



**ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI**

**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY**

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Plzeň, 2014

Jakub Bugár



**ZÁPADOČESKÁ  
UNIVERZITA  
V PLZNI**

**FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MECHANIKY**

# **BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Modelování a dynamická odezva kinematicky buzených  
mechanických soustav

Plzeň, 2014

Jakub Bugár

Látce rozumíte bezpečně teprve tehdy,  
když jste schopný ji vysvětlit vlastní babičce.

*Albert Einstein*

# PROHLÁŠENÍ

Předkládám k posouzení tuto bakalářskou práci. Prohlašuji, že jsem ji vypracoval samostatně a na základě literatury a pramenů uvedených v seznamu použité literatury.

V Plzni, 30. července 2014

.....

Jakub Bugár

# PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych v první řadě rád poděkoval Ing. Miroslavu Byrtusovi Ph.D. za příkladné vedení mé bakalářské práce, motivaci a za nekončící optimismus, bez kterého by tato práce nevznikla.

Dále můj dík patří Ing. Ludřkovi Vejvarovi, Ph.D. a Ing. Vladislavu Haplovi, CSc. za potřebné konzultace a poznatky v oboru stavitelství.

V neposlední řadě děkuji svým nejbližším, kteří při mě stáli a nepřestali mě podporovat.

Jakub Bugár

# ABSTRAKT

Práce se věnuje problematice modelování a dynamické analýze kinematicky buzených diskrétních mechanických soustav. V teoretické části je odvozen matematický model kmitání diskrétní mechanické soustavy a jsou analyticky popsány metody pro stanovení dynamické odezvy zkoumaných soustav. Základ tvoří metoda spektra odezvy a přímá numerické integrace využívající formulaci modelu ve stavovém prostoru. Dále je proveden rozbor a popis buzení vyvolaného zemětřesením pomocí normativně technické dokumentace (Eurokód 8). Aplikační část práce využívá shrnutých teoretických poznatků pro vyšetření dynamické odezvy konstrukčních soustav panelových domů vyvolané seizmickým buzením. Konkrétně je vyšetřena seismická odezva panelového domu konstrukčního typu PS 69 nacházejícího se v Plzeňském regionu. Výpočtový model byl sestaven v prostředí MATLAB, ve kterém byly zalgoritmizovány a odladěny veškeré odvozené metody. Pro odhad tuhostních parametrů soustavy byl využit software ANSYS a jejich následné přeladění bylo provedeno v prostředí MATLAB.

**Klíčová slova:** Kmitání, Diskrétní mechanická soustava, Kinematické buzení, Metoda spektra odezvy, Seismicita

# ABSTRACT

This bachelor thesis is concerned with an issue of modelling and dynamic analysis of kinematically excited, discrete mechanical systems. In the theoretical part of the thesis there is derived the mathematical model of vibration of discrete mechanical system and there are described the methods for determination of dynamic response of observed systems analytically. The main part consists of the response spectrum method and of the direct numerical integration, which is defined by a formulation of model in the state-space. Then the analysis and the description of excitation caused by an earthquake are performed by using the normative and technical documentation. The practical part of the thesis utilizes the summarized theoretical knowledge for the examination of dynamic response of structural systems of prefabricated buildings to a seismic excitation. More specifically the seismic response of prefabricated building of structural type PS 69 located in the Pilsen region was examined. The computational model was developed using MATLAB workspace, in which all of the derived methods were algorithmized and debugged. The software ANSYS was used for estimate the parameters of stiffness and their subsequent tuning was performed in MATLAB workspace as well.

**Key words:** Vibration, Discrete mechanical system, Kinematical excitation, Response spectrum method, Seismicity

# Obsah

<b>1. Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2. Modelování diskrétních mechanických soustav</b>	<b>8</b>
2.1. Diskrétní lineární soustavy .....	8
2.2. Příklady soustav .....	10
2.2.1. Dělení soustav podle tlumení.....	10
2.2.2. Dělení soustav podle buzení .....	10
<b>3. Seismické buzení jako druh kinematického buzení</b>	<b>12</b>
3.1. Seismicita v technické praxi .....	13
3.1.1. Lineární spektra odezvy.....	15
3.2. Stanovení spekter odezvy na základě akcelerogramu.....	17
3.2.1. Aplikace metody pro určení metody spektra odezvy .....	18
<b>4. Dynamická analýza soustav s více stupni volnosti</b>	<b>20</b>
4.1. Modální analýza diskrétních lineárních soustav .....	20
4.2. Ustálená odezva na harmonické buzení .....	22
4.2.1. Netlumená soustava s více stupni volnosti .....	22
4.2.2. Tlumená soustava s více stupni volnosti .....	23
4.3. Metoda spektra odezvy pro kinematické (seismické) buzení.....	24
4.4. Metoda přímé numerické integrace modelu .....	26
<b>5. Stanovení seismické odezvy panelového domu</b>	<b>28</b>
5.1. Seismicita v České republice .....	29
5.2. Panelové domy v Plzeňském kraji .....	30
5.3. Výpočtový model konstrukčního systému PS 69 .....	31
5.3.1. Hmotnostní a tuhostní parametry patra.....	33
5.3.2. Vlastní frekvence soustavy .....	36
5.3.3. Vlastní tvary kmitání soustavy .....	38
5.3.4. Dynamická analýza soustavy.....	40
<b>6. Závěr</b>	<b>43</b>



# 1. Kapitola

## Úvod

Kinematické buzení představuje hlavní zdroj buzení v řadě technických aplikací. Účinky tohoto buzení jsou většinou nežádoucí, a proto je nutné je zohlednit při navrhování nových konstrukcí nebo při z odolňování konstrukcí stávajících, zejména pokud se jedná o seizmické buzení. S využitím v současnosti dostupných výpočetních prostředků a neustále se rozvíjejících výpočtových metod lze s dostatečnou přesností zkoumat účinky nejen kinematického buzení na mechanické konstrukce.

Hlavním cílem předkládané práce je ukázat na modelu konkrétního panelového domu metody vyšetřování odezvy na seizmické buzení a jejich vzájemné srovnání. K dosažení tohoto cíle je potřeba nejprve definovat, jak se dopracujeme k takovému modelu budovy. Proto je druhá kapitola této práce věnována diskrétním mechanickým soustavám, jejich definici, matematickému popisu a pro úplnost také obsahuje výčet různých druhů takovýchto soustav, které následně využijeme k popisu modelu panelového domu.

Abychom u těchto soustav mohli aplikovat kinematické, resp. seizmické buzení, je potřeba vědět, co to vůbec je seizmické buzení, jak vzniká a jak ho popisujeme, čemuž je věnována třetí kapitola, která dále obsahuje i popis seizmického buzení podle evropských norem a standardů. Dále pak také obsahuje řešený příklad, který demonstruje proces získání spektra odezvy zrychlení z časového záznamu konkrétní seizmické události.

Samotným metodám zkoumání odezvy na takovýto druh buzení se věnuje čtvrtá kapitola, kde je v úvodu nastíněna problematika modálních veličin soustav a také to, jak tyto veličiny ovlivňují kmitání soustav. Jinak je tato kapitola věnována dvěma hlavními

---

metodám a to konkrétně metodě spektra odezvy (včetně užití kombinačních metod pro stanovení horních efektivních odhadů) a dále pak numerické metodě přímé integrace pro následnou možnost srovnání. Pro úplnost je zde zařazeno i zkoumání odezvy na obecné harmonické buzení soustavy, neboť i takové případy kinematického buzení mohou nastat, například u soustav se stálým provozním zatížením (rotující nevyváženosti).

Aplikační část kapitola již obsahuje konkrétní stavební soustavu panelového domu, konkrétně se jedná o typ PS 69, který byl hojně využíván v 70. letech v Plzeňském regionu. V této kapitole jsou užitý veškeré poznatky definované a odvozené v předchozích kapitolách ke stanovení dynamické odezvy na seizmické buzení. Veškeré výpočty byly realizovány ve výpočtovém prostředí MATLAB a to od samotného vytvoření matematického modelu, přes ladicí proces vstupních parametrů, až po aplikaci všech teoreticky odvozených metod. V závěru práce jsou pak shrnuty dosažené výsledky a nastíněno, jakým způsobem by mohla být práce dále rozšířena.

Cíle práce stanovené v zadání jsou:

- Shrnutí řešené problematiky
- Metody vyšetřování dynamické odezvy na kinematické buzení
- Vytvoření zjednodušených modelů kinematicky buzených soustav pro vybrané aplikace
- Aplikace metod na vyšetřování odezvy na kinematické buzení pro vytvořené modely

Nad rámec práce bylo zpracováno:

- Detailní rozbor analytického popisu seizmického buzení
- Analytické odvození a aplikování metody pro získání spektra odezvy zrychlení z akcelerogramu (časového rozvoje zrychlení seizmické události)
- Určení tuhostních a hmotnostních výpočtového modelu soustavy panelového domu typu PS 69, včetně jejich přeladění na požadované hodnoty

## 2. Kapitola

# Modelování diskretních mechanických soustav

Modely mechanických soustav se soustředěnými parametry (diskretní soustavy) představují značné zjednodušení výpočtových modelů reálných systémů v porovnání s modely se spojitě rozloženými parametry (kontinuum). V případě diskretních mechanických soustav jsou zanedbány rozměry jednotlivých těles soustavy, která je charakterizována hmotnostními a tuhostními, případně tlumivými, parametry. Důsledkem těchto předpokladů je jednodušší matematický model kmitání soustavy.

### 2.1. Diskretní lineární soustavy

Diskretní soustavy jsou takové soustavy, které jsou sestaveny z diskretních prvků (hmotné body, tuhá tělesa, desky, tyče, nehmotné pružiny a tlumiče) se soustředěnými parametry. Matematický model kmitání soustavy je popsán obyčejnými diferenciálními rovnicemi. Tyto diferenciální rovnice mohou být lineární s konstantními koeficienty a to v případě, kmitá-li soustava kolem statické rovnovážné polohy s malými výchylkami. Pro sestavení pohybových rovnic diskretních lineárních soustav je vhodné vyjít z Lagrangeových rovnic druhého druhu pro zobecněné souřadnice  $q_j(t)$ , které popisují výchylky ze statické rovnovážné polohy, ve tvaru [2]

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \left( \frac{\partial E_k}{\partial q_j} \right) = Q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

## 2. KAPITOLA – Modelování diskrétních mechanických soustav

---

kde  $E_k$  je kinetická energie soustavy,  $n$  je počet stupňů volnosti a  $Q_j$  jsou zobecněné síly. Zobecněné síly lze u většiny soustav rozdělit na časově závislé budící síly  $F_j(t)$ , konzervativní (potenciální) síly  $Q_j^P$  a tlumící (disipační) síly  $Q_j^D$ . Zobecněné konzervativní síly je možné odvodit z potenciální (deformační) energie  $E_p$ , která závisí pouze na zobecněných souřadnicích, ve tvaru

$$Q_j^P = -\frac{\partial E_p}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2)$$

Zobecněné tlumící síly lze vyjádřit z tzv. Rayleighovy disipační funkce  $R$ , která závisí jen na zobecněných rychlostech

$$Q_j^D = -\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Rayleighova disipační funkce představuje polovinu výkonu tlumících sil soustavy. Zobecněné budící síly  $F_j(t)$  vyplývají z virtuální práce  $\delta W_j$  všech sil konajících práci (kromě konzervativních a disipačních sil) při virtuálním pohybu charakterizovaném virtuální změnou  $\delta q_j$  jediné zobecněné souřadnice  $q_j$  a to následovně

$$\delta W_j = F_j \delta q_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Dále zavedením vektorů zobecněných souřadnic a buzení

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= [q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)]^T, \\ \mathbf{f}(t) &= [F_1(t), F_2(t), \dots, F_n(t)]^T \end{aligned} \quad (2.5)$$

a dosazením (2.2), (2.3), (2.4) do (2.1) dostaneme maticové vyjádření Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{f}(t). \quad (2.6)$$

U diskrétních lineárních soustav (s konstantními koeficienty) lze ve většině případů vyjádřit kinetickou energii  $E_k$ , potenciální energii  $E_p$  a disipační funkci  $R$  ve tvaru tzv. kvadratických forem

$$E_k = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}, \quad E_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}, \quad R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.7)$$

Kde  $\mathbf{M} = [m_{ij}]$  je matice hmotnosti soustavy,  $\mathbf{K} = [k_{ij}]$  matice tuhosti soustavy a  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$  je matice tlumení soustavy. Dosazením (2.7) do (2.6) a po provedení odpovídajících derivací dostaneme pohybové rovnice diskrétní lineární soustavy s konstantními koeficienty v maticovém tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f}(t). \quad (2.8)$$

Pro prvky výše zmíněných matic platí

$$m_{ij} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}, \quad k_{ij} = \frac{\partial^2 E_p}{\partial q_i \partial q_j}, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2 R}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}. \quad (2.9)$$

### 2.2. Příklady soustav

V následujících odstavcích jsou charakterizovány nejčastější případy diskrétních mechanických soustav. Pro názornost jsou tyto soustavy rozděleny podle uvažování tlumení diskrétní mechanické soustavy a podle uvažovaného buzení takové soustavy.

#### 2.2.1. Dělení soustav podle tlumení

- Netlumená soustava – matice tlumení soustavy  $\mathbf{B}$  je nulová. Soustava je tzv. konzervativní.
- Slabě tlumená soustava – matice tlumení soustavy  $\mathbf{B}$  je nenulová a splňuje podmínku komutativnosti ve smyslu

$$\mathbf{KM}^{-1}\mathbf{B} = \mathbf{BM}^{-1}\mathbf{K}. \quad (2.10)$$

Takové soustavy zpravidla neobsahují funkční tlumící členy (např. hltiče kmitů, tlumiče pérování vozidel apod.) a matice tlumení  $\mathbf{B}$  udává pouze vnitřní (materiálové) nebo slabé konstrukční tlumení. Soustava je slabě nekonzervativní.

- Silně tlumená soustava – matice tlumení soustavy  $\mathbf{B}$  je nenulová a nesplňuje podmínku komutativnosti (2.10). Soustava je silně nekonzervativní. Takovéto modely mohou mít matici tlumení soustavy  $\mathbf{B}$  nesymetrickou.

#### 2.2.2. Dělení soustav podle buzení

- Soustava bez vnějšího buzení – všechny prvky vektoru buzení  $\mathbf{f}(t)$  jsou nulové. Daný model popisuje tzv. volné kmitání soustavy při nenulových počátečních podmínkách.
- Buzení rázovou silou – jedná se o buzení charakterizované velkými hodnotami a velmi krátkou dobou působení  $\Delta t$ . Analyticky je možno tuto budící sílu vyjádřit [2] jako součin jednotkové Diracovy funkce  $\delta(t)$  a impulzu rázové síly  $I$ . Takovouto soustavu dále řešíme například pomocí Laplaceovy transformace.

- Buzení skokem – pro tento případ buzení je dána budící síla ve tvaru [2]

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0 \\ F_0 & \text{pro } t > 0 \end{cases}.$$

Danou soustavu řešíme opět pomocí Laplaceovy transformace, kde budící sílu vyjádříme jako součin konstantní budící síly  $F_0$  a Heavisideovy funkce  $H(t)$ .

- Harmonické buzení – vektor buzení  $f(t)$  má v tomto případě obecně tvar:

$$f(t) = f_c \cos(\omega t) + f_s \sin(\omega t). \quad (2.11)$$

Kde  $f_c$  (resp.  $f_s$ ) je vektor amplitud cosinových (resp. sinových) složek buzení a  $\omega$  je budící frekvence v [rad/s]. V tomto případě většinou řešíme ustálené kmity dané partikulárním řešením, které odhadujeme v obdobném tvaru jako vektor buzení.

- Periodické buzení – předpokládejme, že všechny prvky vektoru buzení  $f(t)$  se mění periodicky v čase se stejnou periodou  $T$ , pak pro libovolný čas  $t$  platí pro  $i$ -tou složku vektoru buzení  $f(t)$

$$f_i(t) = f_i(t \pm kT), \quad k = 1, 2, \dots$$

Poté vyjádříme prvky vektoru buzení  $f(t)$  ve tvaru Fourierovy řady a soustavu dále řešíme jako při harmonickém buzení pro každou  $k$ -tou harmonickou složku

- Obecné buzení – je-li budící síla neharmonická neperiodická funkce, která může být navíc i nespojitá, a existuje-li Laplaceův obraz takovéto funkce, řešíme takovýto případ opět Laplaceovou transformací. Pokud danou soustavu nelze řešit analyticky, pak použijeme numerické řešení pomocí numerických metod.
- Kinematické buzení – jedná se o speciální typ buzení, kdy na rozdíl od buzení vnějšími silami, je soustava buzena posuvným pohybem základu, na kterém je soustava pružně uchycena. Soustavu můžeme řešit v prostoru relativních souřadnic, kdy zkoumáme kinematické závislosti těles soustavy vzhledem k rámu, nebo můžeme řešit soustavu v prostoru absolutních souřadnic.

## 3. Kapitola

# Seizmické buzení jako druh kinematického buzení

Kinematické buzení je specifický druh buzení soustav, do kterého lze zahrnout i seizmické buzení. V praxi se rozděluje seizmické buzení na technickou a přírodní seizmicitu. Technická seizmicita vzniká jako důsledek působení člověka, například při stavebních činnostech v objektech, nebo při provozu složitých strojů větších rozměrů. Naopak přírodní seizmicita vzniká nezávisle na působení člověka a to náhlým pohybem zemské kůry, vyvolaným například neustálým pohybem zemských desek podél zlomů [12].



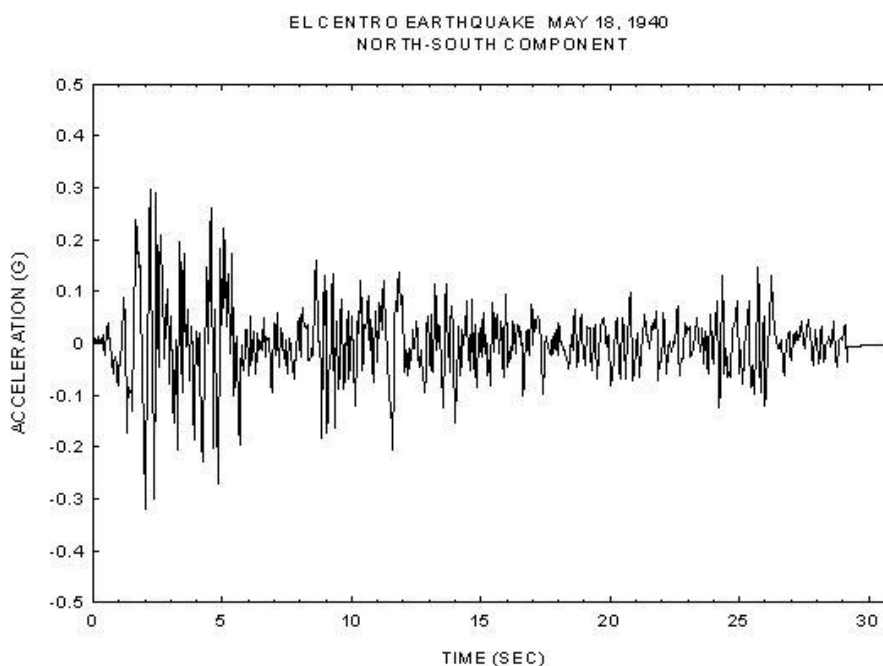
*Obr. 3.1 Následky zemětřesení v San Franciscu (1906)*

### ***3. KAPITOLA – Seismické buzení jako druh kinematického buzení***

---

Zemětřesení jako takové je charakterizováno intenzitou seismického zatížení, což je veličina, která je určována na základě pozorování makroseismických účinků zemětřesení. Tyto účinky zahrnují různé stupně poškození staveb, vznik prasklin a puklin v zemském povrchu, případný pokles a vzestup terénu, sesuvy půd apod. Jedná se tedy o čistě subjektivní veličinu závislou na určení míry škod vzniklých v souvislosti s otřesy. Její velikost je v každém místě odlišná a klesá se vzdáleností od epicentra (kolmého průmětu místa vzniku zemětřesení na zemský povrch). Pro kvantitativní popis intenzity zemětřesení se používá tzv. Modifikovaná Mercalliho stupnice. Případně pro popis velikosti síly zemětřesení se používá Richterova stupnice [13].

Hlavními problémy při určování seismického zatížení jsou náhodnost buzení a jeho nelineární charakter. Avšak v dnešní době je velikost zemětřesení objektivně změřitelnou veličinou. Měří se seismografem (používá se také název seismometr), což je přístroj, který měří a pořizuje záznam o velikosti, síle a průběhu seismických vln vzniklých při zemětřesení.



*Obr. 3.2 Záznam zemětřesení El Centro (Jižní Californie 1940) [14]*

#### **3.1. Seismicita v technické praxi**

Stanovení odezvy na seismické buzení je v dnešní době nedílnou součástí procesu při navrhování a posuzování stavebních objektů. Především u objektů jako jsou elektrárny,

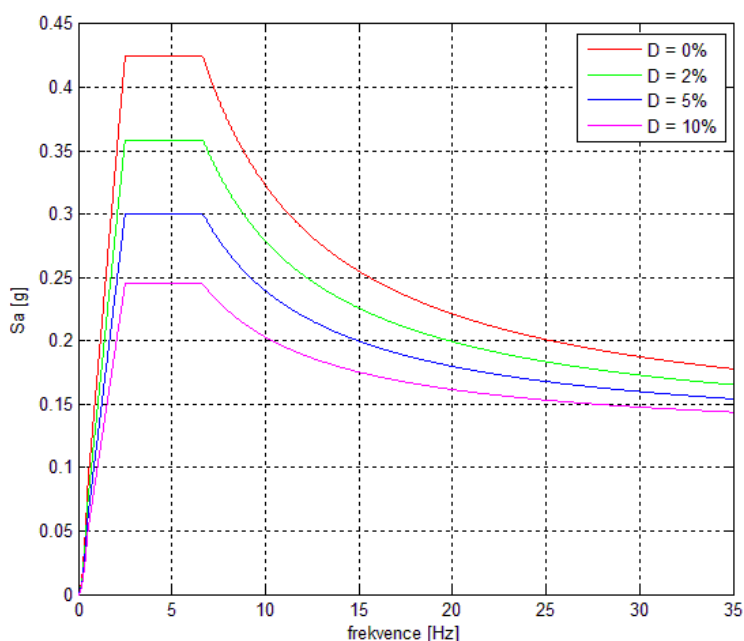


### 3. KAPITOLA – Seizmické buzení jako druh kinematického buzení

nemocnice, hasičské stanice, mosty atd. Ale také u běžných pozemních staveb, kupříkladu společenských hal, nákupních středisek nebo různých výškových budov.

V rámci Evropského výboru pro normalizaci (CEN) vznikla soustava norem pro navrhování stavebních konstrukcí nazývaných jako Eurokódy. Jedná se o jednotné evropské normativní dokumenty pro navrhování pozemních a inženýrských staveb. Pro náš případ je důležitý Eurokód č. 8: „Navrhování konstrukcí odolných proti zemětřesení“ (který je k nalezení také pod kódem ČSN EN 1998 [11]), dále jen EC-8. Jedná se o rozsáhlou metodiku rozdělenou do šesti základních částí, z nichž nejdůležitější je první část nazvaná: „Obecná pravidla, seizmická zatížení a pravidla pro pozemní stavby“. Další části jsou specificky zaměřené podle témat jako mosty, nádrže a potrubí, věže, stožáry apod.

Při řešení odezvy na seizmické buzení máme dva základní přístupy, podle kterých můžeme postupovat [5]. Zprv se jedná o přístup využívající popis buzení formou akcelerogramů, tedy časových průběhů již zaznamenaných zemětřesení pro konkrétní oblast, tzv. skutečné akcelerogramy (viz modelový příklad v závěru kapitoly), nebo uměle vytvořených, tzv. syntetických akcelerogramů. To znamená, že po vytvoření výpočtového modelu soustavy, řešíme odezvu systému na obecný typ buzení daného právě akcelerogramem. Druhou možností je postup založený na využití tzv. lineárních spekter odezvy.



Obr. 3.3 Návrhové spektrum dle EC-8 pro horizontální směr buzení pro různé poměrné útlumy

#### 3.1.1. Lineární spektra odezvy

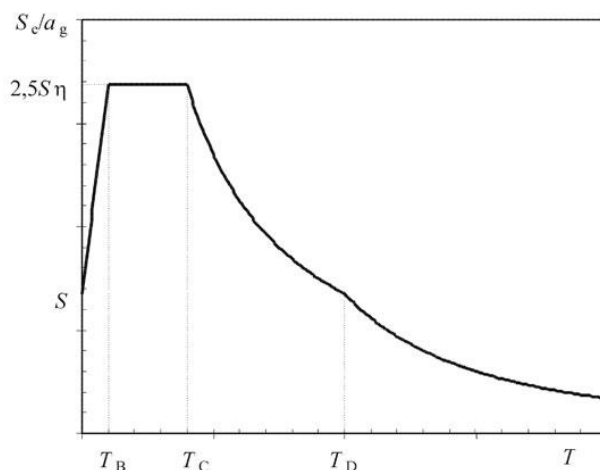
Definici lineárních spekter odezvy ve vodorovném směru lze nalézt v EC-8 (resp. v [I1]). Průběh spektra odezvy zrychlení v závislosti na periodě kmitů lineární soustavy je spojitá, po částech hladká křivka. Pro tuto křivku jsou její jednotlivé intervaly definovány následovně

$$\begin{aligned}
 0 \leq T \leq T_B: \quad S_a(T) &= a_g S \left[ 1 + \frac{T}{T_B} (\eta \cdot 2,5 - 1) \right], \\
 T_B \leq T \leq T_C: \quad S_a(T) &= a_g S \eta \cdot 2,5, \\
 T_C \leq T \leq T_D: \quad S_a(T) &= a_g S \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{T_C}{T} \right], \\
 T_D \leq T \leq 4s: \quad S_a(T) &= a_g S \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{T_C T_D}{T^2} \right],
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

kde  $T$  je perioda vlastních kmitů soustavy,  $a_g$  je návrhové zrychlení podloží,  $T_B$  je nejmenší perioda kmitů, které přísluší konstantní hodnota spektra zrychlení,  $T_C$  je největší perioda kmitů, které přísluší konstantní hodnota spektra zrychlení,  $T_D$  je doba kmitů, při níž začíná obor konstantní hodnoty spektra pružného posunu,  $S$  je součinitel podloží a  $\eta$  je korekční součinitel útlumu s referenční hodnotou  $\eta = 1$  pro poměrný viskózní útlum 5 %. Pro přepoččet na jinou hodnotu poměrného útlumu platí vztah

$$\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + \zeta}}.
 \tag{3.2}$$

Za  $\zeta$  dosazujeme do (3.2) hodnotu poměrného útlumu v procentech. Grafické znázornění průběhu spektra odezvy pro vodorovný směr definovaného dle rovnic (3.1) je na obr. 3.4.



Obr. 3.4 Spektrum odezvy podle EC-8 pro vodorovný směr, převzato z [I1]

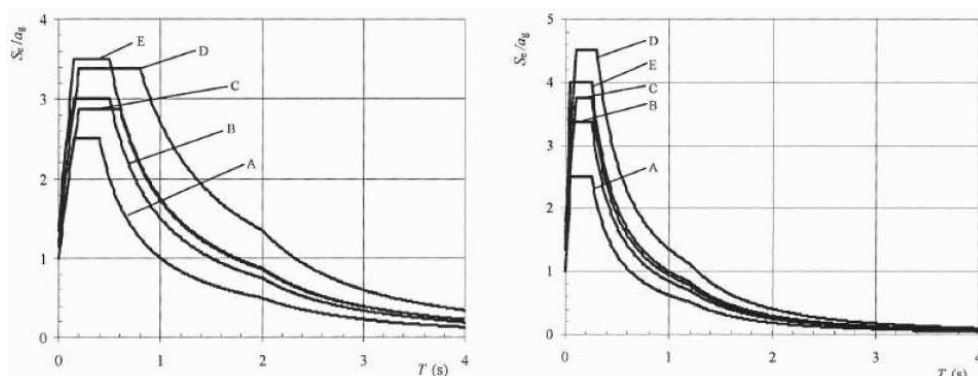
### 3. KAPITOLA – Seizmické buzení jako druh kinematického buzení

V základu máme dva druhy spekter odezvy v závislosti na velikosti magnituda zemětřesení. Pro hodnotu magnituda menší než 5,5 (což odpovídá zemětřesení do pátého stupně RichtEROVY škály) máme tzv. Typ 1 a naopak pro silnější zemětřesení používáme tzv. Typ 2. Jejich rozdíl je uveden v následující tabulce

Typ 1					Typ 2				
Typ základové půdy	S	T <sub>B</sub> [s]	T <sub>C</sub> [s]	T <sub>D</sub> [s]	Typ základové půdy	S	T <sub>B</sub> [s]	T <sub>C</sub> [s]	T <sub>D</sub> [s]
A	1,00	0,15	0,40	2,00	A	1,00	0,05	0,25	1,20
B	1,20	0,15	0,50	2,00	B	1,35	0,05	0,25	1,20
C	1,15	0,20	0,60	2,00	C	1,50	0,10	0,25	1,20
D	1,35	0,20	0,80	2,00	D	1,80	0,10	0,30	1,20
E	1,40	0,15	0,50	2,00	E	1,60	0,05	0,25	1,20

Tab. 3.1 Definice jednotlivých typů spekter v závislosti na velikosti magnituda a typu základové půdy

Rozdělení typů základových půd může čtenář najít např. v [4]. Grafické srovnání obou typů spekter pro jednotlivé typy základových půd je na obr. 3.5.



Obr. 3.5 Spektrum odezvy podle EC-8 pro vodorovný směr (Typ 1 vlevo, resp. Typ 2 vpravo), převzato z [11]

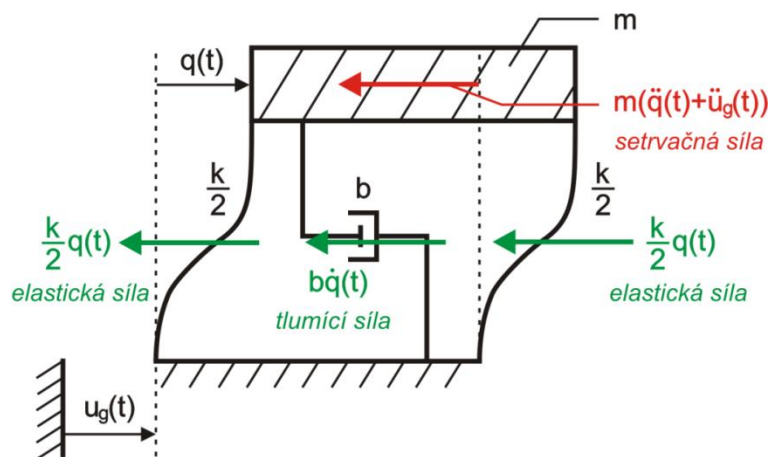
Spektra se v praxi také přepočítávají na závislost na frekvenci místo na periodě (viz obr. 3.3). Definiční vztahy jsou analogické ke vztahům (3.1)

$$\begin{aligned}
 0,25 \text{ Hz} \leq f \leq f_D: \quad S_a(f) &= a_g S \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{f^2}{f_C f_D} \right], \\
 f_D \leq T \leq f_C: \quad S_a(T) &= a_g S \eta \cdot 2,5 \left[ \frac{f}{f_C} \right], \\
 f_C \leq T \leq f_B: \quad S_a(T) &= a_g S \eta \cdot 2,5, \\
 f_B \leq f \leq 33 \text{ Hz}: \quad S_a(f) &= a_g S \left[ 1 + \frac{f_B}{f} (\eta \cdot 2,5 - 1) \right],
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

kde  $f_D$  je  $1/T_D$ ,  $f_C$  je  $1/T_C$  a  $f_B$  je  $1/T_B$ .

### 3.2. Stanovení spekter odezvy na základě akcelerogramu

Pro stanovení spekter odezvy používáme následující postup. Uvažujeme výpočtový model soustavy s jedním stupněm volnosti, viz obr. 3.6.



Obr. 3.6 Model kinematicky buzené soustavy s jedním stupněm volnosti

Pohybovou rovnicí takovéto kinematicky buzené soustavy s jedním stupněm volnosti sestavíme z podmínky dynamické rovnováhy ve vodorovném směru

$$m[\ddot{q}(t) + \ddot{u}_g(t)] + b\dot{q}(t) + kq(t) = 0, \quad (3.4)$$

což můžeme upravit na rovnici

$$\ddot{q}(t) + 2D\Omega\dot{q}(t) + \Omega^2q(t) = -\ddot{u}_g(t), \quad (3.5)$$

kde  $D$  je poměrný útlum a  $\Omega$  je vlastní frekvence systému, pro které platí vztahy

$$\Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ; \quad D = \frac{b}{2\sqrt{km}}$$

Řešení rovnice (3.5) při nulových počátečních podmínkách má tvar [2]

$$q(t) = - \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (3.6)$$

V této rovnici  $g(t)$  označuje impulsní funkci a platí pro ni vztah [6] (pro hodnotu poměrného útlumu  $0 \leq D < 1$ )

$$g(t) = \frac{1}{\Omega\sqrt{1-D^2}} e^{-D\Omega t} \sin(\Omega\sqrt{1-D^2}t).$$

Známe-li funkci zrychlení základu  $\ddot{u}_g(t)$ , můžeme zjistit pro daný poměrný útlum  $D$  soustavy maximální hodnotu zkoumané zobecněné souřadnice  $q(t)$  (v našem případě výchylky hmoty  $m$ ) pro danou vlastní frekvenci soustavy  $\Omega$ . Pak hodnotou spektra odezvy výchylky  $S_d(\Omega, D)$  nazveme právě tuto maximální absolutní hodnotu relativní

### 3. KAPITOLA – Seismické buzení jako druh kinematičkého buzení

---

výchylky  $q(t)$  soustavy (3.5), která je buzená posuvným pohybem základu se zrychlením  $\ddot{u}_g(t)$ .

Platí tedy

$$S_a(\Omega, D) = \max_t |q(t)| = \max_t \left| \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) g(t - \tau) d\tau \right|, \quad (3.7)$$

kde jednotlivé hodnoty spektra odezvy výchylky dostaneme postupným dosazováním různých vlastních frekvencí soustavy. Spektrum nám tedy definuje, jaká bude odezva výchylky pro zvolený rozsah vlastních frekvencí soustavy a zvolený poměrný útlum soustavy.

V případě, kdy máme zrychlení pohybu základu zadáno jako časový záznam konkrétní seismické události, spektrum odezvy výchylky stanovíme s využitím numerických metod pro řešení diferenciálních rovnic a to přímo z rovnice (3.5) například využitím řešičů výpočtového prostředí programu MATLAB, které jsou založeny na metodě typu Runge-Kutta. Takto lze určit při známých počátečních podmínkách, zadaném intervalu vlastních frekvencí  $\Omega$  soustavy a poměrném útlumu  $D$  výsledné zrychlení tělesa v závislosti na čase, které vznikne jako důsledek posuvného pohybu základu o předem známém zrychlení  $\ddot{u}_g(t)$ . Poté opět stanovíme maximální hodnotu tohoto výsledného zrychlení pro danou vlastní frekvenci soustavy a celý proces opět opakujeme pro další vlastní frekvenci. Tímto analogickým postupem získáme spektrum odezvy výchylky

$$S_a(\Omega, D) = \max_t |\ddot{q}(t)|. \quad (3.8)$$

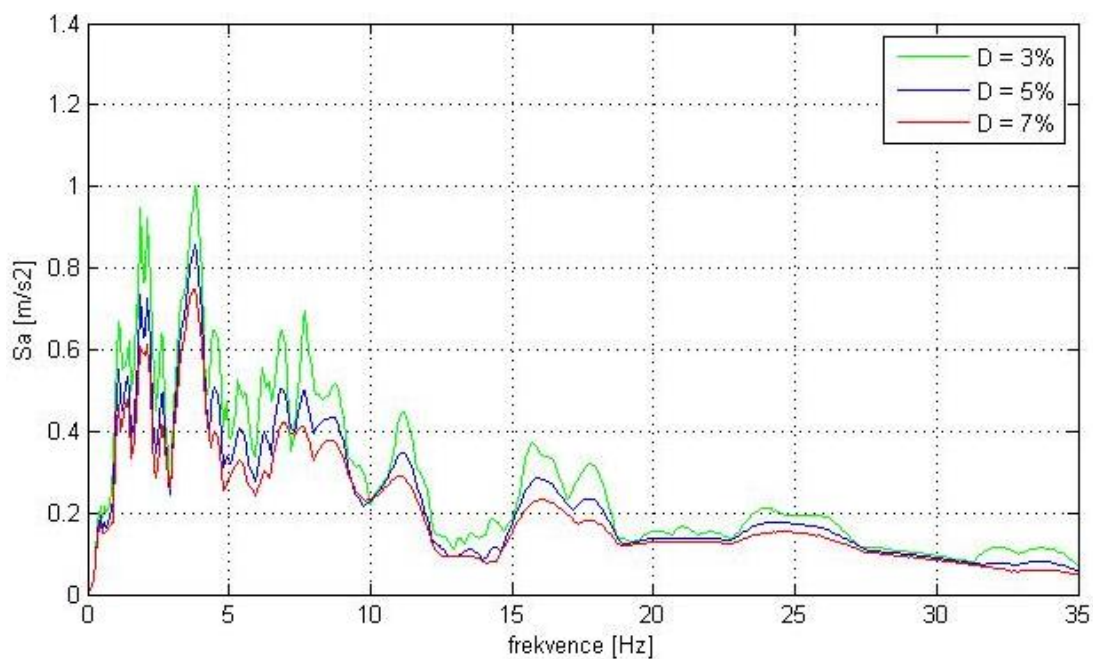
Převodový vztah mezi spektrem odezvy výchylky, spektrem odezvy zrychlení a spektrem odezvy rychlosti je

$$S_a(\Omega, D) = \Omega^2 S_d(\Omega, D) = \Omega S_v(\Omega, D). \quad (3.9)$$

#### 3.2.1. Aplikace metody pro určení metody spektra odezvy

Uvažujme kinematičké buzení dané časovým záznamem zemětřesení El Centro (obr. 3.2, modelová data volně přístupná na internetu [14]). Využitím výše popsaného postupu byla vygenerována spektra odezvy zrychlení v závislosti na vlastní frekvenci soustavy pro různé hodnoty poměrného útlumu. Získaná spektra odezvy zrychlení jsou uvedena na obr. 3.7.

### 3. KAPITOLA – Seizmické buzení jako druh kinematického buzení



*Obr. 3.7 Spektra odezvy zrychlení na zemětřesení El Centro pro různé hodnoty poměrného útlumu*

Ostré špičky a propady hodnot zrychlení (obr. 3.7) jsou výsledkem lokálních rezonancí a antirezonancí při pohybu základu. Proto se návrhy spektra vyhlazují a normalizují vzhledem ke standardní intenzitě (viz kapitola 3.1.1).

## 4. Kapitola

# Dynamická analýza soustav s více stupni volnosti

Dynamická analýza je zkoumání důsledků vznikajících při prvotním buzení soustav. Jedná se o postup pro získání kinematických závislostí vznikajících vlivem pohybu soustavy, ať již samovolným nebo vybuzeném nějakým vnějším vlivem. Cílem této práce je zkoumat dynamickou odezvu soustav s více stupni volnosti na kinematické buzení, proto se budeme dále zabývat pouze tímto druhem buzení. Jednou z možností vyšetřování je využití tzv. metody spektra odezvy, která se definuje v modálním prostoru. Z tohoto důvodu je nejprve v úvodu kapitoly nastíněna problematika modální analýzy a získání modálních veličin soustavy, které jsou potřebné pro stanovení odezvy na obecné kinematické, resp. seizmické, buzení pomocí metody spektra odezvy. Další možností je využití přímé numerické integrace. Pro úplnost je do kapitoly ještě zařazena metoda pro vyšetřování harmonického buzení netlumených a tlumených soustav, neboť takto definované kinematické buzení může vznikat jako druh technické seizmicity (viz úvod 3. kapitoly).

### 4.1. Modální analýza diskrétních lineárních soustav

Modální veličiny budou vyšetřovány využitím konzervativních diskrétních mechanických soustav. Matematický model kmitání takové soustavy lze obecně popsat maticovou rovnicí ve tvaru

$$M\ddot{q} + Kq = 0, \quad (4.1)$$

#### 4. KAPITOLA – Dynamická analýza soustav s více stupni volnosti

---

kde  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$  jsou matice hmotnosti a tuhosti soustavy a  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$  je vektor zobecněných souřadnic. Známe-li počáteční podmínky dané nulovými vektory [12]

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0 = \mathbf{0} \quad ; \quad \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$$

a za předpokladu, že takováto mechanická soustava kmitá harmonickým pohybem, odhadneme řešení rovnice (4.1) ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{i\Omega t}, \quad \text{kde } \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \quad (4.2)$$

kde  $\mathbf{v}$  označuje vektor prozatím neznámých amplitud a  $\Omega$  je úhlová frekvence. Dosazením (4.2) do (4.1) dostaneme:

$$-\mathbf{M}\mathbf{v}\Omega^2 e^{i\Omega t} + \mathbf{K}\mathbf{v}e^{i\Omega t} = \mathbf{0}.$$

Tato rovnice musí být splněna v každém časovém okamžiku, můžeme ji tedy přepsat do tvaru

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (4.3)$$

Netriviální řešení rovnice (4.3) existuje pouze za předpokladu

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0. \quad (4.4)$$

Tento determinant bývá nazýván frekvenčním determinanem [1], neboť jeho rozvinutím obdržíme tzv. frekvenční rovnici. Případně rovnici (4.4) označujeme jako charakteristickou rovnici, jejíž kořeny  $\lambda_v = \Omega_v^2$  nazýváme vlastními čísly. Vlastní frekvence  $\Omega_v = +\sqrt{\lambda_v}$  (znaménko plus kvůli pozitivní definitnosti matic  $\mathbf{M}$  a  $\mathbf{K}$ ) uspořádáváme vzestupně dle velikosti do diagonální matice ve tvaru

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\Omega_v^2), \quad (4.5)$$

kteřou nazýváme spektrální maticí soustavy. Odpovídající vektory amplitud  $\mathbf{v}_v$  určíme dosazením vlastních čísel  $\Omega_v$  do rovnice (4.3). Tyto vektory nazýváme vlastními vektory. Avšak vzhledem k homogenitě rovnice (4.3) je pro  $\Omega_v$  řešením i vektor  $c\mathbf{v}_v$ , kde  $c$  je libovolná konstanta. Proto pro jednoznačnost vektor  $\mathbf{v}_v$  normujeme podle matice hmotnosti, tzv.  $\mathbf{M}$ -normou a to následovně [12]

$$\mathbf{v}_v^T \mathbf{M} \mathbf{v}_v = 1, \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Takto odvozené vektory  $\mathbf{v}_v$  nazýváme vlastními vektory soustavy, jejichž fyzikálním významem je popis vlastního tvaru kmitání soustavy. Obdobně jako vlastní frekvence uspořádáváme do spektrální matice, tak vlastní vektory sestavujeme do tzv. modální matice ve tvaru

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_v], \quad v = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$



Navíc lze odvodit [2], že vlastní vektory normované podle podmínky (4.6) jsou ortonormální a lze vyjádřit tzv. podmínky ortonormality ve tvaru:

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E} \quad ; \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}. \quad (4.8)$$

Kde  $\mathbf{E}$  je jednotková matice řádu  $n$ .

## 4.2. Ustálená odezva na harmonické buzení

### 4.2.1. Netlumená soustava s více stupni volnosti

Mějme následující matematický model soustavy

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{f} \sin(\omega t), \quad (4.9)$$

kde  $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^n$  je vektor amplitud a  $\omega$  je budící frekvence. Obecné řešení této rovnice je složeno z řešení homogenního a partikulárního. Partikulárnímu řešení odpovídá ustálený pohyb soustavy, proto se jím budeme dále zabývat. Řešení soustavy odhadneme ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q} \sin(\omega t), \quad (4.10)$$

kde  $\mathbf{q}$  je dříve definovaný (2.5) vektor zobecněných souřadnic, resp. amplitud výchylek.

Dosazením (4.10) do (4.9) a po vytknutí  $\mathbf{q}$  dostaneme

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K})\mathbf{q} \sin(\omega t) = \mathbf{f} \sin(\omega t). \quad (4.11)$$

Dále zavedme matici dynamické tuhosti jako

$$\mathbf{Z}(\omega) = -\mathbf{M}\omega^2 + \mathbf{K}. \quad (4.12)$$

Koeficienty na levé a pravé straně rovnice (4.11) se musí rovnat v libovolném čase, proto lze rovnici zjednodušit na tvar (s přihlédnutím ke (4.12))

$$\mathbf{Z}(\omega)\mathbf{q} = \mathbf{f}. \quad (4.13)$$

Z rovnice (4.13) již můžeme snadno dopočítat hledaný vektor amplitud výchylek a to následovně

$$\mathbf{q} = \mathbf{Z}(\omega)^{-1} \mathbf{f} = \mathbf{G}(\omega) \mathbf{f} \quad (4.14)$$

kde jsme inverzní matici dynamické tuhosti označili  $\mathbf{G}(\omega)$  a nazýváme ji maticí dynamické poddajnosti. Takto získaný vektor  $\mathbf{q}$  zpětně dosadíme do odhadnutého řešení (4.10) a tím získáme celkové řešení ustálených kmitů netlumené, harmonicky buzené soustavy.

**4.2.2. Tlumená soustava s více stupni volnosti**

Uvažujme tlumenou soustavu, kde buzení vyjádříme ve tvaru (2.11), tedy pohybová rovnice v maticovém tvaru bude

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_c \cos(\omega t) + \mathbf{f}_s \sin(\omega t). \quad (4.15)$$

Také v tomto případě jsou ustálené kmity popsány partikulárním řešením, které odhadneme ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_c \cos(\omega t) + \mathbf{q}_s \sin(\omega t). \quad (4.16)$$

Dosazením (4.16) do (4.15) dostaneme

$$\begin{aligned} -\mathbf{M}\omega^2 \mathbf{q}_c \cos(\omega t) - \mathbf{M}\omega^2 \mathbf{q}_s \sin(\omega t) - \mathbf{B}\omega \mathbf{q}_c \sin(\omega t) + \\ + \mathbf{B}\omega \mathbf{q}_s \cos(\omega t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_c \cos(\omega t) + \mathbf{K}\mathbf{q}_s \sin(\omega t) = \\ = \mathbf{f}_c \cos(\omega t) + \mathbf{f}_s \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Z identické platnosti rovnice (4.17) a porovnáním koeficientů u kosinových členů, resp. sinových členů na levé a pravé straně rovnice (4.17) dostaneme dvě rovnice v maticovém tvaru

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q}_c + \omega \mathbf{B}\mathbf{q}_s &= \mathbf{f}_c, \\ -\omega \mathbf{B}\mathbf{q}_c + (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{q}_s &= \mathbf{f}_s, \end{aligned} \quad (4.18)$$

tedy získáme soustavu  $2n$  algebraických rovnic pro neznámé  $\mathbf{q}_c$  a  $\mathbf{q}_s$ . Soustavu můžeme dále upravit zavedením vektorů komplexních amplitud výchylky a buzení

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= \mathbf{f}_c - i\mathbf{f}_s, \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \mathbf{q}_c - i\mathbf{q}_s, \end{aligned} \quad (4.19)$$

kde  $i$  značí imaginární jednotku. Poté lze soustavu rovnic (4.18) po aplikaci (4.19) převést na komplexní maticovou rovnici ve tvaru

$$(-\mathbf{M}\omega^2 + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K})\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{f}}.$$

V analogii s kapitolou 4.2.1 členy v závorce tvoří matici dynamické tuhosti (ovšem na rozdíl od (4.12) obsahuje komplexní člen)

$$\mathbf{Z}(\omega) = -\mathbf{M}\omega^2 + i\omega \mathbf{B} + \mathbf{K}.$$

Pak pro vektor komplexních amplitud výchylek platí

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}^{-1}(\omega)\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{G}\tilde{\mathbf{f}},$$

kde jsme označili inverzní matici dynamické tuhosti (analogicky s (4.14))  $\mathbf{G}(\omega)$  a nazýváme ji maticí dynamické poddajnosti, resp. maticí frekvenčních přenosů (viz [1]).

Pro jednotlivé členy vektoru komplexních amplitud podle (4.19) je

$$\mathbf{q}_c = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{q}}\}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{q}_s = -\text{Im}\{\tilde{\mathbf{q}}\}. \quad (4.20)$$

Tedy reálná část vektoru komplexních amplitud určuje vektor kosinových složek výchylek a imaginární část vektoru komplexních amplitud určuje vektor sinových složek výchylek (ovšem se záporným znaménkem) dle (4.19). Nakonec dosazením (4.20) do (4.16) dostaneme celkové řešení ustálených kmitů tlumené, harmonicky buzené soustavy. A pro velikost  $i$ -té složky vektoru amplitud platí

$$q_i = \sqrt{q_{ic}^2 + q_{is}^2}.$$

### 4.3. Metoda spektra odezvy pro kinematické (seizmické) buzení

Vyjděme z matematického modelu relativního kmitání soustavy vzhledem k posouvajícímu se základu, k němuž je soustava pružně uchycena

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = -\mathbf{m}\ddot{u}_g(t). \quad (4.21)$$

V této rovnici  $\ddot{u}_g(t)$  značí časový průběh zrychlení posuvu základu v obecném směru daném jednotkovým vektorem  $\mathbf{e}$  a  $\mathbf{m}$  je vektor hmotnostních parametrů daný součinem matice hmotnosti  $\mathbf{M}$  a vektoru statického přemístění soustavy  $\mathbf{q}_{st}$  vyvolaného jednotkovým posunutím základu ve směru  $\mathbf{e}$ . Abychom mohli metodu spektra odezvy použít je potřeba znát vlastní frekvence a vlastní vektory soustavy. Proto je nezbytné nejprve provést modální analýzu (viz kapitola 4.1). Dále budeme považovat modální a spektrální matici soustavy za známé. Použijeme modální transformaci ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{V}\mathbf{x}(t), \quad (4.22)$$

kde  $\mathbf{V}$  je modální matice soustavy a  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  vektor modálních souřadnic. Dosazením (4.22) do (4.21) a vynásobením každého členu získané rovnice zleva transponovanou modální maticí dostaneme rovnici ve tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} \mathbf{x}(t) = -\mathbf{V}^T \mathbf{m} \ddot{u}_g(t). \quad (4.23)$$

Předpokládejme platnost podmínek ortonormality (4.8), pak v jejich analogii definujme obdobnou podmínku pro matici tlumení  $\mathbf{B}$  ve tvaru

$$\mathbf{V}^T \mathbf{B} \mathbf{V} = \mathbf{D} = \text{diag}(2D_v \Omega_v), \quad v = 1, 2, \dots, n, \quad (4.24)$$

kde  $D_v$  jsou poměrné útlumy charakterizující tlumení příslušných vlastních tvarů kmitů systému a  $\Omega_v$  jsou vlastní frekvence soustavy. Dosazením (4.8) a (4.24) do (4.23)

#### 4. KAPITOLA – Dynamická analýza soustav s více stupni volnosti

dostaneme soustavu  $n$  nevázaných diferenciálních rovnic. Dále řešme  $v$ -tou rovnicí této soustavy, která má tvar

$$\ddot{x}_v(t) + 2D_v\Omega_v\dot{x}_v(t) + \Omega_v^2x_v(t) = -\mathbf{v}_v^T\mathbf{m}\ddot{u}_g(t),$$

kde  $\mathbf{v}_v \in \mathbb{R}^n$  je vlastní vektor modální matice  $\mathbf{V}$  příslušející vlastnímu číslu  $\Omega_v$ . Provedeme Laplaceovu transformaci této rovnice za předpokladu nulových počátečních podmínek, tzn. nulové počáteční výchylky  $x_v(0) = 0$  a nulové počáteční rychlosti  $\dot{x}_v(0) = 0$ . Získáme Laplaceův obraz  $v$ -té výchylky v modálních souřadnicích

$$\begin{aligned}\bar{x}_v(p) &= -\mathbf{v}_v^T\mathbf{m}\frac{1}{p^2 + 2D_v\Omega_v p + \Omega_v^2}\ddot{u}_g(p) = \\ &= -\mathbf{v}_v^T\mathbf{m}\bar{g}_v(p)\ddot{u}_g(p),\end{aligned}\tag{4.25}$$

ve kterém jsme výraz ve zlomku označili  $\bar{g}_v(t)$  a nazýváme jej Laplaceův obraz impulsní funkce. Jelikož se tím pádem v Laplaceově obrazu (4.25) nachází součin dvou funkcí, povede zpětná Laplaceova transformace ke konvolučnímu integrálu

$$x_v(t) = -\mathbf{v}_v^T\mathbf{m}\int_0^t \ddot{u}_g(\tau)g_v(t-\tau)d\tau.$$

Za impulsní funkci dosazujeme z Laplaceova operátorového slovníku. Například pro poměrný útlum  $0 \leq D \leq 1$  dosazujeme [6]

$$g_v(t) = \frac{1}{\Omega_v\sqrt{1-D_v^2}}e^{-D_v\Omega_v t}\sin\left(\Omega_v\sqrt{1-D_v^2}t\right).$$

Návrat z modálních do zobecněných souřadnic provedeme sečtením všech příspěvků od jednotlivých vlastních tvarů, tzv. módů a tím získáme výsledný vektor amplitud (4.22)

$$\mathbf{q}(t) = \sum_{v=1}^n \mathbf{v}_v x_v(t) = -\sum_{v=1}^n \mathbf{v}_v \mathbf{v}_v^T \mathbf{m} \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) g_v(t-\tau) d\tau.$$

Závislost mezi maximem relativní výchylky  $q_v$  a vlastní frekvencí  $\Omega_v$  při dané hodnotě poměrného útlumu  $D_v$  nazýváme spektrum odezvy výchylky a značíme jej (viz (3.7))

$$S_d(\Omega_v, D_v) = \max_t \left| \int_0^t \ddot{u}_g(\tau) g_v(t-\tau) d\tau \right|.$$

Z toho plyne pro maximální hodnoty módů  $q_{i,v}$  vztah

$$\max_t |q_{i,v}(t)| = \max_t |v_{i,v} \mathbf{v}_v^T \mathbf{m}| S_d(\Omega_v, D_v).\tag{4.26}$$

Maxima módů nenastávají ve stejném časovém okamžiku, proto se zavádí tzv. horní odhad  $i$ -té zobecněné souřadnice

$$\hat{q}_i = \sum_{v=1}^n \max_t |q_{i,v}(t)|. \quad (4.27)$$

Při aplikaci metody spektra odezvy pro vyšetřování seizmických účinků na stavební a strojní konstrukce se obvykle považuje za efektivní horní odhad maxima dynamických stavových veličin druhá odmocnina sumy kvadrátů maxim jednotlivých módů

$$\hat{q}_i = \sqrt{\sum_{v=1}^n [v_{i,v} \mathbf{v}_v^T \mathbf{m} S_d(\Omega_v, D_v)]^2}. \quad (4.28)$$

Mluvíme zde o tzv. metodě SRSS (Square Root of Sum of Squares). Případně se také používá tzv. metoda CQC (Complete Quadratic Combination) pro kterou platí

$$\hat{q}_i = \sqrt{\sum_j^n \sum_k^n q_{i,j} \rho_{j,k} q_{i,k}}, \quad (4.29)$$

kde

$$\rho_{j,k} = \frac{8\sqrt{D_j D_k} (D_j + r D_k) r^{\frac{2}{3}}}{(1 - r^2)^2 + 4D_j D_k r (1 + r^2) + 4(D_j^2 + D_k^2) r^2}, \quad \text{resp. } r = \frac{\Omega_k}{\Omega_j}.$$

Poslední zmíněná metoda zohledňuje vzájemnou polohu vlastních frekvencí soustavy v tom smyslu, že máme-li dvě vlastní frekvence soustavy podobné velikosti, pak tyto dvě vlastní frekvence ovlivní vlastní kmitání soustavy více než jiné dvě vlastní frekvence, jejichž hodnoty jsou značně odlišné.

#### **4.4. Metoda přímé numerické integrace modelu**

Přímou numerickou integraci můžeme použít za předpokladu, známe-li zrychlení báze, které definuje buzení působící na soustavu. V našem případě se jedná o časový rozvoj zrychlení posuvu základu  $\ddot{u}_g(t)$ . Vyjdeme z matematického modelu ve tvaru (4.21). Jak již bylo zmíněno dříve, jedná se o soustavu  $n$  obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu.

#### 4. KAPITOLA – Dynamická analýza soustav s více stupni volnosti

---

Jako další krok provedeme transformaci této soustavy z prostoru zobecněných souřadnic do stavového prostoru. Proto nejprve musíme zavést stavový vektor např. ve tvaru [6]

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} \in R^{2n}. \quad (4.30)$$

A poté rozšíříme soustavu (4.21) o identitu ve tvaru

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.31)$$

Tím získáme soustavu  $2n$  obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu ve tvaru

$$\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (4.32)$$

kde jsme zavedli následující matice (resp. vektor)

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$
$$\text{resp. } \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_g(t) \end{bmatrix}.$$

Takovouto soustavu jsme již schopni řešit při znalosti počátečních podmínek vyjádřených stavovým vektorem pro čas  $t = 0$

$$\mathbf{u}(0) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(0) \\ \mathbf{q}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}. \quad (4.34)$$

K řešení můžeme použít numerické řešiče výpočtových programů jakými jsou například metody *ode23* resp. *ode45* výpočtového prostředí programu MATLAB [7]. Zde se postupuje tím způsobem, že se vyjádří derivace stavového vektoru  $\dot{\mathbf{u}}(t)$

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{f}(t) - \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{u}(t) = \mathbf{A}\mathbf{u}(t) + \mathbf{N}^{-1}\mathbf{f}(t).$$

Maticie  $\mathbf{A} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{P}$  se nazývá systémová matice a má tvar

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} \\ \mathbf{E}_n & \mathbf{0}_n \end{bmatrix},$$

v němž  $\mathbf{E}_n$  značí diagonální jednotkovou matici  $n$ -tého řádu a  $\mathbf{0}_n$  je nulová matice  $n$ -tého řádu. Nyní již stačí zapsat takto odvozenou soustavu v požadovaném tvaru dle zvolené numerické metody.

## 5. Kapitola

# Stanovení seismické odezvy panelového domu

Aplikační část předložené práce je věnována zkoumání dynamické odezvy vybraného panelového domu vyskytujícího se v Plzeňském regionu, konkrétně se jedná o dynamické odezvy na vybraná seismická buzení. Z tohoto důvodu seznamuje úvod kapitoly čtenáře se seismicitou v České republice a následně s historií panelové výstavby v Plzeňském regionu. Z celé řady konstrukčních panelových soustav byla vybrána soustava PS 69 [8] kvůli jednoduché dispozici jednotlivých stěn a také z důvodu dostupnosti výkresové dokumentace. Zbytek kapitoly je věnován kompletnímu postupu vyšetření dynamické odezvy včetně samotného sestavení výpočtového modelu a vyšetření modálních veličin zvolené soustavy.



*Obr. 5.1 Ilustrační obrázek konstrukční soustavy PS 69*

### 5.1. Seismicita v České republice

Česká republika jako taková nemá pod sebou významné tektonické zlomy, tudíž se na jejím území v historii nevyskytovala žádná katastrofická zemětřesení. Zemětřesení, která se čas od času vyskytují na území České republiky, pocházejí ze zlomů z oblasti Karpat (ve východních Čechách a na Moravě) a z oblasti Alp (v západních Čechách). K nejničivějšímu zemětřesení na území bývalého Československa došlo 28. června 1763 v Komárně [I6]. Zahynulo při něm 63 lidí a dalších 102 bylo zraněno. Vážně bylo poničeno celkem 273 budov a 7 kostelů. Informace o seizmické aktivitě byly shromažďovány z údajů o zemětřeseních podle starých kronik. Poté od 19. století přibýly i údaje ze systematických seizmografických měření a geofyzikálních bádání. Za posledních zhruba padesát let se tato bádání a měření značně zdokonalila a systematizovala v celosvětovém měřítku. Došlo k definování seizmických zón, k pravděpodobnostnímu vyjádření výskytu zemětřesení a k objektivizaci údajů [I5] (přechod od Modifikované Mercalliho stupnice k Rychterově stupnici, posuzování časového průběhu otřesů a dosahované maximální hodnoty zrychlení, respektování korelace s geofyzikálním utvářením terénu atd.).

Od rozdělení Československa v roce 1993 již nejsou součástí České republiky ty nejvíce seizmicky aktivní oblasti, jako jsou Komárno, Žilina a jiné. Přesto u seizmických oblastí na území České republiky se díky novým pozorováním a výpočtům zvýšilo ohrožení zemětřesením a zvětšila se také výměra území, kde je potřeba provádět seizmické návrhy. Navzdory tomu zůstává území České republiky převážně územím s malou nebo velmi malou seismicitou (viz obr. 5.2).

Na základě výše uvedených informací budeme uvažovat v našem modelovém případě mimo jiné seizmické buzení definované lineárním spektrem odezvy (viz kapitola 3.1.1), u kterého budeme uvažovat následující parametry:

- návrhové zrychlení podloží odpovídající oblasti se seismicitou větší než malou, tzn.  $a_g = 0,12g$  (kde  $g$  je gravitační zrychlení)
- korekční součinitel útlumu odpovídající poměrnému viskóznímu útlumu 5%, tedy  $\eta = 1$
- „Typ 1“ spektra odezvy odpovídající zemětřesení do pátého stupně Richterovy stupnice
- typ základové půdy „A“ viz [4]





Obr. 5.2 Mapa seismických oblastí České republiky, převzata z [15]

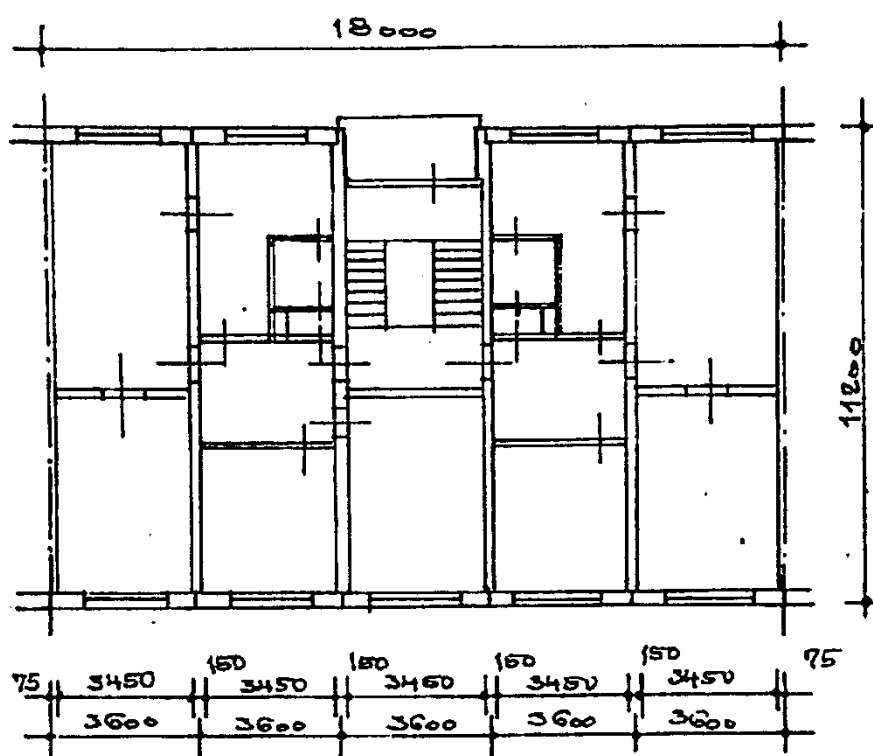
Pro srovnání budeme také uvažovat zemětřesení zadané akcelerogramem zemětřesení El Centro (viz obr. 3.2). A to jak jeho časovým rozvojem, tak spektrem odezvy zrychlení z něj vygenerovaného (viz kapitola 3.2.1).

## 5.2. Panelové domy v Plzeňském kraji

Samotná historie panelových domů se začala tvořit v poválečném období, kdy bylo potřeba v co možná nejkratším čase vybudovat maximální množství bytů a tím obnovit válkou poničené budovy a objekty. V té době dochází k významné změně struktury stavebnictví. Ve stavební výrobě se začalo upouštět od výstavby objektů pomocí klasických systémů a trend se začal uchylovat k těm tzv. „novým, progresivním a ekonomicky efektivním“, což vedlo i k vyvíjení konstrukčních panelových systémů. Následná výstavba se soustřeďovala na hranice stávajících, historickým vývojem vymezených, městských aglomerací. V Plzeňském regionu bylo pro výstavbu bytových objektů využíváno ve stavební výrobě hned několik konstrukčních systémů [8]. Jedná se zejména o o soustavy T11, T13, T15, T16, T02B, T03B, dále PS61 a T06B. Koncem šedesátých let se začalo v Plzni využívat konstrukčního systému PS 69 a jeho následných variant (PS 69/1, PS 69/2 atd.).

### 5.3. Výpočtový model konstrukčního systému PS 69

Konstrukční soustava PS 69 nahradila v roce 1970, v té době užívanou, soustavu T 06 B. Jedná se o panelový montovaný systém upravený pro přesnou montáž celostěnových kompletizovaných dílců pomocí stavěcích šroubů (fixátorů) [I7]. Systém PS 69 se používal pro čtyř, šesti a osmi podlažní budovy v rozsahu celého půdorysu. Jednalo se o podsklepené objekty s konstrukční výškou podlaží 2800 mm. Pro výpočtový model jsme vycházeli z nákresu půdorysu jednoho bloku řadové sekce konstrukční soustavy PS 69, která je na obr. 5.2.



Obr. 5.2 Schématický půdorys podlaží konstrukční soustavy PS 69, převzato z [8]

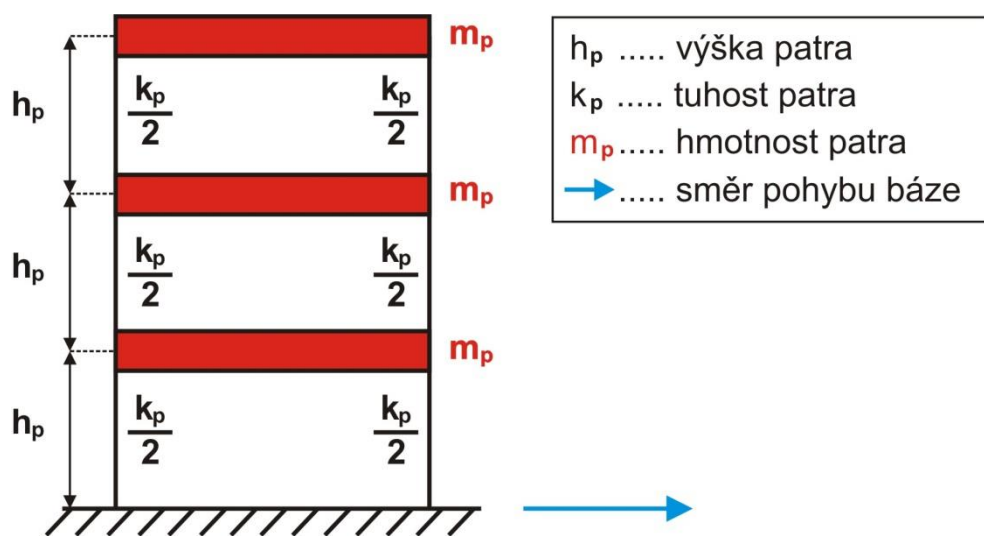
Konstrukční soustava PS 69 byla v 70. letech projektována následovně: svislé nosné a dělicí stěny tvořené panely byly navrhovány ze železobetonu jako plné o tloušťce 150 mm. Příčky byly navrhovány železobetonové, celostěnové o tloušťce 80 mm. Obvodové stěny byly uvažovány z jednovrstvých parapetních dílců z keramzibetonu tloušťky 270 mm s meziokenními vložkami a okenními pásy. Stropní konstrukce byly prováděny jako montované z plných, železobetonových panelů o tloušťce 140 mm. Skladbu panelů nosných stěn jsme určili ze skladby panelů stropu (viz obr. 5.3) tak, aby jednotlivé panely stropu navazovaly na panely nosných stěn.



## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

jednotný a to homogenní, izotropní materiál typu beton o hustotě  $2000 \text{ kg/m}^3$ . Tloušťky a rozměry jednotlivých stěn uvažujeme podle dobového projektování a nákrešů.

Cílem je převést celý výpočtový model na diskrétní mechanickou soustavu, kdy všechny stěny celého jednoho patra včetně stropu budou soustředěny do jednoho hmotného bodu o hmotnosti  $m_p$ . Poté budou jednotlivé takto získané hmotné body reprezentující jednotlivé patra budovy mezi sebou postupně spojeny pomyslným nosníkem (diskrétní pružinou) o tuhosti  $k_p$ , který vyjadřuje tuhost stěn jednoho patra v daném směru buzení, a o délce  $h_p$  odpovídající výšce jednoho patra. Pro názornost je takováto soustava pro třípodlažní budovu znázorněná na obr. 5.5.



Obr. 5.5 Výpočtový model konstrukční soustavy PS 69 – převedený na diskrétní mechanickou soustavu

### 5.3.1. Hmotnostní a tuhostní parametry patra

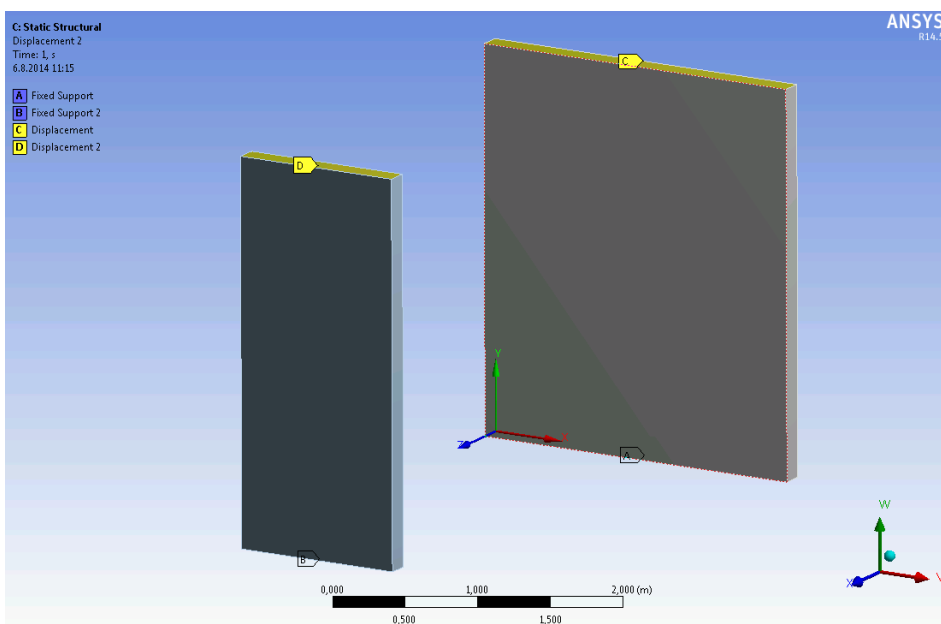
Hmotnost patra, dle předchozí definice, určíme jako součet hmotností od jednotlivých stěn, respektive od jednotlivých panelů (po odečtení otvorů na okna), včetně hmotnosti stropu. Po provedení výpočtu dostaneme výslednou hmotnost jednoho patra

$$m_p = 160,64 \text{ t.} \quad (5.1)$$

Celkovou tuhost patra určíme následovně. Uvažujme, že ve směru buzení mají významný vliv pouze tuhosti nosných stěn. Tuhosti příček a obvodových stěn jsou díky jejich kolmé orientaci na směr buzení zanedbatelné. Proto potřebujeme určit tuhost nosných stěn ve směru buzení. Každá nosná stěna je složena ze čtyř panelů délky 2400 mm a jednoho panelu délky 1200 mm. Oba panely mají shodnou šířku 140 mm.

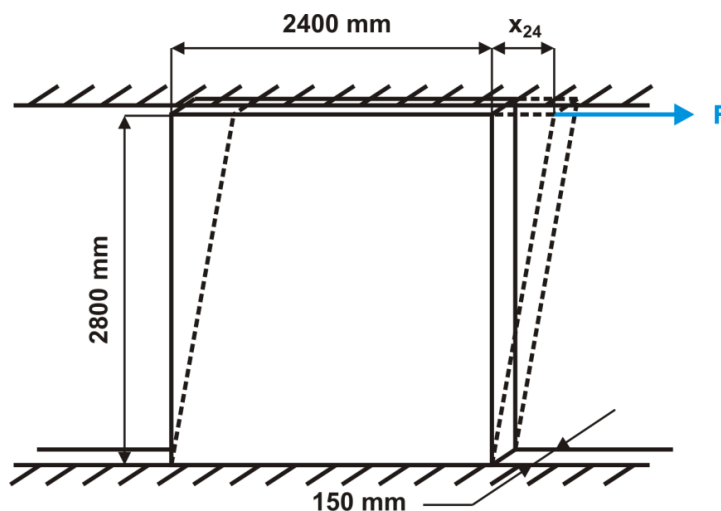
## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

Ve výpočtovém prostředí programu ANSYS byly určeny jednotlivé tuhosti pro panel délky 2400 mm a 1200 mm za předpokladu jejich vetknutí na spodní stěně jednotlivých panelů a uvažování pouze posuvného pohybu ve směru buzení v rovině horní stěny panelu. Zvolené okrajové podmínky jsou zobrazeny na obr. 5.6.



Obr. 5.6 Výpočtový model (prostředí ANSYS) pro stanovení tuhosti panelu nosné stěny o délce 2400 mm. Zobrazení okrajových podmínek

Tímto způsobem uvažování deformace zanedbáváme natačení panelu vlivem buzení. Důvodem pro tento předpoklad je fakt, že uvažujeme hmotnost ostatních pater působících ze shora na jednotlivé panely. Na obr 5.7 je schéma použité pro stanovení tuhosti panelu délky 2400 mm. Analogicky se postupuje u panelu délky 1200 mm.



Obr. 5.7 Schéma výpočtového modelu pro stanovení tuhosti panelu nosné stěny o délce 2400 mm

## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

Označme tuhost panelu nosné stěny o délce 2400 mm jako  $k_{24}$ . Ve výpočtovém modelu v prostředí ANSYS definujeme na výše popsaném modelu zatěžující sílu  $F$  (viz obr. 5.6) o velikosti  $F = 10^6$  N ve směru předpokládaného kinematického buzení. Takto velkou sílu volíme úměrně, aby nám po provedení výpočtu ve výpočtovém prostředí ANSYS vyšla zratelná výchylka  $x_{24}$ . Konkrétně

$$x_{24} = 1,0639 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

Pro tuhost  $k_{24}$  poté platí vztah

$$k_{24} = \frac{F}{x_{24}}.$$

Po dosazení dostaneme

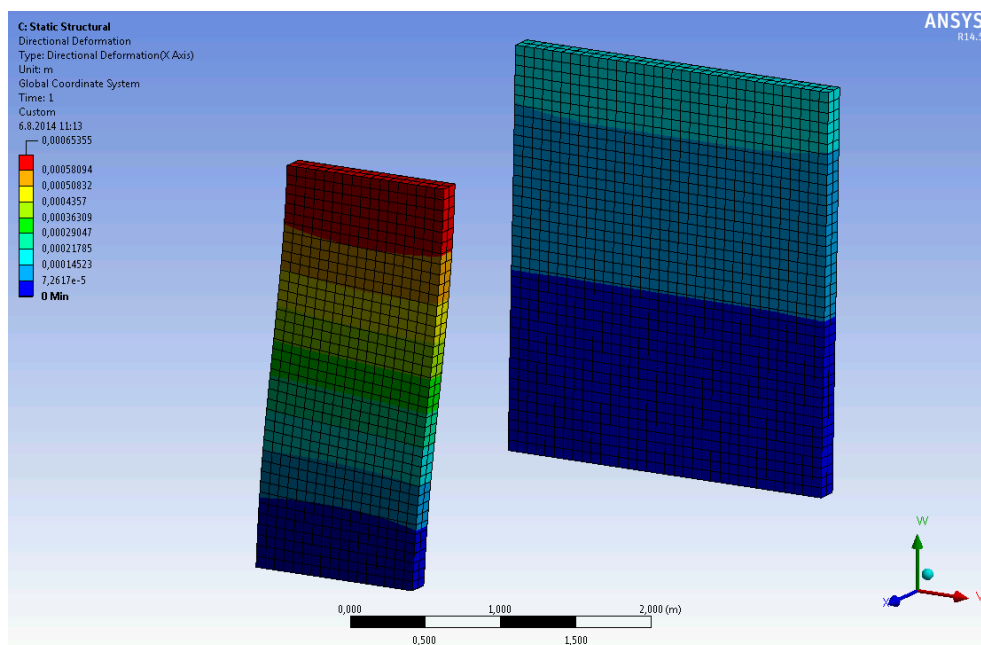
$$k_{24} = 9,3994 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (5.2)$$

Stejným postupem vypočítáme také tuhost panelu nosné stěny o délce 1200 mm, kterou označíme  $k_{12}$ . V tomto případě má výchylka  $x_{12}$  hodnotu (viz obr 5.8)

$$x_{12} = 4,2417 \cdot 10^{-3} \text{ m.}$$

a pro velikost  $k_{12}$  platí

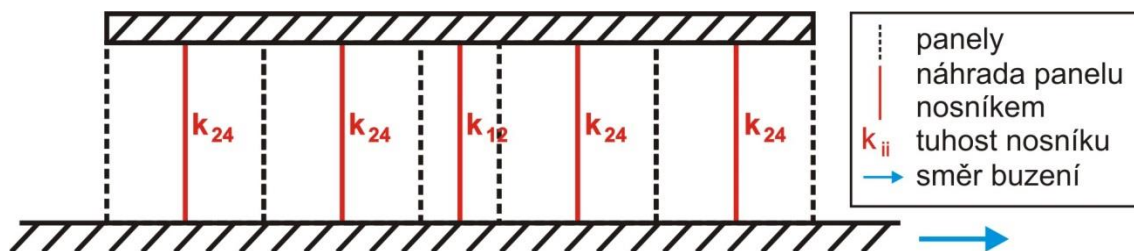
$$k_{12} = 2,3575 \cdot 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}}. \quad (5.3)$$



Obr. 5.8 Výpočtový model (prostředí ANSYS) pro stanovení tuhosti panelu nosné stěny o délce 1200 mm. Zobrazení výsledné deformace  $x_{12}$

## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

Celou jednu nosnou stěnu nahradíme soustavou pěti vetknutých nosníků, z nichž čtyři budou mít tuhost  $k_{24}$  a jeden (uprostřed – dle schématu na obr. 5.3) bude mít tuhost  $k_{12}$ . Nákres takovéto soustavy je na obr. 5.9.



Obr. 5.9 Výpočtový model pro stanovení tuhosti jedné nosné stěny

Následně vyjádříme celkovou tuhost jedné nosné stěny ve směru buzení, kterou označíme  $k_{st}$  (s přihlédnutím ke (5.2) a (5.3))

$$k_{st} = 4 \cdot k_{24} + k_{12} = 3,9955 \cdot 10^9 \frac{N}{m}. \quad (5.4)$$

Nyní, když máme odvozenou tuhost jedné stěny, můžeme odvodit výslednou tuhost celého patra, které se skládá ze šesti identických nosných stěn. Celkovou tuhost patra označíme jako  $k_p$  a dostaneme

$$k_p = 6 \cdot k_{st} = 2,3973 \cdot 10^{10} \frac{N}{m}. \quad (5.5)$$

Známe-li hmotnost patra soustředěnou do hmotného bodu (5.1), výslednou tuhost patra ve směru buzení (5.5) a výšku patra, kterou jsme stanovili dříve na 2800 mm, pak již známe vše, co potřebujeme k převedení konstrukčního modelu PS 69 na diskrétní mechanickou soustavu zobrazenou na obr. 5.5.

### 5.3.2. Vlastní frekvence soustavy

V návaznosti na kapitolu 4.1 určíme vlastní frekvence osmipodlažní budovy konstrukční soustavy PS 69. Převedeme-li tuto soustavu na diskrétní lineární soustavu, dle předchozí kapitoly, vyjdou matice hmotnosti soustavy  $M$  a matice tuhosti soustavy  $K$  (podle 2.9)

## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

$$M = \text{diag}(m_p; m_p; \dots; m_p) \in \mathbb{R}^{8,8}$$

$$K = \begin{pmatrix} 2k_p & -k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_p & 2k_p & -k_p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -k_p & 2k_p & -k_p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_p & 2k_p & -k_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_p & 2k_p & -k_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p & 2k_p & -k_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p & 2k_p & -k_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_p & k_p \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Na první pohled je patrné, že obě matice jsou pro takovýto typ soustavy symetrické. Navíc matice hmotnosti soustavy  $M$  je diagonální s nulovými prvky mimo diagonálu a matice tuhosti soustavy  $K$  je pásová. Obě matice jsou navíc pozitivně definitní, díky čemuž jsou veškerá vlastní čísla soustavy nezáporná. Tyto matice dále dosadíme do charakteristické rovnice (4.4) a tím vypočítáme vlastní čísla soustavy. Jelikož vlastní čísla jsou kvadráty vlastních frekvencí, které jsou navíc vyjádřeny v jednotkách [rad/s], odmocníme jednotlivá vlastní čísla a vyjádříme je v hertzech. Po těchto úpravách dostaneme následující vlastní frekvence soustavy:

vlastní frekvence soustavy $\lambda_i$								
$i =$	1	2	3	4	5	6	7	8
[Hz]	11,35	33,65	54,81	74,10	90,87	104,55	114,66	120,87

Tab. 5.1 Vlastní frekvence výpočtového modelu konstrukční soustavy PS 69

Na první pohled je patrné, že vlastní frekvence soustavy mají vysoké hodnoty. Neboť ve srovnání s vypočítanými modelovými příklady [I8] a naměřenými modelovými příklady [9] vychází první vlastní frekvence obdobných konstrukčních systémů v rozmezí 1,2 až 2,0 Hz. Obecně platí, čím více pater budovy, tím nižší je první vlastní frekvence soustavy. V našem případě vyšly takto vysoké frekvence kvůli značnému zjednodušení výpočtového modelu a hlavně kvůli zanedbání spojů mezi jednotlivými panely, které zásadně ovlivňují tuhost jednotlivých stěn.

Dalším krokem proto bude úloha ladění parametrů soustavy pomocí metody optimalizace. Touto metodou se budeme snažit přeladit celkovou tuhost patra  $k_p$ , abychom docílili požadované hodnoty první vlastní frekvence soustavy. Referenční



## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

hodnotu pro náš modelový příklad stanovíme na hodnotu 1,8 Hz (viz [9] a [I8]). K optimalizaci použijeme výpočtové prostředí MATLAB, kde pomocí funkce „*fminsearch*“ [I9] a pomocí tzv. cílové funkce [10] určíme požadovanou výslednou tuhost patra  $k_p$ , která nám po opětovném provedení modální analýzy zaručí první vlastní frekvenci o hodnotě 1,8 Hz. Cílovou funkci volíme jako funkci s jedním globálním extrémem ve tvaru

$$\psi(k_p) = \left(1 - \frac{f_1(k_p)}{f_{1,ref}}\right)^2, \quad (5.7)$$

kde  $f_{1,ref}$  značí zvolenou referenční hodnotu první vlastní frekvence a  $f_1$  je aktuální, optimalizovaná hodnota první vlastní frekvence, která je funkcí tuhosti patra. Po přeladění dostaneme

$$k_{po} = \underset{k_p}{\operatorname{argmin}} \psi(k_p) = 6,0338 \cdot 10^8 \frac{N}{m}. \quad (5.8)$$

Po dosažení přeladěné hodnoty celkové tuhosti patra  $k_{po}$  (5.8) do celkové matice tuhosti soustavy  $\mathbf{K}$  (5.6) a po opětovném provedení modální analýzy dostáváme následující vlastní frekvence soustavy

vlastní frekvence optimalizované soustavy $\lambda_i$								
i =	1	2	3	4	5	6	7	8
[Hz]	1,80	5,34	8,70	11,77	14,42	16,59	18,19	19,18

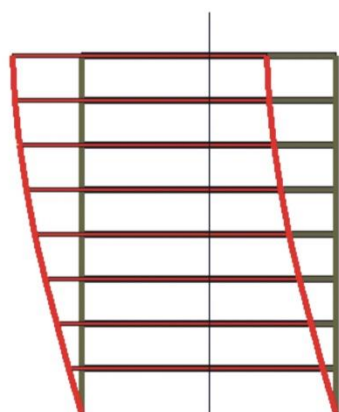
Tab. 5.2 Vlastní frekvence přeladěného výpočtového modelu konstrukční soustavy PS 69

### 5.3.3. Vlastní tvary kmitání soustavy

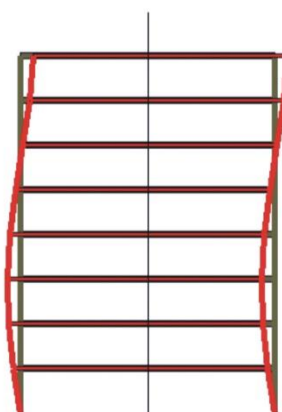
Vybuzení vlastního tvaru kmitání soustavy nastane, pokud dochází k buzení systému s frekvencí rovné jedné z vlastních frekvencí soustavy. V takovém okamžiku kmitající systém klade nejmenší odpor a dochází k tzv. stavu rezonance. Vlastní tvary kmitání osmipodlažní konstrukční soustavy PS 69 odpovídající jednotlivým vlastním frekvencím soustavy jsou znázorněny na obr. 5.10. – 5.13.

5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

---

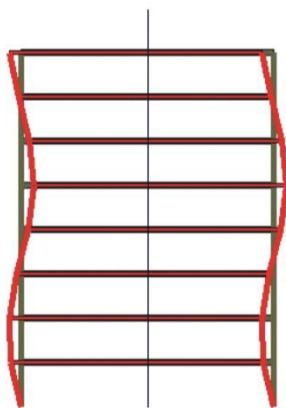


$f_1 = 1,80 \text{ Hz}$

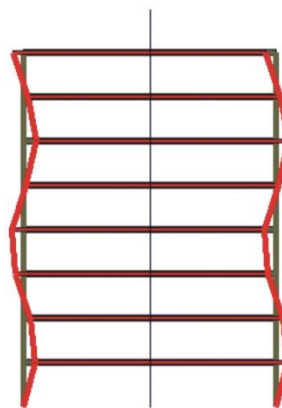


$f_2 = 5,34 \text{ Hz}$

Obr. 5.10 - 1. a 2. vlastní tvar kmitání osmipodlažního modelu konstrukční soustavy PS 69 včetně vlastních frekvencí, pro které tyto tvary nastanou

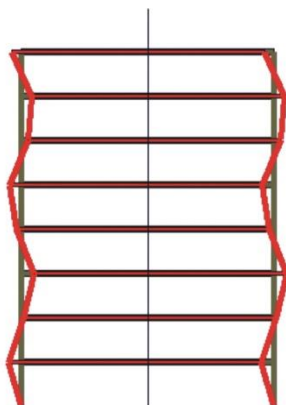


$f_3 = 8,70 \text{ Hz}$

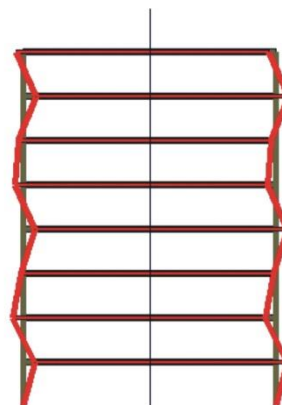


$f_4 = 11,77 \text{ Hz}$

Obr. 5.11 - 3. a 4. vlastní tvar kmitání osmipodlažního modelu konstrukční soustavy PS 69 včetně vlastních frekvencí, pro které tyto tvary nastanou

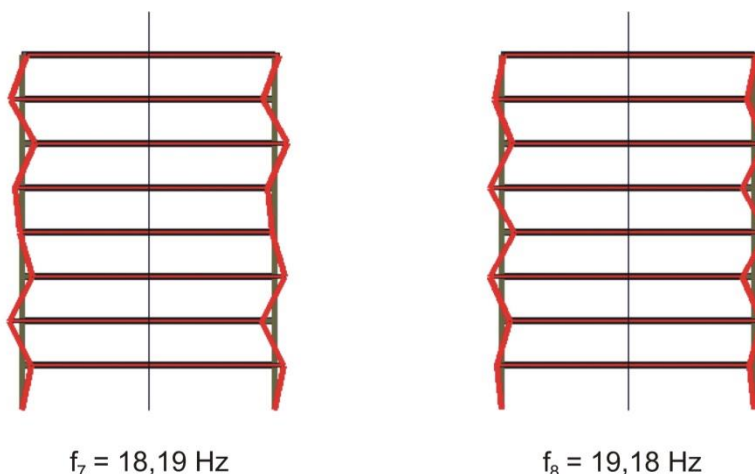


$f_5 = 14,42 \text{ Hz}$



$f_6 = 16,59 \text{ Hz}$

Obr. 5.12 - 5. a 6. vlastní tvar kmitání osmipodlažního modelu konstrukční soustavy PS 69 včetně vlastních frekvencí, pro které tyto tvary nastanou



Obr. 5.13 - 7. a 8. vlastní tvar kmitání osmipodlažního modelu konstrukční soustavy PS 69 včetně vlastních frekvencí, pro které tyto tvary nastanou

Z obr. 5.10 – 5.13 je patrné, že vlastní tvary kmitání konstrukčního systému PS 69 jsou ohybovými kmity. V případě 1. vlastního tvaru se jedná o ohybové kmity bez jediného uzlu, v případě 2. vlastního tvaru o ohybové kmity s jedním uzlem, v případě 3. vlastního tvaru o ohybové kmity se dvěma uzly atd.

#### 5.3.4. Dynamická analýza soustavy

Máme-li definovaný výpočtový model a známe-li modální veličiny zkoumané soustavy, můžeme začít vyšetřovat dynamickou odezvu na jednotlivá kinematická buzení.

Jako první případ vyšetříme variantu, kdy pro vstupní data ke stanovení buzení působící na soustavu využijeme lineární spektrum odezvy zrychlení (viz kapitola 3.1.1) v souladu s EC-8. Budeme předpokládat lineární spektrum odezvy zrychlení odpovídající zemětřesení o velikosti více než malé, tedy takové spektrum, které jsme definovali v kapitole 5.1. Cílem je určit maxima stavových veličin, což jsou v našem případě maxima výchylek jednotlivých pater vlivem buzení. Použijeme metodu spektra odezvy, která je blíže vysvětlena v kapitole 4.3. Předpokládejme, že známe modální matici soustavy  $V$  (4.7) a vektor parametrů  $m$  definovaný v úvodu kapitoly 4.3. Vydeme ze vztahu pro maximální hodnoty jednotlivých módů (4.26), do kterého dosazujeme hodnoty spektra odezvy výchylky, tedy přepočítané hodnoty spektra odezvy zrychlení podle vztahu (3.9). Do vztahu pro maximální hodnotu  $i$ -tého módu (4.26) dosazujeme za hodnotu spektra odezvy výchylky tu hodnotu, která odpovídá vlastní frekvenci  $i$ -tého módu. Z takto získaných maxim jednotlivých módů nakonec

## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

stanovíme horní efektivní odhady hledaných výchylek jednotlivých pater. Pro srovnání uvádíme všechny dříve odvozené kombinační metody pro jednotlivé módy kmitání, a to sčítací metodu (4.27), dále metodu SRSS (4.28) a metodu CQC (4.29).

horní efektivní odhady výchylek jednotlivých podlaží soustavy [m]								
podlaží	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
sčítací m.	0,0067	0,0125	0,0175	0,0217	0,0248	0,0274	0,0300	0,0316
SRSS	0,0056	0,0109	0,0158	0,0202	0,0239	0,0268	0,0288	0,0298
CQC	0,0055	0,0109	0,0157	0,0201	0,0239	0,0268	0,0287	0,0298

Tab. 5.3 Horní efektivní odhady výchylek jednotlivých pater soustavy PS 69 vzniklé jako důsledek buzení charakterizovaného dle EC-8

Druhý případ, který vyšetříme, bude přepokládat vstupní data dané spektrem odezvy zrychlení zemětřesení El Centro pro útlum soustavy  $D = 5\%$  (viz kapitola 3.2.1.). Postupujeme analogicky s předchozím případem, i zde využijeme metody spektra odezvy a horní efektivní odhady stanovíme opět podle všech výše zmíněných kombinačních metod.

horní efektivní odhady výchylek jednotlivých podlaží soustavy [m]								
podlaží	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
sčítací m.	0,0170	0,0260	0,0311	0,0354	0,0367	0,0388	0,0431	0,0493
SRSS	0,0087	0,0155	0,0208	0,0252	0,0289	0,0322	0,0349	0,0367
CQC	0,0089	0,0156	0,0209	0,0253	0,0290	0,0322	0,0350	0,0369

Tab. 5.4 Horní efektivní odhady výchylek jednotlivých pater soustavy PS 69 vzniklé jako důsledek buzení charakterizovaného dle spektra zrychlení El Centro

Jako poslední případ vyšetříme opět dynamickou odezvu výpočtového modelu stavební soustavy PS 69 na buzení dané časovým rozvojem zemětřesení El Centro. Tentokrát použijeme výpočet pomocí numerických metod pro řešení soustav diferenciálních rovnic (viz kapitola 4.4). Matici tlumení soustavy  $\mathbf{B}$  v tomto případě definujeme z podmínky (4.24)

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^{-T} \text{diag}(2D_v \Omega_v) \mathbf{V}^{-1}, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

kde  $\mathbf{V}$  je modální matice soustavy  $\Omega_v$  jsou vlastní čísla soustavy a  $D_v$  jsou poměrné útlumy jednotlivých tvarů kmitání, za které dosazujeme pro srovnání s předchozím případem  $D_v = 5\%$ .

## 5. KAPITOLA – Řešený příklad modelového panelového domu

---

Po provedení numerických výpočtů nám vyjdou maximální výchylky jednotlivých pater následovně

maximální výchylky jednotlivých podlaží soustavy								
podlaží	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
[m]	0,0060	0,0117	0,0168	0,0213	0,0249	0,0278	0,0298	0,0308

*Tab. 5.5 Maximální výchylky jednotlivých pater soustavy PS 69 získané numerickými metodami z časového rozvoje zemětřesení El Centro*

## 6. Kapitola

### Závěr

Předložená bakalářská práce se zabývá tématem modelování a zkoumáním dynamické odezvy kinematicky buzených diskrétních mechanických soustav. V oblasti dynamické analýzy se práce především zaměřuje na speciální typ kinematického buzení a to na seizmické buzení.

Cíle stanovené v úvodu práce byly splněny následovně:

V úvodu teoretické části práce byla blíže specifikována problematika diskrétních mechanických soustav včetně přehledu typů diskrétních mechanických soustav rozdělených podle tlumení dané soustavy a podle buzení působícího na soustavu.

Metody vyšetřování dynamické odezvy na kinematické buzení byly odvozeny pro několik typů diskrétních mechanických soustav a to jak netlumených, tak i tlumených. Konkrétně byly odvozeny s ohledem na seizmicitu dva základní přístupy vyšetřující dynamickou odezvu seizmicky buzených mechanických soustav a to metoda spektra odezvy a dále metoda přímé numerické integrace, která využívá definování výpočtového modelu ve stavovém prostoru. Dále pro ucelení byla tato část práce doplněna o vyšetřování odezvy na harmonické buzení mechanické soustavy, neboť i takovýto případ kinematického buzení je v technické praxi častý.

Stěžejní část práce je věnována seizmickému buzení, zejména jak je definováno v technické praxi a jak se popisuje podle evropských norem. Dále je zde modelový příklad, který demonstruje převedení časového záznamu seizmické události na spektrum odezvy zrychlení, resp. výchylky, se kterým dále pracujeme v aplikační části práce.

Samotná aplikační část práce je zaměřena na stanovení dynamické odezvy konkrétní konstrukční soustavy panelového domu typu PS 69. Protože se jedná o konstrukční

---

soustavu hojně využívanou v Plzeňském regionu v 70. letech, je úvod aplikační části věnován historickému vývoji zkoumání seizmicity v České republice a také rozvoji panelové výstavby v Plzeňském regionu. Proto dalším krokem práce bylo vytvoření samotného výpočtového modelu tohoto konstrukčního systému pomocí diskrétní mechanické soustavy.

Vyšetření modálních veličin takto získané soustavy bylo dalším cílem práce. Avšak následným výpočtem modálních veličin tohoto výpočtového modelu bylo zjištěno, že se výsledky vlastních frekvencí soustavy značně liší od běžně naměřených hodnot. Příčinou tohoto faktu je značné zjednodušení výpočtového modelu pomocí diskrétní mechanické soustavy a také zanedbání spojů mezi jednotlivými panely této konstrukční soustavy, které významně ovlivňují tuhost celé soustavy ve směru buzení. Pro zachování stávajícího výpočtového modelu proto byla do práce přidána úloha ladění pro stanovení vstupních parametrů soustavy (konkrétně celkové tuhosti jednoho patra ve směru buzení). Po opětovném výpočtu modálních veličin soustavy vyšly vlastní frekvence tak, že již odpovídaly reálným hodnotám (viz pro srovnání tab 5.1. a tab 5.2 obsahující vlastní frekvence soustavy výpočtového modelu před a po přeladění). V návaznosti na problematiku modální analýzy soustavy jsou pro doplnění vykresleny jednotlivé vlastní tvary kmitání přeladěné soustavy.

Posledním cílem této práce bylo stanovení dynamické odezvy na seizmické buzení odvozeného optimalizovaného výpočtového modelu konstrukční soustavy panelového domu typu PS 69. Pro stanovení dynamické odezvy jsme jako vstupní data zaprvé použili spektrum odezvy zrychlení definované dle evropských standardů odpovídající zemětřesením, která mohou nastat v seizmicky nejaktivnějších oblastech České republiky. Poté jsme použili metodu spektra odezvy a výsledky jsme navíc přepočítali pomocí několika kombinačních metod (viz tab. 5.3). Zadruhé jsme jako vstupní data využili časový průběh zemětřesení El Centro (1940 Jižní Californie) a to z důvodu, že tato data jsou volně přístupná na internetu. V tomto případě lze ke stanovení dynamické odezvy použít dva přístupy. Prvním z nich je opět metoda spektra odezvy, avšak v tomto případě je nutné nejdříve vygenerovat spektrum zrychlení na základě časového průběhu zemětřesení a dále je možné postupovat analogicky s předchozím případem. Druhým přístupem je využití přímé numerické integrace ve stavovém prostoru, kam jsme dosazovali samotný časový průběh zemětřesení. Výsledky jsou uvedeny v tab. 5.4 (metoda spektra odezvy) a v tab. 5.5 (numerická integrace).

---

Samotná práce, jak bylo psáno v úvodu, představuje pouze jakýsi úvod do zkoumané problematiky odezvy mechanických soustav na kinematické, resp. seismické, buzení. Dalším rozšířením práce by mohlo být vytvoření nového výpočtového modelu pomocí metody konečných prvků za využití výpočetní techniky, kde by bylo možné zohlednit i vazby mezi jednotlivými panely. Případně by bylo možné provést komplexnější vyšetřování dynamické odezvy panelového domu ve smyslu zkoumání a srovnání odezvy pro více směrů buzení nebo zohlednit i různá spektra odezvy pro jednotlivá patra budovy. Takovéto doplnění by již ale nejspíše přesahovalo požadovaný rozsah pro bakalářské práce.



# Literatura

## Tištěné zdroje:

- [1] BROUSIL, Jaromír; SLAVÍK, Jaromír; ZEMAN, Vladimír. *Dynamika*. Praha: SNTL, 1989. 328 s. ISBN 80-03-00164-1.
- [2] ZEMAN, Vladimír; HLAVÁČ, Zdeněk. *Kmitání mechanických soustav*. Plzeň: ZČU v Plzni, 1999. 218 s. ISBN 80-7082-563-4.
- [3] DUKKIPATI, Rao V. *Advanced Mechanical Vibrations*. Oxford: Alpha Science International Ltd., 2006. 468 s. ISBN-13 978-1-84265-222-0.
- [4] BISCH, P.; CARVALHO, E.; DEGEE, H. aj. *Eurocode 8: Seismic Design of Buildings Worked examples*. Luxembourg: Publications Office of the European Union, 2012. 515 s. ISBN 978-92-79-23068-4.
- [5] BETBEDER-MATIBET, Jacques. *Seismic Engineering*. London: ISTE Ltd., 2008. 957 s. ISBN 978-1-84821-026-4.
- [6] ZEMAN, Vladimír; HLAVÁČ, Zdeněk. Využití modální metody v dynamice kinematicky buzených systémů. *Česká společnost pro mechaniku – Bulletin 2/2012*. Praha: Nakladatelství ČVUT, 2012. 16 s. ISSN 1211-2046.
- [7] ZAPLATÍLEK, Karel; DOŇAR, Bohuslav. *MATLAB pro začátečníky*. Praha: BEN – technická literatura, 2003. 144 s. ISBN 80-7300-095-4.
- [8] HAPL, Ladislav. *Nástavby panelových objektů v Plzni – studie*. Plzeň, 1998.
- [9] JUHASOVÁ, Emília. *Pôsobenie seizmických pohybů na stavebné konštrukcie*. Bratislava: Veda, 1985. 262 s.
- [10] MAŇAS, Miroslav. *Optimalizační metody – 1. vydání*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1979.
- [11] Česká republika. *ČSN EN 1998-1 ed. 2 (Eurokód 8: Navrhování konstrukcí odolných proti zemětřesení)*. Praha: Úřad pro technickou normalizaci, meteorologii a státní zkušebnictví, 2013. 166 s.

- [12] DEMJANČUKOVÁ, Kateřina. *Vyšetřování seizmické odolnosti reaktorů VVER*. Plzeň: Diplomová práce, 2009. 89 s.

### **Internetové zdroje:**

- [I1] SALAJKA, Vlastislav. *Prezentace EUROKÓD 8 PRO ZEMĚTŘESENÍ | ČKAIT*. [online] 2012. 44 snímků. Dostupné z WWW:  
<<http://www.ckait.cz/sites/default/files/EC8predn.pdf>>
- [I2] *USAR.CZ – Příčiny katastrof* [online]. Dostupné z WWW:  
< <http://www.usar.cz/webmagazine/articles.asp?ida=92&idk=283> >
- [I3] *Richterova stupnice - eProjekt* [online]. Dostupné z WWW:  
< <http://www.eprojekt.gjs.cz/Services/Downloader.ashx?id=2027> >
- [I4] *El Centro Earthquake* [online]. Dostupné z WWW:  
<<http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>>
- [I5] FISCHER, Ondřej. Nová norma pro navrhování konstrukcí odolných proti účinkům zemětřesení [online]. *Časopis stavebnictví – číslo 3/2009*. Dostupné z WWW:  
<[http://www.casopisstavebnictvi.cz/nova-norma-pro-navrhovani-konstrukci-odolnych-proti-ucinkum-zemetreseni\\_A2126\\_I29](http://www.casopisstavebnictvi.cz/nova-norma-pro-navrhovani-konstrukci-odolnych-proti-ucinkum-zemetreseni_A2126_I29)>
- [I6] *Seismicita české republiky* [online], poslední aktualizace 6. listopadu 2008 16:45. Dostupné z WWW:  
<<https://www.ig.cas.cz/userdata/files/popular/Seismicita.pdf>>
- [I7] PEŘINA, Zdeněk. *Panelové konstrukční soustavy* [online]. VŠB-TU Ostrava FAST, 2008. Dostupné z WWW:  
<[http://fast10.vsb.cz/perina/ps2/xxxpodklady/11\\_PS2\\_panel\\_prednaska.pdf](http://fast10.vsb.cz/perina/ps2/xxxpodklady/11_PS2_panel_prednaska.pdf)>
- [I8] ČADA, Zdeněk; SALAJKA, Vlastislav; KANICKÝ, Viktor. Odezva stavebních objektů na seizmické buzení s využitím syntetických akceleroqramů [online]. *Sborník vědeckých prací Vysoké školy báňské – Technické univerzity Ostrava, číslo 2, ročník IX, řada stavební*. Ostrava, 2009. Dostupné z WWW:  
<<https://dspace.vsb.cz/bitstream/handle/10084/83168/fast-2009-9-2-25-cada.pdf?sequence=2>>
- [I9] *Find minimum of unconstrained multivariable function using derivative-free method* [online]. Dostupné z WWW:  
<<http://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fminsearch.html>>