deg(\mathbf{H}_\tau, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \psi(\tau)$ je konstantní funkcí proměnné $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$. Speciálně platí $\deg(\mathbf{H}_0, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_r, \mathbf{0})$.
- (d) Je-li zobrazení \mathbf{F} navíc liché (tj. platí-li $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(-\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in \overline{\mathbf{B}_r}$), pak $\deg(\mathbf{F}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0})$ je liché (tedy nenulové) číslo.

Důkaz. Jednotlivá tvrzení můžeme najít dokázána např. v [4]. ■

Lemma 2.16. *Nechť $\mathbf{T} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je regulární lineární operátor, tj. existuje inverzní operátor \mathbf{T}^{-1} . Potom pro Brouwerův stupeň zobrazení platí*

$$\deg(\mathbf{T}, \mathbf{B}_r, \mathbf{u}) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\det \mathbf{T}) & \text{pokud } \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}) \in \mathbf{B}_r, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Důkaz. Z definice 5.2.1 v [4] plyne, že platí-li $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u}) \in \mathbf{B}_r$, potom

$$\deg(\mathbf{T}, \mathbf{B}_r, \mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{u})} \operatorname{sgn} J_{\mathbf{T}(\mathbf{x})},$$

kde $J_{\mathbf{T}(\mathbf{x})}$ je jakobián (determinant Jacobiho matice) zobrazení \mathbf{T} . Protože \mathbf{T} je lineární zobrazení, je

$$\deg(\mathbf{T}, \mathbf{B}_r, \mathbf{u}) = \operatorname{sgn} J_{\mathbf{T}} = \operatorname{sgn}(\det \mathbf{T}).$$

■

Lemma 2.17. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ a nechť $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$. Potom platí*

$$\deg(\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = (-1)^\gamma,$$

kde

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \forall \omega \in \sigma(\mathbf{A}_\lambda) : \omega \geq 0, \\ \sum_{\substack{\omega \in \sigma(\mathbf{A}_\lambda) \\ \omega < 0}} m(\omega) & \text{jinak,} \end{cases}$$

a $m(\omega)$ je algebraická násobnost vlastního čísla ω matice \mathbf{A}_λ .

Důkaz. Zobrazení \mathbf{A}_λ je regulární, neboť $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$. Z lemmatu 2.16 plyne, že

$$\deg(\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \operatorname{sgn}(\det \mathbf{A}_\lambda).$$

Matice \mathbf{A}_λ je podobná se svojí Jordanovou maticí \mathbf{J}_λ , která je diagonální a na diagonále má vlastní čísla matice \mathbf{A}_λ (matice \mathbf{A} má jednoduchá vlastní čísla, tedy i matice \mathbf{A}_λ má jednoduchá vlastní čísla, což plyne z lemmatu 2.12). Proto platí

$$\det \mathbf{A}_\lambda = \det \mathbf{J}_\lambda = \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_n,$$

kde $\omega_1, \dots, \omega_n \in \sigma(\mathbf{A}_\lambda)$. Protože $\omega_1, \dots, \omega_n \in \sigma(\mathbf{A}_\lambda)$ jsou jednoduchá vlastní čísla, platí $m(\omega_1) = \dots = m(\omega_n) = 1$. ■

Všechny důkazy v následujících částech 2.2.1 a 2.2.2 budou mít stejnou strukturu. Nejdříve zdefinujeme homotopické spojení úlohy, pro kterou známe Brouwerův stupeň zobrazení, a naší úlohy. Pak ukážeme, že tato homotopie je přípustná podle věty 2.15 vlastnosti (c). Nakonec ukážeme (s využitím věty 2.15), že za určitých předpokladů existuje alespoň jedno řešení naší úlohy.

2.2.1 Úloha mimo rezonanci vzhledem k Fučíkovu spektru

Pokud uvažujeme $(\alpha, \beta) \notin \Sigma(\mathbf{A})$, potom se úloze (2.1) říká *úloha mimo rezonanci*. Nejdříve uvažujme úlohu, kterou získáme volbou $\alpha = \beta = \lambda$ v (2.1) a nechť $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$. Princip důkazu následující věty 2.18 je stejný jako v [5]. Některé kroky jsou oproti důkazu v [5] podrobně vysvětleny.

Věta 2.18. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení, pro které platí*

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

Potom má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (2.12)$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. Pro $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ definujeme homotopii $\mathbf{H} : \langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} - \tau \mathbf{g}(\mathbf{u}). \quad (2.13)$$

Homotopie je spojitým zobrazením, neboť zobrazení \mathbf{g} je spojité. Je-li homotopie přípustná, potom z vlastnosti (c) věty 2.15 plyne, že

$$\deg(\mathbf{H}(1, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}(0, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}),$$

kde

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

a

$$\mathbf{H}(0, \cdot) = \mathbf{A}_\lambda.$$

Protože \mathbf{A}_λ je regulární ($\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$), plyne z lemmatu 2.17

$$\deg(\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1,$$

a proto je i

$$\deg(\mathbf{H}(1, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0.$$

Podle vlastnosti (b) věty 2.15 existuje $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{B}_r$ tak, že

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0},$$

neboli

$$\mathbf{A} \mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{u}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{u}_0)$$

a úloha (2.12) má alespoň jedno řešení \mathbf{u}_0 .

Ukažme, že homotopie definovaná v (2.13) je přípustná, tj. že pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$ je $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$. Položme

$$k = \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|.$$

Rozepsáním normy vektoru pomocí skalárního součinu dostaneme

$$\|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|^2 = \langle \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle.$$

Matice $\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda$ je symetrická a platí pro ni tedy (důkaz lze nalézt v [10])

$$\inf_{\|\mathbf{u}\|=1} \langle \mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \min_{\|\mathbf{u}\|=1} \langle \mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \omega_{\min}(\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda),$$

kde $\omega_{\min}(\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda)$ je nejmenší vlastní číslo matice $\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda$. Pro $\omega_{\min}(\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda)$ platí

$$\omega_{\min}(\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda) \neq 0,$$

neboť $\det(\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda) = \det \mathbf{A}_\lambda^T \det \mathbf{A}_\lambda \neq 0$ ($\lambda \notin \sigma(\mathbf{A}), \lambda \notin \sigma(\mathbf{A}^T)$) a tedy 0 není vlastním číslem matice $\mathbf{A}_\lambda^T \mathbf{A}_\lambda$. Celkem tedy dostaneme

$$\inf_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|^2 \neq 0. \quad (2.14)$$

Pokud by bylo $k = 0$, pak by ale také platilo

$$0 = k = \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| = \inf_{\|\mathbf{u}\|=1} \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|^2.$$

To je ovšem ve sporu s (2.14). Proto je $k \neq 0$ a tedy zřejmě $k > 0$. Tedy $\mathbf{H}(0, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$. Dále

$$k \leq \frac{\|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|} \quad \text{pro } \|\mathbf{u}\| \neq 0,$$

tedy

$$k\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\|. \quad (2.15)$$

Protože uvažujeme funkci \mathbf{g} s vlastností (2.11), existuje $r > 0$ takové, že pro všechna \mathbf{u} , $\|\mathbf{u}\| \geq r$, platí

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{u})\| \leq \frac{k}{2}\|\mathbf{u}\|. \quad (2.16)$$

Z trojúhelníkové nerovnosti dostaneme

$$\|\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u})\| = \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} - \tau \mathbf{g}(\mathbf{u})\| \geq \left| \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| - \|\tau \mathbf{g}(\mathbf{u})\| \right| = \left| \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| - \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\| \right| = \|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| - \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|, \quad (2.17)$$

neboť pro $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ je $\|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| \geq \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|$. Z vlastnosti (2.15) dostaneme

$$\|\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u}\| - \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\| \geq k\|\mathbf{u}\| - \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|. \quad (2.18)$$

Protože $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ je

$$k\|\mathbf{u}\| - \tau \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\| \geq k\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|. \quad (2.19)$$

Z nerovnosti v (2.16) a z vlastnosti $\|\mathbf{u}\| \geq r$ plyne

$$k\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{g}(\mathbf{u})\| \geq k\|\mathbf{u}\| - \frac{k}{2}\|\mathbf{u}\| = \frac{k}{2}\|\mathbf{u}\| \geq \frac{k}{2}r. \quad (2.20)$$

Celkem z (2.17) - (2.20) dostaneme pro všechna \mathbf{u} , $\|\mathbf{u}\| \geq r$, nerovnost

$$\|\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u})\| \geq \frac{k}{2}r \neq 0.$$

Pokud zvolíme $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$, tj. $\|\mathbf{u}\| = r$, pak

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0} \quad \forall \tau \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$$

a homotopie definovaná v (2.13) je přípustná. ■

Příklad 2.19. Uvažujme úlohu

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{u}), \quad (2.21)$$

pro $n = 2$ ve tvaru

$$\begin{bmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \arctg u_0 + f_0 \\ \arctg u_1 + f_1 \end{bmatrix},$$

kde $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, $f_0, f_1 \in \mathbb{R}$. Protože \mathbf{g} je spojitě zobrazení s vlastností

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0},$$

plyne z věty 2.18, že pro jakoukoliv volbu $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, f_0, f_1 , má úloha (2.21) alespoň jedno řešení. Pro pevné λ, f_0, f_1 získáme složku řešení u_0 jako nulový bod funkce

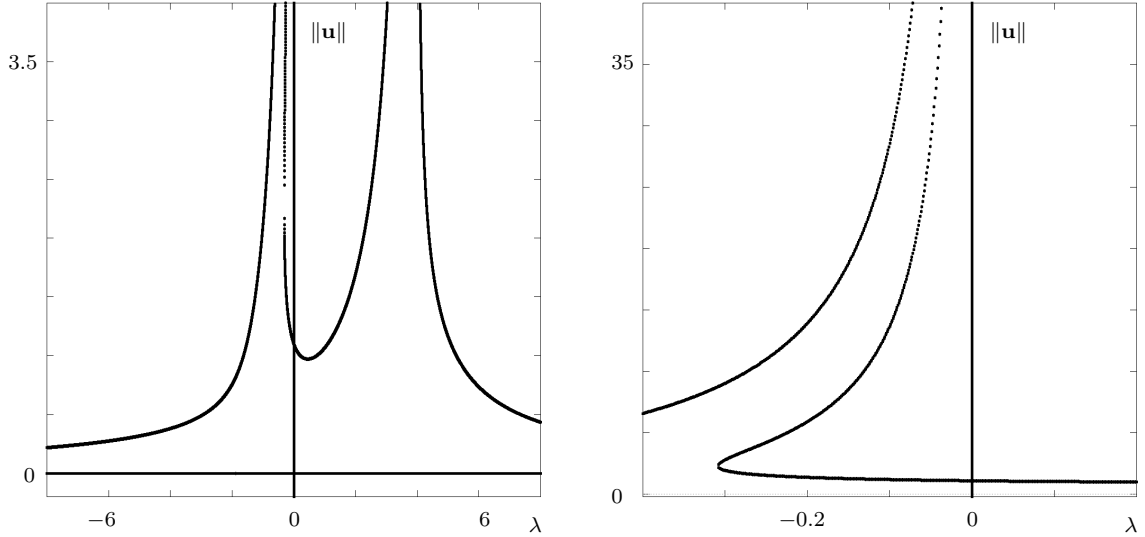
$$h(u_0) = -2u_0 + (2 - \lambda) \frac{(2 - \lambda)u_0 - \arctg u_0 - f_0}{2} - \arctg \left(\frac{(2 - \lambda)u_0 - \arctg u_0 - f_0}{2} \right) - f_1.$$

A následně složka u_1 má tvar

$$u_1 = \frac{(2 - \lambda)u_0 - \arctg u_0 - f_0}{2}.$$

Na obrázku 2.2 je numericky získaný diagram řešení úlohy (2.21) pro $f_0 = 1$, $f_1 = -2$ (vpravo je detail kolem nuly, kde má úloha více jak jedno řešení). □

Dále uvažujme úlohu (2.1) pro $(\alpha, \beta) \notin \Sigma(\mathbf{A})$. Princip důkazu následující věty 2.20 je stejný jako v [14], kde autoři uvažovali dvojici (α, β) náležící Fučíkovu spektru jisté speciální matice.

Obrázek 2.2: Diagram řešení úlohy (2.21) pro volbu $f_0 = 1$, $f_1 = -2$.

Věta 2.20. Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(\alpha, \beta) \notin \Sigma(\mathbf{A})$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pro které platí

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}. \quad (2.22)$$

Nechť existuje spojitá křivka $\gamma : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ taková, že $\gamma(\langle 0, 1 \rangle) \subset \Sigma(\mathbf{A})^C = \mathbb{R}^2 \setminus \Sigma(\mathbf{A})$ a platí

$$\gamma(0) = (\lambda, \lambda), \quad \lambda \notin \sigma(\mathbf{A}), \quad \gamma(1) = (\alpha, \beta).$$

Potom má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (2.23)$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. Nechť $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ je parametr křivky γ (na obrázku 2.3 je ukázka takové křivky - modře). Pro $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ definujme homotopii $\bar{\mathbf{H}} : \langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ jako

$$\bar{\mathbf{H}}(\tau, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^-.$$

Pak je

$$\bar{\mathbf{H}}(0, \mathbf{u}) = \mathbf{A}_\lambda \mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$$

a

$$\bar{\mathbf{H}}(1, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^- \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n.$$

Protože $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, plyne z lemmatu 2.17

$$\deg(\bar{\mathbf{H}}(0, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0,$$

pro libovolné $r > 0$. Stupeň zobrazení $\deg(\bar{\mathbf{H}}(1, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0})$ definován pro libovolné $r > 0$, neboť $(\alpha(\tau), \beta(\tau)) \in \Sigma(\mathbf{A})^C$ pro libovolné $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ (a tedy neexistuje netriviální řešení splňující $\mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^- = \mathbf{0}$). Tím jsou splněny předpoklady vlastnosti (c) věty 2.15. Definujme operátor $\mathbf{A}_\tau : \mathbf{u} \mapsto (\mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^-)$. Protože homotopie $\bar{\mathbf{H}}(\tau, \cdot)$ je přípustná, plyne z věty 2.15, že

$$\deg(\mathbf{A}_\tau, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{A}_\lambda, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0.$$

Zafixujeme $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a definujeme pro všechna $s \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{u}\| \leq r$, homotopii

$$\mathbf{H}(s, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^- - s\mathbf{g}(\mathbf{u}). \quad (2.24)$$

Homotopie je spojitým zobrazením, neboť zobrazení \mathbf{g} je spojité. Je-li tato homotopie přípustná, potom z vlastnosti (c) věty 2.15 plyne, že

$$\deg(\mathbf{H}(1, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}(0, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0,$$

kde

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^- - \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r$$

a

$$\mathbf{H}(0, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha(\tau)\mathbf{u}^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}^- \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r.$$

Proto podle vlastnosti (b) věty 2.15 existuje $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{B}_r$ tak, že

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0}.$$

Parametr $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ jsme volili libovolně, tedy existuje alespoň jedno $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{B}_r$ i pro $\tau = 1$ a proto existuje alespoň jedno řešení úlohy

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^- - \mathbf{g}(\mathbf{u}).$$

Dokažme, že homotopie definovaná v (2.24) je přípustná, tj. že pro všechna $s \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$ je $\mathbf{H}(s, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$. Důkaz provedeme sporem. Pokud by homotopie přípustná nebyla, existovala by posloupnost $\{s_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \langle 0, 1 \rangle$ a posloupnost $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ tak, že

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j - \alpha(\tau)\mathbf{u}_j^+ + \beta(\tau)\mathbf{u}_j^- - s_j\mathbf{g}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0} \quad (2.25)$$

a $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$ pro $j \rightarrow +\infty$. Položme

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|},$$

tj. $\|\mathbf{v}_j\| = 1$. Vydělením (2.25) $\|\mathbf{u}_j\|$ dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j - \alpha(\tau)\mathbf{v}_j^+ + \beta(\tau)\mathbf{v}_j^- - s_j \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_j\|} = \mathbf{0}. \quad (2.26)$$

Protože posloupnost $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{+\infty} \in \mathbf{S}_1$, leží posloupnosti $\{\mathbf{v}_j^+\}_{j=1}^{+\infty}$, $\{\mathbf{v}_j^-\}_{j=1}^{+\infty}$ v $\overline{\mathbf{B}}_1$. Z posloupností $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{v}_j^+\}$, $\{\mathbf{v}_j^-\}$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnosti, protože tyto posloupnosti jsou omezené. Omezenost $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$ plyne z omezenosti $\{\mathbf{v}_j\}$ a (1.23). Označme vybrané konvergentní podposloupnosti pro jednoduchost opět $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{v}_j^+\}$, $\{\mathbf{v}_j^-\}$. Limitní prvky označíme jako

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_j^+ = \mathbf{v}^+, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_j^- = \mathbf{v}^-.$$

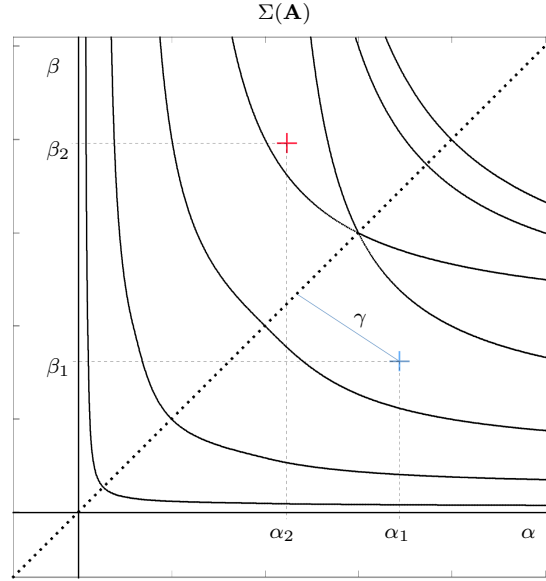
Llimitním přechodem v (2.26) dostaneme pro $j \rightarrow +\infty$

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \alpha(\tau)\mathbf{v}^+ + \beta(\tau)\mathbf{v}^- = \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

neboť uvažujeme podmínku (2.22), tj.

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}$$

a $\|\mathbf{u}_{j_k}\| \rightarrow +\infty$. Z (2.27) plyne, že $(\alpha(\tau), \beta(\tau)) \in \Sigma(\mathbf{A})$, to je ale ve sporu s předpokladem výběru $\alpha(\tau)$ a $\beta(\tau)$. Proto je homotopie definovaná v (2.24) přípustná. \blacksquare



Obrázek 2.3: Křivka γ pro (α_1, β_1) (modře) a bod (α_2, β_2) (červeně), pro který taková křivka neexistuje. Fučíkovo spektrum $\Sigma(\mathbf{A})$ pro $n = 7$.

2.2.2 Úloha v rezonanci vzhledem k Fučíkovu spektru

Uvažujeme-li $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, potom se úloze (2.1) říká *úloha v rezonanci*. Nejdříve uvažujme úlohu, kterou získáme volbou $\alpha = \beta = \lambda$ v (2.1) a nechť $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$. Princip důkazu následující věty 2.21 je stejný jako v [5]. Definujme funkce $p_+ : \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_- : \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$p_+(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(r\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle, \quad p_-(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \lim_{r \rightarrow -\infty} \langle \mathbf{g}(r\mathbf{a}), \mathbf{b} \rangle, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n, \|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1. \quad (2.28)$$

Věta 2.21. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$ a $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pro které platí*

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}. \quad (2.29)$$

Nechť \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\| = 1$, respektive \mathbf{y} , $\|\mathbf{y}\| = 1$, je vlastní vektor matice \mathbf{A} , respektive \mathbf{A}^T , příslušný vlastnímu číslu λ s vlastností $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle > 0$. Nechť funkce $p_+ : \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$, $p_- : \mathbf{S}_1 \times \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$ definované v (2.28) existují a jsou spojitě s vlastností

$$p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0 < p_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (2.30)$$

Potom má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (2.31)$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. Protože $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$, je operátor \mathbf{A}_λ singulární. Nechť $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}$ je takové, že $\bar{\lambda} \notin \sigma(\mathbf{A})$, $\bar{\lambda} < \lambda$ a interval $(\bar{\lambda}, \lambda)$ neobsahuje žádný bod z $\sigma(\mathbf{A})$. Položme pro $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$

$$\lambda_\tau = (1 - \tau)\bar{\lambda} + \tau\lambda. \quad (2.32)$$

Uvažujme $r > 0$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbf{B}_r$ a pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ homotopii

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda_\tau\mathbf{u} - \tau\mathbf{g}(\mathbf{u}). \quad (2.33)$$

Homotopie je spojitým zobrazením, neboť zobrazení \mathbf{g} je spojité. Je-li $\tau = 0$, je

$$\mathbf{H}(0, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \bar{\lambda}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r,$$

tj. podle lemmatu 2.17 pro Brouwerův stupeň zobrazení \mathbf{H}_0 platí

$$\deg(\mathbf{H}(0, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0.$$

Je-li $\tau = 1$, potom

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \lambda\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r.$$

Je-li homotopie definovaná v (2.33) přípustná, potom z vlastnosti (c) věty 2.15 plyne, že

$$\deg(\mathbf{H}(1, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}(0, \cdot), \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \pm 1 \neq 0,$$

a tedy podle vlastnosti (b) věty 2.15 existuje $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{B}_r$ tak, že

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}_0) = \mathbf{0},$$

tj. existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.31).

Dokažme, že homotopie definovaná v (2.33) je přípustná, tj. že pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$ je $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$. Důkaz provedeme sporem. Pokud by homotopie přípustná nebyla, pak existují posloupnosti $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ a $\{\tau_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \langle 0, 1 \rangle$ takové, že $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$ pro $j \rightarrow +\infty$ a

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j - \lambda_{\tau_j}\mathbf{u}_j - \tau_j\mathbf{g}(\mathbf{u}_j) = \mathbf{0}, \quad (2.34)$$

tj. $\mathbf{H}(\tau_j, \mathbf{u}_j) = \mathbf{0}$. Položme

$$\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|},$$

tj. $\|\mathbf{v}_j\| = 1$ a $\mathbf{v}_j \in \mathbf{S}_1$.

Z posloupností $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnosti, protože tyto posloupnosti jsou omezené. Omezenost $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$ plyne z omezenosti $\{\mathbf{v}_j\}$ a (1.23). Označme vybrané konvergentní podposloupnosti pro jednoduchost opět $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$. Stejnou úvahou (interval $\langle 0, 1 \rangle$ je omezený) vybereme z posloupnosti $\{\tau_j\}$ konvergentní podposloupnost, kterou opět pro jednoduchost označíme $\{\tau_j\}$. Limitní prvky označme

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{v}_j = \mathbf{v}, \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \tau_j = \tau \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Vydělením (2.34) $\|\mathbf{u}_j\|$ a využitím (2.32) dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j - (1 - \tau_j)\bar{\lambda}\mathbf{v}_j - \tau_j\lambda\mathbf{v}_j - \tau_j\frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_j\|} = \mathbf{0}. \quad (2.35)$$

Limitním přechodem v (2.35) pro $j \rightarrow +\infty$ dostaneme

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - (1 - \tau)\bar{\lambda}\mathbf{v} - \tau\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

neboť podle (2.29) je

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}$$

a $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$. Rovnici (2.36) můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \lambda_\tau\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

tj. $\lambda_\tau \in \sigma(\mathbf{A})$. Díky volbě λ_τ v (2.32) je $\lambda_\tau = \lambda$, tj. pro τ jako limitní prvek posloupnosti $\{\tau_j\}$ platí $\tau = 1$. Dále, $\mathbf{v} \in \mathbf{S}_1$ a je vlastním vektorem příslušným vlastnímu číslu λ , tj. $\mathbf{v} = \mathbf{x}$ nebo $\mathbf{v} = -\mathbf{x}$.

Uvažujme nejdříve $\mathbf{v} = \mathbf{x}$. Necht' $\mathbf{P} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je zobrazení

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y},$$

kde \mathbf{y} je vlastní vektor matice \mathbf{A}^T příslušný vlastnímu číslu λ . Protože je

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}\mathbf{u}_j) = \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_j, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{A}^T \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} = \lambda \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} = \lambda \mathbf{P}(\mathbf{u}_j),$$

dostaneme z (2.34)

$$(\lambda - \lambda_{\tau_j})\mathbf{P}(\mathbf{u}_j) - \tau_j \mathbf{P}(\mathbf{g}(\mathbf{u}_j)) = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Rovnici (2.37) můžeme zapsat v ekvivalentních tvarech

$$\begin{aligned} (\lambda - \lambda_{\tau_j})\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} - \tau_j \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ (\lambda - \lambda_{\tau_j})\|\mathbf{u}_j\| \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{y} \rangle \|\mathbf{u}_j\|^{-1} \mathbf{y} - \tau_j \langle \mathbf{g}(\|\mathbf{u}_j\| \|\mathbf{u}_j\|^{-1} \mathbf{u}_j), \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} &= \mathbf{0}, \\ (\lambda - \lambda_{\tau_j})\|\mathbf{u}_j\| \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} - \tau_j \langle \mathbf{g}(\|\mathbf{u}_j\| \mathbf{v}_j), \mathbf{y} \rangle \mathbf{y} &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Protože $\mathbf{v}_j \rightarrow \mathbf{x}$ a $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle > 0$, od dostatečně velkého $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{sgn}(\mathbf{v}_j(t)) = \text{sgn}(\mathbf{x}(t)) \quad \text{pro } t \in \{0, \dots, n-1\},$$

tedy $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{y} \rangle > 0$. Celkem od dostatečně velkého $j \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$0 = -(\lambda - \lambda_{\tau_j})\|\mathbf{u}_j\| \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{y} \rangle + \tau_j \langle \mathbf{g}(\|\mathbf{u}_j\| \mathbf{v}_j), \mathbf{y} \rangle \leq \langle \mathbf{g}(\|\mathbf{u}_j\| \mathbf{v}_j), \mathbf{y} \rangle, \quad (2.38)$$

neboť $(\lambda - \lambda_{\tau_j})\|\mathbf{u}_j\| \langle \mathbf{v}_j, \mathbf{y} \rangle > 0$. Definujme funkci $\varphi : \langle 0, 1 \rangle \times \mathbf{S}_1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(r, \mathbf{w}) = \begin{cases} \langle \mathbf{g}(r^{-1} \mathbf{w}), \mathbf{y} \rangle & \text{pro } r \neq 0, \mathbf{w} \in \mathbf{S}_1, \\ p_+(\mathbf{w}, \mathbf{y}) & \text{pro } r = 0, \mathbf{w} \in \mathbf{S}_1. \end{cases}$$

Protože funkce p_+ definovaná v (2.28) je spojitá, dostaneme pro $\|\mathbf{u}_j\| \neq 0$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi(\|\mathbf{u}_j\|^{-1}, \mathbf{v}_j) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(\|\mathbf{u}_j\| \mathbf{v}_j), \mathbf{y} \rangle = p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

a pro $\|\mathbf{u}_j\| = 0$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \varphi(\|\mathbf{u}_j\|^{-1}, \mathbf{v}_j) = p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Protože platí (2.38), je

$$0 \leq p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

což je ale ve sporu s předpokladem (2.30).

Uvažujeme-li $\mathbf{v} = -\mathbf{x}$, potom opět dojdeme stejným způsobem ke sporu. Proto je homotopie definovaná v (2.33) přípustná. ■

Příklad 2.22. Necht' $n = 3$. Pak má matice \mathbf{A} tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}. \quad (2.39)$$

Zajímá nás, zda má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{u} + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (2.40)$$

pro $\lambda \in \mathbb{R}$ a konkrétní volbu \mathbf{g} alespoň jedno řešení. Zvolme \mathbf{g} ve tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = -\arctg(\mathbf{u}) + \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -\arctg u_0 + f_0 \\ -\arctg u_1 + f_1 \\ -\arctg u_2 + f_2 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

kde $\mathbf{f} = [f_0, f_1, f_2]^T \in \mathbb{R}^n$, tj. \mathbf{g} je spojitě. Pro takovou volbu je

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{-\arctg(\mathbf{u}) + \mathbf{f}}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0},$$

neboť \mathbf{g} je omezené.

Bodové spektrum matice \mathbf{A} v (2.40) má tvar

$$\sigma(\mathbf{A}) = \{0, 2, 4\}.$$

Pokud zvolíme $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$, pak plyne z věty 2.18, že úloha (2.40) má pro \mathbf{g} tvaru (2.40) a libovolné \mathbf{f} alespoň jedno řešení. Zabýváme se dále případem $\lambda \in \sigma(\mathbf{A})$.

Nejdříve zvolme $\lambda = 0$. Pak

$$\mathbf{x} = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right]^T, \quad \mathbf{y} = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right]^T.$$

Funkce p_+ definovaná v (2.28) má tvar

$$\begin{aligned} p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \lim_{r \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\arctg \frac{r}{\sqrt{3}} + f_0 \right) + \sqrt{\frac{2}{3}} \left(-\arctg \frac{r}{\sqrt{3}} + f_1 \right) + \frac{1}{\sqrt{6}} \left(-\arctg \frac{r}{\sqrt{3}} + f_2 \right) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} (-2\pi + f_0 + 2f_1 + f_2) \end{aligned}$$

a funkce p_- má tvar

$$p_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\pi + f_0 + 2f_1 + f_2).$$

Podmínka (2.30) ve větě 2.21, tj.

$$p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < 0 < p_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

je splněna, pokud platí

$$(-2\pi + f_0 + 2f_1 + f_2) < 0 < (2\pi + f_0 + 2f_1 + f_2). \quad (2.42)$$

Tedy, podle věty 2.21 má úloha (2.40) pro $\lambda = 0$ a pro \mathbf{g} tvaru (2.41) alespoň jedno řešení, pokud je splněna podmínka (2.42).

Zvolme $\lambda = 2$. Pak

$$\mathbf{x} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T, \quad \mathbf{y} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]^T,$$

funkce p_+ má tvar

$$p_+(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-\pi - f_0 + f_2}{2}$$

a funkce p_- má tvar

$$p_-(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\pi - f_0 + f_2}{2}.$$

Je-li splněno

$$-\pi - f_0 + f_2 < 0 < \pi - f_0 + f_2,$$

f_2 libovolné, pak má úloha (2.40) pro $\lambda = 2$ a pro \mathbf{g} tvaru (2.41) alespoň jedno řešení.

A pro $\lambda = 4$ má úloha (2.40) pro \mathbf{g} tvaru (2.41) alespoň jedno řešení, pokud je splněno

$$-2\pi + f_0 - 2f_1 + f_2 < 0 < 2\pi + f_0 - 2f_1 + f_2.$$

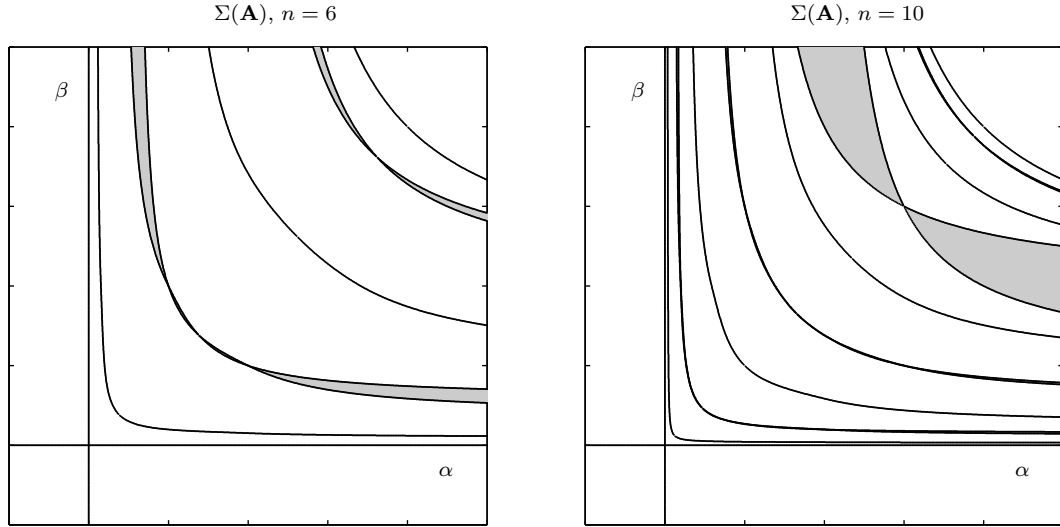
Pokud bychom v příkladu volili opačné vlastní vektory (tj. $-\mathbf{x}$), dostali bychom jiné podmínky řešitelnosti. \square

Definice 2.23. [7] Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Fučíkovo spektrum $\Sigma(\mathbf{B})$ rozdělí rovinu $\alpha\beta$ na regiony typu I a regiony typu II:

- (i) Regiony typu I jsou komponenty $R^I \subset \Sigma(\mathbf{B})^C$ takové, že obsahují alespoň jeden bod (λ, λ) , $\lambda \notin \sigma(\mathbf{B})$.
- (ii) Regiony typu II jsou komponenty $R^{II} \subset \Sigma(\mathbf{B})^C$ takové, že neobsahují žádné body (λ, λ) , $\lambda \notin \sigma(\mathbf{B})$.

□

Na obrázku 2.4 jsou regiony R^I a R^{II} .



Obrázek 2.4: Regiony R^{II} (šedě) a regiony R^I (bíle) pro $\Sigma(\mathbf{A})$, $n = 6$ (vlevo), $n = 10$ (vpravo).

Zdefinujme následující pojmy [7]. Necht $\mathbf{B} \in \mathbb{M}_n$. Označme $\varphi_{\alpha,\beta}$ Fučíkovův vlastní vektor příslušný Fučíkovu vlastnímu číslu $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{B})$. Fučíkovo vlastní číslo nazýváme jednoduchým, pokud existuje právě jeden Fučíkův vlastní vektor $\varphi_{\alpha,\beta}$, $\|\varphi_{\alpha,\beta}\| = 1$, a všechny ostatní Fučíkovy vlastní vektory jsou jejím kladným násobkem.

Problém

$$\mathbf{B}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^- = \mathbf{0}$$

můžeme zapsat ekvivalentně jako

$$\left(\mathbf{B}\mathbf{u} - (\alpha\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^+) + \beta\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^-))\right)\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (2.43)$$

kde

$$\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^\pm(t)) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \varphi_{\alpha,\beta}^\pm(t) \neq 0, \\ 0 & \text{pokud } \varphi_{\alpha,\beta}^\pm(t) = 0. \end{cases}$$

K (2.43) můžeme definovat adjungovaný problém

$$\mathbf{B}^T\mathbf{u} = (\alpha\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^+) + \beta\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^-))\mathbf{u}. \quad (2.44)$$

Netriviální řešení (2.44) se nazývá adjungovaným Fučíkovým vlastním vektorem pro (α, β) a $\varphi_{\alpha,\beta}$. Budeme jej značit $\psi_{\alpha,\beta}$.

Důkaz následujícího lemmatu 2.24 je podobný jako v [7]. Rozdíl je v tom, že autoři článku využívají v důkazu *Lerayův-Schauderův stupeň zobrazení* (definici Lerayova-Schauderova stupně zobrazení můžeme najít v [3]) pro spojitý operátor L a tedy definují stupeň zobrazení pro operátor $I - L$, kde I je identický operátor. Dále jsou v lemmatu 2.24 použity slabší požadavky na funkci \mathbf{g} a podmínky, za kterých má problém alespoň jedno řešení, jsou obecnější. V poznámce 2.25 jsou uvedeny konkrétní podmínky, které lze pro pevné Fučíkovo vlastní číslo (α, β) a funkci \mathbf{g} lépe ověřit.

Věta 2.24. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$ je Fučíkovo vlastní číslo matice \mathbf{A} s příslušnými Fučíkovými vlastními vektory $\varphi_{\alpha, \beta}$, $\|\varphi_{\alpha, \beta}\| = 1$. Nechť $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ je spojitě zobrazení, pro které platí*

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

a necht' pro všechny Fučíkovy vlastní vektory $\varphi_{\alpha, \beta}$ je $\psi_{\alpha, \beta}$, $\|\psi_{\alpha, \beta}\| = 1$, příslušný adjungovaný Fučíkův vlastní vektor splňující $\langle \varphi_{\alpha, \beta}, \psi_{\alpha, \beta} \rangle > 0$. Pokud existuje $\varepsilon \neq 0$ takové, že $(\alpha + \tau\varepsilon, \beta + \tau\varepsilon) \in \mathbb{R}^I$ pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pokud pro všechny Fučíkovy vlastní vektory $\varphi_{\alpha, \beta}$ a pro každou posloupnost $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$ takovou, že $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$ a $\frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|} \rightarrow \varphi_{\alpha, \beta}$, platí

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \psi_{\alpha, \beta} \rangle \begin{cases} > 0 & \text{pokud } \varepsilon > 0, \\ < 0 & \text{pokud } \varepsilon < 0, \end{cases} \quad (2.46)$$

potom má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad (2.47)$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. Definujme homotopii $\mathbf{H} : \langle 0, 1 \rangle \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) = \tau(\mathbf{A}\mathbf{u} - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{u}^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{u}^-) + (1 - \tau)(\mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^- - \mathbf{g}(\mathbf{u})). \quad (2.48)$$

Označme pro $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ homotopii $\mathbf{H}_\tau = \mathbf{H}(\tau, \mathbf{u})$. Homotopie je spojitým zobrazením, neboť zobrazení \mathbf{g} je spojitě. Dále definujme dvě spojitá zobrazení

$$\mathbf{A}_{\alpha, \beta} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^-, \quad \mathbf{A}_{\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{u} - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{u}^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{u}^-.$$

Je-li $\tau = 0$, potom

$$\mathbf{H}(0, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \alpha\mathbf{u}^+ + \beta\mathbf{u}^- - \mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}_{\alpha, \beta}\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r,$$

a naopak, je-li $\tau = 1$, pak

$$\mathbf{H}(1, \mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{u}^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{u}^- = \mathbf{A}_{\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon}\mathbf{u} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{B}_r.$$

Je-li homotopie \mathbf{H} přípustná, tj. je-li \mathbf{H} spojitým zobrazením definovaným na $\overline{\mathbf{B}}_r$ s hodnotami v \mathbb{R}^n takovým, že $\mathbf{H}_\tau(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$ pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$, pak platí

$$\deg(\mathbf{H}_0, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}).$$

Brouwerův stupeň zobrazení $\mathbf{A}_{\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon}$ je konstantní pro jakoukoliv komponentu $\Sigma(\mathbf{A})^C$, protože pro tuto komponentu platí

$$\mathbf{A}\mathbf{u} - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{u}^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{u}^- = \mathbf{0} \iff \mathbf{u} = \mathbf{0},$$

tj. $\mathbf{u} \notin \mathbf{S}_1$. Navíc $(\alpha + \varepsilon, \beta + \varepsilon) \in \mathbb{R}^I$, takže díky lemmatům 2.20 a 2.17 je

$$\deg(\mathbf{H}_0, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{H}_1, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{A}_{\alpha+\varepsilon, \beta+\varepsilon}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = \deg(\mathbf{A}_{\lambda, \lambda}, \mathbf{B}_r, \mathbf{0}) = (-1)^\gamma = \pm 1,$$

kde $\lambda \notin \sigma(\mathbf{A})$ a γ je definováno v lemmatu 2.17 a tedy existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.47).

Dokažme, že hotopie definovaná v (2.48) je přípustná, tj. že existuje dostatečně velké $r > 0$ takové, že pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pro všechna $\mathbf{u} \in \mathbf{S}_r$ je $\mathbf{H}(\tau, \mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$. Důkaz provedeme sporem. Necht' existují posloupnosti $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \mathbb{R}^n$, $\{\tau_j\}_{j=1}^{+\infty} \subset \langle 0, 1 \rangle$ takové, že $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$, $\tau_j \rightarrow \tau$ a

$$\mathbf{H}(\tau_j, \mathbf{u}_j) = \mathbf{0},$$

neboli

$$\tau_j(\mathbf{A}\mathbf{u}_j - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{u}_j^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{u}_j^-) + (1 - \tau_j)(\mathbf{A}\mathbf{u}_j - \alpha\mathbf{u}_j^+ + \beta\mathbf{u}_j^- - \mathbf{g}(\mathbf{u}_j)) = \mathbf{0}. \quad (2.49)$$

Vydělíme-li (2.49) $\|\mathbf{u}_j\|$ a označíme-li $\mathbf{v}_j = \frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|}$, tj. $\|\mathbf{v}_j\| = 1$, dostaneme

$$\tau_j (\mathbf{A}\mathbf{v}_j - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{v}_j^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{v}_j^-) + (1 - \tau_j) \left(\mathbf{A}\mathbf{v}_j - \alpha\mathbf{v}_j^+ + \beta\mathbf{v}_j^- - \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u}_j)}{\|\mathbf{u}_j\|} \right) = \mathbf{0}. \quad (2.50)$$

Posloupnost $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{+\infty}$ leží na jednotkové sféře ($\|\mathbf{v}_j\| = 1$), tedy $\|\mathbf{v}_j^\pm\| \leq 1$. Proto $\mathbf{v}_j^+, \mathbf{v}_j^- \in \overline{\mathbf{B}_1}$. Z posloupností $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{v}_j^+\}$, $\{\mathbf{v}_j^-\}$ můžeme vybrat konvergentní podposloupnosti, protože tyto posloupnosti jsou omezené. Omezenost $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$ plyne z omezenosti $\{\mathbf{v}_j\}$ a (1.23). Označme vybrané konvergentní podposloupnosti pro jednoduchost opět $\{\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{A}\mathbf{v}_j\}$, $\{\mathbf{v}_j^+\}$, $\{\mathbf{v}_j^-\}$. Přejdem k vhodným podposloupnostem dostaneme limitně v (2.50)

$$\tau (\mathbf{A}\mathbf{v} - (\alpha + \varepsilon)\mathbf{v}^+ + (\beta + \varepsilon)\mathbf{v}^-) + (1 - \tau) (\mathbf{A}\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v}^+ + \beta\mathbf{v}^-) = \mathbf{0}, \quad (2.51)$$

neboť z předpokladu (2.45) víme, že

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0}.$$

Rovnici (2.51) můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - (\alpha + \tau\varepsilon)\mathbf{v}^+ + (\beta + \tau\varepsilon)\mathbf{v}^- = \mathbf{0}.$$

Je-li $\tau \in (0, 1)$, potom $(\alpha + \tau\varepsilon, \beta + \tau\varepsilon) \notin \Sigma(\mathbf{A})$ a $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, což je ve sporu s tím, že $\|\mathbf{v}\| = 1$. Položme tedy $\tau = 0$. Potom

$$\mathbf{A}\mathbf{v} - \alpha\mathbf{v}^+ + \beta\mathbf{v}^- = \mathbf{0}.$$

a $\mathbf{v} = \varphi_{\alpha,\beta}$, $\|\mathbf{v}\| = \|\varphi_{\alpha,\beta}\| = 1$. V tomto kroku důkazu pro jednoduchost předpokládáme, že Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$ je jednoduché, tedy že existuje právě jeden Fučíkův vlastní vektor $\varphi_{\alpha,\beta}$ s vlastností $\|\varphi_{\alpha,\beta}\| = 1$. Pokud jich existuje více, je důkaz stejný, jen adjungovaný Fučíkův vlastní vektor $\psi_{\alpha,\beta}$ volíme příslušný našemu vybranému Fučíkovu vlastnímu vektoru $\varphi_{\alpha,\beta}$. A vše zopakujeme pro všechny dvojice $\varphi_{\alpha,\beta}, \psi_{\alpha,\beta}$.

Uvažujeme $\mathbf{v}_j \rightarrow \varphi_{\alpha,\beta}$ pro $j \rightarrow +\infty$, a protože se jedná o diskretní posloupnost, od dostatečně velkého $j \in \mathbb{N}$ platí

$$\text{sgn}(\mathbf{v}_j(t)) = \text{sgn}(\varphi_{\alpha,\beta}(t)), \quad \text{pro } t \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Pro vektor $\psi_{\alpha,\beta}$ (adjungovaný Fučíkův vlastní vektor) platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \alpha\mathbf{v}_j^+ + \beta\mathbf{v}_j^-, \psi_{\alpha,\beta} \rangle &= \left\langle \left(\mathbf{A} - (\alpha\chi(\mathbf{v}_j^+) + \beta\chi(\mathbf{v}_j^-)) \right) \mathbf{v}_j, \psi_{\alpha,\beta} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\mathbf{A} - (\alpha\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^+) + \beta\chi(\varphi_{\alpha,\beta}^-)) \right) \mathbf{v}_j, \psi_{\alpha,\beta} \right\rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Rovnice (2.49) je ekvivalentní s

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_j - \alpha\mathbf{u}_j^+ + \beta\mathbf{u}_j^- - (1 - \tau_j)\mathbf{g}(\mathbf{u}_j) - \tau_j\varepsilon\mathbf{u}_j^+ + \tau_j\varepsilon\mathbf{u}_j^- = \mathbf{0} \quad (2.53)$$

Vynásobíme-li skalárně (2.53) adjungovanou Fučíkovou vlastní funkcí $\psi_{\alpha,\beta}$, dostaneme díky $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-$ a (2.52)

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_j - \alpha\mathbf{u}_j^+ + \beta\mathbf{u}_j^- - \tau_j\varepsilon\mathbf{u}_j - (1 - \tau_j)\mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \psi_{\alpha,\beta} \rangle \\ &= \langle \mathbf{A}\mathbf{u}_j - \alpha\mathbf{u}_j^+ + \beta\mathbf{u}_j^-, \psi_{\alpha,\beta} \rangle - \tau_j\varepsilon\langle \mathbf{u}_j, \psi_{\alpha,\beta} \rangle - (1 - \tau_j)\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \psi_{\alpha,\beta} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}_j\| \langle \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \alpha\mathbf{v}_j^+ + \beta\mathbf{v}_j^-, \psi_{\alpha,\beta} \rangle - \tau_j\|\mathbf{u}_j\| \varepsilon \langle \mathbf{v}_j, \psi_{\alpha,\beta} \rangle - (1 - \tau_j)\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \psi_{\alpha,\beta} \rangle \\ &= -\tau_j\|\mathbf{u}_j\| \varepsilon \langle \mathbf{v}_j, \psi_{\alpha,\beta} \rangle - (1 - \tau_j)\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \psi_{\alpha,\beta} \rangle \end{aligned} \quad (2.54)$$

V předpokladech uvažujeme $\langle \varphi_{\alpha,\beta}, \psi_{\alpha,\beta} \rangle > 0$, tedy pro dostatečně velké $j \in \mathbb{N}$ platí $\langle \mathbf{v}_j, \psi_{\alpha,\beta} \rangle > 0$.

Uvažujme $\varepsilon > 0$. Rovnost v (2.54), tj.

$$0 \leq \tau_j \|\mathbf{u}_j\| \varepsilon \langle \mathbf{v}_j, \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle = -(1 - \tau_j) \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle,$$

je splněna pokud

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle \leq 0.$$

Naopak, uvažujeme-li $\varepsilon < 0$, pak je rovnost v (2.54), tj.

$$0 \geq \tau_j \|\mathbf{u}_j\| \varepsilon \langle \mathbf{v}_j, \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle = -(1 - \tau_j) \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle,$$

splněna pokud

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle \geq 0.$$

Celkem platí

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle \begin{cases} \leq 0 & \text{pokud } \varepsilon > 0, \\ \geq 0 & \text{pokud } \varepsilon < 0. \end{cases} \quad (2.55)$$

Limitním přechodem v (2.55) pro $j \rightarrow +\infty$ dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle \begin{cases} \leq 0 & \text{pokud } \varepsilon > 0, \\ \geq 0 & \text{pokud } \varepsilon < 0, \end{cases}$$

což je ve sporu s předpokladem (2.46). Homotopie definovaná v (2.48) je tedy přípustná. \blacksquare

Uvažujme zobrazení $\mathbf{h} : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{h}(\mathbf{u})$, které je spojitě, omezené a je ve tvaru

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} h(u_0) \\ \vdots \\ h(u_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (2.56)$$

kde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a $\mathbf{u} = [u_0, \dots, u_{n-1}]^T$. Označme limity

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} h(r) = h(+\infty), \quad \lim_{r \rightarrow -\infty} h(r) = h(-\infty).$$

Věta 2.25. *Nechť \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$ je Fučíkovo vlastní číslo matice \mathbf{A} s příslušnými Fučíkovými vlastními vektory $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}$, $\|\boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}\| = 1$. Nechť \mathbf{h} je zobrazení, které je definováno v (2.56) a \mathbf{f} je pevné. Nechť pro všechny Fučíkovy vlastní vektory $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}$ je $\boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta}$, $\|\boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta}\| = 1$, příslušný adjungovaný Fučíkův vlastní vektor splňující $\langle \boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}, \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta} \rangle > 0$. Pokud existuje $\varepsilon \neq 0$ takové, že $(\alpha + \tau\varepsilon, \beta + \tau\varepsilon) \in \mathbb{R}^I$ pro všechna $\tau \in \langle 0, 1 \rangle$ a pokud pro všechny Fučíkovy vlastní vektory $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}$ platí*

$$h(+\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}(t) > 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta}(t) + h(-\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha,\beta}(t) < 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta}(t) + \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\psi}_{\alpha,\beta}(t) \leq 0 \quad \text{pokud } \varepsilon \leq 0,$$

potom má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (2.57)$$

alespoň jedno řešení.

Důkaz. Uvažujme funkci \mathbf{g} tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}.$$

Pak tato funkce splňuje

$$\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow +\infty} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|} = \mathbf{0},$$

tj. má vlastnost (2.45). Tím máme splněny předpoklady věty 2.24 a pokud je splněno

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta} \rangle \begin{cases} > 0 & \text{pokud } \varepsilon > 0, \\ < 0 & \text{pokud } \varepsilon < 0, \end{cases}$$

tj. (2.46), pak má úloha

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f}$$

alespoň jedno řešení. Uvažujme posloupnost $\{\mathbf{u}_j\}_{j=1}^{+\infty}$ takovou, že $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$ a $\frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}$. Necht' $\varepsilon > 0$. Pak má podmínka v (2.46) tvar

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{g}(\mathbf{u}_j), \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta} \rangle = \lim_{j \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{h}(\mathbf{u}_j) + \mathbf{f}, \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta} \rangle > 0.$$

Rozepsáním skalárního součinu dostaneme

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{u}_j(t)) \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) + \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) > 0. \quad (2.58)$$

Protože uvažujeme posloupnost $\{\mathbf{u}_j\}$ takovou, že $\|\mathbf{u}_j\| \rightarrow +\infty$ a $\frac{\mathbf{u}_j}{\|\mathbf{u}_j\|} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}$, je pro dostatečně velké j

$$\text{sgn}(\mathbf{u}_j(t)) = \text{sgn}(\boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}(t)), \quad \text{pro } t \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Pro první sumu v (2.58) dostaneme

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{h}(\mathbf{u}_j(t)) \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) &= \sum_{t=0}^{n-1} \lim_{j \rightarrow +\infty} \mathbf{h}(\mathbf{u}_j(t)) \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) \\ &= h(+\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}(t) > 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) + h(-\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}(t) < 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t). \end{aligned}$$

Stejným postupem dostaneme podmínku pro $\varepsilon < 0$. Celkem podmínka (2.46) v lemmatu 2.24 má za našich předpokladů tvar

$$h(+\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}(t) > 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) + h(-\infty) \sum_{\substack{t=0 \\ \boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta}(t) < 0}}^{n-1} \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) + \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{f}(t) \boldsymbol{\psi}_{\alpha, \beta}(t) \leq 0 \quad \text{pokud } \varepsilon \leq 0. \quad (2.59)$$

■

Poznámka 2.26. Necht' \mathbf{A} je definována v (2.2), $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$. Pak ke každému Fučikovu vlastnímu vektoru $\boldsymbol{\varphi}_{\alpha, \beta} = [\varphi_0, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-2}, \varphi_{n-1}]^T$ existuje Fučikův vlastní vektor $\overline{\boldsymbol{\varphi}}_{\alpha, \beta} = [\varphi_{n-1}, \varphi_{n-2}, \dots, \varphi_1, \varphi_0]^T$. Pokud platí pro alespoň jedno $t \in \{0, \dots, n-1\}$

$$\varphi(t) \neq \varphi(n-t),$$

pak je násobnost Fučikova vlastního čísla (α, β) minimálně dvě. □

Na obrázku 2.5 je ilustrace řešitelnosti úlohy

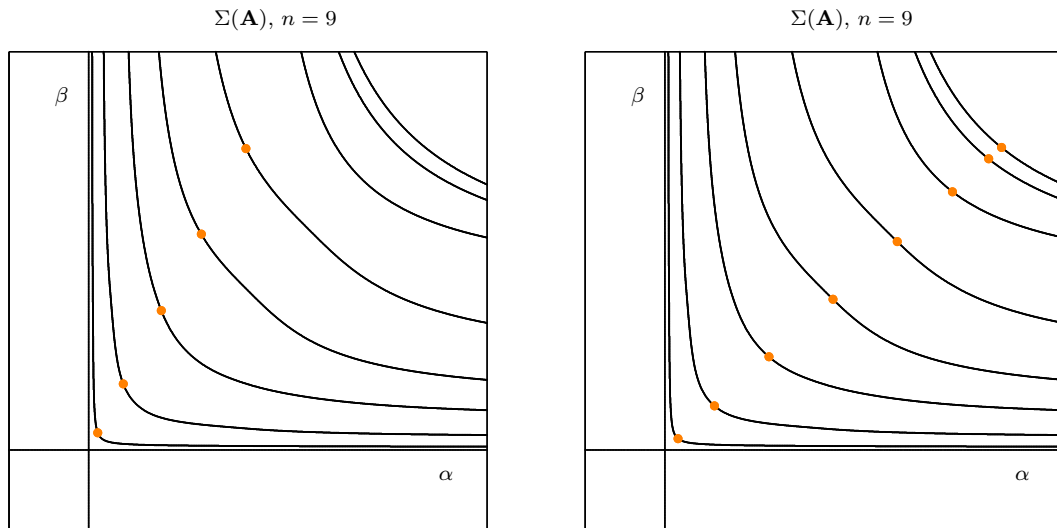
$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (2.60)$$

pro $n = 9$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = [-\arctg u_0, \dots, -\arctg u_{n-1}]^T$, $\mathbf{f} = [5, \dots, 5]^T$ a $\mathbf{f} = [-30, \dots, -30]^T$.

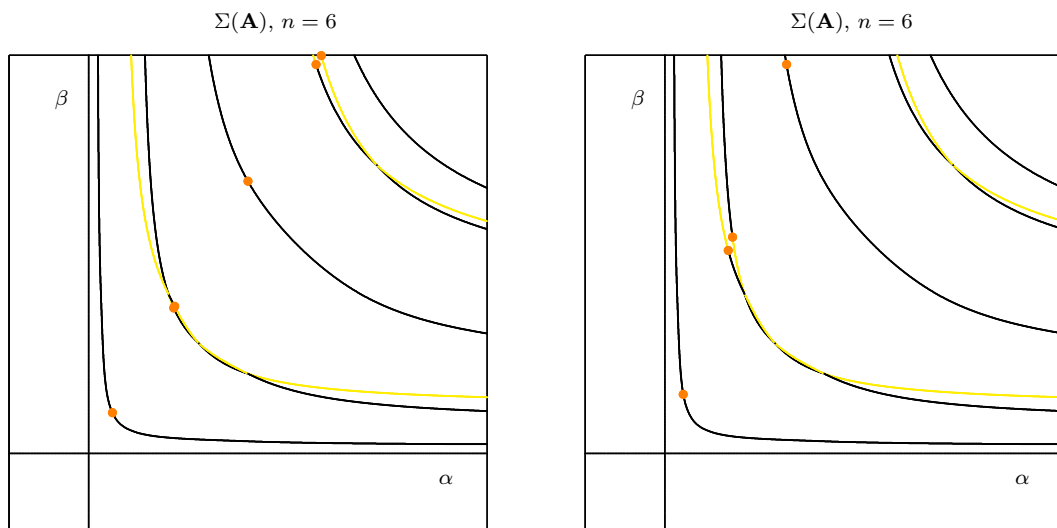
Na obrázku 2.6 je ilustrace řešitelnosti úlohy

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}^+ - \beta\mathbf{u}^- + \mathbf{h}(\mathbf{u}) + \mathbf{f} \quad (2.61)$$

pro $n = 6$, $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, $\mathbf{h}(\mathbf{u}) = [-\arctg u_0, \dots, -\arctg u_{n-1}]^T$, $\mathbf{f} = [6, \dots, 6]^T$ a $\mathbf{f} = [3, \dots, 3]^T$.



Obrázek 2.5: Řešitelnost úlohy (2.60) pro $\mathbf{f} = [5, \dots, 5]^T$ (vlevo) a $\mathbf{f} = [-30, \dots, -30]^T$ (vpravo) pro $n = 9$. Oranžově je Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, pro které neumíme o řešitelnosti rozhodnout a černě je Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, pro které existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.60).



Obrázek 2.6: Řešitelnost úlohy (2.61) pro $\mathbf{f} = [6, \dots, 6]^T$ (vlevo) a $\mathbf{f} = [3, \dots, 3]^T$ (vpravo) pro $n = 6$. Oranžově je Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, pro které neumíme o řešitelnosti rozhodnout (levá strana (2.59) je rovna nule), žlutě je Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, pro které neumíme o řešitelnosti rozhodnout (podmínka (2.59) není splněna pro všechny Fučíkovy vlastní vektory) a černě je Fučíkovo vlastní číslo $(\alpha, \beta) \in \Sigma(\mathbf{A})$, pro které existuje alespoň jedno řešení úlohy (2.61).

Kapitola 3

Dirichletova okrajová úloha

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálně-diferenční úlohou. Nejdříve ale budeme uvažovat pomocné úlohy - spojitou a diskretní.

Nechť $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < q \in \mathbb{R}$. Označme $\mathbb{T} = (-q, +q)$ (viz obrázek 3.1). Uvažujme *diferenciální* Dirichletovu okrajovou úlohu tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \mathbb{T}, \\ u(-q) = u(+q) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$



Obrázek 3.1: Množina $\mathbb{T} = (-q, +q)$.

Věta 3.1. *Úloha (3.1) má netriviální řešení právě tehdy, když*

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{q}\right)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \lambda_m = \left(\frac{(2m+1)\pi}{2q}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Důkaz. Odvození je zcela analogické jako v [11], kde je uvažována úloha s Neumannovými okrajovými podmínkami. ■

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < q \in \mathbb{R}$. Označme $h = \frac{2q}{n+1}$ a $\mathbb{T} = \{-q+h, \dots, -q+nh\}$ (viz obrázek 3.2). Uvažujme *diferenční* Dirichletovu okrajovou úlohu tvaru

$$\begin{cases} \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \mathbb{T}, \\ u(-q) = u(+q) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

kde $\Delta u(t) = \frac{u(t+h) - u(t)}{h}$ je dopředná diference a $\nabla u(t) = \frac{u(t) - u(t-h)}{h}$ je zpětná diference. Zavedme značení

$$U_0 = u(-q), \quad U_1 = u(-q+h), \dots, \quad U_n = u(-q+nh), \quad U_{n+1} = u(+q).$$

Pak úlohu (3.2) můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\begin{cases} \Delta \nabla U_i + \lambda U_i = 0, & i \in \{1, \dots, n\}, \\ U_0 = U_{n+1} = 0. \end{cases}$$

Pro $i \in \{1, \dots, n\}$ je

$$\Delta \nabla U_i = \Delta \frac{U_i - U_{i-1}}{h} = \frac{U_{i+1} - U_i}{h^2} - \frac{U_i - U_{i-1}}{h^2} = \frac{1}{h^2}(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}).$$

Pro $i = 1$ využitím okrajové podmínky $U_0 = 0$ dostaneme

$$\Delta \nabla U_1 = \frac{1}{h^2}(U_0 - 2U_1 + U_2) = \frac{1}{h^2}(-2U_1 + U_2)$$

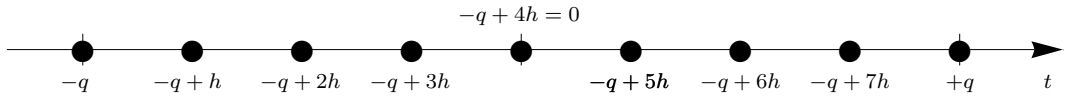
a pro $i = n$ využitím $U_{n+1} = 0$ dostaneme

$$\Delta \nabla U_n = \frac{1}{h^2}(U_{n-1} - 2U_n + U_{n+1}) = \frac{1}{h^2}(U_{n-1} - 2U_n).$$

Úlohu (3.2) tedy můžeme napsat v maticovém tvaru $\mathbf{D}u = \lambda u$, kde

$$\mathbf{D} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & & \\ & & & & & -1 & 2 & & \\ & & & & & & -1 & 2 & \\ & & & & & & & & \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

je čtvercová symetrická třídiagonální matice typu $n \times n$. Úloha (3.2) má netriviální řešení právě tehdy, když λ jsou vlastní čísla matice \mathbf{D} , což zformulujeme do následující věty 3.2.



Obrázek 3.2: Množina $\mathbb{T} \cup \{-q, +q\} = \{-q+h, \dots, -q+nh\} \cup \{-q, +q\}$ pro $n = 7$ (n liché).

Věta 3.2. Úloha (3.2) má netriviální řešení právě tehdy, když

$$\lambda_k = \left(\frac{n+1}{q} \right)^2 \sin^2 \frac{k\pi}{2(n+1)}, \quad k \in \{1, \dots, n\}.$$

Důkaz. Princip důkazu je stejný jako v lemmatu 1.10. ■

Poznámka 3.3. Úlohu (3.2) můžeme ekvivalentně definovat tak, že místo členu $\Delta \nabla u(t)$ použijeme

$$\nabla \Delta u(t) \quad \text{nebo} \quad \Delta \Delta u(t-h) \quad \text{nebo} \quad \nabla \nabla u(t+h),$$

neboť je

$$\begin{aligned} \Delta \nabla u(t) &= \Delta \frac{u(t) - u(t-h)}{h} = \frac{u(t+h) - u(t)}{h^2} - \frac{u(t) - u(t-h)}{h^2}, \\ \nabla \Delta u(t) &= \nabla \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{u(t+h) - u(t)}{h^2} - \frac{u(t) - u(t-h)}{h^2} = \Delta \nabla u(t), \\ \Delta \Delta u(t-h) &= \Delta \frac{u(t) - u(t-h)}{h} = \frac{u(t+h) - u(t)}{h^2} - \frac{u(t) - u(t-h)}{h^2} = \Delta \nabla u(t), \\ \nabla \nabla u(t+h) &= \nabla \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = \frac{u(t+h) - u(t)}{h^2} - \frac{u(t) - u(t-h)}{h^2} = \Delta \nabla u(t). \end{aligned}$$

□

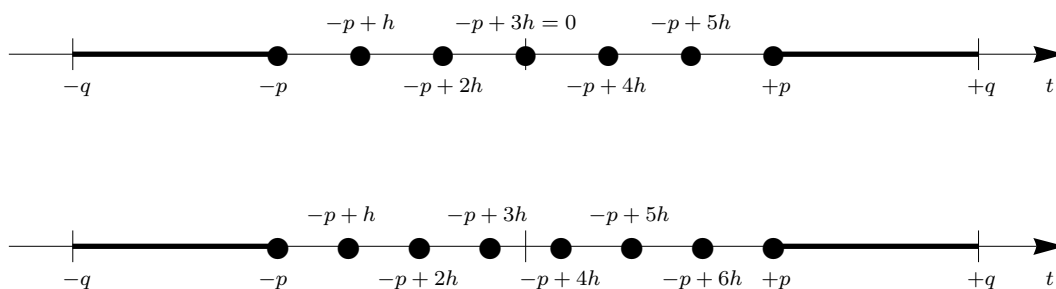
3.1 Kombinace diferenciálních a diferenčních rovnic

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < p \in \mathbb{R}$, $p < q \in \mathbb{R}$. Označme $h = \frac{2p}{n+1}$ a označme

$$\mathbb{T} = (-q, -p) \cup (+p, +q) \cup \{-p, -p+h, \dots, -p+nh, +p\}. \quad (3.4)$$

Na obrázku 3.3 jsou příklady množin \mathbb{T} pro sudé a liché n . Uvažujme *diferenciálně-diferenční* Dirichletovu okrajovou úlohu tvaru

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (-q, -p) \cup (+p, +q), \\ \nabla \Delta u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p, -p+h, \dots, -p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \right\}, \\ \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h, \dots, -p+nh, +p \right\}, \\ u(-q) = u(+q) = 0. \end{cases} \quad (3.5)$$



Obrázek 3.3: Množina \mathbb{T} definovaná v (3.4) pro liché $n = 5$ (nahore) a sudé $n = 6$ (dole).

Poznámka 3.4. Je-li n sudé, pak je $-p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \neq -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h$. Je-li n liché, pak

$-p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h = -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h = 0$. Protože je $\Delta \nabla u(0) = \nabla \Delta u(0)$, jsou pro $t = 0$ diskrétní rovnice v (3.5) shodné. \square

Poznámka 3.5. Pokud je $n = 0$, potom má množina \mathbb{T} definovaná v (3.4) tvar

$$\mathbb{T} = (-q, -p) \cup (+p, +q) \cup \{-p, +p\}$$

a úloha (3.5) má tvar

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (-q, -p) \cup (+p, +q), \\ \nabla \Delta u(-p) + \lambda u(-p) = 0, \\ \Delta \nabla u(+p) + \lambda u(+p) = 0, \\ u(-q) = u(+q) = 0. \end{cases}$$

\square

Zajímají nás hodnoty λ , pro které má úloha (3.5) netriviální řešení u . Uvedeme dva způsoby, jak taková čísla získat. Označme $I = I_1 \cup I_2 = (-q, -p) \cup (+p, +q)$. Netriviální řešení na intervalu I_1 označme u_1 a na intervalu I_2 jej označme u_2 . Dále označme

$$U_0 = u(-p) = u_1(-p), \quad U_1 = u(-p+h), \dots, U_n = u(-p+nh), \quad U_{n+1} = u(+p) = u_2(+p).$$

3.1.1 Metoda střelby

V této části k nalezení čísel λ , pro která má úloha (3.5) netriviální řešení u , využijeme řešení tří počátečních úloh. Uvažujme $\lambda > 0$.

1. Uvažujme diferenciální počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_1''(t) + \lambda u_1(t) = 0, & t \in I_1, \\ u_1(-q) = 0, \\ u_1'(-q) = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

Řešení úlohy (3.6) má tvar

$$u_1(t) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}t) + \frac{\cos(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}t).$$

2. Uvažujme diferenční počáteční úlohu

$$\begin{cases} \nabla \Delta u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p, -p+h, \dots, -p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \right\}, \\ \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h, \dots, -p + nh, +p \right\}, \\ u(-p) = u_1(-p), \\ \nabla u(-p) = u_1'(-p), \end{cases} \quad (3.7)$$

kde $u_1'(-p)$ rozumíme limitu zleva $\lim_{t \rightarrow -p^-} u_1'(t)$ a $u_1(-p)$, $u_1'(-p)$ jsme získali v předchozí části.

Úlohu (3.7) můžeme ekvivalentně zapsat jako

$$\begin{cases} \nabla \Delta U_i + \lambda U_i = 0, & i \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\}, \\ \Delta \nabla U_i + \lambda U_i = 0, & i \in \left\{ \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \dots, n+1 \right\}, \\ U_0 = u_1(-p), \\ \nabla U_0 = u_1'(-p). \end{cases}$$

Uvažujme $t = -p$. Pak je (využitím počátečních podmínek)

$$\nabla \Delta U_0 = \frac{1}{h} \nabla (U_1 - U_0) = \frac{1}{h^2} (U_1 - U_0) - \frac{1}{h} \nabla U_0 = \frac{1}{h^2} (U_1 - u_1(-p)) - \frac{1}{h} u_1'(-p). \quad (3.8)$$

Vyjádřením U_1 z (3.8) dostaneme hodnotu řešení u v bodě $t = -p$

$$U_1 = h^2 \left(\frac{1}{h} u_1'(-p) - \left(-\frac{1}{h^2} + \lambda \right) u_1(-p) \right).$$

Podobnými úpravami dostaneme

$$\begin{aligned} U_2 &= h^2 \left(-\frac{1}{h^2} u_1(-p) - \left(-\frac{2}{h^2} + \lambda \right) U_1 \right), \\ U_3 &= h^2 \left(-\frac{1}{h^2} U_1 - \left(-\frac{2}{h^2} + \lambda \right) U_2 \right), \\ &\vdots \\ U_i &= h^2 \left(-\frac{1}{h^2} U_{i-2} - \left(-\frac{2}{h^2} + \lambda \right) U_{i-1} \right), \\ &\vdots \\ U_{n+1} &= h^2 \left(-\frac{1}{h^2} U_{n-1} - \left(-\frac{2}{h^2} + \lambda \right) U_n \right). \end{aligned}$$

Z rovnice pro $t = +p$ dostaneme

$$\Delta U_{n+1} = h \left(-\frac{1}{h^2} U_n - \left(-\frac{1}{h^2} + \lambda \right) U_{n+1} \right).$$

3. Uvažujme diferenciální počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_2''(t) + \lambda u_2(t) = 0, & t \in I_2, \\ u_2(+p) = U_{n+1}, \\ u_2'(+p) = \Delta U_{n+1}, \end{cases} \quad (3.9)$$

kde U_{n+1} , ΔU_{n+1} jsme získali v předchozí části. Řešení u_2 má tvar

$$u_2(t) = \begin{pmatrix} U_{n+1} \cos(\sqrt{\lambda}p) - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Delta U_{n+1} \sin(\sqrt{\lambda}p) \\ U_{n+1} \sin(\sqrt{\lambda}p) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Delta U_{n+1} \cos(\sqrt{\lambda}p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}t) \\ \sin(\sqrt{\lambda}t) \end{pmatrix}.$$

Nechť n je pevné a hodnota λ neznámá. Nejdříve vyřešíme počáteční úlohu (3.6), potom (3.7) a nakonec (3.9) (řešení jsou závislá na hodnotě λ). Pak je splnění Dirichletovy okrajové podmínky v (3.5), tj.

$$u(+q) = 0,$$

ekvivalentní se splněním

$$u_2(+q) = 0.$$

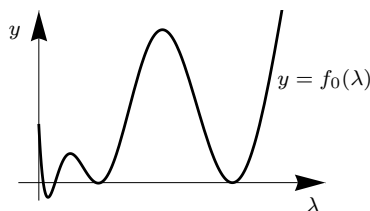
Hodnota funkce u_2 v bodě $t = +q$ je funkcí proměnné λ . Označme ji $f_n = f_n(\lambda)$. Pak je úloha nalezení hodnot λ , pro která má úloha (3.5) netriviální řešení, ekvivalentní s úlohou nalezení nulových bodů funkce f_n

$$f_n : \lambda \mapsto u_2(+q) \quad (3.10)$$

a konstrukce u_2 je popsána v bodech 1-3.

Pokud bychom zvolili $\lambda \leq 0$, stejným postupem, který je popsán v bodech 1-3, bychom zjistili, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ nemá funkce f_n žádný nulový bod.

Věta 3.6. *Úloha (3.5) má netriviální řešení právě tehdy, když $\lambda > 0$ je nulovým bodem funkce f_n definované v (3.10).*

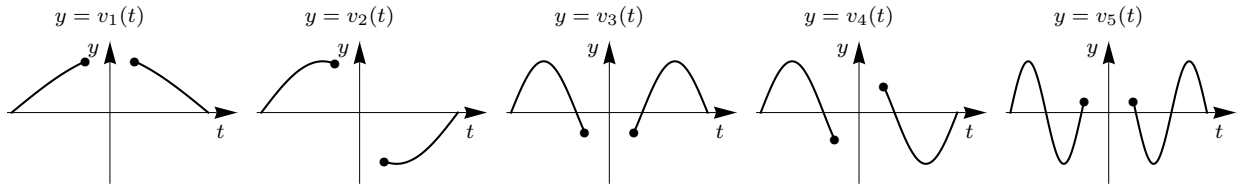
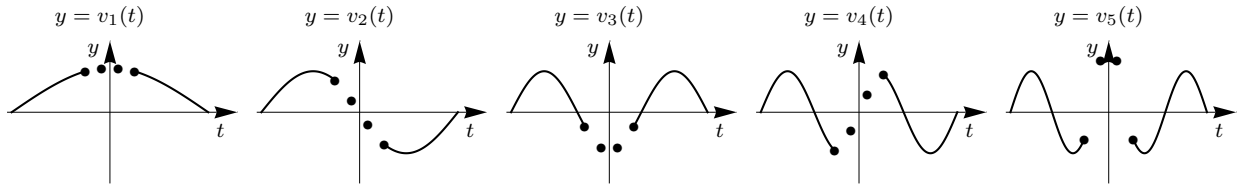


Obrázek 3.4: Funkce f_0 pro $q = 4$, $p = 1$.

Zvolme $n = 0$. Pak má funkce f_0 (viz obrázek 3.4) tvar

$$f_0(\lambda) = p(3 - 4p^2\lambda) \cos(2(p - q)\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}(-1 + 4p^2\lambda) \left(p\sqrt{\lambda} + \sin(2(p - q)\sqrt{\lambda}) \right).$$

Na obrázku 3.5 jsou některá netriviální řešení v úlohy (3.5) (seřazena podle velikosti λ) pro $n = 0$ a na obrázku 3.6 pro $n = 2$.


 Obrázek 3.5: Některá netriviální řešení v úlohy (3.5) pro $q = 4$, $p = 1$, $n = 0$.

 Obrázek 3.6: Některá netriviální řešení v úlohy (3.5) pro $q = 4$, $p = 1$, $n = 2$.

3.1.2 Modifikovaná metoda střelby

Druhý způsob, kterým můžeme nalézt čísla λ , pro která má úloha (3.5) netriviální řešení, využívá řešení dvou spojitých počátečních úloh a jedné diskrétní okrajové úlohy. Uvažujme $\lambda > 0$, $n \geq 2$. Pro $n \in \{0, 1\}$ snadno dokážeme získat λ pomocí předchozí části 3.1.1.

1. Uvažujme diferenciální počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_1''(t) + \lambda u_1(t) = 0, & t \in I_1, \\ u_1(-q) = 0, \\ u_1'(-q) = 1, \end{cases} \quad (3.11)$$

kde $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 0$. Řešení úlohy (3.11) má v bodě $t = -p$ tvar

$$u_1(-p) = \frac{\sin(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}p) - \frac{\cos(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}p).$$

2. Uvažujme diferenciální počáteční úlohu

$$\begin{cases} u_2''(t) + \lambda u_2(t) = 0, & t \in I_2, \\ u_2(+q) = 0, \\ u_2'(+q) = s, \end{cases} \quad (3.12)$$

kde $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Řešení úlohy (3.12) má v bodě $t = +p$ tvar

$$u_2(+p) = -\frac{s \sin(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \cos(\sqrt{\lambda}p) + \frac{s \cos(\sqrt{\lambda}q)}{\sqrt{\lambda}} \sin(\sqrt{\lambda}p).$$

3. Nechť $t \in \{-p, -p+h, \dots, -p+nh, +p\}$. Uvažujme diferenční okrajovou úlohu

$$\begin{cases} \nabla \Delta u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p+h, \dots, -p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \right\}, \\ \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h, \dots, -p+nh \right\}, \\ u(-p) = u_1(-p), \\ u(+p) = u_2(+p). \end{cases} \quad (3.13)$$

Úlohu (3.13) můžeme zapsat ekvivalentně jako

$$\begin{cases} \nabla \Delta U_i + \lambda U_i = 0, & i \in \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\}, \\ \Delta \nabla U_i + \lambda U_i = 0, & i \in \left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \dots, n\right\}, \\ U_0 = u_1(-p), \\ U_{n+1} = u_2(+p). \end{cases} \quad (3.14)$$

Použijeme-li maticový zápis, pak má úloha (3.14) tvar

$$\mathbf{E}\mathbf{U} = \mathbf{f}, \quad (3.15)$$

kde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 + h^2\lambda & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 + h^2\lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -2 + h^2\lambda & 1 & \\ & & & & 1 & -2 + h^2\lambda & \\ & & & & & 1 & -2 + h^2\lambda \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

je matice typu $n \times n$, $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_{n-1}, U_n]^T$ a $\mathbf{f} = \left[-\frac{u_1(-p)}{h^2}, 0, \dots, 0, -\frac{u_2(+p)}{h^2}\right]^T$. Řešení \mathbf{U} maticové rovnice v (3.15) získáme jako

$$\mathbf{U} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{f}.$$

K získání inverzní matice \mathbf{E}^{-1} můžeme díky speciálnímu tvaru matice \mathbf{E} použít následující větu 3.7, kde $d = -2 + h^2\lambda$ a

$$\mathbf{E}_{ij}^{-1} = h^2 \mathbf{M}_{ij}^{-1}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

Věta 3.7 ([9]). *Nechť \mathbf{M} je třídiagonální symetrická matice rozměru $n \times n$ tvaru*

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} d & 1 & & & & \\ 1 & d & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & d & 1 & \\ & & & 1 & d \end{bmatrix},$$

kde d je libovolná konstanta. Nechť $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

Je-li $d \leq -2$, označme $y = -\operatorname{argcosh} \frac{d}{2}$. Pak

$$\mathbf{M}_{ij}^{-1} = -\frac{\cosh((n+1-|j-i|)y) - \cosh((n+1-i-j)y)}{2 \sinh y \sinh((n+1)y)}.$$

Je-li $d \in (-2, 2)$, označme $y = \arccos \frac{d}{2}$. Pak

$$\mathbf{M}_{ij}^{-1} = -(-1)^{i+j} \frac{\cos((n+1-|j-i|)y) - \cos((n+1-i-j)y)}{2 \sin y \sin((n+1)y)}.$$

Je-li $d \geq 2$, označme $y = \operatorname{argcosh} \frac{d}{2}$. Pak

$$\mathbf{M}_{ij}^{-1} = (-1)^{i+j} \frac{\cosh((n+1-|j-i|)y) - \cosh((n+1-i-j)y)}{2 \sinh y \sinh((n+1)y)}.$$

Důkaz. Odvození nalezneme v [9]. ■

Úloha (3.5) je splněna, pokud

$$\begin{cases} \nabla \Delta U_0 + \lambda U_0 = 0, \\ \Delta \nabla U_{n+1} + \lambda U_{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

První rovnice v (3.17) je ekvivalentní s rovnicí

$$-\frac{u_1'(-p)}{h} - \left(\frac{1}{h^2} - \lambda\right) u_1(-p) + \frac{1}{h^2} U_1 = 0,$$

kde

$$U_1 = -\mathbf{E}_{1,1}^{-1} \frac{u_1(-p)}{h^2} - \mathbf{E}_{1,n}^{-1} \frac{u_2(+p)}{h^2}.$$

A druhá rovnice v (3.17) je ekvivalentní s rovnicí

$$\frac{u_2'(+p)}{h} - \left(\frac{1}{h^2} - \lambda\right) u_2(+p) + \frac{1}{h^2} U_n = 0,$$

kde

$$U_n = -\mathbf{E}_{n,1}^{-1} \frac{u_1(-p)}{h^2} - \mathbf{E}_{n,n}^{-1} \frac{u_2(+p)}{h^2}.$$

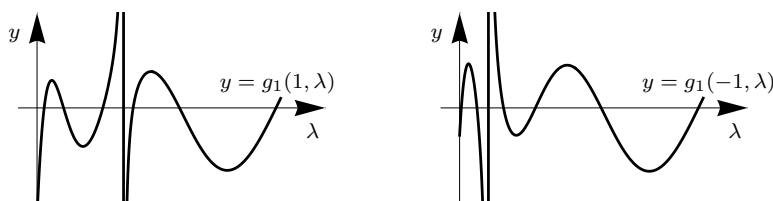
Označme

$$g_1(s, \lambda) = -\frac{u_1'(-p)}{h} - \left(\frac{1}{h^2} - \lambda\right) u_1(-p) + \frac{1}{h^2} U_1. \quad (3.18)$$

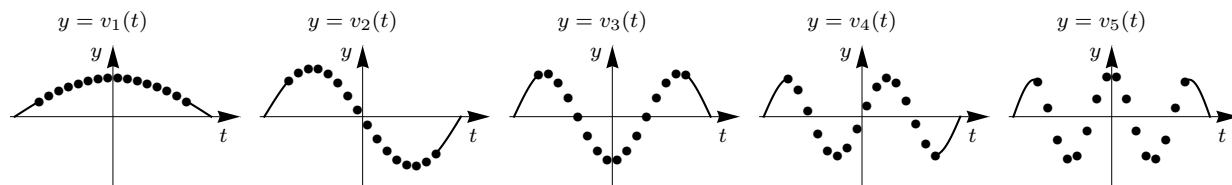
a

$$g_2(s, \lambda) = \frac{u_2'(+p)}{h} - \left(\frac{1}{h^2} - \lambda\right) u_2(+p) + \frac{1}{h^2} U_n. \quad (3.19)$$

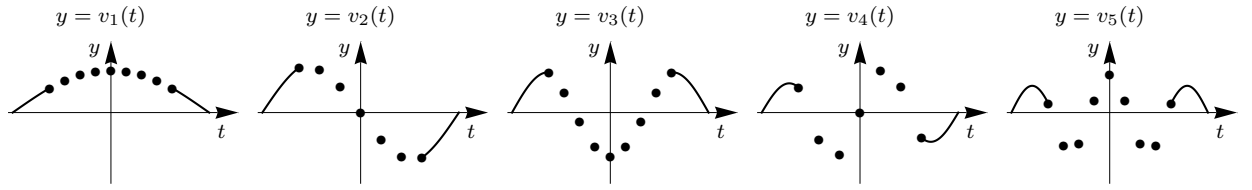
Věta 3.8. *Nechť $0 \neq s \in \mathbb{R}$ je libovolně pevné. Nechť $\bar{\lambda}$ je nulový bod funkce $g_1(s, \cdot)$ definované v (3.18) a funkce $g_2(s, \cdot)$ definované v (3.19). Potom má úloha (3.5) netriviální řešení pro $\lambda = \bar{\lambda}$.*



Obrázek 3.7: Funkce $g_1 = g_2$ pro $q = 4$, $p = 1$ a $s = 1$ (vlevo) a $s = -1$ (vpravo).



Obrázek 3.8: Některá netriviální řešení v úlohy (3.5) pro $q = 4$, $p = 3$, $n = 14$.

Obrázek 3.9: Některá netriviální řešení v úlohy (3.5) pro $q = 4$, $p = 2, 5$, $n = 7$.

Oproti prvnímu způsobu výpočtu v části 3.1.1 můžeme vyjádřit funkce $g_1(s, \cdot)$, $g_2(s, \cdot)$ analyticky pro libovolné n . Ale vzhledem ke komplikovanému tvaru zde předpis pro libovolné n uvádět nebudeme. Zvolme $n = 2$. Pak funkce g_1 má tvar

$$g_1(\lambda) = \frac{-54p\sqrt{\lambda} \cos((p-q)\sqrt{\lambda}) + 9 \left(9 - 4p^2\lambda + \frac{81(-9(2+s)+4p^2\lambda)}{(-27+4p^2\lambda)(-9+4p^2\lambda)}\right) \sin((p-q)\sqrt{\lambda})}{36p^2\sqrt{\lambda}}$$

a funkce g_2 má tvar

$$g_2(\lambda) = \frac{-54ps\sqrt{\lambda} \cos((p-q)\sqrt{\lambda}) + 9 \left(9 - 4p^2\lambda + \frac{81(-1+s)}{-54+8p^2\lambda} + \frac{81(1+s)}{-18+8p^2\lambda}\right) \sin((p-q)\sqrt{\lambda})}{36p^2\sqrt{\lambda}}.$$

Na obrázku 3.7 jsou funkce $g_1 = g_2$ pro $s = 1$ a $s = -1$ pro volbu $n = 2$, $q = 4$, $p = 1$. Na obrázcích 3.8 a 3.9 jsou některá netriviální řešení v úlohy (3.5) (seřazena podle velikosti λ) pro $n = 14$.

3.2 Časové škály

Časová škála je libovolná neprázdná podmnožina reálných čísel. Následující definice můžeme najít v [2].

Definice 3.9. Necht' \mathbb{T} je časová škála. Pro $t \in \mathbb{T}$ definujeme dopředný operátor $\sigma : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ jako

$$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\},$$

a zpětný operátor $\rho : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ jako

$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$

($\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}$, $\sup \emptyset = \inf \mathbb{T}$). Dále definujeme množinu¹ \mathbb{T}^κ jako

$$\mathbb{T}^\kappa = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}) & \text{pokud } \sup \mathbb{T} < +\infty, \\ \mathbb{T} & \text{pokud } \sup \mathbb{T} = +\infty. \end{cases}$$

□

Definice 3.10. Necht' \mathbb{T} je časová škála, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ a $t \in \mathbb{T}^\kappa$. Potom definujeme $f^\Delta(t)$ jako číslo (existuje-li) takové, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí $U = (t - \delta, t + \delta) \cap \mathbb{T}$ pro nějaké δ tak, že

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s| \quad \forall s \in U.$$

Číslo $f^\Delta(t)$ nazýváme delta derivací funkce f v bodě t . □

¹Důvod, proč definujeme množinu \mathbb{T}^κ , je uveden v poznámce 3.11.

Poznámka 3.11. Nechť $\mathbb{T} = \{0, 1, 2\}$, tj. $\sup \mathbb{T} < +\infty$. Potom je

$$\mathbb{T}^\kappa = \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}) = \{0, 1, 2\} \setminus (\rho(2), 2) = \{0, 1, 2\} \setminus (\sup\{0, 1\}, 2) = \{0, 1, 2\} \setminus (1, 2) = \{0, 1\}.$$

Nechť $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$. Potom v bodě $t = 2$ nedefinujeme delta derivaci f^Δ z následujících důvodů. Dopředný operátor má hodnotu $\sigma(2) = \inf \emptyset = \sup \mathbb{T} = 2$. Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a $\delta < 1$. Pak je $U = (2 - \delta, 2 + \delta) \cap \mathbb{T} = \{2\}$. Díky tomu je pro všechna $s \in U = \{2\}$

$$|(f(\sigma(t)) - f(s)) - f^\Delta(t)(\sigma(t) - s)| = |(f(2) - f(2)) - f^\Delta(2)(2 - 2)| = 0 \leq \varepsilon |2 - 2| = 0,$$

tedy $f^\Delta(2)$ je zcela libovolné reálné číslo. Z tohoto důvodu se pro body $t \in \mathbb{T} \setminus \mathbb{T}^\kappa$ delta derivace většinou nedefinuje. \square

Analogicky definujeme delta derivace vyšších řádů.

Pro úlohu (3.1) označme $\mathbb{T} = (-q, +q)$ a pro úlohu (3.2) označme $\mathbb{T} = \{-q + h, \dots, -q + nh\}$, kde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < q \in \mathbb{R}$, $h = \frac{2q}{n+1}$. Potom můžeme pomocí delta derivací a časových škál zapsat úlohy (3.1), (3.2) jednotně jako

$$\begin{cases} u^{\Delta\Delta}(t-1) + \lambda u(t) = 0, & t \in \mathbb{T}, \\ u(-q) = u(+q) = 0. \end{cases}$$

Tedy, obě úlohy můžeme řešit z pohledu časových škál, o kterých je známo mnoho teoretických výsledků. Otázkou, kterou se nám nepodařilo zodpovědět, je, zda (a jestli vůbec) lze i úlohu (3.5), tj.

$$\begin{cases} u''(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in (-q, -p) \cup (+p, +q), \\ \nabla \Delta u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p, -p + h, \dots, -p + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor h \right\}, \\ \Delta \nabla u(t) + \lambda u(t) = 0, & t \in \left\{ -p + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil h, \dots, -p + nh, +p \right\}, \\ u(-q) = u(+q) = 0, \end{cases}$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ a $0 < p \in \mathbb{R}$, $p < q \in \mathbb{R}$, $h = \frac{2p}{n+1}$ zapsat jednoduše pomocí delta derivací a časových škál. Tato otázka zůstává otevřeným problémem.

Shrnutí

V diplomové práci jsme se zabývali Fučikovým spektrem nesymetrického diferenčního operátoru a řešitelností okrajových úloh.

V kapitole 1 jsme se zabývali Pareto spektrem a polárním Pareto spektrem Neumannova diferenčního operátoru reprezentovaného nesymetrickou maticí. Našli jsme analytický předpis hodnot, které do polárního Pareto spektra patří. Následně jsme ukázali, že některá Pareto vlastní čísla a některá polární Pareto vlastní čísla určují asymptoty větví Fučikova spektra a uvedli hypotézu, jak taková polární Pareto vlastní čísla vybrat.

V kapitole 2 jsme se zabývali řešitelností okrajových úloh pro diferenční rovnice vzhledem k Fučikovu spektru. Uvedli jsme postačující podmínky, pro které má úloha alespoň jedno řešení.

V kapitole 3 jsme popsali dva způsoby, jak najít netriviální řešení Dirichletovy okrajové úlohy definované na množině, která obsahuje intervaly a diskrétní body. Myšlenka prvního způsobu byla založena na metodě střelby a druhý způsob využíval znalosti analytického popisu inverze symetrické matice typu $n \times n$ speciálního tvaru. Dále jsme naznačili otevřený problém - jak naši úlohu propojit s teorií časových škál.

Literatura

- [1] Adly, S.; Seeger, A.: A nonsmooth algorithm for cone-constrained eigenvalue problems. *Computational Optimization and Applications*, Springer US, 299–318 (2011).
- [2] Bohner, M; Peterson, A.: *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications*. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, (2003).
- [3] Drábek, P.; Kufner, A.: *Funkcionální analýza, skripta ZČU, Plzeň*, 99 p. (1994).
- [4] Drábek, P.; Milota, J.: *Methods of Nonlinear Analysis. Applications to Differential Equations*. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, 2nd ed. (2013).
- [5] Forrester, W. P.; Galindo, E. E., Rumbos, A. J.: Nonlinear perturbation of linear equations in \mathbb{R}^n . *Linear Algebra and its Applications* 439, 3100–3114 (2013).
- [6] Fučík, S.: *Solvability of nonlinear equations and boundary value problems*. Springer (1980).
- [7] Holubová, G.; Nečesal, P.: Resonance with respect to the Fučík spectrum for non-selfadjoint operators. *Nonlinear Analysis* 93, 147–154 (2013).
- [8] Holubová, G.; Nečesal, P.: The Fučík Spectrum: Exploring the Bridge Between Discrete and Continuous World. *Differential and Difference Equations with Applications*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Springer New York, 421–428 (2013).
- [9] Hu, G. Y.; O’Connell, R. F.: Analytical inversion of symmetric tridiagonal matrices. *J. Phys. A: Math. Gen* 29, UK, 1511–1513 (1996).
- [10] Kuttler, K.: *Linear Algebra, Theory And Applications*. <http://www.math.byu.edu/~klkuttle/Linearalgebra.pdf> (2013).
- [11] Looseová, I.: *Vícebodové okrajové úlohy s asymetrickými nelinearitami a tlumením*. Bakalářská práce, ZČU, Plzeň (2012).
- [12] Pease, M. C.: *Methods of Matrix Algebra*. Academic Press (1965).
- [13] Pinto da Costa, A.; Seeger, A.: Cone-constrained eigenvalue problems: theory and algorithms. *Computational Optimization and Applications*. *Computational Optimization and Applications*, 25–57 (2010).
- [14] Robinson, S. B.; Yang, Y.: Discrete nonlinear equations and the Fučík Spectrum. *Linear Algebra and its Applications* 437, 917–931 (2012).
- [15] Seeger, A.: Eigenvalue analysis of equilibrium processes defined by linear complementarity conditions. *Linear Algebra and its Applications* 292, 1–14, (1999).