

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Matematický model ponorky pro diagnostické účely

Plzeň, 2015

Martin Langmajer

PROHLÁŠENÍ

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....

Vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Touto cestou bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce panu Prof.Ing.Miloši Schlegelovi,CSc. za jeho čas, trpělivost, poskytnuté rady, materiály a odborné vedení při vypracování práce. Dále bych chtěl poděkovat Lukáši Bláhovi,PhD. za spolupráci při provádění a vyhodnocování identifikačních experimentů.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá sestavením matematického modelu malého dálkově ovládaného ponorného zařízení pro diagnostické účely. Jejím cílem je vytvořit matematický model se zahrnutím vnějších vlivů reálného prostředí.

Práce popisuje základní principy odvození pohybových rovnic a možností modelovat vlivy prostředí. Tyto vlivy prostředí jsou identifikovány pomocí několika metod a pro nejpřesnější odhady je navrženo řízení ponorného zařízení. Matematický model i navržené řízení jsou implementovány v programovém prostředí Matlab/Simulink.

Klíčová slova

dálkově ovládaná ponorná vozidla, bezpilotní ponorná vozidla, matematický model, reálné prostředí, tření, identifikace, metoda nejmenších čtverců, lsqcurvefit, moment setrvačnosti, metoda přiřazení pólů

Abstract

Master thesis deals with creating mathematical model of small remotely operated underwater vehicle for diagnostic purposes. The objective of the thesis is to create a mathematical model with the inclusion of external influences in real environment.

Thesis describes basic principles of derivating equations of motion and describes ways to model the effect of the environment. These effects are identified using several methods and a design of control is proposed for the most accurate estimations. Mathematical model and control are implemented in the Matlab/Simulink software.

Keywords

remotely operated underwater vehicle, unmanned underwater vehicles, mathematical model, real environment, friction, identification, least squares method, lsqcurvefit, moment of inertia, pole placement method

Obsah

1	Úvod.....	1
2	Bezpilotní ponorná zařízení	2
2.1	Dálkově ovládané ponorky	2
2.2	Autonomní ponorná zařízení	2
3	Odvození matematického popisu ponorky	3
3.1	Soustava hmotných bodů.....	3
3.2	Translační pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu	4
3.2.1	Pohybové rovnice	5
3.3	Rotační pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu.....	6
3.3.1	Pohybové rovnice	6
3.4	Souřadnicové systémy	7
3.4.1	Transformace souřadnic	8
3.5	Obecný pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu.....	9
3.5.1	Translační pohyb	9
3.5.2	Rotační pohyb	10
3.6	Reálné prostředí	13
3.7	Zjednodušený model ponorky v reálném prostředí	14
4	Identifikace parametrů.....	16
4.1	Objem tělesa	16
4.2	Těžiště tělesa.....	16
4.2.1	Experimentální určení polohy těžiště	17
4.3	Moment setrvačnosti.....	17
4.3.1	Steinerova věta	18
4.3.2	Identifikace momentu setrvačnosti tělesa z doby kmitu fyzického kyvadla	19
4.3.3	Identifikace momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů	22
4.4	Identifikace třecích sil a momentů, působících na těleso pod vodou	25
4.4.1	Využití pohybu fyzického kyvadla	25
4.4.2	Využití pohybu torzního kyvadla	41
4.4.3	Rozdíl mezi parametry ve vzduchu a ve vodě.....	42
4.4.4	Identifikace s využitím znalosti o síle motorů.....	43
5	Výsledky identifikace.....	47
5.1	Využití fyzického kyvadla k určení parametrů translačního pohybu ponorky pod hladinou vody	47

5.1.1	Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy x	48
5.1.2	Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy y	53
5.1.3	Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy z	57
5.2	Využití fyzického kyvadla k určení parametrů rotačního pohybu ponorky pod hladinou vody	61
5.2.1	Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy y	62
5.2.2	Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy x	63
5.3	Využití známé síly motorů k určení parametrů rotačního pohybu ponorky pod vodou	64
5.3.1	Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy z	65
5.3.2	Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy y	66
5.3.3	Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy x	67
6	Návrh řízení	68
6.1	Návrh řízení metodou požadovaného umístění pólů	72
6.1.1	Ověření syntézy regulátoru	73
7	Závěr	83
	Literatura	84

Seznam obrázků

Obrázek 1	Soustava hmotných bodů	4
Obrázek 2	Souřadnicové systémy	7
Obrázek 3	Transformace souřadnic	8

Obrázek 4 Měření objemu tělesa.....	16
Obrázek 5 Měření polohy těžiště.....	17
Obrázek 6 Matematické kyvadlo.....	19
Obrázek 7 Fyzické kyvadlo.....	21
Obrázek 8 Torzní kyvadlo.....	22
Obrázek 9 Síly působící na fyzické kyvadlo.....	26
Obrázek 10 Identifikace tahu motorů.....	45
Obrázek 11 Průběh kyvů kyvadla bez ponorky ve vzduchu.....	48
Obrázek 12 Průběh kyvů kyvadla s ponorkou v ose x ve vodě.....	49
Obrázek 13 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose x... 50	
Obrázek 14 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose x.....	51
Obrázek 15 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x.....	52
Obrázek 16 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x.....	53
Obrázek 17 Průběh kyvů kyvadla s ponorkou v ose y ve vodě.....	54
Obrázek 18 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose y... 55	
Obrázek 19 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose y.....	56
Obrázek 20 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose y.....	57
Obrázek 21 Průběh kyvů kyvadla s ponorkou v ose z ve vodě.....	58
Obrázek 22 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose z... 59	
Obrázek 23 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose z.....	60
Obrázek 24 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x.....	61
Obrázek 25 Průběh kmitů kyvadla s ponorkou na vzduchu kolem osy y.....	62
Obrázek 26 Průběh kmitů kyvadla s ponorkou na vzduchu kolem osy x.....	63
Obrázek 27 Vychýlení kyvadla v závislosti na síle motorů.....	64
Obrázek 28 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy z metodou nejmenších čtverců.....	65
Obrázek 29 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy y metodou nejmenších čtverců.....	66
Obrázek 30 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy x metodou nejmenších čtverců.....	67
Obrázek 31 Rozložení spodních motorů ponorky při pohledu shora.....	69
Obrázek 32 Směr horních motorů ponorky.....	69
Obrázek 33 Regulační schéma.....	74
Obrázek 34 Blokový model ponorky.....	74
Obrázek 35 Translace.....	75
Obrázek 36 Subsystem Rotace.....	75
Obrázek 37 Subsystem omega1.....	75
Obrázek 38 Subsystem omega1.....	76
Obrázek 39 Subsystem Síly.....	76
Obrázek 40 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose x.....	77

Obrázek 41	Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose y.....	78
Obrázek 42	Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose z.....	78
Obrázek 43	Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy x	79
Obrázek 44	Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy y	79
Obrázek 45	Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy z.....	80
Obrázek 46	Pohyb ponorky v prostoru v reakci na požadované rychlosti v různých směrech	81
Obrázek 47	Reakce výstupů na požadované hodnoty	82

1 Úvod

Cílem této diplomové práce je uvést ucelený přehled o základních principech matematického modelování pohybu těles a tyto principy využít k vytvoření matematického modelu malého ponorného zařízení, určeného pro diagnostické účely v nádržích s kapalinou. Takto vytvořený matematický model tělesa následně využít k návrhu řízení pro dálkově nebo autonomně ovládanou diagnostickou ponorku. V práci je kladen důraz na důkladné odlišení pohybu těles v bezodporovém ideálním prostředí a v prostředí, ve kterém vzniká tření a jiné síly, působící jako odpor proti pohybu tělesa. Rozboru jsou podrobeny základní síly, působící na tělesa v reálném prostředí a je popsáno několik metod sloužících k identifikaci těchto sil, případně k identifikaci některých neznámých parametrů ponorného zařízení.

V první kapitole jsou uvedeny cíle diplomové práce a její struktura. Druhá část čtenáři přibližuje dálkově ovládaná a autonomní ponorná zařízení, jejich účel a základní terminologii. Třetí část se důkladně věnuje problematice matematického modelování pohybu tuhých těles jak v ideálním, tak i v reálném prostředí. Seznamuje čtenáře s důležitými fyzikálními zákony, sloužícími k matematickému modelování a objasňuje některé matematické operace vedoucí k odvození pohybových rovnic ponorky. V téže kapitole je uveden také rozbor některých třecích a odporových sil působících na pohyb tělesa ve vzduchu a pod vodou. Účelem čtvrté kapitoly je uvést a porovnat několik identifikačních metod, sloužících k určení neznámých parametrů ponorného zařízení a parametrů popisujících odporové síly prostředí. Tyto identifikační metody jsou pak v následující sekci zhodnoceny a podrobeny kritice. V další části je stručně nastíněn možný způsob návrhu řízení s využitím odvozeného matematického modelu a jsou prezentovány výsledky navrženého řízení. Závěrem je provedeno stručné zhodnocení výsledků práce a jsou shrnuty výhody a nevýhody použitých přístupů k syntéze řízení.

2 Bezpilotní ponorná zařízení

Bezpilotní ponorná zařízení označovaná jako UUV (unmanned underwater vehicles) jsou vozidla pohybující se v kapalině a pracující bez lidské posádky. Často jsou využívána v průmyslu a k vědeckým účelům, mnohdy ale i v armádě. Bezpilotní ponorky se obvykle dělí do dvou skupin. ROV (remotely operated underwater vehicle) dálkově ovládaná ponorná zařízení a AUV (autonomous underwater vehicle) autonomní ponorná zařízení.

2.1 Dálkově ovládané ponorky

ROV systémy jsou často používány v hlubokomořských průmyslových odvětvích. Především v těžbě fosilních paliv. V armádě jsou používány například k likvidaci námořních min. Ve vývoji jsou také nové ROV systémy sloužící k pronásledování nepřátelských plavidel, monitorování přístavů nebo k detekci znečištěného životního prostředí. Nejširší využití těchto ponorek je ovšem zatím k vědeckým účelům. Především při zkoumání hlubokooceánských příkopů

2.2 Autonomní ponorná zařízení

První AUV zařízení bylo vyvinuto na University of Washington již v roce 1957. Sloužilo k výzkumu difúze a akustického vysílání. AUV systémy obdobně jako ROV systému nacházejí uplatnění v ropném a plynárenském průmyslu, kde mají obvykle za úkol mapovat mořské dno před zahájením výstavby infrastruktury. Další využití nacházejí ve vědě a u bezpečnostních složek, například při hledání trosk letadel po pádu. [13]

3 Odvození matematického popisu ponorky

V současné době existuje několik ověřených metod matematického modelování. Mezi takové patří metoda Kirchhoffova, Newton – Eulerova nebo Lagrangeova. Zatímco prvně jmenovaná se používá obvykle k modelování dynamiky elektrických systémů, další dvě lze využít i pro mechanické systémy a k vytvoření pohybových rovnic tělesa jako ponorka jsou tudíž vhodnější.

Newton – Eulerova metoda matematického modelování spočívá ve stanovení dynamické rovnováhy pro všechna tělesa mechanické soustavy a může být užitečná, lze-li systém snadno dekomponovat na jednotlivé členy mechanické soustavy. Obtížnost tohoto přístupu ovšem roste se složitostí systému a především pokud mechanickou soustavu snadno dekomponovat nelze.

Obecně se při modelování využívá zejména Newtonových zákonů. Mezi další stěžejní vztahy pro odvozování pohybových rovnic patří:

Zákon zachování hybnosti:

$$\sum \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{P} = konst \quad (1)$$

Kde \vec{F}_i jsou síly, působící na modelované těleso a \vec{P} je hybnost tělesa.

A zákon zachování momentu hybnosti:

$$\sum \vec{M}_i = 0 \Rightarrow \vec{H} = konst \quad (2)$$

Kde \vec{M}_i jsou momenty sil, působících na modelované těleso a \vec{H} je moment hybnosti tělesa.

Alternativou k Newton – Eulerově metodě může být metoda Lagrangeova. Ta využívá vztahu mezi kinetickou energií T , potenciální energií V a zobecněnými silami Q_i :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i \quad (3)$$

Kde t je čas, q_i jsou zobecněné souřadnice a

$$L = T - V \quad (4)$$

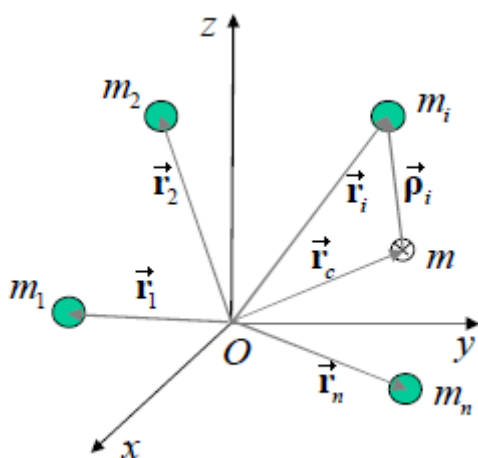
je tzv. Lagrangian.

Pohyb každého tuhého tělesa lze rozdělit na translační resp. posuvný a rotační resp. otáčivý pohyb. Oba tyto pohyby je možné popisovat odděleně, třebaže mohou často probíhat současně.

3.1 Soustava hmotných bodů

Hmotný bod je bezrozměrný bod v prostoru, jemuž je ovšem přiřazena určitá nenulová hmotnost. Z bezrozměrné podstaty hmotného bodu, je zřejmé, že nemůže vykonávat rotační, ale pouze posuvný pohyb. Rotační pohyb má smysl až v případě pohybu soustavy dvou a více pevně spojených hmotných bodů ve vzájemné interakci.

Jedním z možných způsobů, jak popisovat tuhé těleso je aproximovat ho právě takovou soustavou hmotných bodů. V případě, že hmotných bodů bude nekonečně mnoho a vzdálenost mezi nimi bude nekonečně malá, pak se jedná v podstatě o těleso samotné se spojitě rozloženou hmotou.



Obrázek 1 Soustava hmotných bodů

m_i je hmotnost i -tého hmotného bodu pro

r_i je polohový vektor i -tého hmotného bodu v soustavě souřadnic s počátkem v bodě O

r_c je polohový vektor hmotného středu soustavy

ρ_i je polohový vektor i -tého hmotného bodu vzhledem k souřadnicím pevně spojeným s tuhým tělesem, které soustava hmotných bodů reprezentuje a počátkem v těžišti tělesa.

n je celkové množství hmotných bodů v soustavě

Těleso takto aproximované soustavou hmotných bodů z obrázku 1 má celkovou hmotnost m :

$$m = \sum_{i=1}^n m_i \quad (5)$$

Polohový vektor těžiště neboli středu hmotnosti, \vec{r}_c , je v případě soustavy hmotných bodů vyjádřen jako:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{r}_i m_i \quad (6)$$

Jsou-li dostupné přesné informace o tvaru tělesa a rozložení hmoty uvnitř tělesa, je možné využít místo aproximativního přesnějšího modelování a ve vztazích (5) a (6) přejít od sumací k integrálům. [14]

3.2 Translační pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu

Působí-li na i -té hmotné body v soustavě vnější síly \vec{F}_i , lze určit jejich výslednici \vec{F} jako vektorový součet všech těchto sil:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^l \vec{F}_i \quad (7)$$

Kde l je počet vnějších sil, působících na těleso.

Výsledná síla \vec{F} působící na těleso má pak velikost:

$$|\vec{F}| = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^l F_{xi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^l F_{yi}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^l F_{zi}\right)^2} \quad (8)$$

a počátek v hmotném středu soustavy.

F_{xi} je složka síly působící na i -tý hmotný bod ve směru osy x . F_{yi} je složka síly působící na i -tý hmotný bod ve směru osy y a F_{zi} je složka síly působící na i -tý hmotný bod ve směru osy z .

Na každý z hmotných bodů působí také ještě vnitřní, tzv. vazební síly f_{ij} , které reprezentují síly, jakými působí j -tý hmotný bod na i -tý hmotný bod. Podle 3. Newtonova zákona akce a reakce je patrné že síla působící od i -tého hmotného bodu k j -tému \vec{f}_{ij} bude nabývat shodné velikosti, ale opačného směru než síla f_{ij} . Tj:

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji} \quad (9)$$

Celkovou vnitřní sílu, působící v tělese lze vyjádřit jako součet všech vazebních sil:

$$\vec{F}_{in} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} \quad (10)$$

Je zřejmé, že $f_{ij} = 0$ pro $j = i$. Vzhledem k tomuto faktu a platnosti vztahu (9) je tak patrné, že:

$$\vec{F}_{in} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{f}_{ij} = 0 \quad (11)$$

A proto se při pohybu tělesa vnitřní síly neprojeví a v pohybových rovnicích se nevyskytují.

3.2.1 Pohybové rovnice

Z druhého Newtonova pohybového zákona, tj. zákonu síly, vyplývá vztah:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (12)$$

Kde \vec{F} je vektor výsledné síly působící na těleso, m je hmotnost tělesa a \vec{a} je vektor zrychlení tělesa ve směru působení síly.

Tento vztah je zásadní při modelování pohybu těles. Lze ho rozepsat po složkách:

$$F_x = m\ddot{x} \quad (13)$$

$$F_y = m\ddot{y} \quad (14)$$

$$F_z = m\ddot{z} \quad (15)$$

Kde \ddot{x}, \ddot{y} resp. \ddot{z} je zrychlení tělesa ve směru osy x, y resp. z a F_x, F_y resp. F_z jsou složky výsledné síly, působící v příslušných směrech x, y resp. z .

Pro translační pohyb soustavy hmotných bodů, zastupující tuhé těleso, platí, že každý z hmotných bodů se pohybuje stejnou rychlostí a ve stejném směru. Je tedy možné vyjádřit rovnice posuvného pohybu tělesa pouze pro hmotný střed soustavy, stejným způsobem, jak bylo naznačeno v rovnicích (13), (14) a (15).

3.3 Rotační pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu

Uvažujeme-li samotnou rotaci tělesa kolem vlastní osy, je pro jednoduchost vhodné popsat rovnice pohybu vzhledem k soustavě souřadnic pevně spojené s tělesem a s počátkem v těžišti tělesa. Na každý hmotný bod s výjimkou hmotného středu, na který působí výše popsané externí síly \vec{F}_i , působí také momenty sil \vec{M}_i , těmito vnějšími silami vyvolané a dané jako:

$$\vec{M}_i = \vec{\rho}_i \times \vec{F}_i \quad (16)$$

Kde \vec{M}_i je moment síly působící na i -tý hmotný bod a $\vec{\rho}_i$ je polohový vektor hmotného bodu vzhledem k těžišti tělesa. Směr vektoru momentu síly je kolmý na rovinu danou vektorem působící vnější síly \vec{F}_i a polohovým vektorem hmotného bodu $\vec{\rho}_i$ a je rovnoběžný s osou otáčení bodu kolem hmotného středu (nepůsobí-li další síly). Velikost momentu síly je dána jako:

$$|\vec{M}_i| = |\vec{F}_i| \cdot |\vec{\rho}_i| \cdot \sin \alpha_i \quad (17)$$

Kde α_i je úhel, který v rovině dané vektory \vec{F}_i a $\vec{\rho}_i$ tyto dva vektory svírají.

Vztah (16) pro moment síly vyplývá z druhé impulzové věty, která udává že moment síly je derivací momentu hybnosti a je obdobou vztahu (12) u translačního pohybu, kde je síla derivací hybnosti:

$$\vec{F}_i = \frac{d\vec{P}_i}{dt} = m_i \ddot{\vec{\rho}}_i \quad (18)$$

$$\vec{M}_i = \frac{d\vec{H}_i}{dt} = \frac{d(\vec{\rho}_i \times \vec{P}_i)}{dt} = \frac{d(\vec{\rho}_i \times m_i \dot{\vec{\rho}}_i)}{dt} = \dot{\vec{\rho}}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i + \vec{\rho}_i \times m_i \dot{\ddot{\vec{\rho}}_i} = \vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i \quad (19)$$

Kde \vec{P}_i je hybnost i -tého hmotného bodu.

Celkový moment síly lze vyjádřit opět jako vektorový součet všech momentů sil, které na těleso působí:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^l \vec{M}_i = \sum_{i=1}^l \vec{\rho}_i \times m_i \ddot{\vec{\rho}}_i = \frac{d\vec{H}}{dt} \quad (20)$$

3.3.1 Pohybové rovnice

Označíme-li $\vec{\omega}$ jako okamžitou osu otáčení, pak je okamžitá rychlost otáčení rovna:

$$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \quad (21)$$

a je tečnou k otáčivému pohybu.

Celkový moment hybnosti je pak možné přepsat následovně:

$$\vec{H} = \vec{\rho} \times m\dot{\vec{\rho}} = \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho})m = \hat{\rho}(\vec{\omega} \times \vec{\rho})m = -m\hat{\rho}(\vec{\rho} \times \vec{\omega}) = -m\hat{\rho}\hat{\rho}\vec{\omega} = I\vec{\omega} \quad (22)$$

Kde I je celkový tenzor setrvačnosti tělesa a kde

$$\hat{\rho} = \begin{bmatrix} 0 & -\rho_z & \rho_y \\ \rho_z & 0 & -\rho_x \\ -\rho_y & \rho_x & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

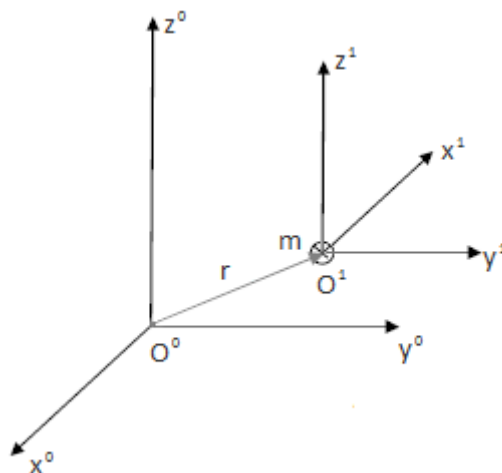
Dosazením (22) do vztahu (20) je možné získat:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{H}}{dt} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt} = I\dot{\vec{\omega}} \quad (24)$$

Což je vztah sloužící k matematickému popisu rotačního pohybu těles [12].

3.4 Souřadnicové systémy

Translační i rotační pohyb mnohdy probíhají souběžně. Pohybuje-li se těleso v pevném souřadnicovém systému, v případě ponorného zařízení se může jednat například o souřadnicový systém pevně spojený s vodní nádrží, ve které se ponorné zařízení pohybuje, budou se polohové vektory jednotlivých hmotných bodů soustavy, kterou je možné těleso nahradit, měnit. Tímto se bude v závislosti na poloze tělesa měnit i moment setrvačnosti tělesa a takové modelování může být obtížné. Z toho důvodu je vhodné definovat ještě jeden souřadnicový systém, který bude pevně spojen s pohybujícím se tělesem a bude mít počátek v těžišti tělesa. Příklad takto definovaných souřadnicových systémů je na obr. 2.



Obrázek 2 Souřadnicové systémy

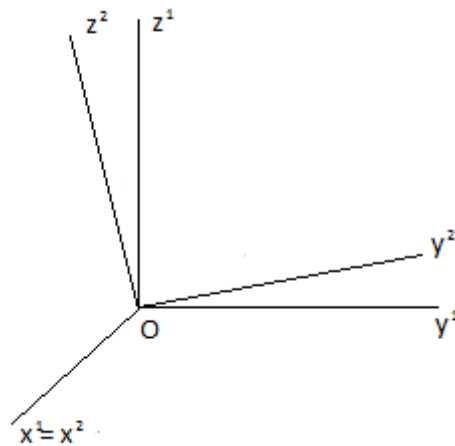
$O^0 x^0 y^0 z^0$ je pevná soustava souřadnic spojená například s nádobou s kapalinou.
 $O^1 x^1 y^1 z^1$ je pohyblivá soustava souřadnic pevně spojená s pohybujícím se tělesem

Polohové vektory hmotných bodů ρ_i vztažené k soustavě souřadnic $O^1x^1y^1z^1$ zůstávají v případě tuhého tělesa neměnné a tím pádem i tenzor setrvačnosti vyjádřený v této soustavě souřadnic zůstává konstantní pro jakékoli natočení tělesa.

Moment hybnosti však při vyjádření pohybových rovnic musí být definován v inerciální soustavě, tj. v pevné soustavě. Jen tehdy platí Newtonova pohybová rovnice (20). Jeho výpočet může být ale proveden v libovolné soustavě souřadnic.

3.4.1 Transformace souřadnic

Aby bylo možné konstruovat pohybové rovnice výše popsaným způsobem, je vhodné využít transformace souřadnic. Typickými příklady transformace souřadnic jsou posunutí, vyjádřené pomocí matice translace, nebo otáčení, vyjádřené pomocí matice rotace. Právě druhá zmíněná transformace souřadnic je užitečná při formulaci pohybových rovnic těles s více stupni volnosti, vykonávajících posuvný i otáčivý pohyb současně.



Obrázek 3 Transformace souřadnic

Každé otočení tělesa lze rozdělit na dva otáčivé pohyby kolem dvou různých os. V případě otočení tělesa kolem osy x o úhel α lze získat nové souřadnice afinní geometrickou transformací pomocí maticí rotace $R_x(\alpha)$ ve tvaru:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha(t) & -\sin \alpha(t) \\ 0 & \sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Obdobně maticí rotace $R_y(\beta)$ při otáčení kolem osy y o úhel β :

$$R_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \beta(t) & 0 & \sin \beta(t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta(t) & 0 & \cos \beta(t) \end{bmatrix} \quad (26)$$

A maticí rotace $R_z(\gamma)$ při otáčení kolem osy z o úhel γ :

$$R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma(t) & -\sin \gamma(t) & 0 \\ \sin \gamma(t) & \cos \gamma(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Pokud je tedy cílem otočení tělesa kolem osy x jako je zobrazeno na obrázku (3) o úhel α , o stejný úhel tedy otočíme i souřadnice z $Ox^1y^1z^1$ na $Ox^1y^2z^2$ a polohový vektor hmotného bodu umístěného někde v rotující soustavě pak získáme v původním souřadnicovém systému jednoduše:

$$\vec{r}^1 = R_x(\alpha)\vec{r}^2 \quad (28)$$

Kde r^1 je polohový vektor sledovaného hmotného bodu v původních souřadnicích a r^2 v souřadnicích otočených kolem osy x o úhel α [10].

V případě složitějšího pohybu, který je možné rozložit na postupné otáčení kolem různých os, můžeme získat novou hodnotu polohového vektoru v původních souřadnicích následujícím postupem:

$$\vec{r}^1 = R_{x,\alpha}(t)\vec{r}^2 \quad (29)$$

$$\vec{r}^2 = R_{y,\beta}(t)\vec{r}^3 \quad (30)$$

$$\vec{r}^3 = R_{z,\gamma}(t)\vec{r}^4 \quad (31)$$

Tedy:

$$\vec{r}^1 = R_{x,\alpha}(t)R_{y,\beta}(t)R_{z,\gamma}(t)\vec{r}^4 \quad (32)$$

3.5 Obecný pohyb tuhého tělesa v prostředí bez odporu

3.5.1 Translační pohyb

Označíme-li tedy pevnou soustavu souřadnic $O^0x^0y^0z^0$ a pohyblivou soustavu souřadnic $O^1x^1y^1z^1$, pak veličiny a hodnoty vztažené k pevné soustavě souřadnic budeme v následujícím textu označovat pravým horním indexem 0 a veličiny či hodnoty vztažené k pohybuujícímu se systému pravým horním indexem 1.

Uvažujeme-li, že na těleso působí některé síly \vec{F}_i^0 stále ve stejném směru v souřadnicích $O^0x^0y^0z^0$ i síly \vec{F}_j^1 , které působí naopak stále ve stejném směru vzhledem k tělesu, čili v souřadnicích $O^1x^1y^1z^1$. Je nutné je v pohybových rovnicích posuvného pohybu rozlišit a rovnice tak definovat například jako:

$$m\vec{a}^0 = R \sum_j \vec{F}_j^1 + \sum_i \vec{F}_i^0 \quad (33)$$

Kde R je matice rotace systému v obecném tvaru:

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \quad (34)$$

Mezi síly \vec{F}_i^0 je možné zahrnout například gravitační nebo vztlakovou sílu. Mezi síly \vec{F}_j^1 pak síly vyvolané působením motorů ponorného zařízení.

Soustavu rovnic (33) lze přepsat jako:

$$m\ddot{x}^0 = r_{11}F_{xj}^1 + r_{12}F_{yj}^1 + r_{13}F_{zj}^1 + F_{xi}^0 \quad (35)$$

$$m\ddot{y}^0 = r_{21}F_{xj}^1 + r_{22}F_{yj}^1 + r_{23}F_{zj}^1 + F_{yi}^0 \quad (36)$$

$$m\ddot{z}^0 = r_{31}F_{xj}^1 + r_{32}F_{yj}^1 + r_{33}F_{zj}^1 + F_{zi}^0 \quad (37)$$

Kde r_{kl} jsou prvky matice R příslušející k -tému řádku a l -tému sloupci. F_{xj}^1 je celková síla typu j působící ve směru osy x^1 , F_{xi}^0 je celková síla typu i působící ve směru osy x^0 . Obdobné značení platí i pro F_{yj}^1 , F_{zj}^1 , F_{yi}^0 a F_{zi}^0 v osách y^1 , z^1 , y^0 a z^0 .

Rovnice (35) platí pro pohyb v ose x^0 , (36) pro pohyb v ose y^0 a (37) pro pohyb v ose z^0 .

3.5.2 Rotační pohyb

Podobným způsobem je třeba formulovat i rovnice pro pohyb rotační. Platí pohybová rovnice:

$$\vec{M}^0 = \frac{d}{dt} \vec{H}^0 \quad (38)$$

Kde \vec{M}^0 je celkový moment síly působící na těleso vyjádřený v soustavě souřadnic $O^0x^0y^0z^0$ a \vec{H}^0 je moment hybnosti tělesa vyjádřený v témže souřadnicovém systému.

Pravou a levou stranu rovnice je možné řešit odděleně. Pro levou stranu rovnice (38) platí:

$$\vec{M}^0 = R \sum_j (\vec{\rho}_j^1 \times \vec{F}_j^1) + \sum_i (R\vec{\rho}_i^1 \times \vec{F}_i^0) \quad (39)$$

Kde $\vec{\rho}_i^1$ jsou polohové vektory hmotných bodů soustavy vyjádřené v pohyblivém souřadnicovém systému $O^1x^1y^1z^1$.

Pravou stranu vztahu lze řešit následovně:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{H}^0 &= \frac{d}{dt} R I^1 R^T \vec{\omega}^0 = \dot{R} I^1 R^T \vec{\omega}^0 + R I^1 \dot{R}^T \vec{\omega}^0 = R S (R^T \vec{\omega}^0) I^1 R^T \vec{\omega}^0 + R I^1 \dot{R}^T \vec{\omega}^0 \\ &= R (R^T \vec{\omega}^0 \times I^1 R^T \vec{\omega}^0 + I^1 \dot{R}^T \vec{\omega}^0) = R (\vec{\omega}^1 \times I^1 \vec{\omega}^1 + I^1 \dot{\vec{\omega}}^1) \end{aligned} \quad (40)$$

Kde $\vec{\omega}^0$ a $\vec{\omega}^1$ je okamžitá úhlová rychlost otáčení tělesa v označených souřadnicových systémech. I^1 je tenzor setrvačnosti tělesa vyjádřený v pohyblivé soustavě souřadnic a $S(R^T \vec{\omega}^0)$ je antisymetrická matice, pro kterou platí:

$$S(\vec{\omega}^0) = \vec{\omega}^0 = \dot{R} R^T \quad (41)$$

Protože:

$$\vec{r}^0 = R \vec{r}^1 \quad (42)$$

$$\dot{\vec{r}}^0 = \dot{R} \vec{r}^1 = \dot{R} R^T \vec{r}^0 \quad (43)$$

$$\dot{\vec{r}}^0 = \vec{\omega}^0 \times \vec{r}^0 = \vec{\omega}^0 \vec{r}^0 \quad (44)$$

Je zřejmé, že platí vztah (41). Úpravou rovnic (39) a (40) je možné vyjádřit vektor $\dot{\vec{\omega}}^1$:

$$\dot{\vec{\omega}}^1 = [I^1]^{-1} (R^T \vec{M}^0 - \vec{\omega}^1 \times I^1 \vec{\omega}^1) \quad (45)$$

Těleso pohybující se v kapalině všemi možnými směry má šest stupňů volnosti, jeho pohyb tudíž musí být popsán šesti rovnicemi. Tři vztahy (35) , (36) a (37) odpovídají pohybu translačnímu a další tři musí popisovat pohyb rotační. V soustavě rovnic (45) je ovšem zdánlivě 6 neznámých veličin spojených s rotačním pohybem. Jedná se o složky vektoru okamžité osy otáčení ω_1^1 , ω_2^1 a ω_3^1 a složky matice rotace R . Jestliže jí vyjádříme jako (32), matice rotace R má pak tři parametry, úhly α , β a γ :

$$R = \begin{bmatrix} \cos \gamma \cos \beta & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta & \cos \gamma \cos \alpha - \sin \gamma \sin \alpha \sin \beta & -\cos \beta \sin \alpha \\ \sin \gamma \sin \alpha - \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta & \cos \gamma \cos \alpha + \cos \alpha \sin \gamma \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (46)$$

Vztahu udávajícího souvislost mezi úhly α , β , γ a prvky okamžité osy otáčení ω_1^1 , ω_2^1 a ω_3^1 je však možné dosáhnout. Vyjádřením \dot{R} jako:

$$\dot{R} = \frac{dR_{x,\alpha}(t)}{d\alpha} \dot{\alpha} R_{y,\beta}(t) R_{z,\gamma}(t) + R_{x,\alpha}(t) \frac{dR_{y,\beta}(t)}{d\beta} \dot{\beta} R_{z,\gamma}(t) + R_{x,\alpha}(t) R_{y,\beta}(t) \frac{dR_{z,\gamma}(t)}{d\gamma} \dot{\gamma} \quad (47)$$

A tedy v obecném zápisu:

$$\dot{R} = \begin{bmatrix} \dot{r}_{11} & \dot{r}_{12} & \dot{r}_{13} \\ \dot{r}_{21} & \dot{r}_{22} & \dot{r}_{23} \\ \dot{r}_{31} & \dot{r}_{32} & \dot{r}_{33} \end{bmatrix} \quad (48)$$

Kde pro prvky matice platí:

$$\dot{r}_{11} = -\dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta - \dot{\gamma} \cos \beta \sin \gamma \quad (49)$$

$$\dot{r}_{12} = \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma - \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma \quad (50)$$

$$\dot{r}_{13} = \dot{\beta} \cos \beta \quad (51)$$

$$\dot{r}_{21} = \dot{\gamma} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \dot{\alpha} (\sin \alpha \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta) + \dot{\beta} \cos \beta \cos \gamma \sin \alpha \quad (52)$$

$$\dot{r}_{22} = -\dot{\gamma} (\cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta) - \dot{\alpha} (\cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) - \dot{\beta} \cos \beta \sin \alpha \sin \gamma \quad (53)$$

$$\dot{r}_{23} = \dot{\beta} \sin \alpha \sin \beta - \dot{\alpha} \cos \alpha \cos \beta \quad (54)$$

$$\dot{r}_{31} = \dot{\gamma} (\cos \gamma \sin \alpha + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \dot{\alpha} (\cos \alpha \sin \gamma + \cos \gamma \sin \alpha \sin \beta) - \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \quad (55)$$

$$\dot{r}_{32} = -\dot{\gamma} (\sin \alpha \sin \gamma - \cos \alpha \cos \gamma \sin \beta) + \dot{\alpha} (\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma) + \dot{\beta} \cos \alpha \cos \beta \sin \gamma \quad (56)$$

$$\dot{r}_{33} = -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \alpha - \dot{\beta} \cos \alpha \sin \beta \quad (57)$$

Jsme schopni určit $R^T \dot{R}$:

$$R^T \dot{R} = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta & -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta & 0 & -\dot{\beta} \sin \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma - \dot{\beta} \cos \gamma & \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

A protože platí výraz:

$$R^T \dot{R} = S(\vec{\omega}^1) = S(R^T \vec{\omega}^0) = \hat{\omega}^1 \quad (59)$$

je možné dále z rovnosti (59) uvést prostým porovnáním vztah mezi úhly α , β , γ a prvky okamžité osy otáčení ω_1^1 , ω_2^1 a ω_3^1 :

$$\begin{bmatrix} 0 & -\dot{\gamma} - \dot{\alpha} \sin \beta & -\dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta & 0 & -\dot{\beta} \sin \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \\ \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma - \dot{\beta} \cos \gamma & \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3^1 & \omega_2^1 \\ \omega_3^1 & 0 & -\omega_1^1 \\ -\omega_2^1 & \omega_1^1 & 0 \end{bmatrix} \quad (60)$$

Tedy:

$$\omega_3^1 = \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \quad (61)$$

$$\omega_2^1 = \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \quad (62)$$

$$\omega_1^1 = \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \quad (63)$$

Tyto vztahy je dále možné zderivovat:

$$\dot{\omega}_3^1 = \ddot{\gamma} + \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \quad (64)$$

$$\dot{\omega}_2^1 = \ddot{\beta} \cos \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \gamma - \ddot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma \quad (65)$$

$$\dot{\omega}_1^1 = \ddot{\beta} \sin \gamma + \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \gamma + \ddot{\alpha} \cos \gamma \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \beta - \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta \quad (66)$$

A postupně z rovnice (64) vyjádřit $\ddot{\gamma}$, z rovnice (65) vyjádřit $\ddot{\beta}$ a z (66) vyjádřit $\ddot{\alpha}$:

$$\ddot{\gamma} = \dot{\omega}_3^1 - \ddot{\alpha} \sin \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \beta \quad (67)$$

$$\ddot{\beta} = \frac{\dot{\omega}_2^1 + \dot{\beta} \dot{\gamma} \sin \gamma + \ddot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma - \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta \sin \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \cos \gamma}{\cos \gamma} \quad (68)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{\dot{\omega}_1^1 - \dot{\beta} \dot{\gamma} \cos \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \sin \gamma \cos \beta + \dot{\alpha} \dot{\beta} \cos \gamma \sin \beta}{\cos \gamma \cos \beta} \quad (69)$$

To jsou již formálně postačující výrazy pro určení konkrétních vztahů mezi ω_1^1 , ω_2^1 , ω_3^1 a α , β , γ avšak pro účely simulace, například v programovém prostředí Matlab-Simulink je vhodné zbavit se algebraické smyčky. Úpravou je tedy dosaženo rovnic

$$\ddot{\alpha} = \frac{\dot{\omega}_1^1 \cos \gamma - \dot{\omega}_2^1 \sin \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta}{\cos \beta} \quad (70)$$

$$\ddot{\beta} = \dot{\omega}_2^1 \cos \gamma + \dot{\omega}_1^1 \sin \gamma + \dot{\alpha} \dot{\gamma} \cos \beta \quad (71)$$

$$\ddot{\gamma} = \dot{\omega}_3^1 - \sin \beta \frac{\dot{\omega}_1^1 \cos \gamma - \dot{\omega}_2^1 \sin \gamma - \dot{\beta} \dot{\gamma}}{\cos \beta} - \frac{\dot{\alpha} \dot{\beta}}{\cos \beta} \quad (72)$$

Tří zbývajících pohybových rovnic pro rotační pohyb je tedy dosaženo dosazením za $\dot{\omega}_1^1$, $\dot{\omega}_2^1$ a $\dot{\omega}_3^1$ z rovnice (45) do rovnic (71), (72) resp. (73).

V obecném tvaru tedy získáváme soustavu šesti pohybových rovnic, které ovšem platí pouze při pohybu tělesa v homogenním prostředí bez odporu.

$$m\vec{a}^0 = R \sum_j \vec{F}_j^1 + \sum_i \vec{F}_i^0 \quad (73)$$

$$\dot{\vec{\omega}}^1 = [I^1]^{-1} (R^T \vec{M}^0 - \vec{\omega}^1 \times I^1 \vec{\omega}^1) \quad (74)$$

Je zřejmé, že při modelování pohybu ponorky pod vodou je nutné uvažovat alespoň některé odporové síly vody.

3.6 Reálné prostředí

Rovnice pohybu (35), (36), (37) a (70), (71), (72), sestavené v kapitolách 3.5.1 a 3.5.2 v uvedeném tvaru platí pouze pro těleso pohybující se v prostředí, které neklade pohybu žádný odpor. V reálném případě na těleso působí mnoho méně či více významných třecích a odporových sil. Mnohem významněji pak působí tyto síly na těleso pohybující se ve vodě než například na těleso pohybující se ve vzduchu a proto některé z nich už nelze zanedbávat.

Na těleso pohybující se v reálné kapalině působí zejména tři typy tření a odporů. Jedním je laminární obtékání tělesa tekutinou. To je takové proudění, při kterém se proudnice vody nemísí. Voda je přemístována podél plochy tělesa a vzniká tak laminární tření. Toto tření je závislé na relativní rychlosti pohybu tělesa vůči kapalině. Je možné modelovat jej jako sílu, která působí proti pohybu tělesa a je přímo úměrná koeficientu laminárního tření β :

$$\beta = k\eta d \quad (75)$$

$$\vec{F}_l = -\beta\vec{v} \quad (76)$$

Kde k je konstanta úměrnosti tření k rychlosti pohybu, η je dynamická viskozita tekutiny, d je charakteristický rozměr tělesa, v je rychlost pohybu tělesa vůči kapalině a F_l je síla působící proti pohybu tělesa, vyvolaná laminárním prouděním.

Toto tření bude dominantní zejména při nízkých vzájemných rychlostech ponorky vůči kapalině. Druhým typem tření je naproti tomu obtékání turbulentní. To se projevuje zejména při vyšších rychlostech, kdy je ale jeho vliv výraznější než vliv obtékání laminárního. Vzniká díky vlastnímu složitému pohybu částic tekutiny, který způsobuje, že se proudnice promíchávají a vznikají víry. Turbulentní proudění je závislé na kvadrátu rychlosti relativního pohybu tělesa vůči kapalině, v níž se pohybuje. To je důvod, proč je při pomalém pohybu nevýrazné. Lze jej modelovat taktéž jako sílu působící proti pohybu tělesa a která je přímo úměrná koeficientu turbulentního tření γ .

$$\gamma = \frac{1}{2}CS\rho \quad (77)$$

$$\vec{F}_t = -\gamma\vec{v}^2 \quad (78)$$

Kde C je bezrozměrný součinitel odporu tekutiny, S je charakteristická čelní plocha ponorky a \vec{F}_t je síla působící proti pohybu tělesa způsobená turbulentním obtékáním tělesa.

Posledním druhem odporu je tzv. přidaná hmotnost a přidaná setrvačnost. Pohybuje-li se pod hladinou neideální kapaliny nějaké těleso s výraznější čelní plochou, zákonitě před sebou při změně rychlosti tlačí některé částice tekutiny, které se ještě nepřizpůsobily změně rychlosti pohybu a nepřemístily se za těleso. Vzniká rozdíl tlaků na přední a zadní stranu tělesa. Hmotnost, respektive setrvačnost těchto tlačných částic je potom možné připočítat k hmotnosti resp. setrvačnosti tělesa. Zjednodušeně si lze představit, že tyto částice tekutiny jsou vlastně součástí pohybujícího se tělesa a ovlivňují tak jeho setrvačnost v translačním pohybu (hmotnost) i setrvačnost v rotačním pohybu (moment setrvačnosti). Tento odpor je závislý na zrychlení tělesa a je přímo úměrný koeficientu odporu α .

$$F_{ad} = -\alpha\vec{a} \quad (79)$$

$$M_{ad} = -a\dot{\omega} \quad (80)$$

Kde F_{ad} je síla působící proti pohybu tělesa, vyvolaná přidanou hmotností, M_{ad} je moment síly, vyvolaný přidaným momentem setrvačnosti, a je zrychlení tělesa v určitém směru a $\dot{\omega}$ je úhlové zrychlení tělesa kolem určité osy [6], [7].

3.7 Zjednodušený model ponorky v reálném prostředí

Vzhledem ke složitosti modelování všech třecích a dalších sil, působících na ponorné zařízení je vhodné uvažovat některá zjednodušení. Na těleso pod vodou působí kromě výše zmíněných třecích a odporových sil ještě další síly prostředí. Gravitační síla \vec{F}_g působící na hmotnostní střed tělesa:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad (81)$$

Kde \vec{g} je konstantní vektor gravitačního zrychlení.

Hydrostatický vztlak \vec{F}_A popsáný Archimedovým zákonem působící na geometrický střed tělesa:

$$\vec{F}_A = -V\rho\vec{g} \quad (82)$$

Kde V je objem tělesa ponořeného do kapaliny a ρ je hustota kapaliny.

Už z výše zmíněného faktu, že každá z těchto dvou sil prostředí působí na jiný bod tělesa v opačném směru a tudíž jejich vzájemné působení může vyvolávat moment síly, způsobující natáčení tělesa ve vodě, je užitečné, aby geometrický i hmotnostní střed tělesa leželi blízko sebe. To se dá u modelovaného ponorného zařízení předpokládat a v dalším textu tak budeme uvažovat, že se nachází ve stejném bodě. Modelované zařízení je navíc tzv. neutrálně vztlakové a gravitační síla i hydrostatický vztlak tak nabývají stejné velikosti a tudíž se jejich vzájemné účinky vyruší.

Dalším vlivem prostředí může být hydrodynamický vztlak. Je vyvoláván odporem prostředí a některé typy lodí ho využívají k pohybu. Hydrodynamický vztlak je však silně závislý na rychlosti a v případě modelovaného ponorného zařízení, u něhož se předpokládá pohyb především pomalý, se téměř neprojevuje.

Vzhledem ke zmíněnému faktu pomalého pohybu zařízení, lze uvažovat ještě zjednodušení plynoucí z kvadratické závislosti turbulentního proudění na rychlosti tělesa. Za předpokladu pomalého pohybu se takové proudění téměř nebude projevovat a je možné ho z rovnic pohybu vypustit. Přesto ho v zájmu obecnosti do rovnic matematického modelu zahrneme.

I přes všechna uvedená zjednodušení musí být pohybové rovnice doplněny ještě o laminární a turbulentní tření a o přidanou hmotnost, respektive setrvačnost. Pro translační pohyb tak budou ve tvaru:

$$m\vec{a}^0 = R \sum_{j=1}^8 \vec{F}_{mj}^1 + \vec{F}_g^0 + \vec{F}_A^0 + \vec{F}_l^0 + \vec{F}_t^0 + \vec{F}_{ad}^0 \quad (83)$$

Kde \vec{F}_{mj}^1 jsou síly osmi motorů ponorného zařízení, vyjádřené v pohyblivých souřadnicích.

Rovnice rotačního pohybu musí být upraveny do tvaru:

$$I^1 \dot{\vec{\omega}}^1 = \sum_{j=1}^8 \vec{\rho}_j^1 \times \vec{F}_{mj}^1 + \vec{M}_l^1 + \vec{M}_t^1 + \vec{\omega}^1 \times I^1 \vec{\omega}^1 \quad (84)$$

Kde \vec{M}_l^1 je moment síly, která je vyvolaná laminárním třením vody, \vec{M}_t^1 moment síly, která je vyvolána turbulentním prouděním vody a moment setrvačnosti I^1 je dán vztahem:

$$I^1 = I_p^1 + I_{ad}^1 \quad (85)$$

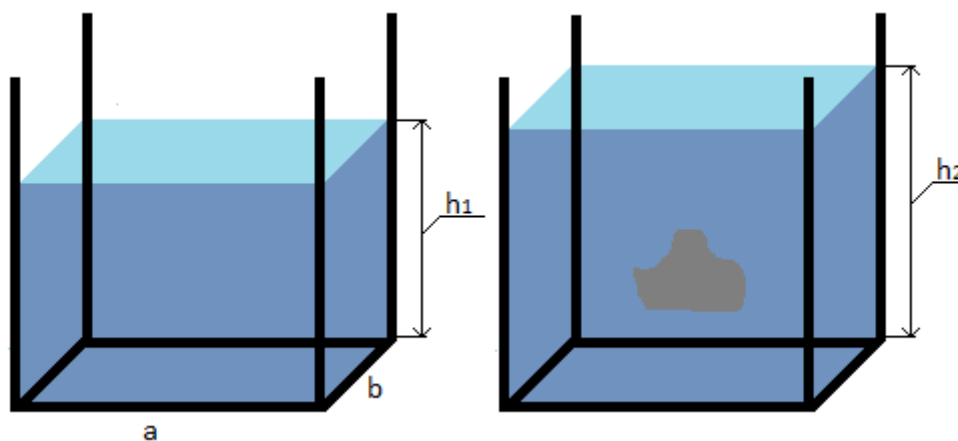
Kde I_p^1 je moment setrvačnosti tělesa vůči svému těžišti a I_{ad}^1 je přidaný moment setrvačnosti.

4 Identifikace parametrů

Jedním z úskalí těchto pohybových rovnic je, že v případě nehomogenního tělesa se spojitě rozloženou hmotou a s nepravidelným tvarem, jakým ponorka bezpochyby je, je velice obtížné určit nějakou analytickou metodou tenzor setrvačnosti tohoto tělesa nebo třecí síly, působící na těleso. Z těchto důvodů je nutné přistoupit k metodám identifikačním a tenzor setrvačnosti a velikosti třecích sil určit experimentálně.

4.1 Objem tělesa

V případě tělesa obecného tvaru není sice nemožné objem vypočítat analyticky, přesto se ale jako mnohem jednodušší přístup jeví objem tělesa změřit. Nejjednodušším způsobem může být ponořit těleso do kapaliny v nádobě pravidelného tvaru. Rozdíl hloubky kapaliny po vnoření tělesa a před vnořením pak stačí vynásobit obsahem plochy hladiny. Výsledkem je objem měřeného tělesa. Postup je naznačen na obr 4.



Obrázek 4 Měření objemu tělesa

h_1 ... hloubka vody před vnořením tělesa

h_2 ... hloubka vody po vnoření tělesa

a ... délka přední hrany podstavy nádoby

b ... délka boční hrany podstavy nádoby

$$V = (h_2 - h_1)ab \quad (86)$$

Kde V je objem ponořeného tělesa

4.2 Těžiště tělesa

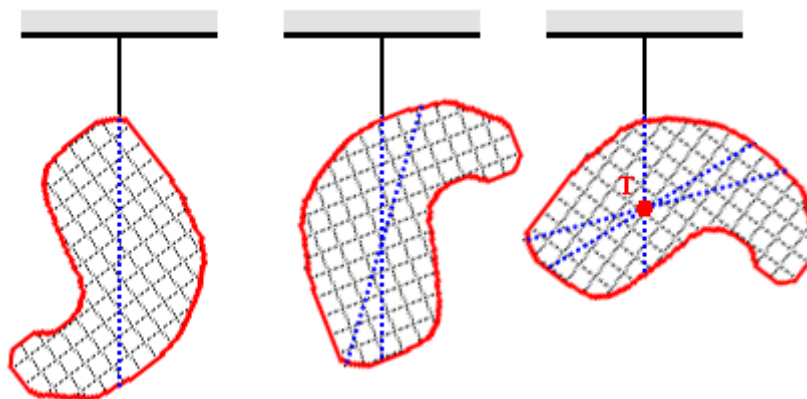
Jak bylo uvedeno již v kapitole 3.1, těžiště soustavy hmotných bodů lze určit vztahem (6). V případě spojitě rozložené hmoty lze polohu těžiště vypočítat přesněji pomocí vztahu:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm \quad (87)$$

a u homogenního tělesa se bude nacházet v geometrickém středu. Určit polohu těžiště nehomogenního a nepravidelného tělesa analyticky, je však při neznámém rozložení hmoty v tělese nemožné a je vhodné určit polohu hmotného středu experimentálně.

4.2.1 Experimentální určení polohy těžiště

Jednoduchý způsob jak určit polohu hmotného středu tělesa je naznačen na obr. 5.



Obrázek 5 Měření polohy těžiště

Je-li těleso zavěšeno, osa vedoucí od bodu závěsu kolmo k zemi se nazývá těžnicí tělesa. Všechny těžnice tělesa procházejí těžištěm. Určit polohu těžiště lze tak velice jednoduše postupným zavěšením tělesa v několika bodech, protažením přímk od závěsu k zemi a nalezením průsečíku všech takto naznačených těžnic.

4.3 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti tělesa je veličina, která vyjadřuje setrvačnost tělesa v otáčivém pohybu. Je závislá na rozložení hmoty v tělese. Momenty setrvačnosti jsou vztaženy vždy k některé ose otáčení, obvykle vůči ose procházející těžištěm tělesa. V obecném případě, může-li se nepravidelné a nehomogenní těleso otáčet kolem více os, momenty setrvačnosti budou vůči každé z os jiné. Pro účely matematického modelování se zavádí tzv. tenzor setrvačnosti \hat{I} ve tvaru:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (88)$$

Kde I_{xx} , I_{yy} a I_{zz} jsou momenty setrvačnosti vůči osám tělesa x, y resp. z. a I_{xy} , I_{xz} , I_{yx} , I_{yz} , I_{zx} a I_{zy} jsou tzv. deviační momenty.

Pro těleso, reprezentované soustavou hmotných bodů platí:

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) \quad (89)$$

$$I_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + z_i^2) \quad (90)$$

$$I_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i(x_i^2 + y_i^2) \quad (91)$$

$$I_{xy} = I_{yx} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i \quad (92)$$

$$I_{xz} = I_{zx} = - \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i \quad (93)$$

$$I_{zy} = I_{yz} = - \sum_{i=1}^n m_i z_i y_i \quad (94)$$

Kde m_i je hmotnost i -tého hmotného bodu, x_i , y_i , z_i jsou souřadnice i -tého hmotného bodu a n je počet hmotných bodů

Známe-li rozměry tělesa a rozložení hmoty uvnitř, momenty setrvačnosti i deviační momenty lze určit přesněji přechodem v integrály ve vztazích (89)-(94) .

Deviační momenty se mění s natočením tělesa, je tedy vhodné posunout souřadnicový systém tak, aby osy souřadnicového systému odpovídaly hlavním osám tělesa. V takovém případě se deviační momenty rovnají nule a momenty setrvačnosti nabývají extrémálních hodnot [8].

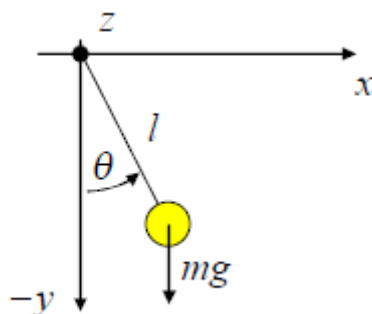
4.3.1 Steinerova věta

Moment setrvačnosti určený analyticky uvedenými vztahy (89)-(94) se vztahuje k ose otáčení, procházející těžištěm tělesa, chceme-li však určit moment setrvačnosti tělesa k ose rovnoběžné s osou otáčení avšak neprocházející těžištěm tělesa, je nutné využít Steinerovy věty, která říká, že: "Moment setrvačnosti k mimotěžištní ose J je roven součtu momentu k těžištní ose J_t a součinu hmotnosti a čtverce vzdálenosti obou rovnoběžných os." [9]:

$$J = J_t + ml^2 \quad (95)$$

Kde l je vzdálenost mezi mimotěžištní osou rotace a osou rotace procházející těžištěm tělesa.

4.3.2 Identifikace momentu setrvačnosti tělesa z doby kmitu fyzického kyvadla



Obrázek 6 Matematické kyvadlo

l je vzdálenost těžiště kyvadla od osy otáčení

m je hmotnost kyvadla

θ je úhel natočení kyvadla oproti rovnovážné poloze

Moment setrvačnosti tělesa je možné zjistit, zavěsíme-li ho jako fyzické kyvadlo a necháme-li ho kmitat kolem osy procházející místem zavěšení.

Pohyb netlumeného fyzického kyvadla pak lze popsat rovnicí:

$$\vec{M}_z = \dot{\vec{H}}_z \quad (96)$$

Kde pravý dolní index z značí otáčivý pohyb kolem osy z .

Rovnici (96) lze přepsat jako:

$$\vec{l} \times \vec{F}_g = J\ddot{\theta} \quad (97)$$

$$\vec{l} \times m\vec{g} = J\ddot{\theta} \quad (98)$$

$$J\ddot{\theta} + m|g||l| \sin \theta = 0 \quad (99)$$

Kde J je moment setrvačnosti kyvadla vůči ose z , F_g je gravitační síla, m je hmotnost kyvadla, l je délka od závěsu kyvadla k těžišti a θ je úhel vychýlení kyvadla oproti rovnovážné poloze.

K řešení je vhodné diferenciální rovnici (99) linearizovat použitím Taylorova rozvoje:

$$J\ddot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (100)$$

Řešení diferenciální rovnice (100) vyplývá z její charakteristické rovnice:

$$J\lambda^2 + mgl = 0 \quad (101)$$

A má tvar:

$$\theta = C \sin \left(\sqrt{\frac{mgl}{J}} t + \varphi \right) \quad (102)$$

Kde φ je fázový posuv.

Z takového průběhu je patrné, že se jedná o sinusový průběh o úhlové rychlosti:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \quad (103)$$

A kyvadlo tak kmitá s periodou:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} \quad (104)$$

Změříme-li tedy periodu kmitání kyvadla, je možné pak moment setrvačnosti vypočítat jako:

$$J = \frac{mglT^2}{4\pi^2} \quad (105)$$

Vyžadujeme-li vyšší přesnost, nebo pokud se kyvadlo pohybuje v prostředí s nezanedbatelným třením, je třeba při výpočtu uvažovat i tlumení. Pro určení momentu setrvačnosti kyvadla je pak nutné velikost tlumení znát nebo jí alespoň umět identifikovat. Vztah určující moment setrvačnosti tělesa pak vychází z:

$$\vec{M}_z + \vec{M}_\beta = \vec{H}_z \quad (106)$$

Kde M_β je moment síly způsobený třením.

Linearizovaná rovnice pohybu kyvadla pak odpovídá vztahu:

$$J\ddot{\theta} + l\beta\dot{\theta} + mgl\theta = 0 \quad (107)$$

A kořeny charakteristické rovnice jsou:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-l\beta \pm i\sqrt{|(l\beta)^2 - 4Jmgl|}}{2J} \quad (108)$$

Řešením diferenciální rovnice je potom:

$$\theta = e^{-\frac{l\beta}{2J}t} C \sin\left(\sqrt{\frac{mgl}{J} - \left(\frac{l\beta}{2J}\right)^2} t + \varphi\right) \quad (109)$$

Je zřejmé, že velikost amplitudy sinusového průběhu kmitů kyvadla bude v čase exponenciálně klesat.

Úhlová rychlost kmitání takto tlumeného kyvadla je tedy:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J} - \left(\frac{l\beta}{2J}\right)^2} \quad (110)$$

V případě znalosti parametru β lze moment setrvačnosti kyvadla určit jako:

$$J = \frac{mgl + \sqrt{l^2[(mg)^2 - \omega\beta^2]}}{2\omega} \quad (111)$$

Znalost β je však velmi nepravděpodobná a obvykle je nutné jej také identifikovat. Za použití funkce LSQCURVEFIT v programu Matlab (více v kapitole 4.4.1.6) je možné identifikovat hodnotu:

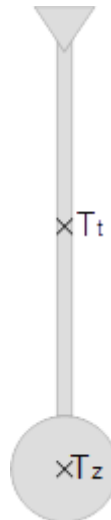
$$b = \frac{l\beta}{2J} \quad (112)$$

a moment setrvačnosti pak určit jednoduše:

$$J = \frac{mgl}{\omega^2 + b^2} \quad (113)$$

V takovém případě však lze určit identifikaci již jak parametr b , tak moment setrvačnosti J .

4.3.2.1 Uvažování vlivu závěsné tyče



Obrázek 7 Fyzické kyvadlo

T_t je těžiště tyče,

T_z je těžiště měřeného závaží

T je těžiště kyvadla

V některých případech je potřeba změřit moment setrvačnosti tělesa, ze kterého nelze udělat fyzické kyvadlo samostatně, ale musí být zavěšeno za lanko nebo tyč. Především pak tyč může měření značně ovlivnit a je třeba s ní počítat.

V takové situaci je změřený a vypočtený moment setrvačnosti vztahem (113) momentem setrvačnosti celé soustavy měřeného tělesa s tyčí, kolem osy otáčení. Označme jej J_o .

Momenty setrvačnosti těles lze sčítat, ovšem pouze pokud se vztahují ke stejné ose. Z toho důvodu je vhodné zvolit závěsnou tyč, jejíž moment setrvačnosti známe nebo můžeme vypočítat. Moment setrvačnosti homogenní tyče kolem osy procházející jejím těžištěm je:

$$J_{tt} = \frac{1}{12} m_t h_t^2 \quad (114)$$

Nebo přesněji moment setrvačnosti homogenního válce (za předpokladu, že má tyč válcovitý tvar):

$$J_{tt} = \frac{1}{4} m_t \left(r_t^2 + \frac{h_t^2}{3} \right) \quad (115)$$

Kde m_t je hmotnost tyče, h_t je délka tyče a r_t je průměr řezu tyče vedeného vodorovně se zemí.

Pomocí Steinerovy věty je možné spočítat moment setrvačnosti tyče kolem osy otáčení kyvadla:

$$J_{to} = J_{tt} + m_t l_t^2 \quad (116)$$

Kde l_t je vzdálenost od těžiště tyče k bodu závěsu.

Jak bylo uvedeno výše, momenty setrvačnosti lze sčítat, platí tedy:

$$J_o = J_{to} + J_{zo} \quad (117)$$

Kde J_{zo} je moment setrvačnosti měřeného objektu vzhledem k ose otáčení kyvadla.

Tedy:

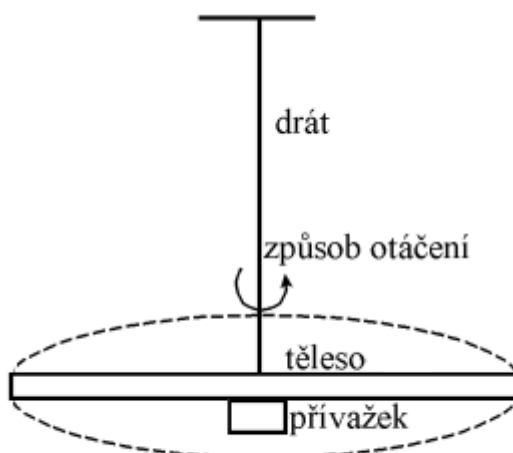
$$J_{zo} = J_o - J_{to} \quad (118)$$

A opět je třeba podle Steinerovy věty určit moment setrvačnosti zkoumaného tělesa vůči ose rovnoběžné s osou otáčení kyvadla, ale procházející těžištěm hledaného tělesa:

$$J_{zt} = J_{zo} - m_z l_z^2 \quad (119)$$

Kde m_z je hmotnost závaží a l_z vzdálenost těžiště závaží od bodu úchyty kyvadla.

4.3.3 Identifikace momentu setrvačnosti metodou torzních kmitů



Obrázek 8 Torzní kyvadlo

Jedná se o měření momentu setrvačnosti na základu měření kmitavého pohybu tělesa uchyceného na deformovatelném závěsu. Těleso je zavěšeno na deformovatelný drát, který je nejprve zkroucen a poté uvolněn. Těleso pak vykonává tzv. torzní kmity.

Pohyb torzního kyvadla v prostoru, kde nevzniká žádné tření, může být popsán pohybovou rovnicí:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}_d \quad (120)$$

Kde \vec{H} je moment hybnosti torzního kyvadla a \vec{M}_d je moment síly, vyvolaný snahou deformovaného drátu vrátit se do původní polohy

Rovnici (120) je dále možné pomocí Hookeova zákona rozepsat jako:

$$J\ddot{\theta} = -\frac{\pi Gr^4}{2l}\theta \quad (121)$$

Kde G je modul pružnosti ve smyku, l je délka závěsu, θ je úhel otočení kyvadla kolem osy procházející svisle závěsným drátem a r je poloměr vodorovného řezu závěsným drátem.

Výraz (121) se častěji zapisuje ve tvaru:

$$J\ddot{\theta} = -D\theta \quad (122)$$

Kde:

$$D = \frac{\pi Gr^4}{2l} \quad (123)$$

D je směrný moment drátu závislý na modulu pružnosti ve smyku G a na geometrických rozměrech drátu.

Diferenciální rovnici lze snadno řešit obdobně jako rovnici (100) v kapitole 4.3.2.

Pohyb je pak popsán vztahem:

$$\theta = C \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J}}t + \varphi\right) \quad (124)$$

A perioda torzních kmitů je:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}} \quad (125)$$

Neznámý směrný moment a tím i modul pružnosti ve smyku lze při měření vyloučit připojením přívazku o známém momentu setrvačnosti J_p k měřenému tělesu. Ideálně tak, aby osa otáčení kyvadla procházela i hmotným středem přívazku.

Periodu kmitů je potřeba změřit zvlášť pro těleso bez přívazku a zvlášť pro těleso s přívazkem.

Periodu tělesa s přívazkem můžeme označit T_s a moment setrvačnosti tělesa s přívazkem J_s :

$$T_s = 2\pi \sqrt{\frac{J_s}{D}} \quad (126)$$

Kde:

$$J_s = J + J_p \quad (127)$$

Vyjádřením D z rovnice (125) dostáváme:

$$D = \frac{J \cdot 4\pi^2}{T^2} \quad (128)$$

A z rovnice (126) při dosazení (127) za J_s :

$$D = \frac{(J + J_p) \cdot 4\pi^2}{T_s^2} \quad (129)$$

Je možné provést porovnání a vyjádřit hledaný moment setrvačnosti J:

$$\frac{J}{T^2} = \frac{J + J_p}{T_s^2} \quad (130)$$

$$J = \frac{J_p T^2}{T_s^2 - T^2} \quad (131)$$

Složitější situace může nastat v případě, že je třeba do měření zahrnout, například pro zvýšení přesnosti, nějakou třecí sílu [5]. Pohybová rovnice má pak tvar:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}_d + \vec{M}_\beta \quad (132)$$

Kde M_β je moment třecí síly.

Rovnici (132) je možné nahradit výrazem

$$J\ddot{\theta} = -D\theta - \beta\dot{\theta} \quad (133)$$

Kde β je koeficient tření.

Charakteristickou rovnicí výrazu (133) je:

$$J\lambda^2 + \beta\lambda + D = 0 \quad (134)$$

Řešením dané charakteristické rovnice je:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{|\beta^2 - 4JD|}}{2J} \quad (135)$$

A řešením diferenciální rovnice je tedy:

$$\theta = e^{-\frac{\beta}{2J}t} C \sin\left(\sqrt{\frac{D}{J} - \left(\frac{\beta}{2J}\right)^2} t + \varphi\right) \quad (136)$$

Úhlová rychlost kmitů pak nabývá hodnoty dané vztahem:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{J} - \left(\frac{\beta}{2J}\right)^2} \quad (137)$$

V případě měření s přívazkem je odvození shodné a úhlová rychlost je dána jako:

$$\omega_s = \sqrt{\frac{D}{J + J_p} - \left(\frac{\beta_s}{2(J + J_p)}\right)^2} \quad (138)$$

Kde β_s je koeficient tření působícího na celou soustavu kyvadla s přívazkem. Nelze proto jednoduchým vyjádřením direkčního momentu z rovnic (138) a (137) a následným porovnáním stanovit moment setrvačnosti J:

$$D = J \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta}{2J} \right)^2 \right] \quad (139)$$

$$D = (J + J_p) \left[\omega_s^2 + \left(\frac{\beta_s}{2(J + J_p)} \right)^2 \right] \quad (140)$$

$$(J + J_p) \left[\omega_s^2 + \left(\frac{\beta_s}{2(J + J_p)} \right)^2 \right] = J \left[\omega^2 + \left(\frac{\beta}{2J} \right)^2 \right] \quad (141)$$

Kromě neznámého momentu setrvačnosti se totiž ve vztahu vyskytnou ještě neznámé parametry tření a rovnice tak není řešitelná. V případě, že tedy chceme zahrnout do určení momentu setrvačnosti i tření je vhodnější využít některou z identifikačních metod a z naměřeného průběhu pohybu torzního kyvadla identifikovat moment setrvačnosti J , parametr tlumení β i direkční moment drátu D . Některé z možných metod identifikace jsou uvedeny v kapitole 4.4.

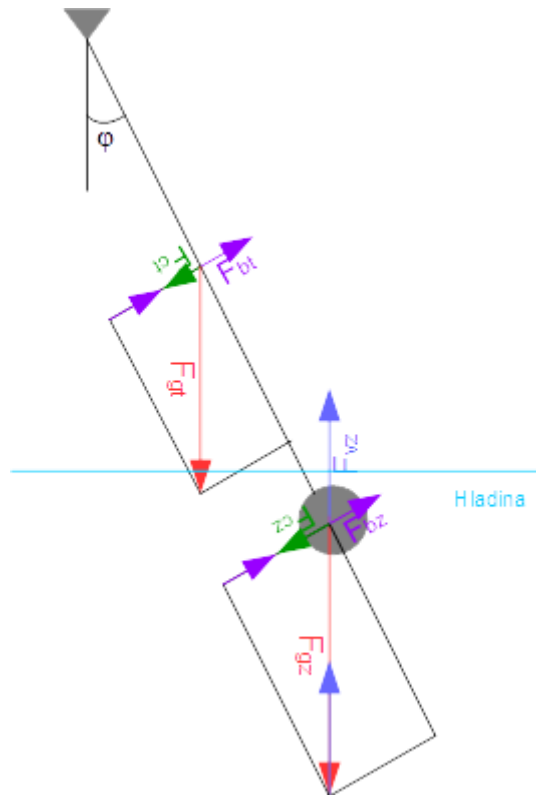
4.4 Identifikace třecích sil a momentů, působících na těleso pod vodou

Stejně jako moment setrvačnosti, je potřeba určit i odpor, který klade prostředí pohybu ponorky. Existuje mnoho metod, díky nimž lze určit i více neznámých parametrů a je tak možné zabývat se zjištěním tření, přidané hmotnosti, setrvačnosti i přidané setrvačnosti současně.

Odlišujeme-li nadále translační a rotační pohyb, zajímá nás při posuvném pohybu tření vody působící na ponorné zařízení a tzv. přidaná hmotnost k tělesu. Naproti tomu u rotačního pohybu zkoumáme tření vody a tzv. přidaný moment setrvačnosti. Pohyb fyzického kyvadla je výhodný, protože ho lze použít pro identifikaci k pohybu otáčivému i posuvnému. Jedná-li se totiž o malé výchylky fyzického kyvadla, které, jak bude vysvětleno níže v kapitole 4.4.1, vzhledem k nutnosti linearizace v některých metodách požadujeme a nadále budeme uvažovat, můžeme pohyb připevněného tělesa vnímat téměř jako translační.

4.4.1 Využití pohybu fyzického kyvadla

Jedná se o identifikaci na základě experimentálního zjištění průběhu kmitů fyzického kyvadla, skládajícího se z hmotné tyče, na níž je připevněna zátěž v podobě zkoumaného ponorného zařízení a které je ponořeno do vody tak, aby byla celá zkoumaná ponorka pod hladinou a co největší část závěsné tyče nad hladinou, jako je naznačeno na obr. 9. Cílem je určit parametry připevněného ponorného tělesa.



Obrázek 9 Síly působící na fyzické kyvadlo

- F_{gz} ... gravitační síla působící na zátěž kyvadla
- F_{gt} ... gravitační síla působící na tyč kyvadla
- F_{vz} ... vztlačková síla
- F_{bz} ... třecí síly působící na zátěž
- F_{bt} ... třecí síly působící na tyč
- F_{cz} ... celková síla působící na měřené těleso
- F_{ct} ... celková síla působící na tyč

Do diferenciální rovnice (96) popisující pohyb kyvadla je nutné zahrnout momenty sil, způsobené třením. Pod vodou na těleso kromě síly gravitační F_g působí hydrostatický vztlak F_A , hydrodynamický vztlak, který je ovšem závislý na rychlosti pohybujícího se tělesa a v případě pomalu pohybující se ponorky, případně tedy kyvadla, vychýleného pouze v řádu jednotek stupňů rovinného úhlu, je možné ho zanedbat. Dále na těleso působí odporová síla způsobená laminárním prouděním F_l a odporová síla způsobená prouděním turbulentním F_t . Mimo tyto síly, těleso pohybující se pod vodou před sebou ještě tlačí značné množství vody, která způsobuje pohybu také odpor. Diferenciální rovnice popisující pohyb fyzického kyvadla částečně pod vodou má tak tvar:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}_{gz} + \vec{M}_A + \vec{M}_{gt} + \vec{M}_l + \vec{M}_t + \vec{M}_{ad} + \vec{M}_b \quad (142)$$

Kde:

$$\dot{H} = J\ddot{\varphi} \quad (143)$$

\dot{H} vyjadřuje derivaci momentu hybnosti kyvadla a J je moment setrvačnosti celé soustavy fyzického kyvadla kolem osy otáčení kyvadla a odpovídá součtu momentu setrvačnosti zátěže J_p vůči ose otáčení a momentu setrvačnosti tyče J_t vůči ose otáčení:

$$J = J_p + J_t \quad (144)$$

\vec{M}_{gz} je moment síly vyvolaný působením gravitační síly na zátěž kyvadla a odpovídá vztahu:

$$\vec{M}_{gz} = \vec{F}_{gz} \times \vec{l} = m_z \vec{g} \times \vec{l} \quad (145)$$

$$M_{gz} = -m_z |g| |l| \sin \varphi \quad (146)$$

Přičemž \vec{l} je polohový vektor těžiště zátěže kyvadla, vzhledem k osám s počátkem v místě závěsu kyvadla. m_z je hmotnost zátěže, \vec{g} je vektor gravitačního zrychlení, φ je úhel náklonu kyvadla od rovnovážné polohy a:

$$\vec{F}_{gz} = m_z \vec{g} \quad (147)$$

\vec{F}_{gz} je gravitační síla působící na zátěž soustavy kyvadla.

\vec{M}_A je moment síly vyvolaný působením hydrostatického vztlaku na měřené těleso odpovídající výrazu:

$$\vec{M}_A = \vec{F}_A \times \vec{l} = V \rho \vec{g} \times \vec{l} \quad (148)$$

$$M_A = V \rho |g| |l| \sin \varphi \quad (149)$$

Kde ρ odpovídá hustotě kapaliny V objemu ponořeného tělesa a:

$$\vec{F}_A = V \rho \vec{g} \quad (150)$$

\vec{F}_A vztlakové síle.

\vec{M}_{gt} odpovídá momentu síly, vyvolanému díky působení gravitační síly na tyč kyvadla:

$$\vec{M}_{gt} = \vec{F}_{gt} \times \vec{r} = m_t \vec{g} \times \vec{r} \quad (151)$$

$$M_{gt} = -m_t |g| |r| \sin \varphi \quad (152)$$

Kde \vec{r} je polohový vektor těžiště tyče, m_t je hmotnost tyče a:

$$\vec{F}_{gt} = m_t \vec{g} \quad (153)$$

\vec{F}_{gt} Je gravitační síla působící na tyč.

\vec{M}_l je moment síly způsobený vlivem laminárního obtékání tělesa tekutinou:

$$\vec{M}_l = \vec{F}_l \times \vec{l} = \beta \frac{d \vec{l}\varphi}{dt} \times \vec{l} \quad (154)$$

$$M_l = -\beta \frac{d |l\varphi|}{dt} |l| \sin \frac{\pi}{2} = -\beta \frac{d |l\varphi|}{dt} |l| \quad (155)$$

Kde:

$$\vec{F}_l = \beta \frac{d \vec{l}\varphi}{dt} \quad (156)$$

\vec{F}_l Je odporová síla způsobená laminárním prouděním, závislá na rychlosti tělesa ve vodě a β je koeficient laminárního tření.

\vec{M}_t je moment síly, který vyvolává proudění turbulentní:

$$\vec{M}_t = \vec{F}_t \times \vec{l} = \gamma \left| \frac{d\vec{l}\varphi}{dt} \right| \frac{d\vec{l}\varphi}{dt} \times \vec{l} \quad (157)$$

$$\vec{M}_t = -\gamma \left| \frac{d|l\varphi|}{dt} \right| \frac{d|l\varphi|}{dt} |l| \sin \frac{\pi}{2} = -\gamma \left| \frac{d|l\varphi|}{dt} \right| \frac{d|l\varphi|}{dt} |l| \quad (158)$$

Kde:

$$\vec{F}_t = \gamma \left(\frac{d\vec{l}\varphi}{dt} \right)^2 \quad (159)$$

\vec{F}_t je třecí síla vyvolaná turbulentními proudy, závislá na kvadrátu rychlosti tělesa a γ je koeficient turbulentního tření.

\vec{M}_b je moment síly způsobený třením tyče kyvadla o částice vzduchu a především smykovým třením v otočném kloubu závěsu:

$$\vec{M}_b = \vec{F}_b \times \vec{r} = b \frac{d\vec{r}\varphi}{dt} \times \vec{r} \quad (160)$$

$$M_b = -b \frac{d|r\varphi|}{dt} |r| \sin \frac{\pi}{2} = -b \frac{d|r\varphi|}{dt} |r| \quad (161)$$

Kde

$$\vec{F}_b = b \frac{d\vec{r}\varphi}{dt} \quad (162)$$

\vec{F}_b je síla způsobená třením tyče a b je koeficient tohoto tření.

\vec{M}_{ad} je moment síly, kterou na těleso pod vodou působí částice vody, tlačené spolu s tělesem.

$$\vec{M}_{ad} = \vec{F}_{ad} \times \vec{l} = \alpha \frac{d^2\vec{l}\varphi}{dt^2} \times \vec{l} \quad (163)$$

$$M_{ad} = -\alpha \frac{d^2|l\varphi|}{dt^2} |l| \sin \frac{\pi}{2} = -\alpha \frac{d^2|l\varphi|}{dt^2} |l| \quad (164)$$

Kde

$$\vec{F}_{ad} = \alpha \frac{d^2\vec{l}\varphi}{dt^2} \quad (165)$$

\vec{F}_{ad} je síla způsobená přidanou setrvačností pro rotační, resp. přidanou hmotností pro aproximativní translační pohyb, úměrná zrychlení tělesa. α je přidaná setrvačnost, resp. hmotnost.

Dosazením vztahů (143) až (165) do pohybové rovnice kyvadla (142) je možné určit hledané parametry tření, setrvačnosti a přidané setrvačnosti měřeného objektu pro rotační pohyb. Fyzického kyvadla je ale možné využít i pro přibližný odhad parametrů tělesa pro pohyb translační. Pokud kyvadlo vykonává pohyb pouze v malých výchylkách úhlu φ pohyb měřeného objektu je téměř posuvný a dá se tak translačním pohybem aproximovat a odhadnout pro něj tření i přidanou hmotnost.

K takovému účelu využijeme pohybovou rovnici:

$$\dot{\vec{P}} = \vec{F}_{gz} + \vec{F}_A + \vec{F}_{gt} + \vec{F}_l + \vec{F}_t + \vec{F}_{ad} + \vec{F}_b \quad (166)$$

Kde:

$$\dot{\vec{P}} = m_z \ddot{\vec{l}} + m_t \ddot{\vec{r}} \quad (167)$$

$\dot{\vec{P}}$ e derivace hybnosti fyzického kyvadla a:

4.4.1.1 Identifikace parametrů rotačního pohybu

Jak bylo uvedeno výše, pohyb kyvadla se dá využít k odhadnutí parametrů pro oba typy pohybu. Pohyb kyvadla je ovšem přirozeně rotační a translačním se dá pouze aproximovat, proto se nejprve věnujme rovnicím rotačního pohybu:

$$(J_z + J_t) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = [(V\rho - m_z)l - m_t r]g \sin \varphi - \beta \frac{d l \varphi}{dt} l - \gamma \left| \frac{d l \varphi}{dt} \right| \frac{d l \varphi}{dt} l - \alpha \frac{d^2 l \varphi}{dt^2} l - b \frac{d r \varphi}{dt} r \quad (168)$$

Toto lze přepsat také jako:

$$(J_z + J_t + \alpha l^2) \ddot{\varphi} = [(V\rho - m_z)l - m_t r]g \sin \varphi - (\beta l^2 + b r^2) \dot{\varphi} - \gamma l^3 \dot{\varphi}^2 \quad (169)$$

Pomocí některých identifikačních metod, jako je například metoda nejmenších čtverců, je možné určit parametry průběhu v tomto nelineárním tvaru. Mnohdy je ale možné vystačit si pouze s metodami, které vyžadují lineární tvar rovnic. I pomocí těchto metod je možné dosáhnout uspokojivých výsledků. Především numerické algoritmy mohou vést k velice přesným odhadům. Pohybovou rovnicí (169) lze tedy pro velmi malé výchylky úhlu φ linearizovat pomocí 1. řádu Taylorova rozvoje funkce ve funkční řadu v počátku stavového prostoru:

$$\sin \varphi \sim \varphi; \quad \dot{\varphi}^2 \sim 0 \quad (170)$$

Poté má pohybová rovnice kyvadla linearizovaný tvar:

$$(J_z + J_t + \alpha l^2) \ddot{\varphi} + (\beta l^2 + b r^2) \dot{\varphi} + [(m_z - V\rho)l + m_t r]g \varphi = 0 \quad (171)$$

K využití některých metod je třeba znát funkci průběhu kmitů fyzického kyvadla, danou jako řešení této diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními parametry. Charakteristická rovnice vztahu (171) je:

$$(J_z + J_t + \alpha l^2) \lambda^2 + (\beta l^2 + b r^2) \lambda + [(m_z - V\rho)l + m_t r]g = 0 \quad (172)$$

Kořeny takové charakteristické rovnice mají tvar:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\frac{(\beta l^2 + b r^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} \pm \sqrt{\left[\frac{(\beta l^2 + b r^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} \right]^2 - 4 \frac{[(m_z - V\rho)l + m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)}}}{2} \quad (173)$$

U kořenů (173) mohou nastat dvě rozdílné situace:

$$\left[\frac{(\beta l^2 + b r^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} \right]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} > 0 \quad (174)$$

První případ daný vztahem (174) nastává, je-li vztlaková síla působící na kyvadlo větší než gravitační. Tj, v případě velkého objemu tělesa nebo nízké hmotnosti tělesa. V takové situaci kyvadlo nekmitá, ale plave na hladině.

Druhý případ (175) nastává v situaci opačné:

$$\left[\frac{(\beta l^2 + br^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} \right]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} < 0 \quad (175)$$

Kyvadlo pak kmitá.

Jako bylo zmíněno v kapitole 3.7, ponorné zařízení je navrženo tak, aby bylo vztlakově neutrální a tudíž, požadujeme-li kmitání kyvadla, je třeba ke kyvadlu připojit ještě nějaký přivažek. Funkci přivažku však dostatečně splňuje závěsná tyč kyvadla. Nastává situace popsaná ve druhém případě vztahem (175).

Řešení diferenciální rovnice (171), je tak:

$$\varphi = e^{-\frac{(\beta l^2 + br^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} t} \left(c_1 e^{i \sqrt{\frac{[(\beta l^2 + br^2)]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)}}{2}} t} + c_2 e^{-i \sqrt{\frac{[(\beta l^2 + br^2)]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)}}{2}} t} \right) \quad (176)$$

Za předpokladu, že $c_1 = c_2 = c = \varphi(0)$ je dále možné přepsat vztah (176) na

$$\varphi = 2e^{-\frac{(\beta l^2 + br^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} t} c \cos \left(\frac{\sqrt{\frac{[(\beta l^2 + br^2)]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)}}{2}} t}{2} \right) \quad (177)$$

Nebo také na:

$$\varphi = 2e^{-\frac{(\beta l^2 + br^2)}{(J_z + J_t + \alpha l^2)} t} c \sin \left(\frac{\sqrt{\frac{[(\beta l^2 + br^2)]^2 + 4 \frac{[(V\rho - m_z)l - m_t r]g}{(J_z + J_t + \alpha l^2)}}{2}} t + \frac{\pi}{2}}{2} \right) \quad (178)$$

A právě tento průběh je dále využíván k určení hledaných parametrů.

4.4.1.2 Identifikace parametrů translačního pohybu

Pohyb kyvadla lze popsat dvěma způsoby, výraz (168) je vhodný pro následnou identifikaci rotačního pohybu, pokud ovšem chceme odhadovat parametry pohybu translačního, je třeba ho upravit. Aby bylo možné sestavit rovnici pro aproximativní translační pohyb a dále jí požadovaným způsobem upravovat, je nutné přesunout všechny síly do společného působíště. Tím by se samozřejmě změnili momenty sil, závislé na vzdálenosti od osy otáčení a je tak třeba velikosti těchto sil také nepřímě úměrně posunu působíště změnit. Takovým působíštěm může být těžiště celé soustavy kyvadla, ale klidně i jakýkoliv jiný bod nacházející se v soustavě. Aby nebylo nutné přepočítávat všechny vztahy, může být vhodnější zvolit jako nové

působíště všech sil hmotný střed zavěšeného tělesa. Zavedeme síly \tilde{F}_{gt} resp. \tilde{F}_b tak, aby platilo:

$$M_{gt} = F_{gt}r \sin \varphi = \tilde{F}_{gt}l \sin \varphi \quad (179)$$

Resp:

$$M_b = F_b r = \tilde{F}_b l \quad (180)$$

Je zřejmé, že jestliže se vzdálenost působíště sil od původního změni v poměru $\frac{l}{r}$, pak aby zůstaly momenty sil stejně velké, musí se velikost vyvolávajících sil změnit v poměru převráceném:

$$\tilde{F}_{gt} = \frac{r}{l} F_{gt} \quad (181)$$

$$\tilde{F}_b = \frac{r}{l} F_b \quad (182)$$

Z čeho vyplývá i změna parametrů tyče:

$$\tilde{m}_t = \frac{r}{l} m_t \quad (183)$$

$$\tilde{b} = \frac{r}{l} b \quad (184)$$

Nahradíme-li moment setrvačnosti tyče jeho aproximací pro hmotný bod v místě těžiště tyče, pak:

$$J_t = m_t \vec{r} \times \vec{r} = m_t r^2 \quad (185)$$

Je ale zřejmé, že posunutím působíště sil se vztah pro aproximaci momentu setrvačnosti tyče momentem setrvačnosti hmotného bodu změni, avšak jeho velikost zůstane stejná:

$$J_t = \tilde{m}_t \vec{r} \times \vec{l} = \tilde{m}_t r l \quad (186)$$

Nyní lze od vyjádření rotačního pohybu přejít k rovnici pro pohyb translační:

$$(J_z + J_t) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = [(V\rho - m_z)l - m_t r]g \sin \varphi - \beta \frac{d l \varphi}{dt} l - \gamma \left| \frac{d l \varphi}{dt} \right| \frac{d l \varphi}{dt} l - \alpha \frac{d^2 l \varphi}{dt^2} l - b \frac{d r \varphi}{dt} r \quad (187)$$

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) l \ddot{\varphi} + (\beta l + \tilde{b} r) l \dot{\varphi} + \gamma l^3 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + (m_z + \tilde{m}_t - V\rho) l g \sin \varphi = 0 \quad (188)$$

Což odpovídá výrazu (166). Stejně jako parametry rotačního, tak i parametry translačního pohybu je možné určit vícero identifikačními metodami. Ve výše uvedeném tvaru metodou nejmenších čtverců, jinými metodami zase pomocí znalosti předpisu pro průběh kmitů.

Pomocí linearizace jsme opět schopni dojít k diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními parametry:

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) \ddot{\varphi} + (\beta l + \tilde{b} r) \dot{\varphi} + (m_z + \tilde{m}_t - V\rho) g \varphi = 0 \quad (189)$$

A tedy i stejnou cestou k řešení:

$$\varphi = 2e^{-\frac{(\beta l + \bar{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}t} c \sin \left(\sqrt{\frac{\left[\frac{(\beta l + \bar{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right]^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}}{2}} t + \frac{\pi}{2} \right) \quad (190)$$

Vzhledem k tomu, že konkrétními způsoby, jak určit parametry rotačního pohybu se zabývá především kapitola 4.4.2 využívající pohybu torzního kyvadla, bude zbytek sekce 4.4.1. o pohybu fyzického kyvadla věnován určení parametrů pohybu translačního. Avšak veškeré další odvozování je pro rotační pohyb ekvivalentní.

4.4.1.3 Stanovení parametrů z postupného určení složek průběhu

Průběh signálu z kyvadla, odpovídající rovnicím (178) resp. (190), lze rozdělit na dvě složky. Na sinusovku a její exponenciálně klesající amplitudu. V takovém případě je pro zjednodušení vhodné zavést substituci:

$$2e^{-\frac{(\beta l + \bar{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}t} c = Ce^{-Kt} \quad (191)$$

U tohoto exponenciálně klesajícího průběhu amplitudy je možné identifikovat neznámé parametry C a K metodou nejmenších čtverců. Z naměřeného průběhu se ovšem vyberou jen vzorky, při nichž sledovaný signál nabývá maximálních nebo minimálních hodnot.

Aby bylo možné použití klasické lineární metody nejmenších čtverců, je třeba vztah upravit do lineární podoby:

$$Ce^{-Kt_i} = y(t_i) \quad (192)$$

$$\ln C - Kt_i = \ln y(t_i) \quad (193)$$

V takovém případě je při použití metody nejmenších čtverců minimalizováno kritérium:

$$\sum_{j=1}^n (\ln y(t_i) - \ln C + Kt_i)^2 \rightarrow \min \quad (194)$$

Funkce nabývá extrémů, je-li její derivace rovna nule:

$$\frac{d}{dC} = -2 \sum_{j=1}^n (\ln y(t_i) - \ln C + Kt_i) \frac{1}{C} = 0 \quad (195)$$

$$\frac{d}{dK} = 2 \sum_{j=1}^n (\ln y(t_i) - \ln C + Kt_i) t_i = 0 \quad (196)$$

Z rovnice (195) lze vyjádřit K :

$$K = \frac{n \ln C - \sum_{j=1}^n \ln y(t_i)}{\sum_{j=1}^n t_i} \quad (197)$$

A dosadit ho do rovnice (196):

$$\sum_{j=1}^n t_j \ln y(t_j) - \ln C \sum_{j=1}^n t_j + \frac{n \ln C - \sum_{j=1}^n \ln y(t_j)}{\sum_{j=1}^n t_j} \sum_{j=1}^n t_j^2 = 0 \quad (198)$$

Postupným řešením rovnice (198):

$$\sum_{j=1}^n t_j \ln y(t_j) - \frac{\sum_{j=1}^n \ln y(t_j) \sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j} = \ln C \left(\sum_{j=1}^n t_j - n \frac{\sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j} \right) \quad (199)$$

$$\ln C = \frac{\sum_{j=1}^n t_j \ln y(t_j) - \frac{\sum_{j=1}^n \ln y(t_j) \sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j}}{\sum_{j=1}^n t_j - n \frac{\sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j}} \quad (200)$$

$$C = e^{\frac{\sum_{j=1}^n t_j \ln y(t_j) - \frac{\sum_{j=1}^n \ln y(t_j) \sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j}}{\sum_{j=1}^n t_j - n \frac{\sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{j=1}^n t_j}}} \quad (201)$$

Zpětným dosazením do (197) je možné určit také K .

Vzhledem k tomu, že:

$$\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} = 2K \quad (202)$$

Je možné dále z naměřené periody kmitů (203) určit hmotnostní parametry kyvadla pod vodou, či samotnou přidanou hmotnost dosazením K :

$$T = \frac{4\pi}{\sqrt{\left| \left[\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right]^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right|}} \quad (203)$$

Postupným řešením:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left| (2K)^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right|}} \quad (204)$$

$$-K^2 - \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 \quad (205)$$

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) = - \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{\left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 + K^2} \quad (206)$$

Zpětným dosazením do (202) je pak dosaženo parametru $(\beta l + \tilde{b}r)$:

$$(\beta l + \tilde{b}r) = 2K(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) \quad (207)$$

4.4.1.4 Identifikační metoda nejmenších čtverců

Parametry lze identifikovat i dobře známou metodou nejmenších čtverců pro identifikaci parametrů systému. Výhodou této metody je, že nutně nevyžaduje linearizaci a může využít rovnici (187) v jejím základním tvaru:

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) \ddot{\varphi} + (\beta l + \tilde{b} r) \dot{\varphi} + \gamma l^2 |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} + (m_z + \tilde{m}_t - V \rho) g \sin \varphi = 0 \quad (208)$$

Převedenou na tvar:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{(m_z + \tilde{m}_t - V \rho) g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \sin \varphi - \frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \dot{\varphi} - \frac{\gamma l^2}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} |\dot{\varphi}| \dot{\varphi} \quad (209)$$

Maticově zapsanou jako:

$$[|\dot{\varphi}| \dot{\varphi} \quad \dot{\varphi} \quad \sin \varphi] \begin{bmatrix} -\frac{\gamma l^2}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \\ -\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \\ -\frac{(m_z + \tilde{m}_t - V \rho) g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \end{bmatrix} = \ddot{\varphi} \quad (210)$$

Čili:

$$\varphi^T(t) \theta = y(t) \quad (211)$$

Kde:

$$\varphi^T(t) = [|\dot{\varphi}(t)| \dot{\varphi}(t) \quad \dot{\varphi}(t) \quad \sin \varphi(t)]; \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (212)$$

$$\theta_1 = -\frac{\gamma l^2}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}; \quad \theta_2 = -\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}; \quad \theta_3 = -\frac{(m_z + \tilde{m}_t - V \rho) g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \quad (213)$$

$$y(t) = \ddot{\varphi}(t) \quad (214)$$

Tato rovnice musí být splněna pro každý změřený bod v každém časovém okamžiku. Rovnici tak lze přepsat do tvaru:

$$Y = \Phi \theta \quad (215)$$

Kde:

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix}; \quad \Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T(1) \\ \varphi^T(2) \\ \vdots \\ \varphi^T(n) \end{bmatrix} \quad (216)$$

A n je počet naměřených vzorků.

Pak je odhad parametrů možné určit vztahem:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (217)$$

A neznámé parametry α resp. β dopočítat.

Tento přístup ovšem vyžaduje znalost nejen polohy (resp. úhlu naklonění kyvadla), ale také první a druhé derivace polohy. V případě, že nejsou tyto derivace naměřeny, je třeba je odhadnout. Vzhledem ke znalosti všech naměřených vzorků se jeví jako nejlepší způsob odhadu využití některého nekauzálního filtru.

Příkladem může být takový, kde pro odhad první derivace platí:

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{y}_r(t) - \hat{y}_l(t)}{2} \quad (218)$$

Kde (219) je odhad první derivace zprava a (220) je odhad první derivace zleva, přičemž T je perioda vzorkování:

$$\hat{y}_r(t) = \frac{y(t+1) - y(t)}{T} \quad (219)$$

$$\hat{y}_l(t) = \frac{y(t) - y(t-1)}{T} \quad (220)$$

Druhou derivaci je poté možné určit obdobně:

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{y}_r(t) - \hat{y}_l(t)}{2} \quad (221)$$

Kde:

$$\hat{y}_r(t) = \frac{\dot{y}(t+1) - \dot{y}(t)}{T} \quad (222)$$

A

$$\hat{y}_l(t) = \frac{\dot{y}(t) - \dot{y}(t-1)}{T} \quad (223)$$

Tento postup odhadování derivací má také svá úskalí. Většinou vyžaduje co nejpřesnější měření polohy.

4.4.1.5 Numerické identifikační metody

Aby bylo dosaženo větší přesnosti odhadnutých parametrů, bylo by vhodné využít více dat, než jen časů a hodnot amplitudy a periody naměřeného průběhu. Mají-li se však použít i další změřené hodnoty, jichž je většina a mohou tak výrazně zpřesnit odhad, je třeba je porovnávat s celou rovnicí průběhu, nikoli pouze s jejími složkami. To má ovšem za následek nemožnost použití lineární metody nejmenších čtverců a tím i analytického výpočtu.

K účelům takové identifikace slouží nelineární metody. Většina těchto metod vychází z principu nelineárních nejmenších čtverců a řešitelné jsou pouze numericky.

Jedná se o nelineární iterační metody, jejichž snahou je opět minimalizovat kritérium:

$$F = \min_{\alpha} \sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i))^2 \quad (224)$$

Kde α je vektor parametrů, $y(i)$ je hodnota signálu v i -tém kroku a $\hat{y}(i)$ odhad signálu v i -tém kroku pro aktuální odhad parametrů α .

Existuje několik algoritmů které vedou k minimalizaci vztahu (224). Jsou to hlavně algoritmy postavené na principu Gauss Newtonovy metody a Levenberg Marquardtova algoritmu.

4.4.1.5.1 Gauss-Newtonova metoda

Označíme reziduum i -tého měřeného bodu q_i :

$$F(\alpha) = \sum_{i=1}^N (y(i) - \hat{y}(i, \alpha))^2 = \sum_{i=1}^N q_i^2(\alpha) \quad (225)$$

Nejsou-li parametry α nijak omezeny, potom je třeba souřadnice α^+ minima součtu čtvců F hledat jako limitu tzv. minimalizující posloupnosti α^k tak aby platilo:

$$F(\alpha^{k+1}) < F(\alpha^k) \quad (226)$$

Taylorův rozvoj funkce $\hat{y}(i, \alpha)$ se zanedbáním kvadratických a vyšších členů rozvoje v bodě α^k vzhledem k α je:

$$\hat{y}(i, \alpha) \approx \hat{y}(i, \alpha^k) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}(i, \alpha^k)}{\partial \alpha_j} (\alpha_j - \alpha_j^k) \quad (227)$$

Kde α_j je j -tá složka vektoru parametrů α . Taylorův rozvoj umožní vyhodnotit místo původního vztahu aproximativní formuli:

$$y - \hat{y}(i, \alpha^k) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \hat{y}(i, \alpha^k)}{\partial \alpha_j} \Delta \alpha_j^k \quad (228)$$

Pro nové neznámé parametry $\Delta \alpha_j^k$, ve kterých je už ale vztah (228) lineární. Označíme-li

$$J(\alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{y}_1(\alpha)}{\partial \alpha_1} & \frac{\partial \hat{y}_1(\alpha)}{\partial \alpha_2} & \dots & \frac{\partial \hat{y}_1(\alpha)}{\partial \alpha_m} \\ \frac{\partial \hat{y}_2(\alpha)}{\partial \alpha_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \hat{y}_n(\alpha)}{\partial \alpha_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \hat{y}_n(\alpha)}{\partial \alpha_m} \end{bmatrix} \quad (229)$$

Jacobiho matici, je výsledkem pro rovnici (228) a přírůstek:

$$\Delta^+ \alpha^k = - \left(J^T(\alpha^k) J(\alpha^k) \right)^{-1} J(\alpha^k) q(\alpha^k) \quad (230)$$

Kde $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$. (230) se dále využívá pro výpočet následujícího prvku minimalizující posloupnosti podle vztahu:

$$\alpha^{k+1} = \alpha^k + \lambda \Delta^+ \alpha^k \quad (231)$$

Kde λ lze volit v intervalu $\lambda \in (0,1)$

Výpočet je ukončen pokud $\|\Delta^+ \alpha^k\|$ je menší než stanovená přesnost.

Gauss-Newtonova metoda je rychlá, avšak existuje skupina úloh, pro které nekonverguje k řešení [2]. Obecně lze řešit minimalizaci $F(\alpha)$ libovolnou metodou lineárního programování, Gauss-Newtonova metoda konverguje dobře v blízkosti α^+ , často se proto používá v kombinaci s nějakou jinou metodou, například s Levenberg-Marquardtovo algoritmem.

4.4.1.5.2 Levenberg-Marquardtův algoritmus

Levenberg-Marquardtovo metoda na rozdíl od Gauss-Newtonovo metody zavádí tzv. tlumící faktor λ . Řešení je pak dáno rovnicí [1]:

$$\Delta\alpha^k = [J(\alpha^k)J(\alpha^k)^T + \lambda I]^{-1} J(\alpha^k)q(\alpha^k) \quad (232)$$

Kde I je jednotková matice.

Levenberg-Marquardtovo algoritmus je pomalejší než Gauss-Newtonova metoda, ale díky tlumícímu faktoru konverguje i v situacích, kdy Gauss-Newtonova metoda ne.

Obě dvě metody vhodně kombinuje funkce $LSQCURVEFIT()$ z toolboxu Optimization v programovém prostředí matlab [4].

4.4.1.6 LSQCURVEFIT

Výstupem funkce $LSQCURVEFIT()$ v případě signálu ve tvaru:

$$e^{-Kt}C \sin(\omega t + \theta) \quad (233)$$

jsou odhady \hat{K} , \hat{C} , $\hat{\omega}$, $\hat{\theta}$, z nichž pak lze opět snadno dopočítat hledané parametry systému, jelikož:

$$\hat{K} \approx K = \frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \quad (234)$$

A

$$\hat{\omega} \approx \omega = \frac{\sqrt{\left[\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right]^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}}}{2} \quad (235)$$

Což odpovídá situaci uvedené v kapitole 4.3.1.1 řešené pomocí vztahů (204)-(207).

4.4.1.7 Identifikace parametrů pomocí diskretizovaného systému

Zcela odlišný přístup ke zjištění parametrů představuje metoda, vycházející z identifikace diskrétního systému.

Uvažujeme-li opět linearizovaný pohyb fyzikálního kyvadla. K určení parametrů pro translační pohyb je v první řadě třeba odvodit přenos systému:

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{\phi(p)}{U(p)} = \frac{1}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)p^2 + (\beta l + \tilde{b} r)p - (V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g} \\
&= \frac{1}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \\
&= \frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{p^2 + \frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}p - \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}}
\end{aligned} \tag{236}$$

Kde kořeny charakteristické rovnice, tj. jmenovatele přenosu jsou:

$$k_1 = -\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} - i \sqrt{\frac{\left(\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}\right)^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}}{2}} \tag{237}$$

$$k_2 = -\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} + i \sqrt{\frac{\left(\frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}\right)^2 + 4 \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}}{2}} \tag{238}$$

Přenos spojitého systému je pak po takové substituci:

$$F(p) = \frac{k_0}{(p - k_1)(p - k_2)} \tag{239}$$

Kde:

$$k_0 = \frac{1}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \tag{240}$$

Takový přenos už je možné zdiskretizovat užitím tvarovače nultého řádu s periodou vzorkování T_{vz} . Diskretizaci lze udělat zpětnou Laplaceovo transformací přenosu a posléze Z-transformací výsledku:

$$\begin{aligned}
F(z) &= Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{1 - e^{-pt}}{p} F(p) \right\} \right\} = \frac{z - 1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{F(p)}{p} \right\} \right\} \\
&= \frac{z - 1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{k_0}{p(p - k_1)(p - k_2)} \right\} \right\}
\end{aligned} \tag{241}$$

Kde přenos tvarovače nultého řádu je $\frac{1 - e^{-pt}}{p}$. K provedení Zpětné Laplaceovy transformace je ovšem zapotřebí rozložit přenos na parciální zlomky:

$$F(z) = \frac{z - 1}{z} Z \left\{ L^{-1} \left\{ \frac{A}{p} + \frac{B}{(p - k_1)} + \frac{C}{(p - k_2)} \right\} \right\} \tag{242}$$

$$\frac{A}{p} + \frac{B}{p - k_1} + \frac{C}{p - k_2} = \frac{k_0}{p(p - k_1)(p - k_2)} \tag{243}$$

$$A = \frac{k_0}{k_1 k_2}; \quad B = \frac{k_0}{k_1^2 - k_1 k_2}; \quad C = \frac{k_0}{k_2^2 - k_1 k_2} \tag{244}$$

Diskretizovaný Z-přenos je potom:

$$F(z) = \frac{z-1}{z} \left(\frac{Az}{z-1} + \frac{Bz}{z-e^{k_1 T_{vz}}} + \frac{Cz}{z-e^{k_2 T_{vz}}} \right) \quad (245)$$

$$F(z) = A + B \frac{z-1}{z-e^{k_1 T_{vz}}} + C \frac{z-1}{z-e^{k_2 T_{vz}}} \quad (246)$$

Což po roznásobení odpovídá přenosu:

$$F(z) = \frac{(A+B+C)z^2 - [A(e^{k_1 T_{vz}} + e^{k_2 T_{vz}}) + B(1 + e^{k_2 T_{vz}}) + C(1 + e^{k_1 T_{vz}})]z + Ae^{(k_1+k_2)T_{vz}} + Be^{k_2 T_{vz}} + Ce^{k_1 T_{vz}}}{z^2 - (e^{k_1 T_{vz}} + e^{k_2 T_{vz}})z + e^{(k_1+k_2)T_{vz}}} \quad (247)$$

Protože $(A+B+C) = 0$, je možné za využití substituce přepsat výraz (247) jako:

$$F(z) = \frac{b_1 z + b_0}{z^2 + a_1 z + a_0} \quad (248)$$

Kde je využito substituce:

$$b_1 = -[A(e^{k_1 T_{vz}} + e^{k_2 T_{vz}}) + B(1 + e^{k_2 T_{vz}}) + C(1 + e^{k_1 T_{vz}})] \quad (249)$$

$$b_0 = Ae^{(k_1+k_2)T_{vz}} + Be^{k_2 T_{vz}} + Ce^{k_1 T_{vz}} \quad (250)$$

$$a_1 = -(e^{k_1 T_{vz}} + e^{k_2 T_{vz}}) \quad (251)$$

$$a_0 = e^{(k_1+k_2)T_{vz}} \quad (252)$$

Tento diskretní systém popsaný diskretní přenosovou funkcí (248) je třeba identifikovat. Vzhledem k měření, prováděnému bez vstupní síly, pouze s nenulovými počátečními podmínkami úhlu naklonění kyvadla, je vhodné použít k identifikaci parametrů ze zaznamenaného průběhu Yule-Walkerovy rovnice. Diskretní systém (248) převedený na diferenční rovnici má tvar:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_0 u(k-2) \quad (253)$$

Kde $y(k)$ je hodnota naměřené výstupu systému kyvadla v k -tém časovém okamžiku. $u(k)$ je vstup v čase k .

Lze uvažovat i šum a rušivé vlivy působící v průběhu měření. Vzhledem k nulovému vstupu pak diferenční rovnice (253) přechází v tvar:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_0 y(k-2) + e(k) + ce(k-1) \quad (254)$$

Kde $e(k)$ je šum v čase k a c je neznámý parametr šumu.

Pro odhad jsou důležité především parametry a_1 a a_0 , které jsou postačující pro výpočet hledaných parametrů původního nediskretizovaného systému. Proto při této úpravě nedochází ke ztrátě žádné důležité informace.

Odhad parametrů a_1 a a_0 pak odpovídá rovnici:

$$\hat{\theta} = -(P^T \phi)^{pinv} P^T Y \quad (255)$$

Kde:

$$\phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y(1) & 0 \\ y(2) & y(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(n-1) & y(n-2) \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ y(1) & 0 \\ y(2) & y(1) \\ \vdots & \vdots \\ y(n-2) & y(n-3) \end{bmatrix} \quad (256)$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_0 \end{bmatrix}; \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} \quad (257)$$

n je počet naměřených vzorků a pravý horní index $pinv$ značí tzv. pseudoinverzi výrazu v závorce.

Po stanovení odhadů parametrů a_1 a a_0 je možné z naznačeného postupu diskretizace zpětně dopočítat kořeny (237) a (238) charakteristické rovnice spojitého systému:

$$-(e^{\hat{k}_1 T_{vz}} + e^{\hat{k}_2 T_{vz}}) = \hat{a}_1 \quad (258)$$

$$e^{(\hat{k}_1 + \hat{k}_2) T_{vz}} = \hat{a}_0 \quad (259)$$

Vztah (259) upravíme:

$$\hat{k}_1 + \hat{k}_2 = \frac{\ln(\hat{a}_0)}{T_{vz}} \quad (260)$$

A dosadíme do (258):

$$-\left(e^{\left(\frac{\ln(\hat{a}_0)}{T_{vz}} - \hat{k}_2\right) T_{vz}} + e^{\hat{k}_2 T_{vz}}\right) = \hat{a}_1 \quad (261)$$

Postupnými úpravami lze poté dojít k odhadu kořene charakteristické rovnice \hat{k}_2 :

$$-e^{\ln(\hat{a}_0)} e^{-\hat{k}_2 T_{vz}} - e^{\hat{k}_2 T_{vz}} = \hat{a}_1 \quad (262)$$

$$e^{2\hat{k}_2 T_{vz}} + \hat{a}_1 e^{\hat{k}_2 T_{vz}} + \hat{a}_0 = 0 \quad (263)$$

$$e^{\hat{k}_2 T_{vz}} = \frac{-\hat{a}_1 \pm \sqrt{\hat{a}_1^2 - 4\hat{a}_0}}{2} \quad (264)$$

$$\hat{k}_2 = \frac{\ln\left(\frac{-\hat{a}_1 \pm \sqrt{\hat{a}_1^2 - 4\hat{a}_0}}{2}\right)}{T_{vz}} \quad (265)$$

A k_2 je pak možné dosadit zpět do (260):

$$\hat{k}_1 = \frac{\ln(\hat{a}_0)}{T_{vz}} - \hat{k}_2 \quad (266)$$

Hledané parametry β a $ml + \alpha$ můžeme následně určit ze známých vztahů mezi kořeny charakteristické rovnice.

Je zřejmé, že platí:

$$k_1 + k_2 = -\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \quad (267)$$

A:

$$k_1 k_2 = \left(-\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right)^2 + \left| \left(\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right)^2 + \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right| \quad (268)$$

Jelikož je výraz uvnitř absolutní hodnoty záporný, lze absolutní hodnotu nahradit zápornem výrazu uvnitř:

$$k_1 k_2 = \left(-\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right)^2 - \left(\frac{(\beta l + \tilde{b}r)}{2(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \right)^2 - \frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \quad (269)$$

A tedy:

$$k_1 k_2 = -\frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)} \quad (270)$$

Je možné vyjádřit

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) = -\frac{(V\rho - m_z - \tilde{m}_t)g}{k_1 k_2} \quad (271)$$

A posléze β :

$$(\beta l + \tilde{b}r) = -(k_1 + k_2)(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l) \quad (272)$$

Tato metoda však není příliš vhodnou alternativou. Má úskalí v momentu, kdy se výraz uvnitř přirozeného logaritmu ve vztahu (260) nebo jen jeho reálná či imaginární část blíží k nule. Každá nepřesnost odhadu v argumentu logaritmu v řádu setin se může projevit na chybě výsledku v řádu jednotek někdy i desítek. Vzhledem k zanedbání mnohých vlivů na kyvadlo, linearizaci diferenciální rovnice a dalším aproximativním úpravám je zřejmé, že výsledek měření nemůže být přesný. Výraz v argumentu logaritmu v rovnici (260) je blízký nule a takovém případě je tato metoda tedy zcela nepoužitelná.

4.4.2 Využití pohybu torzního kyvadla

Obdobně jako u kyvadla fyzického i u torzního můžeme k modelování průběhu kmitů použít zákonu zachování momentu hybnosti. Vzhledem k tomu, že drát, na němž je těleso upevněno, musí být napnutý, je třeba k neutrálně vztlakové ponorce přidat ještě přívažek. Vliv vztlakové i gravitační síly lze při drobném kroucení zanedbat. V pohybové rovnici se tak vyskytuje pouze moment síly způsobený snahou drátu vrátit se do přirozené polohy, moment síly vyvolaný laminárním třením, případně turbulentním třením a moment síly způsobený přidanou setrvačností:

$$\dot{\vec{H}} = \vec{M}_d + \vec{M}_l + \vec{M}_t + \vec{M}_{ad} \quad (273)$$

Vztah (273) lze přepsat jako:

$$J\ddot{\varphi} = D\varphi + (\vec{F}_l \times \vec{r}) + (\vec{F}_t \times \vec{r}) + (\vec{F}_{ad} \times \vec{r}) \quad (274)$$

A ten pak do linearizované podoby:

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi - \beta r\dot{\varphi}r - \alpha r\ddot{\varphi}r \quad (275)$$

Kde r je konstantní charakteristický rozměr zkoumaného tělesa, na němž je celkové tlumení pohybu závislé a je tak možné ho přímo zahrnout do koeficientů tlumení α resp. β :

$$J\ddot{\varphi} = -D\varphi - \beta\dot{\varphi} - \alpha\ddot{\varphi} \quad (276)$$

Řešení diferenciální rovnice u torzního kyvadla je formálně shodné s řešením fyzického kyvadla:

$$(J + \alpha)\lambda^2 + \beta\lambda + D = 0 \quad (277)$$

Kořeny charakteristické rovnice jsou:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4(J + \alpha)D}}{2(J + \alpha)} \quad (278)$$

A průběh kyvů torzního kyvadla tedy:

$$\varphi = 2e^{-\frac{\beta}{J+\alpha}t} C \sin\left(\frac{\sqrt{\left|\left(\frac{\beta}{J+\alpha}\right)^2 - 4\frac{D}{J+\alpha}\right|}}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (279)$$

K identifikaci parametrů u pohybu torzního kyvadla je možné použít stejných postupů jako u kyvadla fyzického; Postupné určení složek, metoda nejmenších čtverců či některé numerické metody. Odvození vztahů je zcela ekvivalentní.

Nevýhodou této identifikace může být neznalost momentu setrvačnosti, který je identifikován spolu s přidáním momentem setrvačnosti a neznalost a směrního momentu D . Řešením může být provedení stejného experimentu pouze ve vzduchu, kde je tření a přidání setrvačnosti zanedbatelné. Směrní moment se nejprve odstraní tak, jak je uvedeno v kapitole 4.3.3, odhadnutá veličina J se pak ztotožní se skutečným momentem setrvačnosti tělesa a dosazením do vztahu (270) se určí i směrní moment drátu. Takto odhadnuté hodnoty se využijí k výpočtům při měření pod vodou.

4.4.3 Rozdíl mezi parametry ve vzduchu a ve vodě

Jsou-li parametry objektu získány z kmitů torzního kyvadla, jsou známy parametry z měření na vzduchu a z měření pod vodou a jsou odhadnuty funkcí LSQCURVEFIT, je třeba uvést změny mezi parametry ve vodě a na vzduchu.

Parametry získané z měření na vzduchu jsou:

$$b_{vzduch} = \frac{\beta_{vzduch}}{2J} \quad (280)$$

A

$$J = \frac{D}{\omega_{vzduch}^2 + b_{vzduch}^2} \quad (281)$$

Kde parametry s pravým dolním indexem vzduch jsou parametry platné pro pohyb ve vzduchu.

Lze tedy určit i β_{vzduch} :

$$\beta_{vzduch} = 2Jb_{vzduch} \quad (282)$$

Zatímco při měření pod vodou získáme parametry:

$$b_{voda} = \frac{\beta_{voda}}{J + \alpha_{voda}} \quad (283)$$

a

$$J + \alpha_{voda} = -\frac{D}{\omega_{voda}^2 + b_{voda}^2} \quad (284)$$

Jelikož je moment setrvačnosti tělesa i směrný moment drátu stejný ve vzduchu i ve vodě, jsou J a D ve vztahu (284) známé a je tak možné určit:

$$\alpha_{voda} = -\frac{D}{\omega_{voda}^2 + b_{voda}^2} - J \quad (285)$$

A posléze i

$$\beta_{voda} = 2b_{voda}(J + \alpha_{voda}) \quad (286)$$

4.4.4 Identifikace s využitím znalosti o síle motorů

Jsou-li známé síly, jakými působí jednotlivé motory na měřené těleso, je získání parametrů tělesa jednodušší.

Translační pohyb tělesa pod vodou, poháněného motory, je možné popsat rovnicí:

$$\vec{F}_m = (m + \alpha)\ddot{\vec{r}} + \beta\dot{\vec{r}} + \gamma\dot{\vec{r}}^2 \quad (287)$$

Nebo:

$$\ddot{r} = -\frac{\gamma}{(m + \alpha)}|\dot{r}|\dot{r} - \frac{\beta}{(m + \alpha)}\dot{r} + \frac{1}{(m + \alpha)}F_m \quad (288)$$

Kde m je hmotnost ponorky, α je přidaná hmotnost, β je koeficient laminárního tření a γ je koeficient turbulentního tření.

Identifikaci parametrů z naměřených dat lze provést podobným způsobem, jaký je popsán v kapitole 4.3.1.2

Předpokládejme znalost $\dot{\vec{r}}$ i $\ddot{\vec{r}}$. Potom vektor parametrů je:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_1 \\ \theta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{(m + \alpha)} \\ -\frac{\beta}{(m + \alpha)} \\ \frac{1}{(m + \alpha)} \end{bmatrix} \quad (289)$$

Matice regresorů:

$$\phi^T = \begin{bmatrix} |\dot{r}(1)|\dot{r}(1) & \dot{\vec{r}}(1) & \vec{F}_m(1) \\ |\dot{r}(2)|\dot{r}(2) & \dot{\vec{r}}(2) & \vec{F}_m(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\dot{r}(n)|\dot{r}(n) & \dot{\vec{r}}(n) & \vec{F}_m(n) \end{bmatrix} \quad (290)$$

A:

$$Y = \begin{bmatrix} \ddot{\vec{r}}(1) \\ \ddot{\vec{r}}(2) \\ \vdots \\ \ddot{\vec{r}}(n) \end{bmatrix} \quad (291)$$

Odhad parametrů je pak určen opět vztahem (217).

Stejný postup platí pro pohyb rotační:

$$(J + \alpha)\ddot{\phi} = M_m - \beta\dot{\phi} - \gamma|\dot{\phi}|\dot{\phi} \quad (292)$$

Nebo:

$$\ddot{\phi} = -\frac{\gamma}{(J + \alpha)}|\dot{\phi}|\dot{\phi} - \frac{\beta}{(J + \alpha)}\dot{\phi} + \frac{1}{(J + \alpha)}\vec{M}_m \quad (293)$$

Kde vektor parametrů je:

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{(J + \alpha)} \\ \frac{\beta}{(J + \alpha)} \\ \frac{1}{(J + \alpha)} \end{bmatrix} \quad (294)$$

Matice regresorů:

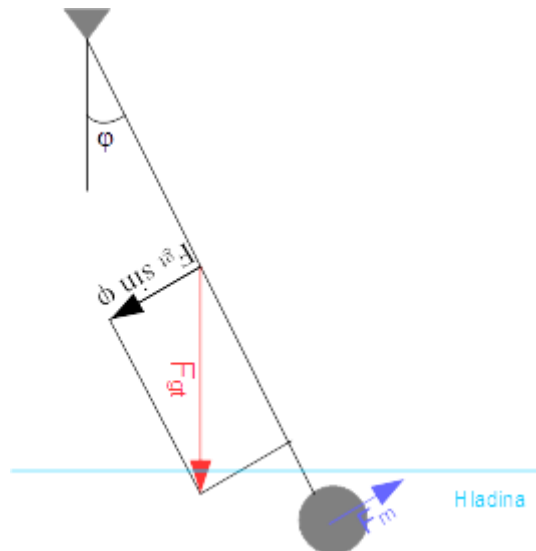
$$\phi^T = \begin{bmatrix} |\dot{\phi}(1)|\dot{\phi}(1) & \dot{\phi}(1) & \vec{M}_m(1) \\ |\dot{\phi}(2)|\dot{\phi}(2) & \dot{\phi}(2) & \vec{M}_m(2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ |\dot{\phi}(n)|\dot{\phi}(n) & \dot{\phi}(n) & \vec{M}_m(n) \end{bmatrix} \quad (295)$$

A:

$$Y = \begin{bmatrix} \ddot{\phi}(1) \\ \ddot{\phi}(2) \\ \vdots \\ \ddot{\phi}(n) \end{bmatrix} \quad (296)$$

4.4.4.1 Identifikace síly motorů

K identifikaci síly motorů lze opět s výhodou využít fyzického kyvadla s připojenou ponorkou ponořenou do vody.



Obrázek 10 Identifikace tahu motorů

F_{gt} ... je gravitační síla působící na tyč kyvadla

F_m ... je síla motoru

φ ... je úhel náklonu kyvadla

Vzhledem k tomu, že ponorné zařízení je navrženo vztakově neutrálně, není třeba gravitační ani vztakovou sílu, působící na něj, uvažovat. Při experimentech popsaných v oddíle 5. byl však v zájmu možnosti využití větší síly motorů pro identifikaci odebrán horní plovák ponorky, vztlak působící na ponorné zařízení klesl a rozdíl gravitační a vztakové síly se změnil.

Jednoduchý princip odhadu spočívá ve vyrovnání momentu síly motorů M_m a momentů sil M_{gt} a M_z , vyvolaných gravitací. Momenty M_{gt} a M_z mají velikost:

$$M_{gt} = F_{gt}r \sin \varphi \quad (297)$$

$$M_z = (F_{gz} - F_{vz})l \sin \varphi \quad (298)$$

Kde r udává vzdálenost těžiště tyče kyvadla od závěsu, l vzdálenost těžiště ponorky od závěsu, F_{gz} je gravitační síla, působící na zátěž kyvadla v podobě ponorky a F_{vz} je působící vztlak.

M_{gt} a M_z mají opačný směr než moment síly motorů. Moment síly motorů tak lze určit změřením úhlu vychýlení kyvadla φ , hmotnosti kyvadla m , hmotností ponorného zařízení ve vodě m_{gz} , pozicí zátěže l , pozicí těžiště tyče r a výpočtem:

$$F_g = mg \quad (299)$$

$$(F_{gz} - F_{vz}) = m_{gz}g \quad (300)$$

$$|M_m| = |M_{gt}| + |M_z| \quad (301)$$

$$F_m l = (mr + m_{gz}l)g \sin \varphi \quad (302)$$

$$F_m = \frac{(mr + m_{gz}l)g}{l} \sin \varphi \quad (303)$$

Vzhledem k tomu, že na ponorce při pohybu v před pracují současně čtyři motory všechny odkloněné o 35° od směru pohybu v ose x , je nutné výslednou změřenou sílu ještě přepočítat.

Pro zjednodušení identifikace předpokládáme působení všech motorů na těžiště ponorky.

Jestliže identifikovaná síla všech 4 motorů, působící ve směru osy x je F_m a úhel odklonění motorů od směru pohybu je $\alpha = 35^\circ$, pak síla jednoho motoru F je dána vztahem:

$$F = \frac{F_m \sin \alpha}{\frac{n}{2} \sin(\pi - \alpha)} \quad (304)$$

Kde n je počet motorů.

5 Výsledky identifikace

K identifikaci parametrů zkoumané ponorky nebyly využity všechny metody uvedené v části 4. obvykle z důvodu nedostatečného technického vybavení a časové náročnosti. U experimentální identifikace je výhodné znát některé parametry ponorky, které lze změřit jednoduše, pomocí dostupné technologie. Hmotnost ponorky je $m_p = 40,9 \text{ kg}$. Poloha těžiště a tedy i geometrického středu, které jsou pro jednoduchost uvažovány ve stejném bodě, je v ose x $0,245 \text{ m}$, v ose y $0,245 \text{ m}$ a v ose z $0,145 \text{ m}$ od krajů ponorky. Důležitým faktorem je, že ponorka je navržena jako vztlakově neutrální a její objem V_p tak lze snadno určit z rovnosti:

$$F_g = F_{vz} \quad (305)$$

Tedy:

$$V_p \rho g = m_p g \quad (306)$$

Potom:

$$V_p = \frac{m_p}{\rho} = 0,041 \text{ m}^3 \quad (307)$$

Kde $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ je hustota vody.

5.1 Využití fyzického kyvadla k určení parametrů translačního pohybu ponorky pod hladinou vody

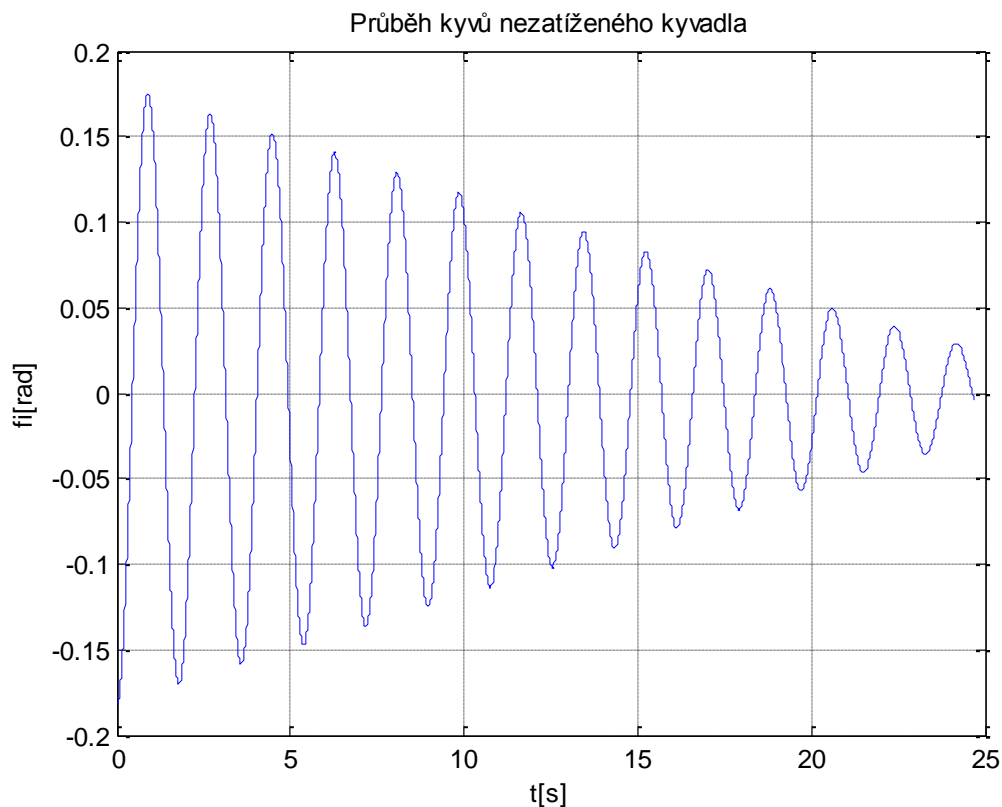
K experimentu bylo použito kyvadlo o hmotnosti $m_t = 7,88 \text{ kg}$, délce $l_t = 1,06 \text{ m}$ a poloze těžiště $l_{tT} = 0,495 \text{ m}$ od místa závěsu. Uchycení ponorného zařízení pro měření translačního pohybu v osách x a y bylo $l_{pT} = 0,15 \text{ m}$, zatímco v pro měření v ose z $l_{pT} = 0,1675 \text{ m}$ od těžiště ponorky směrem k závěsu.

Všechny následně identifikované parametry se vztahují k soustavě souřadnic pevně spjaté s ponorkou a se středem v jejím těžišti.

Při měření je také třeba uvědomit si, že ne všechny odporové síly jsou způsobeny třením měřeného tělesa v kapalině. Tření, i když výrazně menší, vzniká i ve vzduchu vůči tyči kyvadla a především v otočném kloubu v místě uchycení.

Pro větší objektivitu odhadů tření působícího na zkoumané ponorné zařízení je vhodné odhadnout také tření působící na tyč kyvadla a tuto hodnotu následně v další identifikaci parametrů pro celou ponorku zahrnout.

Průběh kyvů kyvadla nezátíženého ponorkou je zobrazen na obrázku 11 .



Obrázek 11 Průběh kyvů kyvadla bez ponorky ve vzduchu

Zobrazený průběh kmitů lze prokládat předpokládaným průběhem v obecném tvaru daném výrazem (233). Odhad tlumícího parametru K je pak proveden pomocí numerického algoritmu LSQCURVEFIT z programového prostředí Matlab:

$$K = 0,059$$

Tření působící na tyč kyvadla odpovídá hodnotě:

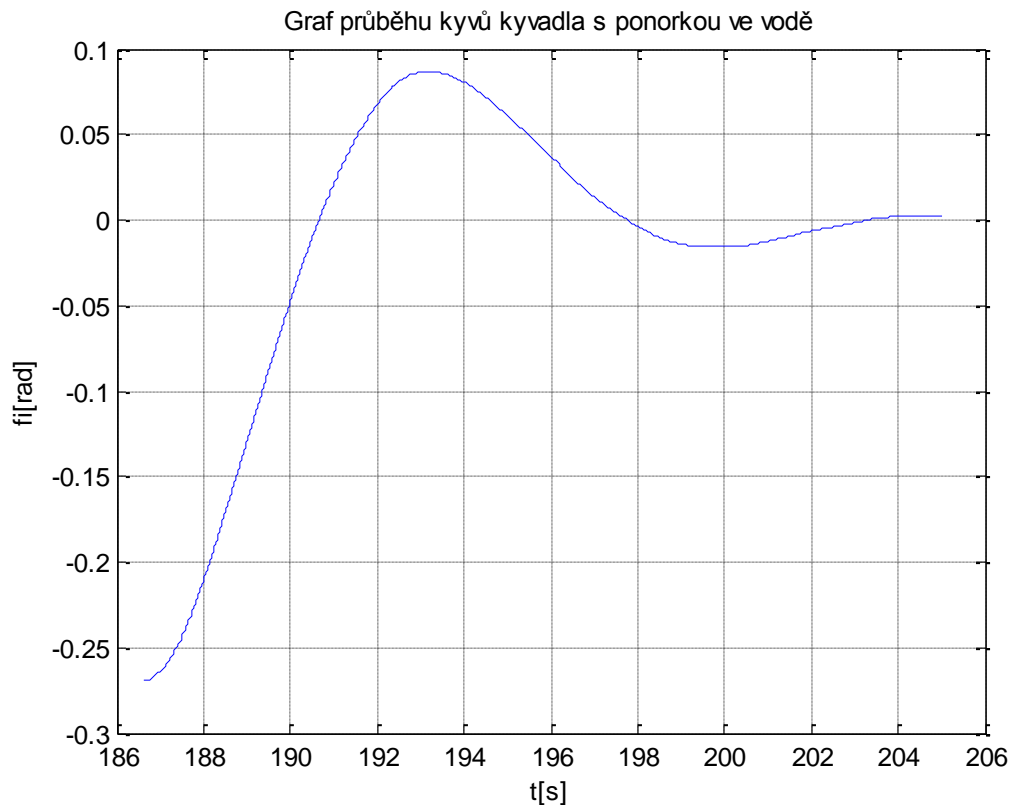
$$b = 0,9293$$

Parametr byl odhadnut i metodou nejmenších čtverců:

$$b = 0,8097$$

5.1.1 Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy x

Naměřený průběh kmitů soustavy kyvadla s ponorkou, kdy celá ponorka je ponořena ve vodě, zatímco téměř celá tyč kyvadla je nad vodou, je vyobrazen na obrázku 12:



Obrázek 12 Průběh kyvů kyvadla s ponorkou v ose x ve vodě

5.1.1.1 Identifikace funkcí LSQCURVEFIT

Pomocí funkce LSQCURVEFIT byly pro průběh (233) odhadnuty parametry:

$$C = 0,2894$$

$$K = 0,18$$

$$\omega = 0,4567$$

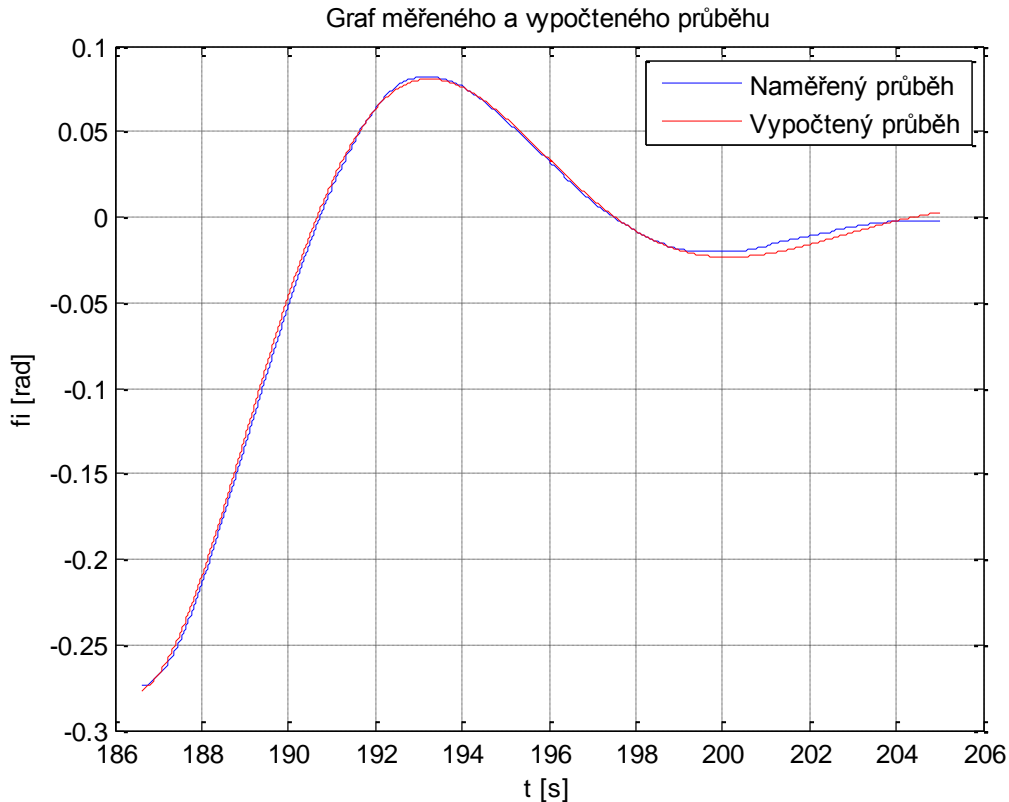
$$\theta = 4,4266$$

Pomocí zidentifikovaných parametrů pohybu fyzického kyvadla pak lze dopočítat hledané parametry tření:

$$\alpha = 67,1405 \text{ kg}$$

$$\beta = 39,2272 \text{ N/ms}^{-1}$$

Vypočtené parametry lze dosadit do funkce předpokládaného průběhu kyvů fyzického kyvadla (233) a porovnat se skutečným průběhem.



Obrázek 13 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose x

Vypočítaný průběh téměř přesně sedí na naměřený, což dokazuje, že i zjednodušený linearizovaný průběh kmitů fyzického kyvadla ve vodě může být pomocí numerických identifikačních metod adekvátní aproximací a odhadované parametry jsou velice přesné. Průměrná hodnota kvadrátu odchylek činí:

$$e = 2,6428 \cdot 10^{-5}$$

5.1.1.2 Identifikace určením složek průběhu

Za pomoci metody určení parametrů z jednotlivých složek signálu byly odhadnuty parametry pro exponenciální složku průběhu (233):

$$C = 0,2829$$

$$K = 0,1834$$

A pro sinusovou složku:

$$\omega = 0.4760$$

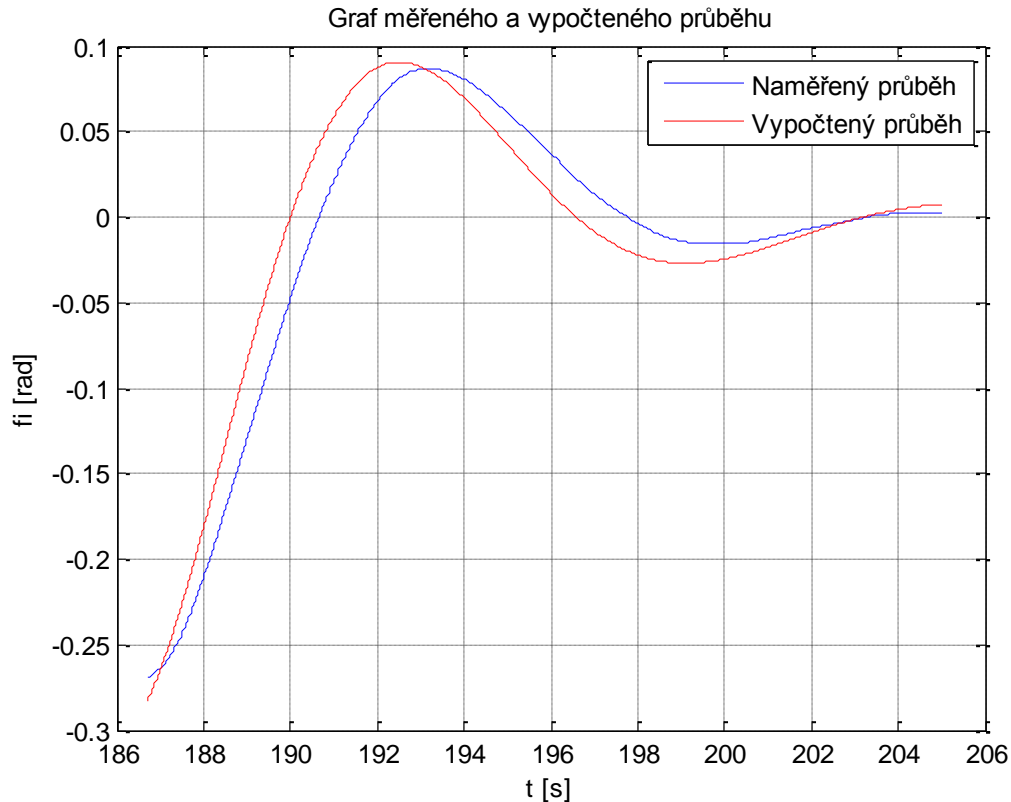
$$\theta = 4.7124$$

A následně vypočteny parametry tření:

$$\alpha = 59,0412 \text{ kg}$$

$$\beta = 36,9949 \text{ N/ms}^{-1}$$

Porovnání vypočteného průběhu pomocí identifikovaných parametrů a skutečného průběhu:



Obrázek 14 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose x

Z obr. 14 je zřejmé, že identifikované parametry nejsou tak přesné jako u iteračních numerických metod. Lze je ovšem stále považovat za uspokojivé pro účely řízení. Střední kvadratická odchylka odhadnutého průběhu od skutečného je:

$$e = 4,9592 \cdot 10^{-4}$$

5.1.1.3 Identifikace metodou nejmenších čtverců

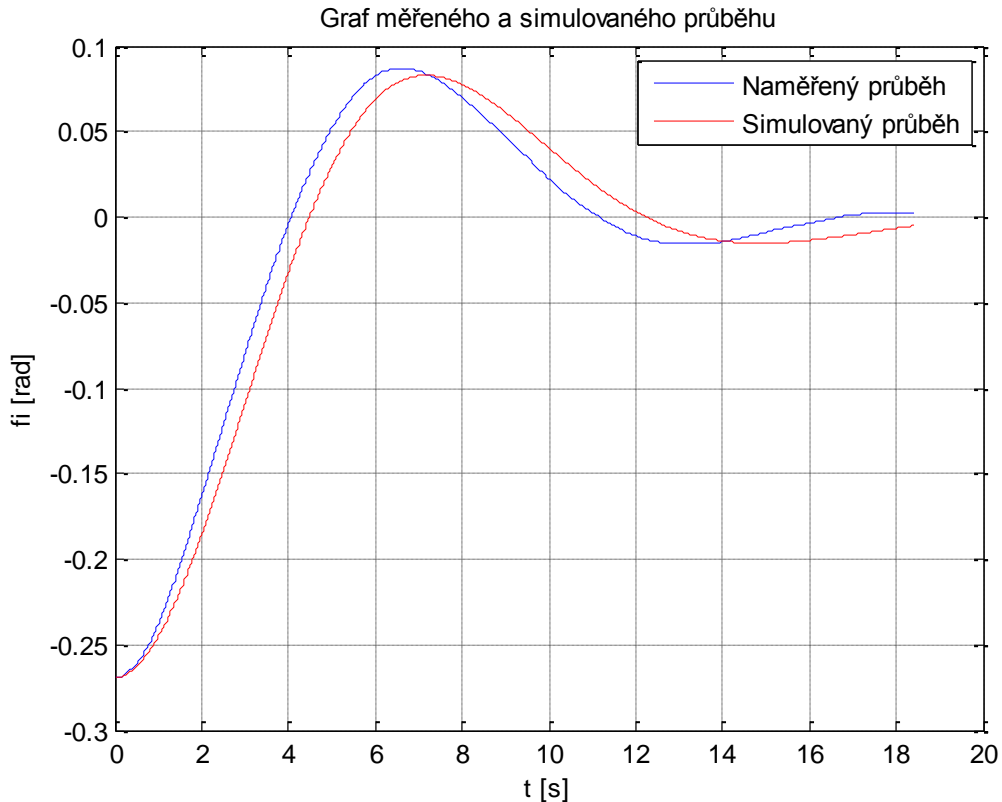
Využitím identifikační metody nejmenších čtverců pro původní nelinearizovaný průběh (187) byly odhadnuty parametry θ odpovídající vztahům (213):

$$\begin{aligned}\theta_1 &= 2,3481 \\ \theta_2 &= -0,4742 \\ \theta_3 &= -0,2113\end{aligned}$$

A dopočteny hledané parametry odporu:

$$\begin{aligned}\alpha &= 82,4999 \text{ kg} \\ \beta &= 59,0107 \text{ N/ms}^{-1} \\ \gamma &= -243,0496 \text{ N/m}^2\text{s}^{-2}\end{aligned}$$

Tyto parametry lze ověřit pomocí simulace v programovém prostředí Matlab/simulink:



Obrázek 15 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x

Metoda je silně závislá na přesnosti odhadu úhlové rychlosti a úhlového zrychlení. Byly vybrány hodnoty odpovídající nejlepšímu průběhu. Střední kvadratická chyba odhadnutých parametrů je:

$$e = 2,4423 \cdot 10^{-4}$$

Je ovšem evidentní, že nemůže vznikat záporné tření. Je proto možné, že struktura matematického modelu (187) nebyla zvolena vhodně a pohybová rovnice kyvadla má odlišný tvar. Úloha také nemusí být dostatečně dobře podmíněna. V dalších částech práce bude předpokládána varianta chybně zvolené struktury modelu a identifikovány parametry pro model ve tvaru (308) s uvažováním odporové síly pouze lineárně závislé na rychlosti.:

$$(m_z l + \tilde{m}_t r + a l) l \ddot{\varphi} + (\beta l + \tilde{b} r) l \dot{\varphi} + (m_z + \tilde{m}_t - V \rho) l g \sin \varphi = 0 \quad (308)$$

Při pomalém pohybu, který kyvadlo vykonává je toto zjednodušení uvažující neexistenci vířivého proudění přijatelné.

Parametry modelu pro takto zvolenou strukturu jsou pak metodou nejmenších čtverců identifikovány jako:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= -0,3113 \\ \theta_2 &= -0,2125 \end{aligned}$$

Kde:

$$\theta_1 = \frac{(\beta l + \tilde{b} r)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + a l)}$$

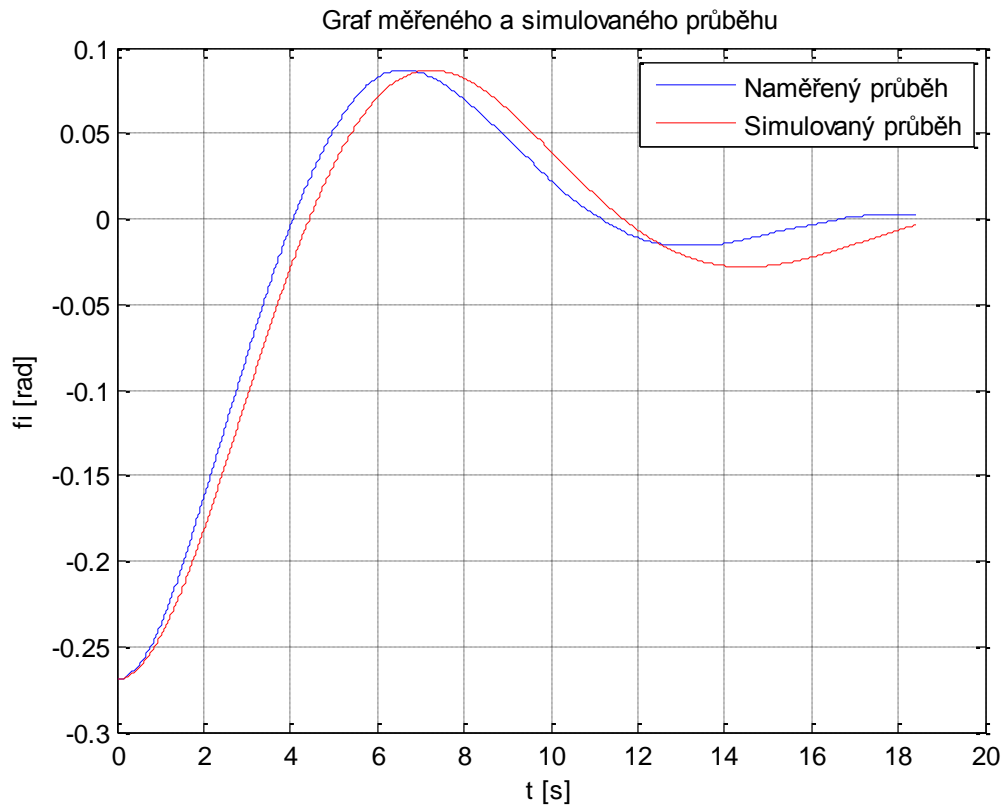
$$\theta_2 = \frac{(m_z + \tilde{m}_t - V\rho)}{(m_z l + \tilde{m}_t r + \alpha l)}$$

A tedy:

$$\alpha = 81,7678 \text{ kg}$$

$$\beta = 38,4639 \text{ N/ms}^{-1}$$

Simulovaný průběh, pro strukturu modelu (308) s těmito odhadnutými parametry je pak na obr. 16.



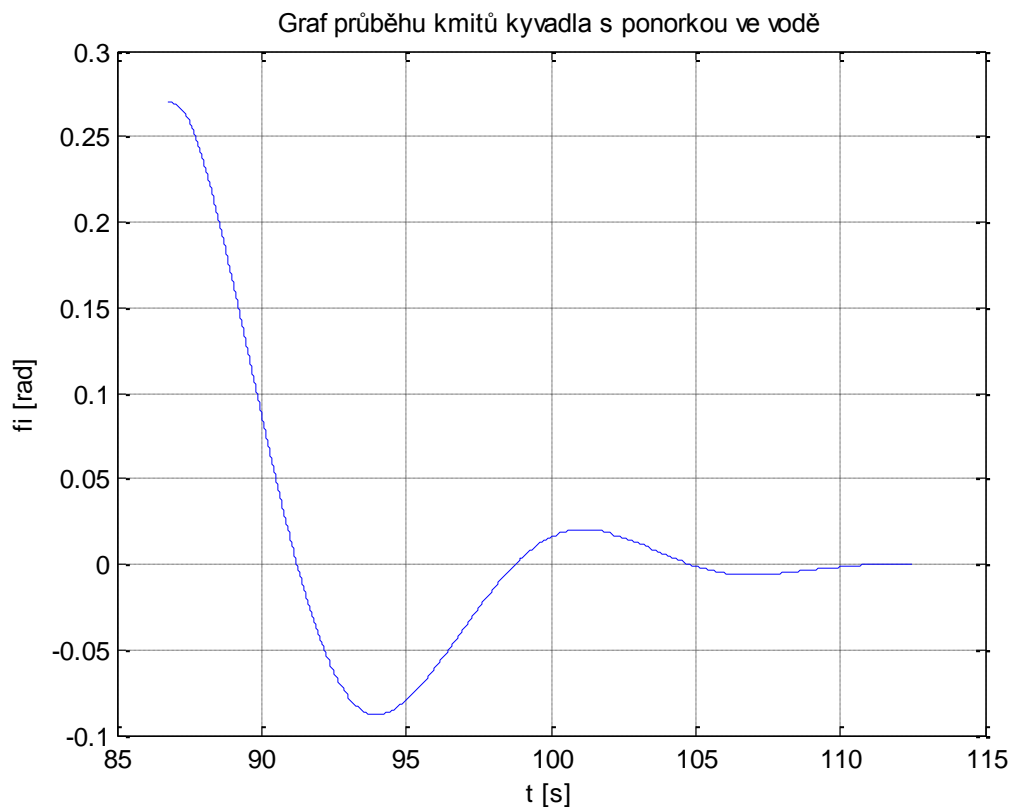
Obrázek 16 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x

A střední kvadratická chyba je:

$$e = 2,3793 \cdot 10^{-4}$$

5.1.2 Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy y

Ve směru osy y, byl naměřen průběh kmitů vyobrazený na obr. 17 :



Obrázek 17 Průběh kyvů kyvadla s ponorkou v ose y ve vodě

5.1.2.1 Identifikace funkcí LSQCURVEFIT

Ve směru osy y byly funkcí lsqcurvefit odhadnuty parametry:

$$C = -0,2944$$

$$K = 0,1641$$

$$\omega = 0,4303$$

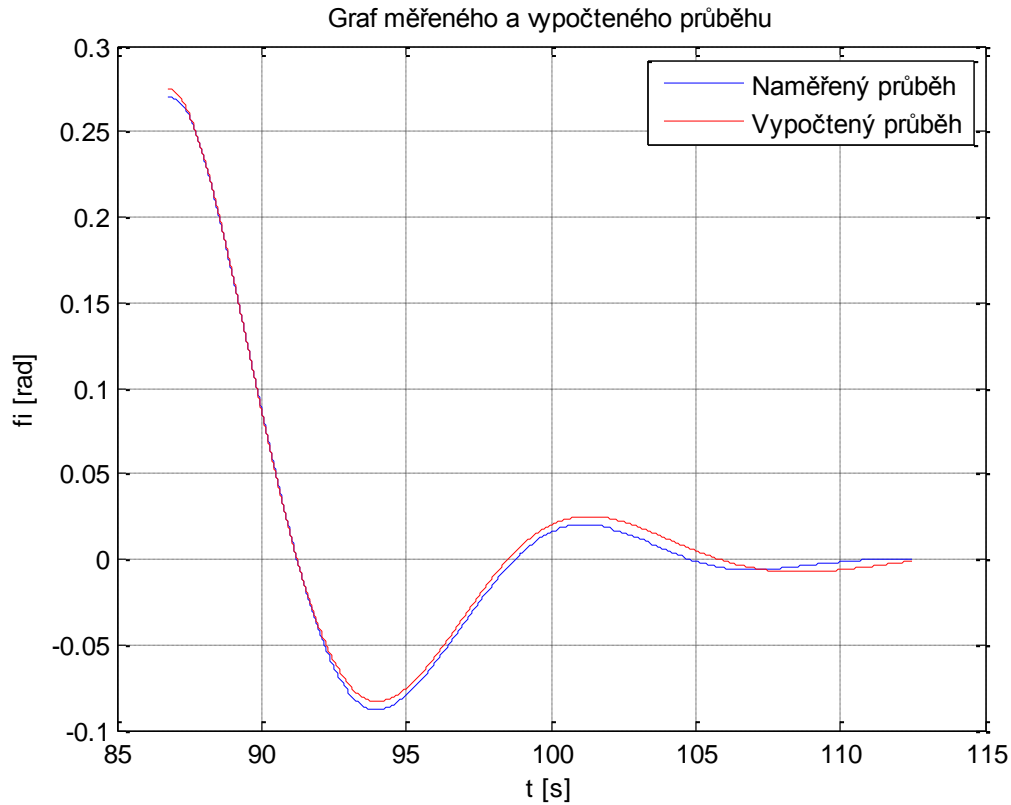
$$\theta = 4,3513$$

Parametry tření jsou pak:

$$\alpha = 82,0007 \text{ kg}$$

$$\beta = 40,6176 \text{ N/ms}^{-1}$$

Porovnání skutečného a vypočteného průběhu pomocí identifikovaných parametrů:



Obrázek 18 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose y

Střední kvadratická chyba odhadu je:

$$e = 1,6484 \cdot 10^{-5}$$

5.1.2.2 Identifikace určením složek průběhu

Metodou postupného určení složek signálu bylo dosaženo parametrů:

$$C = -0,2988$$

$$K = 0,1882$$

$$\omega = 0.4333$$

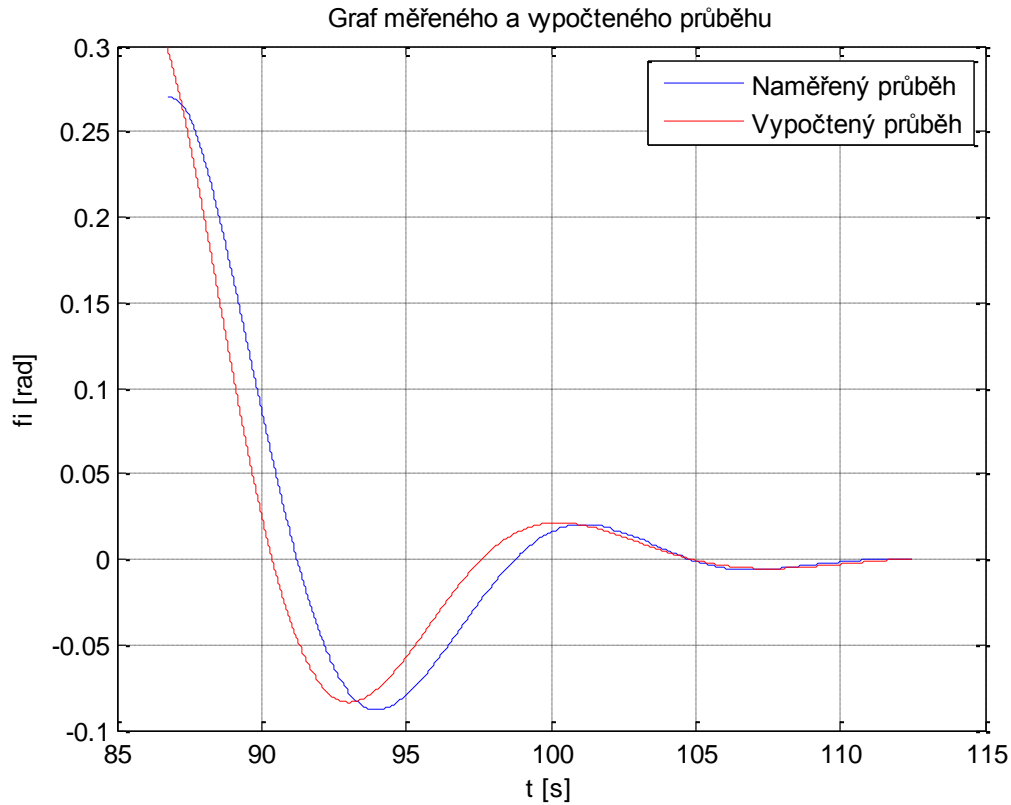
$$\theta = 4.7124$$

Což odpovídá parametrům:

$$\alpha = 75,8487 \text{ kg}$$

$$\beta = 44,283 \text{ N/ms}^{-1}$$

Ověření:



Obrázek 19 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose y

Střední kvadratická odchylka nabývá hodnoty:

$$e = 5,5829 \cdot 10^{-4}$$

5.1.2.3 Identifikace metodou nejmenších čtverců

Metodou nejmenších čtverců bylo dosaženo parametrů:

$$\theta_1 = -0,2879$$

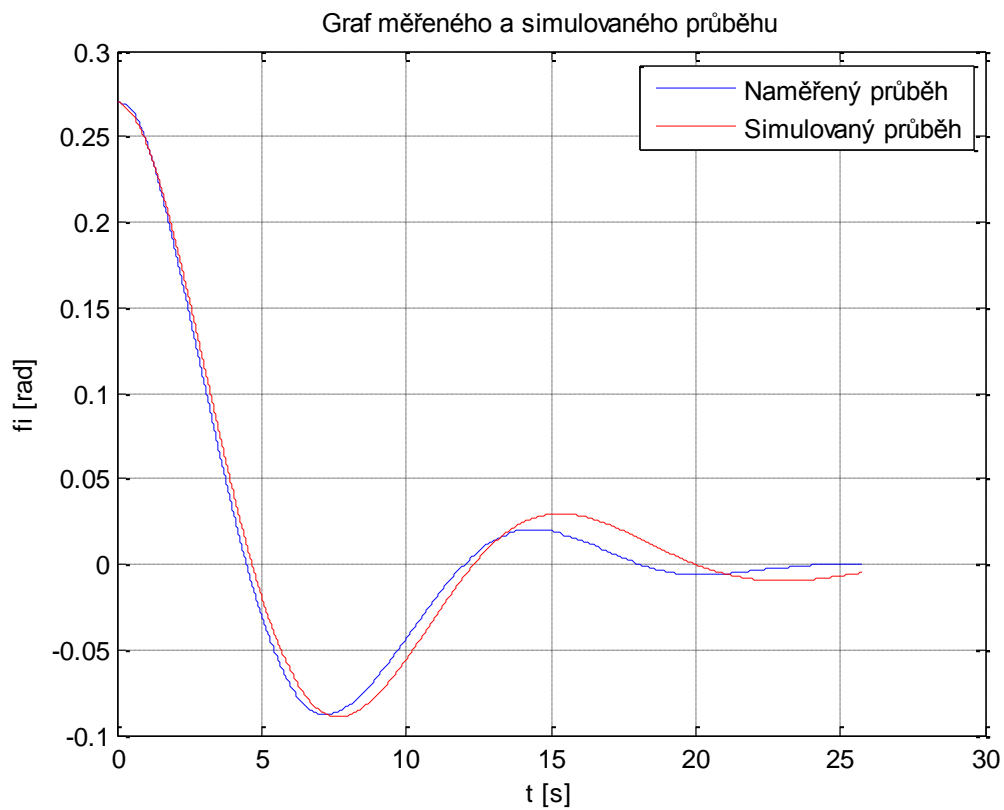
$$\theta_2 = -0,1887$$

A odporové parametry jsou tak:

$$\alpha = 97.4592 \text{ kg}$$

$$\beta = 40,0766 \text{ N/ms}^{-1}$$

Ověření parametrů:



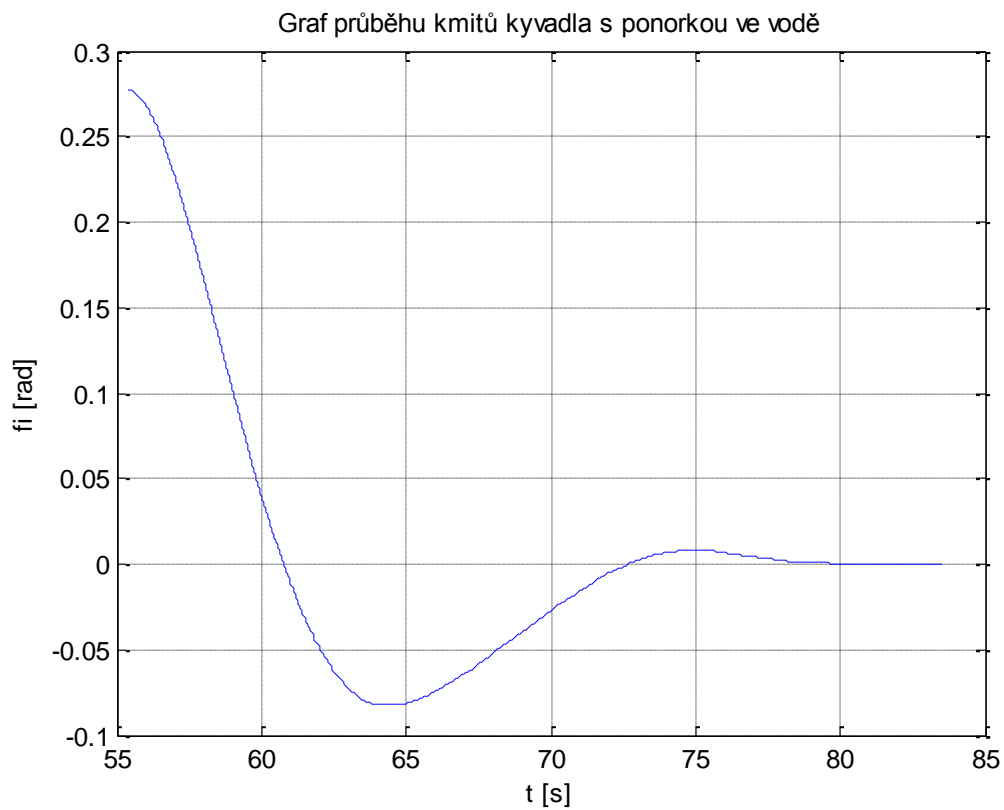
Obrázek 20 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose y

Střední kvadratická chyba:

$$e = 8,4711 \cdot 10^{-5}$$

5.1.3 Určení parametrů translačního pohybu ve směru osy z

Na obr. 21 je vidět průběh kmitů zatíženého kyvadla ve směru osy z.



Obrázek 21 Průběh kvyů kyvadla s ponorkou v ose z ve vodě

5.1.3.1 Identifikace funkcí LSQCURVEFIT

Ve směru osy z byly funkcí lsqcurvefit odhadnuty parametry:

$$C = -0,3082$$

$$K = 0,1326$$

$$\omega = 0,2854$$

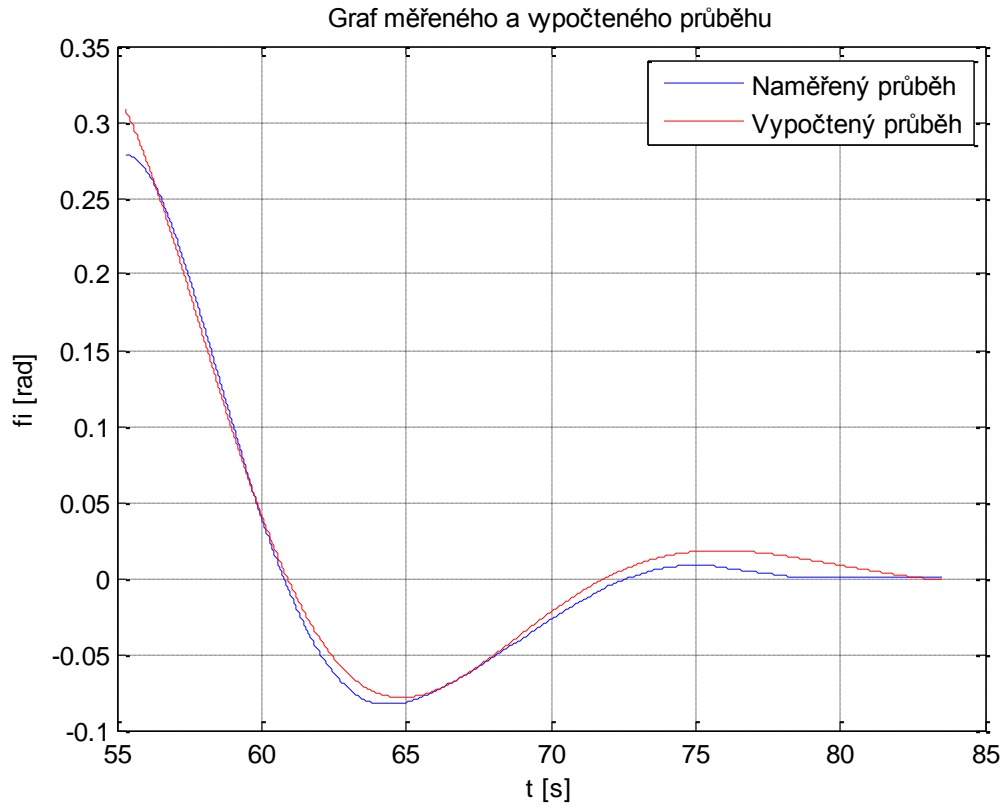
$$\theta = 4,6847$$

Parametry tření jsou pak:

$$\alpha = 219.5567 \text{ kg}$$

$$\beta = 69,2601 \text{ N/ms}^{-1}$$

A ověření parametrů:



Obrázek 22 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu funkcí lsqcurvefit v ose z

Střední kvadratická odchylka:

$$e = 5,9122 \cdot 10^{-5}$$

5.1.3.2 Identifikace určením složek průběhu

Postupným určením složek signálu bylo dosaženo:

$$C = -0,3214$$

$$K = 0,1789$$

$$\omega = 0.3307$$

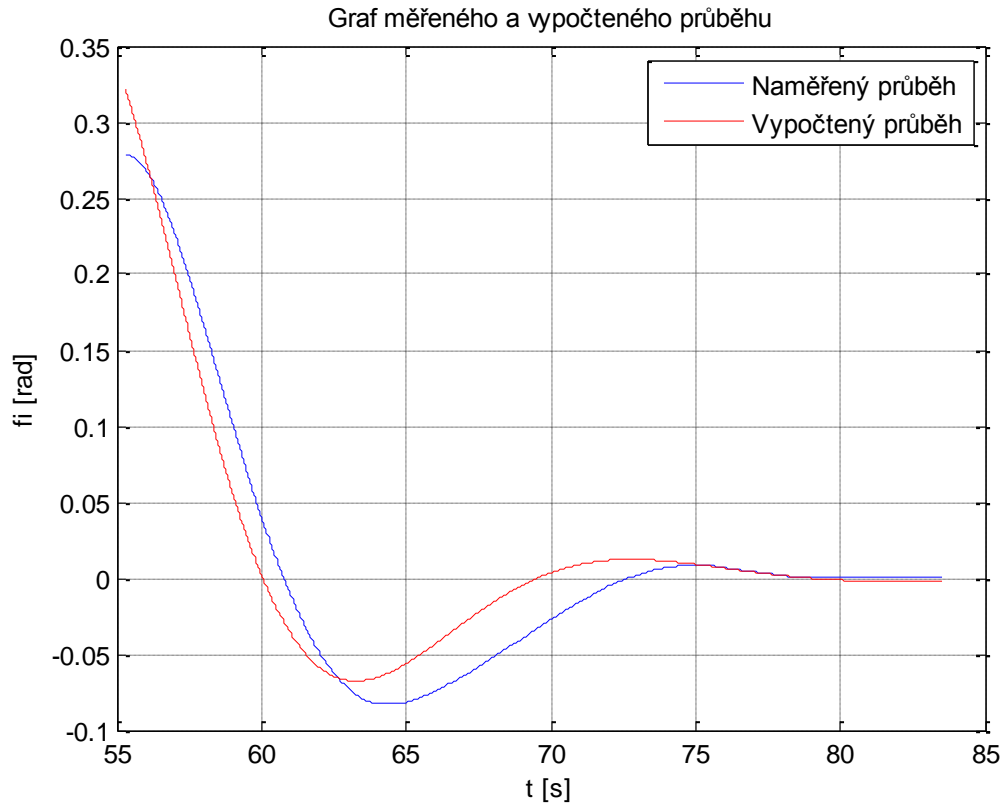
$$\theta = 4.7124$$

Což odpovídá parametrům:

$$\alpha = 141.6657 \text{ kg}$$

$$\beta = 65,4572 \text{ N/ms}^{-1}$$

Ověření:



Obrázek 23 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu určením složek signálu v ose z

$$e = 5,2973 \cdot 10^{-4}$$

5.1.3.3 Identifikace metodou nejmenších čtverců

Metodou nejmenších čtverců bylo dosaženo parametrů:

$$\theta_1 = -0,2237$$

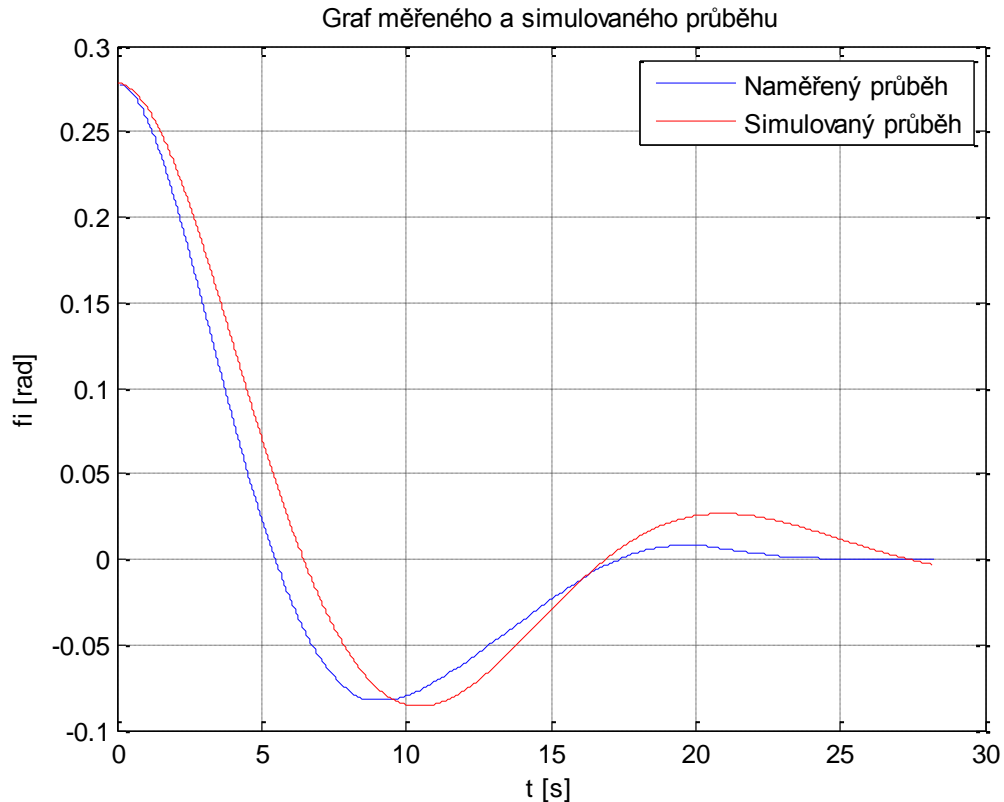
$$\theta_2 = -0,1027$$

A vypočítané parametry odporu pak dosahují hodnot:

$$\alpha = 210,32 \text{ kg}$$

$$\beta = 56,3613 \text{ N/ms}^{-1}$$

Ověření parametrů:



Obrázek 24 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu metodou nejmenších čtverců v ose x

Střední kvadratická odchylka:

$$e = 4,5719 \cdot 10^{-4}$$

5.2 Využití fyzického kyvadla k určení parametrů rotačního pohybu ponorky pod hladinou vody

K výpočtům bylo použito stejných měření, kterých bylo použito i pro identifikaci parametrů translačního pohybu.

Funkcí LSQCURVEFIT i metodou nejmenších čtverců byly určeny i další parametry, důležité pro výpočty parametrů rotačního pohybu ponorky ve vodě. Moment setrvačnosti kyvadla bez připojené měřené ponorky má vzhledem k ose otáčení hodnotu

$$J_t = 3,1141 \text{ kg m}^2$$

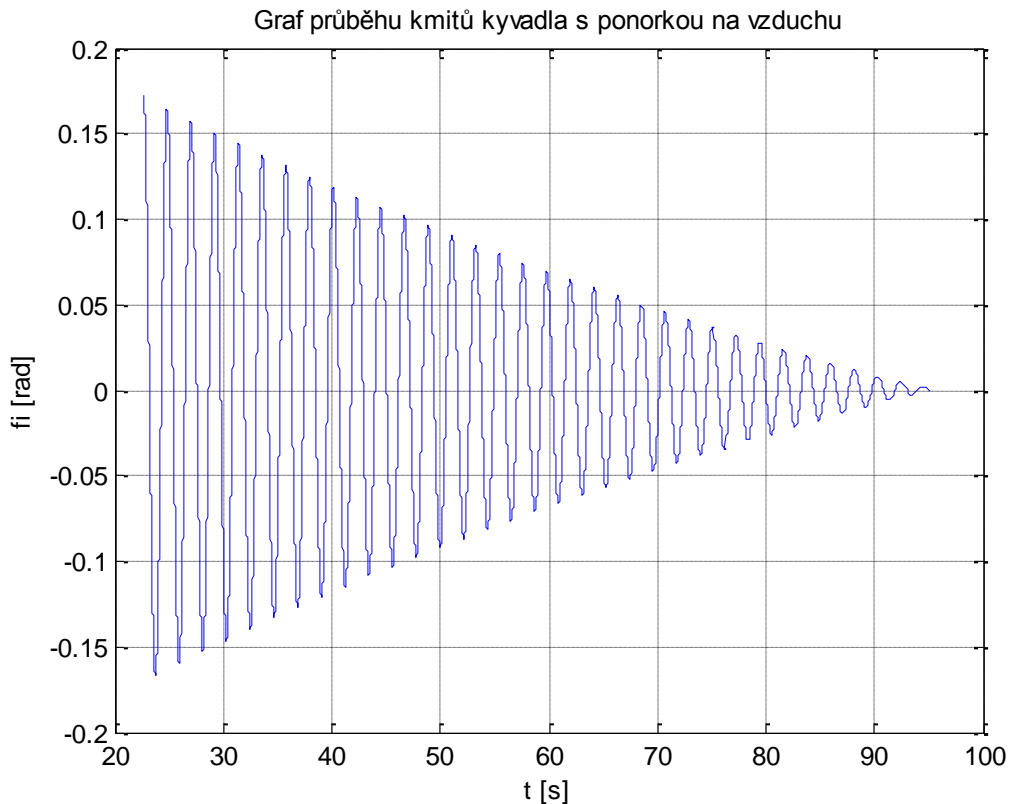
Je-li odhadován funkcí LSQCURVEFIT. Odhadem metodou nejmenších čtverců je hodnota:

$$J_t = 3,1506 \text{ kg m}^2$$

Další parametry budou uvedeny v kapitolách příslušných konkrétním osám otáčení.

5.2.1 Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy y

Z pohybu kyvadla s ponorkou ve vzduchu, vyobrazeném na obr. 25 a známého momentu setrvačnosti tyče lze odhadnout moment setrvačnosti ponorky.



Obrázek 25 Průběh kmitů kyvadla s ponorkou na vzduchu kolem osy y

Funkcí LSQCURVEFIT odhadnutý moment setrvačnosti soustavy kyvadla s ponorkou vůči ose otáčení je:

$$J = 63,1084 \text{ kg m}^2$$

Po odečtení momentu setrvačnosti kyvadla vůči ose otáčení je moment setrvačnosti ponorky vůči ose otáčení:

$$J_p = 59,9943 \text{ kg m}^2$$

A pomocí Steinerovy věty lze získat moment setrvačnosti ponorky kolem osy y v souřadnicové ose pevně spjaté s tělesem s počátkem v jeho těžišti:

$$J_{pT} = 0,6064 \text{ kg m}^2$$

Tytéž parametry odhadnuty metodou nejmenších čtverců jsou:

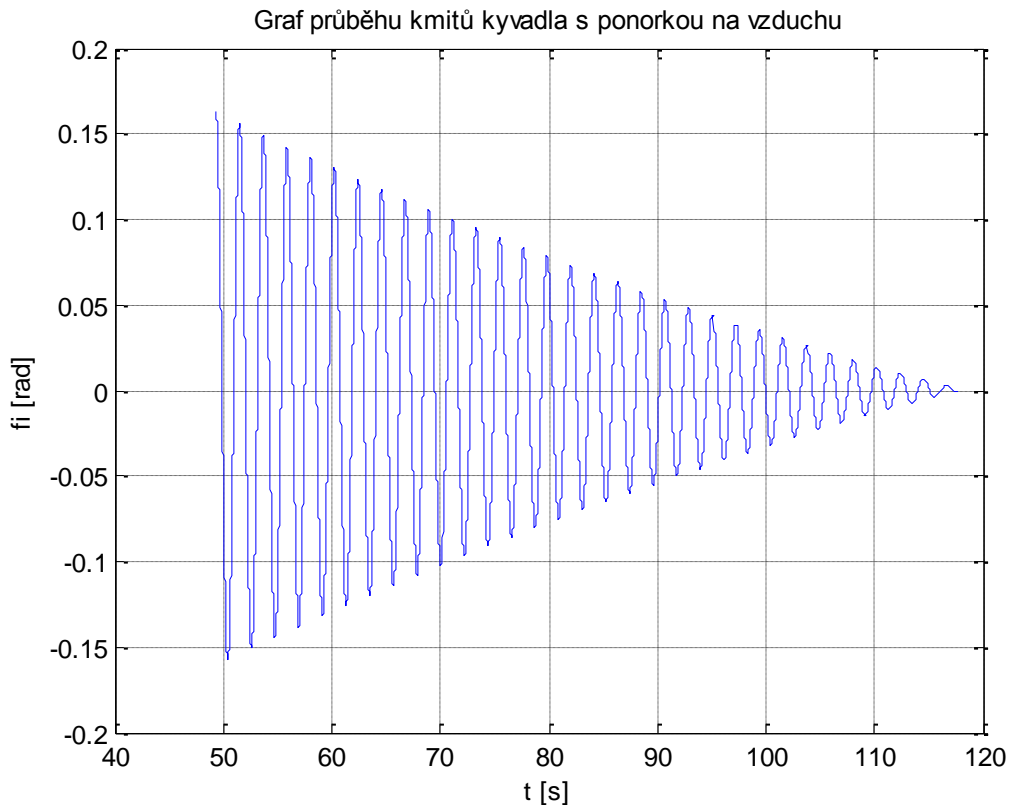
$$J = 63,3842 \text{ kg m}^2$$

$$J_p = 60,2336 \text{ kg m}^2$$

$$J_{pT} = 0,8457 \text{ kg m}^2$$

5.2.2 Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy x

Na obr. 26 je zobrazen průběh kmitů soustavy kyvadla s ponorkou na vzduchu kolem osy x.



Obrázek 26 Průběh kmitů kyvadla s ponorkou na vzduchu kolem osy x

Moment setrvačnosti soustavy odhadnutý pomocí funkce LSQCURVEFIT nabývá hodnoty:

$$J = 62,6636 \text{ kg m}^2$$

Moment setrvačnosti ponorky vůči ose otáčení:

$$J_p = 59,5495 \text{ kg m}^2$$

A moment setrvačnosti ponorky vzhledem k ose otáčení procházející těžištěm je tak:

$$J_{pT} = 0,1617 \text{ kg m}^2$$

Pomocí metody nejmenších čtverců je odhadovaná hodnota momentu setrvačnosti soustavy vzhledem k ose otáčení:

$$J = 62,4526 \text{ kg m}^2$$

Moment setrvačnosti ponorky vzhledem k ose otáčení:

$$J_p = 59,302 \text{ kg m}^2$$

Což po přepočtu odpovídá hodnotě:

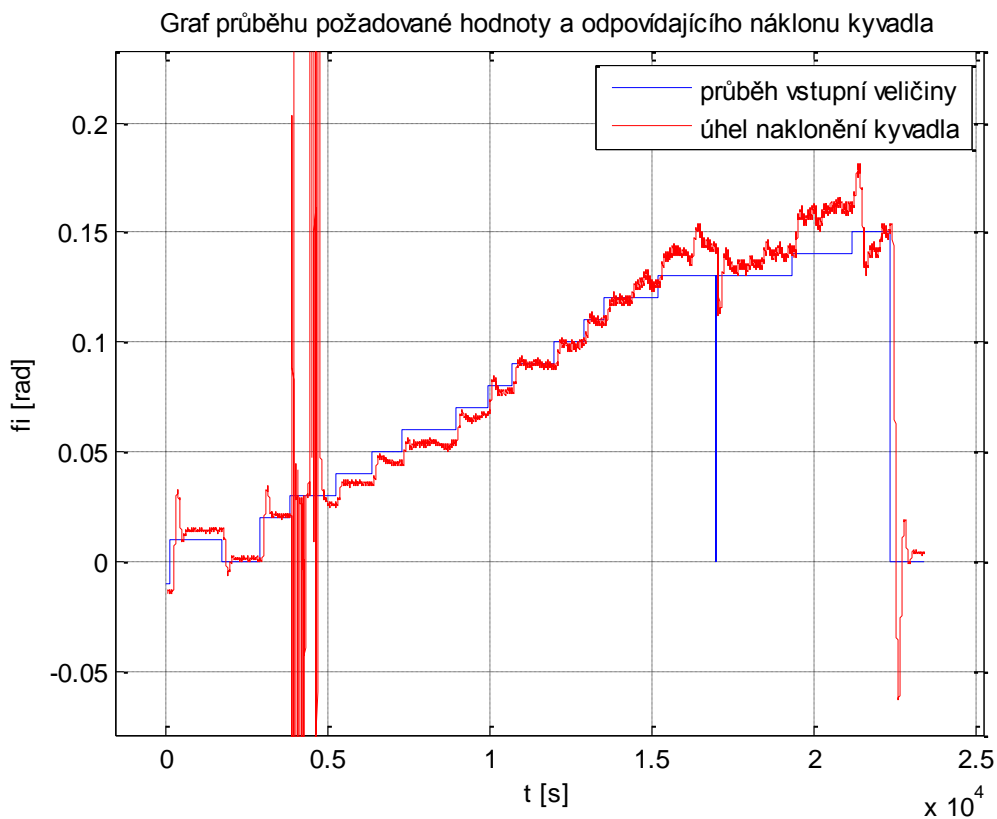
$$J_{pT} = -0,0859 \text{ kg m}^2$$

Moment setrvačnosti tělesa pochopitelně nemůže nabývat záporných hodnot. Vzhledem k jeho velice nízkým hodnotám je zřejmé, že i minimální nepřesnosti v určení pozice těžiště nebo v samotné identifikaci mohou vést k velké relativní chybě a odhadovaná hodnota momentu setrvačnosti ponorného zařízení může být i záporná. Takový odhad ovšem nedává smysl a proto v další identifikaci budeme uvažovat hodnotu odhadovanou funkcí LSQCURVEFIT.

5.3 Využití známé síly motorů k určení parametrů rotačního pohybu ponorky pod vodou

K určení parametrů rotačního pohybu ponorného zařízení z rovnice (287) je třeba znát moment síly, jakým působí motory na ponorku. Tyto momenty síly je možné identifikovat postupem uvedeným v sekci 4.4.5:

Pro zadanou požadovanou hodnotu síly motorů, byl naměřen úhel vychýlení (obr. 27)



Obrázek 27 Vychýlení kyvadla v závislosti na síle motorů

Postupem uvedeným v sekci 4.4.5 byl určen přenos z požadované hodnoty na sílu jednoho motoru:

$$F = 2,4336$$

5.3.1 Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy z

Vzhledem k otáčivému pohybu ponorky je možný vznik vířivých proudů a struktura matematického modelu pro odhadování bude uvažována ve tvaru (233).

Odhadnuté parametry metodou nejmenších čtverců ve tvaru 187 jsou poté:

$$\theta_1 = -0,1596$$

$$\theta_2 = -0,2105$$

$$\theta_3 = -0,1260$$

A jim odpovídající hledané parametry:

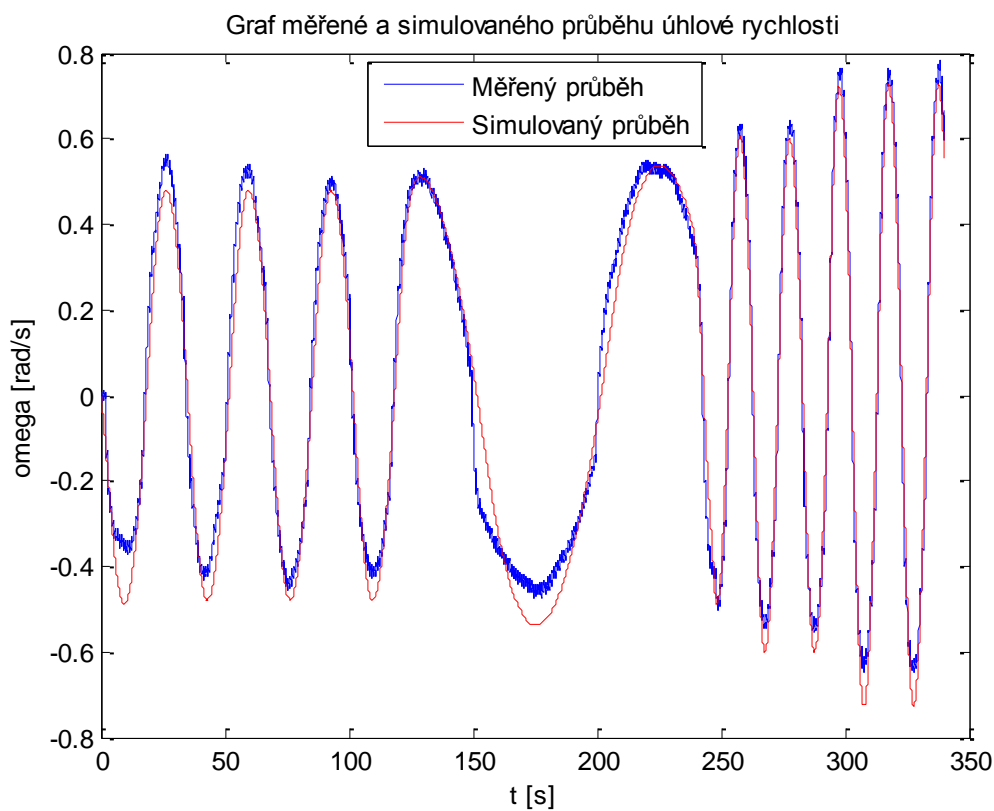
$$J + J_{ad} = 7,9394 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\beta = 1,6711 \frac{\text{N}}{\text{rad s}^{-1}}$$

$$\gamma = 1,2674 \frac{\text{N}}{\text{rad}^2 \text{s}^{-2}}$$

Vzhledem k tomu, že neproběhlo měření momentu setrvačnosti ponorky na vzduchu kolem osy z pomocí fyzického kyvadla, není možné určit jak velká část $J + J_{ad}$ je vlastní, respektive přidaná setrvačnost. S ohledem na rovnice pohybu ponorky (84) jejich oddělení ale není nezbytně nutné.

Odhadované parametry lze ověřit opět pomocí simulace.



Obrázek 28 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy z metodou nejmenších čtverců

Přičemž chyba odhadu odpovídá hodnotě:

$$e = 4,1 \cdot 10^{-3}$$

5.3.2 Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy y

Pro otáčivý pohyb okolo osy y byly metodou nejmenších čtverců odhadnuty hodnoty parametrů:

$$\theta_1 = -0,2160$$

$$\theta_2 = -0,0425$$

$$\theta_2 = -0,0982$$

Odpovídající parametrům:

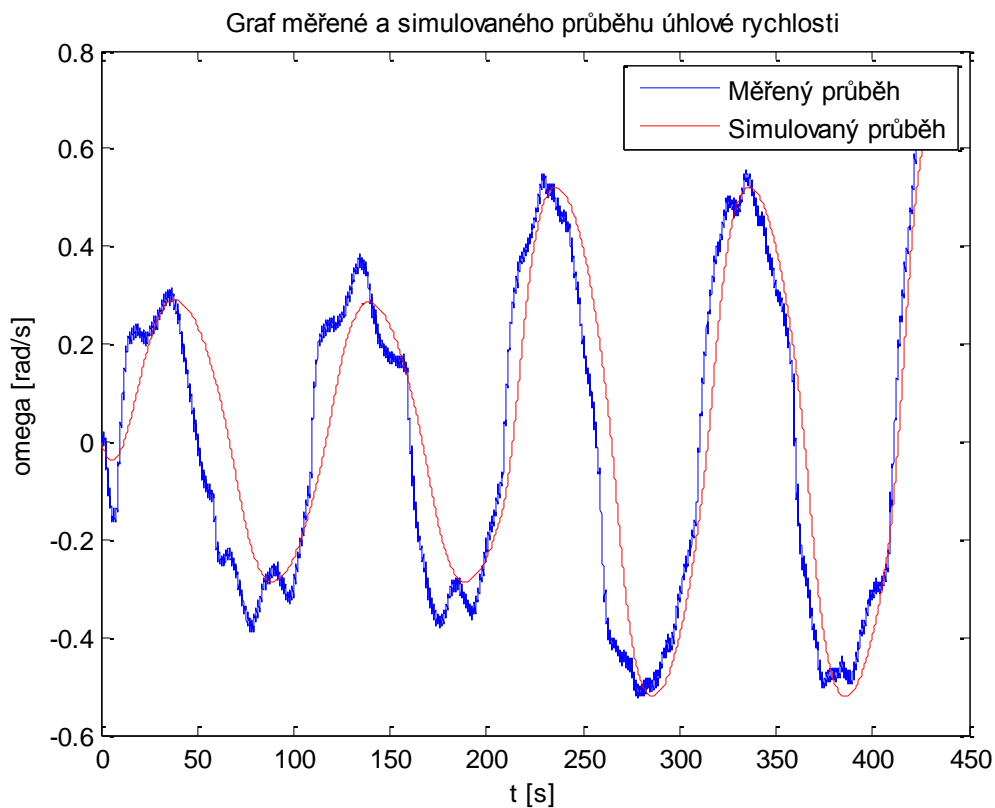
$$J + J_{ad} = 10,1836 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{ad} = 9,3379 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\beta = 0,4326 \frac{\text{N}}{\text{rad s}^{-1}}$$

$$\gamma = 2,2001 \frac{\text{N}}{\text{rad}^2 \text{s}^{-2}}$$

Ověření:



Obrázek 29 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy y metodou nejmenších čtverců

Chyba odhadovaných parametrů:

$$e = 2,01 \cdot 10^{-2}$$

5.3.3 Určení parametrů rotačního pohybu kolem osy x

Pro pohyb okolo osy x byly odhadnuty hodnoty:

$$\theta_1 = -0,1664$$

$$\theta_2 = -0,0102$$

$$\theta_2 = -0,0562$$

A tedy:

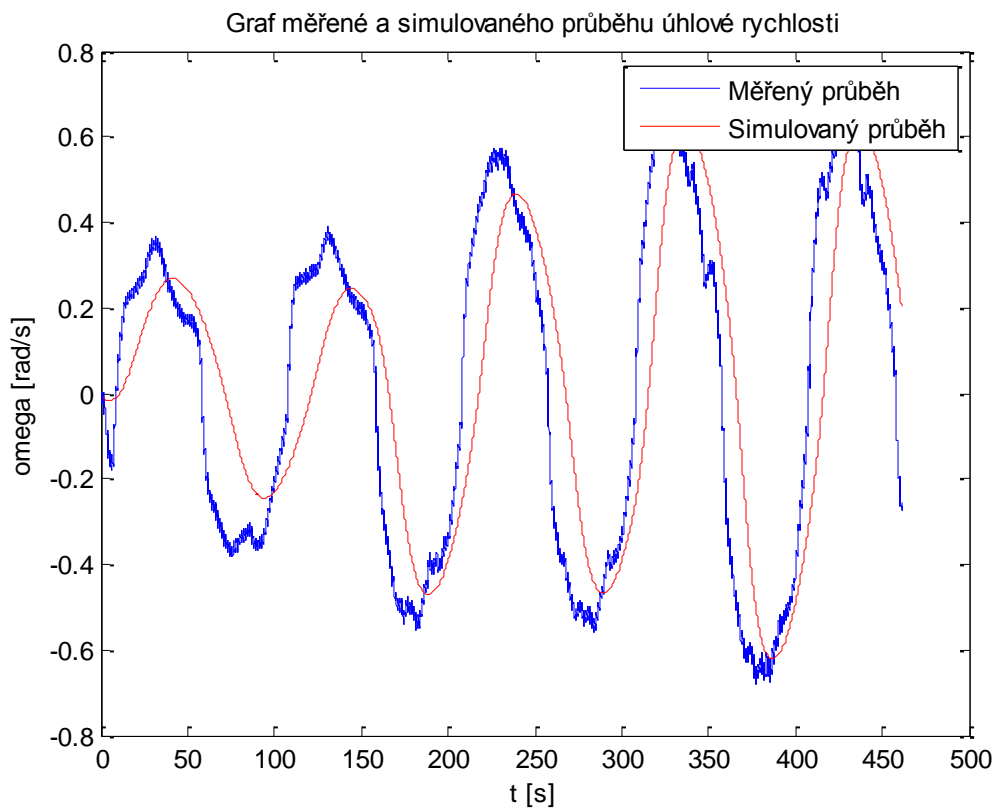
$$J + J_{ad} = 17,8011 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{ad} = 17,6394 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\beta = 0,182 \frac{\text{N}}{\text{rad s}^{-1}}$$

$$\gamma = 2,9621 \frac{\text{N}}{\text{rad}^2 \text{s}^{-2}}$$

Ověření parametrů pomocí simulace:



Obrázek 30 Porovnání naměřeného a identifikovaného průběhu otáček ponorky kolem osy x metodou nejmenších čtverců

Chyba odhadu:

$$e = 5,76 \cdot 10^{-2}$$

6 Návrh řízení

Vzhledem k odhadovaným parametrům v kapitole 5. je vhodné zvolit strukturu matematického modelu ponorky pro návrh řízení ve tvaru (83) a (84) ovšem bez uvažování odporu z turbulentního tření v rovnici translačního pohybu:

$$m\ddot{\mathbf{a}}^0 = R \sum_{j=1}^6 \vec{F}_{mj}^1 + \vec{F}_g^0 + \vec{F}_A^0 + \vec{F}_l^0 + \vec{F}_{ad}^0 \quad (309)$$

$$I^1 \dot{\vec{\omega}}^1 = \sum_{j=1}^6 \vec{\rho}_j^1 \times \vec{F}_{mj}^1 + \vec{M}_l^1 + \vec{M}_t^1 + \vec{\omega}^1 \times I^1 \vec{\omega}^1 \quad (310)$$

Kde

$$I^1 = \vec{I}_p^1 + \vec{I}_{ad}^1 \quad (311)$$

Je diagonální matice.

Zvolením parametrů odhadnutých s nejmenší střední kvadratickou chybou jsou jednotlivé členy matematického modelu ponorného zařízení:

$$m = 40,9 \text{ kg}; \quad V = 0,041 \text{ m}^3; \quad \beta = \begin{bmatrix} 36,9949 & 0 & 0 \\ 0 & 44,283 & 0 \\ 0 & 0 & 65,4572 \end{bmatrix};$$

$$m_{ad} = \begin{bmatrix} 59,0412 & 0 & 0 \\ 0 & 82,0007 & 0 \\ 0 & 0 & 219,5567 \end{bmatrix}; \quad \tilde{\beta} = \begin{bmatrix} 0,182 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4326 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6711 \end{bmatrix};$$

$$\gamma = \begin{bmatrix} 2,9621 & 0 & 0 \\ 0 & 2,2001 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2674 \end{bmatrix}; \quad I^1 = \begin{bmatrix} 17,8011 & 0 & 0 \\ 0 & 10,1836 & 0 \\ 0 & 0 & 7,9394 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}_g^0 = m\vec{g}^0 \quad (312)$$

$$\vec{F}_A^0 = V\rho\vec{g}^0 \quad (313)$$

$$\vec{F}_l^0 = R\beta R^T \vec{v}^0 \quad (314)$$

$$\vec{F}_{ad}^0 = Rm_{ad}R^T \ddot{\mathbf{a}}^0 \quad (315)$$

$$\vec{M}_l^1 = \tilde{\beta}\vec{\omega}^1 \quad (316)$$

$$\vec{M}_t^1 = \gamma|\vec{\omega}^1|\vec{\omega}^1 \quad (317)$$

Kde u_j vstup j -tého motoru a \vec{v} je vektor rychlosti ponorného zařízení.

Souřadnice jednotlivých motorů vzhledem k osám pevně spojeným s tělesem jsou:

$$\vec{\rho}_1^1 = \begin{bmatrix} m_{dx} \\ m_{dy} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_2^1 = \begin{bmatrix} m_{dx} \\ -m_{dy} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_3^1 = \begin{bmatrix} -m_{dx} \\ -m_{dy} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_4^1 = \begin{bmatrix} -m_{dx} \\ m_{dy} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (318)$$

$$\vec{\rho}_5^1 = \begin{bmatrix} m_{hx} \\ m_{hy} \\ m_{hz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_6^1 = \begin{bmatrix} m_{hx} \\ -m_{hy} \\ m_{hz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_7^1 = \begin{bmatrix} -m_{hx} \\ -m_{hy} \\ m_{hz} \end{bmatrix}; \quad \vec{\rho}_8^1 = \begin{bmatrix} -m_{hx} \\ m_{hy} \\ m_{hz} \end{bmatrix} \quad (319)$$

Kde $\vec{\rho}_i^1$ jsou souřadnice spodních motorů, zodpovědných za pohyb v osách x, y a okolo osy z pro $i = 1, 2, 3, 4$ a $\vec{\rho}_i^1$ jsou souřadnice horních motorů, zodpovědných za pohyb v ose z a okolo x a y pro $i = 5, 6, 7, 8$. A kde:

$$m_{ax} = 0,215 \text{ m}; \quad m_{ay} = 0,175 \text{ m}; \quad m_{hx} = 0,095 \text{ m}; \quad m_{hy} = 0,095 \text{ m}; \quad m_{hz} = 0,15 \text{ m}$$

Síla působení jednotlivých motorů v konkrétních směrech je:

$$\vec{F}_{m1}^1 = 2,4336u_1 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_{m2}^1 = 2,4336u_2 \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (320)$$

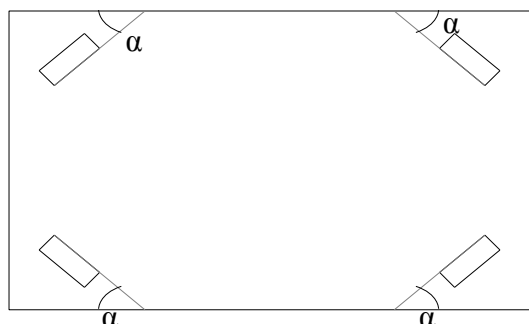
$$\vec{F}_{m3}^1 = 2,4336u_3 \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_{m4}^1 = 2,4336u_4 \begin{bmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \\ 0 \end{bmatrix} \quad (321)$$

$$\vec{F}_{m5}^1 = 2,4336u_5 \begin{bmatrix} -\cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_{m6}^1 = 2,4336u_6 \begin{bmatrix} -\cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (322)$$

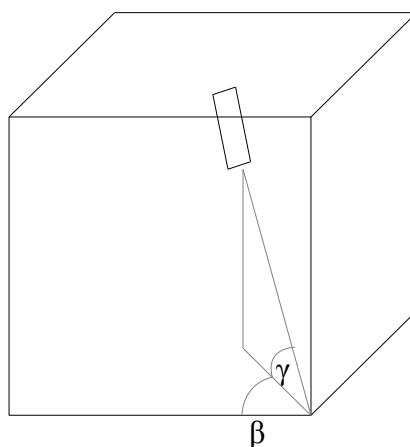
$$\vec{F}_{m7}^1 = 2,4336u_7 \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ \cos \beta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix}; \quad \vec{F}_{m8}^1 = 2,4336u_8 \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma \\ -\cos \beta \cos \gamma \\ \sin \gamma \end{bmatrix} \quad (323)$$

Kde α, β, γ jsou úhly odpovídající obrázku 31 resp. 32:

$$\alpha = 35^\circ; \quad \beta = 45^\circ; \quad \gamma = 65^\circ$$



Obrázek 31 Rozložení spodních motorů ponorky při pohledu shora



Obrázek 32 Směr horních motorů ponorky

Pohybové vztahy ponorného zařízení jsou nelineární a je žádoucí řídit ponorku v celém stavovém prostoru, přesto lze ale za předpokladu pomalého pohybu ponorky a práce

v nedalekém okolí počátku souřadnic pohybové rovnice linearizovat. To umožní mnohem jednodušší návrhy regulátorů některou z klasických metod teorie lineárních systémů.

Dosadíme-li výše uvedené parametry a ze vztahů (46) a (60) za R , resp. ω do rovnic (84), z rotačních rovnic vyjádříme $\ddot{\psi}$, $\ddot{\theta}$ a $\ddot{\varphi}$, pak je možné rovnice za výše uvedených předpokladů linearizovat v rovnovážném stavu:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \\ x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \psi \\ \theta \\ \varphi \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Za rovnovážného řízení:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linearizovaná matice dynamiky je pak:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3792 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,3603 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2513 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0102 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0425 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,2105 \end{bmatrix}$$

Matice vstupu:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0199 & 0,0199 & -0,0199 & -0,0199 & -0,0073 & -0,0073 & 0,0073 & 0,0073 \\ -0,0114 & 0,0114 & 0,0114 & -0,0114 & -0,0059 & 0,0059 & 0,0059 & -0,0059 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0085 & 0,0085 & 0,0085 & 0,0085 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,7899 & -1,7899 & -1,7899 & 1,7899 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3,1287 & -3,1287 & 3,1287 & 3,1287 \\ -8,174 & 8,174 & -8,174 & 8,174 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Za předpokladu, že jsme schopni měřit všechny stavové proměnné, je matice výstupu jednotková matice o rozměrech 12x12.

K určení parametrů použitých PID regulátorů je vhodné zjistit přenosy z jednotlivých vstupů na jednotlivé výstupy:

$$F(p) = C(pI - A)^{-1}B + D \quad (324)$$

Kde $F(p)$ je Laplaceův obraz přenosu ze vstupu na výstup systému, I je jednotková matice o rozměrech 12x12 a D je nulová matice přímého působení vstupu na výstup o rozměrech 12x8.

Vzhledem k tomu, že každý motor působí ve více směrech, je vhodné zavést tzv. virtuální vstupy, díky nimž je možné jedním virtuálním vstupem řídit právě jeden směr pohybu.

Označme $w_x, w_y, w_z, w_\psi, w_\theta, w_\varphi$ virtuální vstupy, kde pravý dolní index značí osu pohybu, na kterou působí. Potom:

$$w_x = u_1 + u_2 - u_3 - u_4 \quad (325)$$

$$w_y = -u_1 + u_2 + u_3 - u_4 \quad (326)$$

$$w_z = u_5 + u_6 + u_7 + u_8 \quad (327)$$

$$w_\psi = u_5 - u_6 - u_7 + u_8 \quad (328)$$

$$w_\theta = -u_5 - u_6 + u_7 + u_8 \quad (329)$$

$$w_\varphi = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 \quad (330)$$

A prostým sečtením příslušných přenosů ze skutečných vstupů na výstupy lze určit přenosy na výstupy ze vstupů virtuálních.

$$F_{x,w_x} = \frac{0,07979}{p + 0,3702} \quad (331)$$

$$F_{y,w_y} = \frac{0,04543}{p + 0,3603} \quad (332)$$

$$F_{z,w_z} = \frac{0,01574p + 0,004963}{p^2 + 0,6215p + 0,09303} \quad (333)$$

$$F_{\psi,w\psi} = \frac{7,16}{p + 0,01022} \quad (334)$$

$$F_{\theta,w\theta} = \frac{12,51}{p + 0,04248} \quad (335)$$

$$F_{\varphi,w\varphi} = \frac{32,7}{p + 0,2105} \quad (336)$$

6.1 Návrh řízení metodou požadovaného umístění pólů

Jedním z nejjednodušších přístupů k syntéze regulátorů je metoda tzv. pole placement, neboli návržení regulátoru tak, aby přenos uzavřené smyčky s regulovaným systémem a regulátorem v přímé větvi měl předem zvolené póly.

Pohyb v každém směru je možné řídit pomocí PID regulátorů s přenosem v obecném tvaru:

$$F_{PID} = K_P + \frac{K_I}{p} + \frac{K_D p}{\tau p + 1} \quad (337)$$

Kde K_P je zesílení proporcionální složky regulátoru, K_I je zesílení integrační složky regulátoru, K_D je zesílení derivační složky regulátoru a τ je časová konstanta derivačního filtru.

Metodu požadovaného umístění pólů lze určit parametry pokud:

$$m \geq n - 1 \quad (338)$$

Kde m je řád regulátoru a n je řád regulovaného systému. Jednoznačně je pak možné určit parametry, pokud je podmínka (338) splněna jako rovnost. Přičemž platí-li rovnost, je třeba mít $2m + 1$ nastavitelných parametrů regulátoru.

Podmínka (338) je v případě PID regulátoru splněna pro všechny přenosy, neboť každý z těchto regulovaných přenosů je řádu $n \leq 2$. Přenos PID regulátorů je druhého řádu a lze tak uvažovat i o vypuštění některých jeho složek. PID regulátor má ovšem omezenou strukturu a v uvedeném tvaru (337) pouze čtyři nastavitelné parametry. Pro přenos $F_{z,wz}$ tak může být výhodnější obecný regulátor řádu $n = 1$.

Při výběru vhodných pólů systému je žádaná rychlost regulace, ale také robustnost ve stabilitě. Vzhledem k mnoha zjednodušením, provedeným při tvorbě matematického modelu ponorky, nepřesnostem při identifikaci parametrů i k linearizaci systému pro návrh regulátorů je určitá robustnost ve stabilitě nezbytná.

Pro přenosy (331), (332), (334), (335) a (336) byly vybrány póly přenosu uzavřeného systému:

$$p_1^* = -5; \quad p_2^* = -4; \quad p_3^* = -6$$

V případě přenosu (333) pak:

$$p_1^* = -0,5; \quad p_2^* = -0,4; \quad p_3^* = -0,4$$

Z diofantické rovnice (339) pak lze pro každý z přenosů (331)-(336) určit parametry nastavení PID regulátoru:

$$a(p)c(p) + b(p)d(p) = (p - p_1^*)(p - p_2^*)(p - p_3^*) \quad (339)$$

Kde $a(p)$ je polynom v čitateli přenosu regulovaného systému, $c(p)$ je polynom v čitateli přenosu regulátoru, $b(p)$ je polynom ve jmenovateli přenosu regulovaného systému a $d(p)$ je polynom ve jmenovateli přenosu regulátoru.

Pro přenosy (331), (332), (334), (335) a (336), které jsou ve tvaru:

$$F_s = \frac{a}{p + b} \quad (340)$$

A PID regulátor se strukturou (337) vycházejí parametry nastavení regulátoru:

$$\tau = 1; \quad K_p = -\frac{46 + b}{a}; \quad K_I = \frac{120}{a}; \quad K_D = \frac{60}{a}$$

U přenosu (333) kde, byl zvolen obecný regulátor ve tvaru:

$$F_R = \frac{k_1 p + k_2}{p + k_3} \quad (341)$$

Jsou vypočtené parametry regulátoru pro požadované umístění pólů uzavřené smyčky:

$$k_1 = 47,0179; \quad k_2 = 17,2733; \quad k_3 = 0,0616$$

Další nastavení parametrů pro jednotlivé přenosy je:

Pro $F_{x,wx}$:

$$K_p = -581,153; \quad K_I = 1503,9; \quad K_D = 751,9739$$

Pro $F_{y,wy}$:

$$K_p = -1020,5; \quad K_I = 2641,4; \quad K_D = 1320,7$$

Pro $F_{\psi,w\psi}$:

$$K_p = -6,426; \quad K_I = 16,7598; \quad K_D = 8,3799$$

Pro $F_{\theta,w\theta}$:

$$K_p = -3,6805; \quad K_I = 9,5923; \quad K_D = 4,7962$$

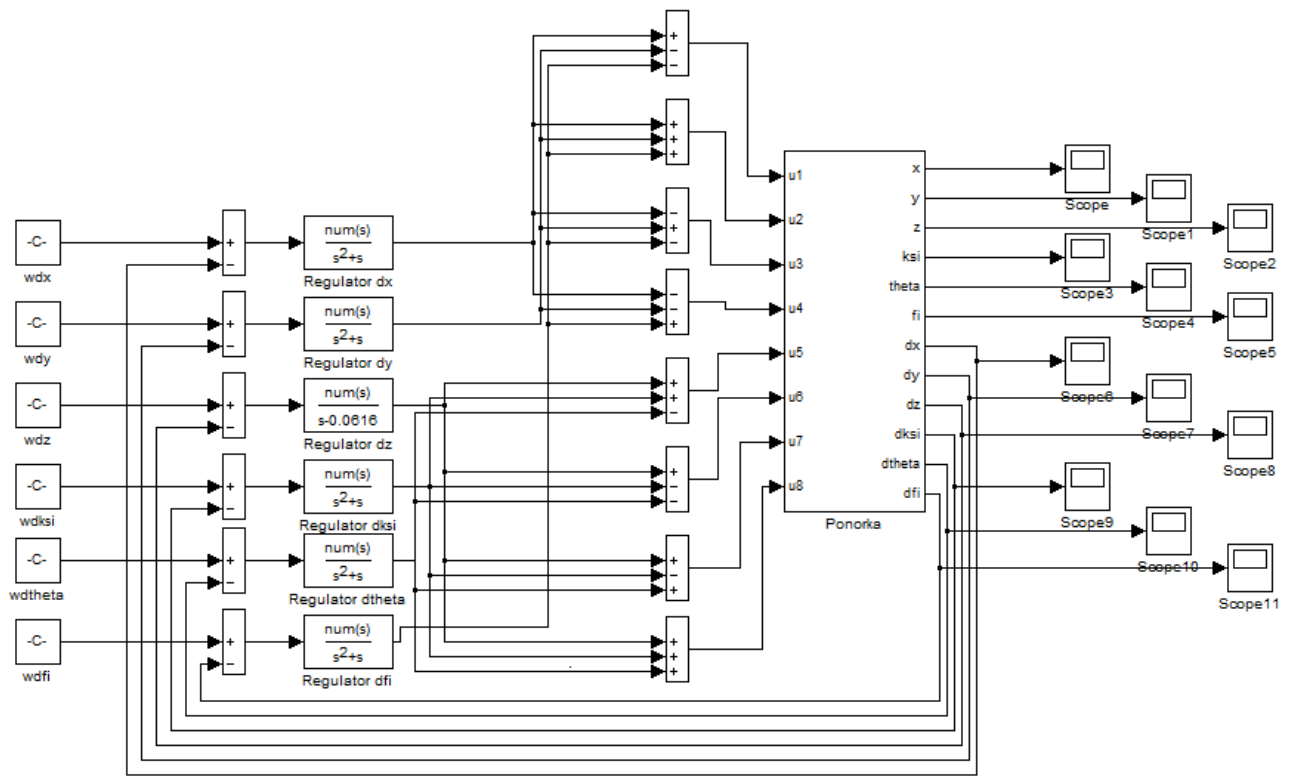
A pro $F_{\varphi,w\varphi}$:

$$K_p = -1,4132; \quad K_I = 3,6697; \quad K_D = 1,8349$$

6.1.1 Ověření syntézy regulátoru

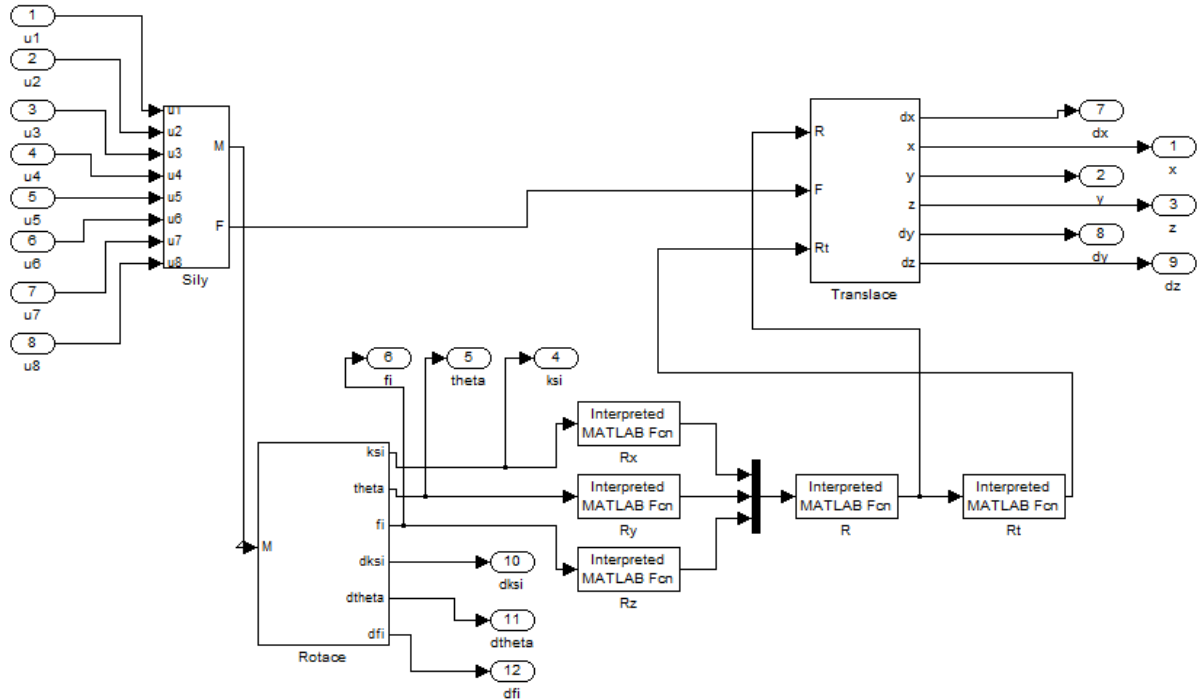
Navržené parametry regulátorů je možné ověřit pomocí simulace v programovém prostředí Matlab/Simulink, kde jsou navržené regulátory aplikovány na nelineární systém ponorného zařízení.

Schéma zapojení regulátorů je na obr. 33.



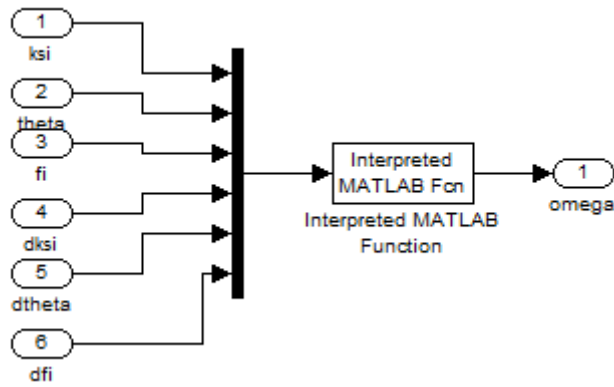
Obrázek 33 Regulační schéma

Schéma ponorky je uvedeno na obr. 34.

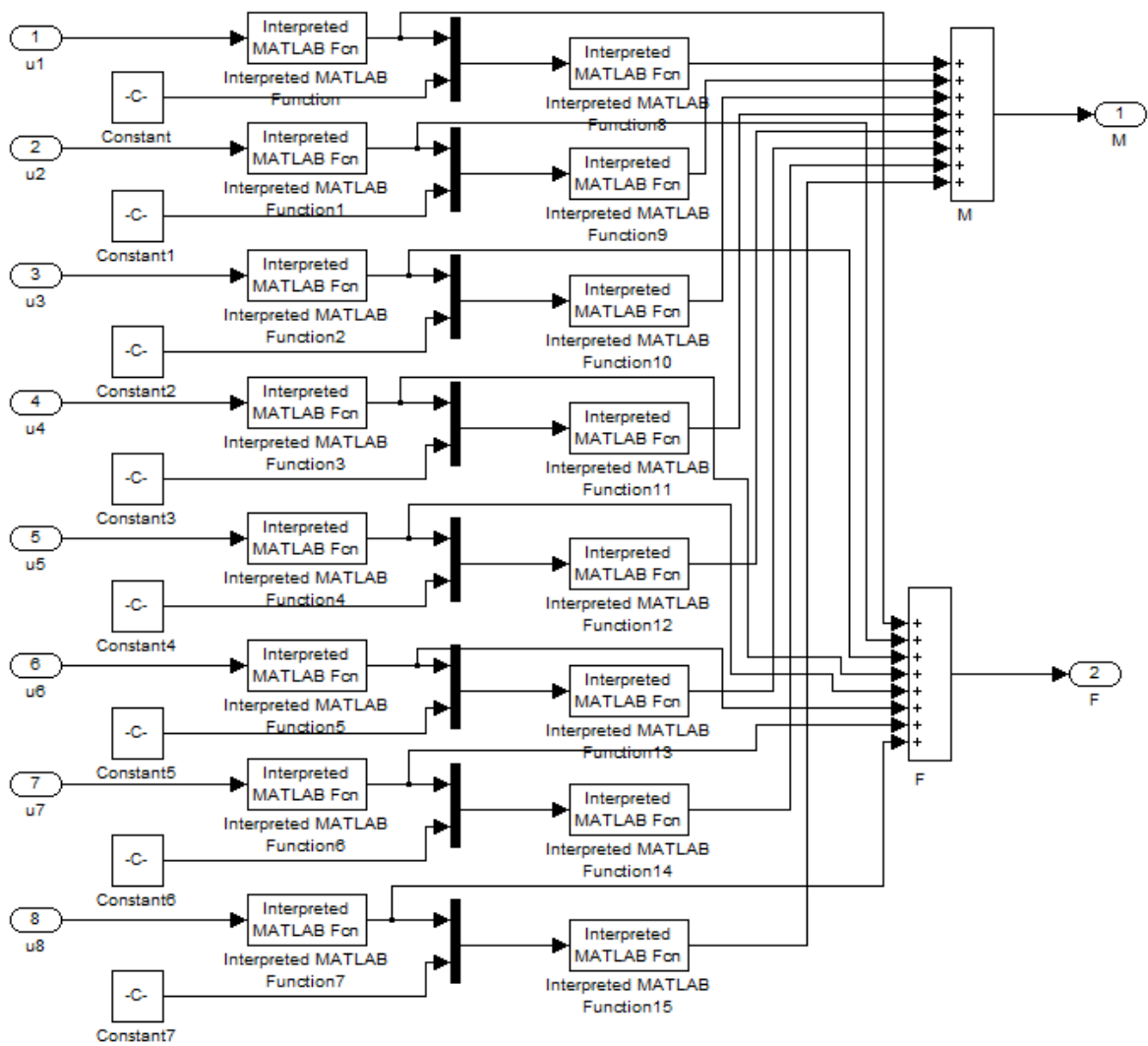


Obrázek 34 Blokový model ponorky

Schémata jednotlivých subsystémů jsou uvedeny na obr 35 až 39 .

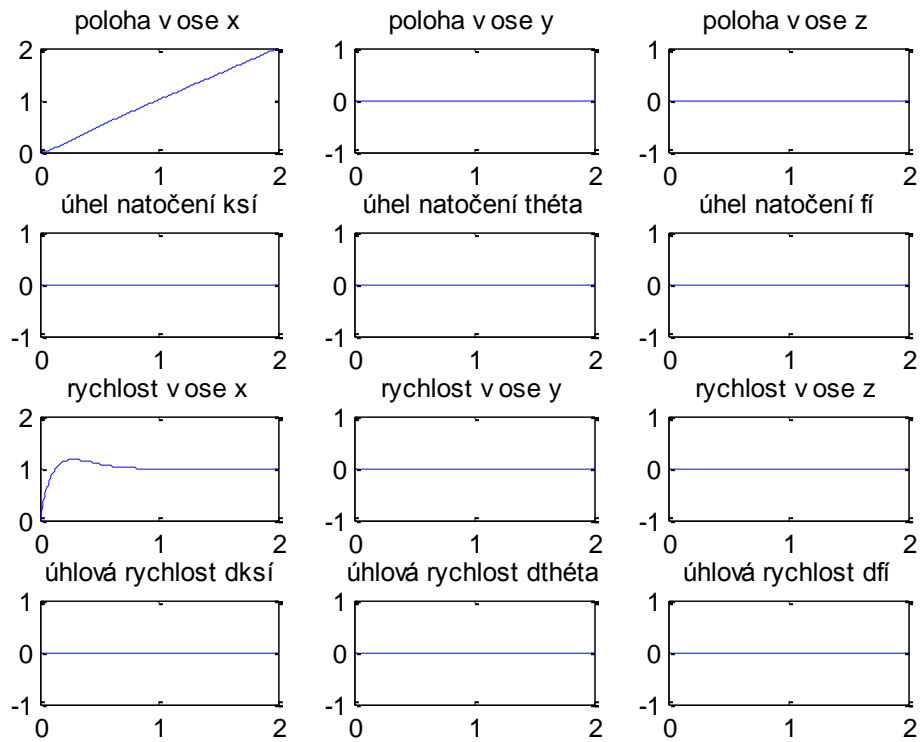


Obrázek 38 Subsystém omega1



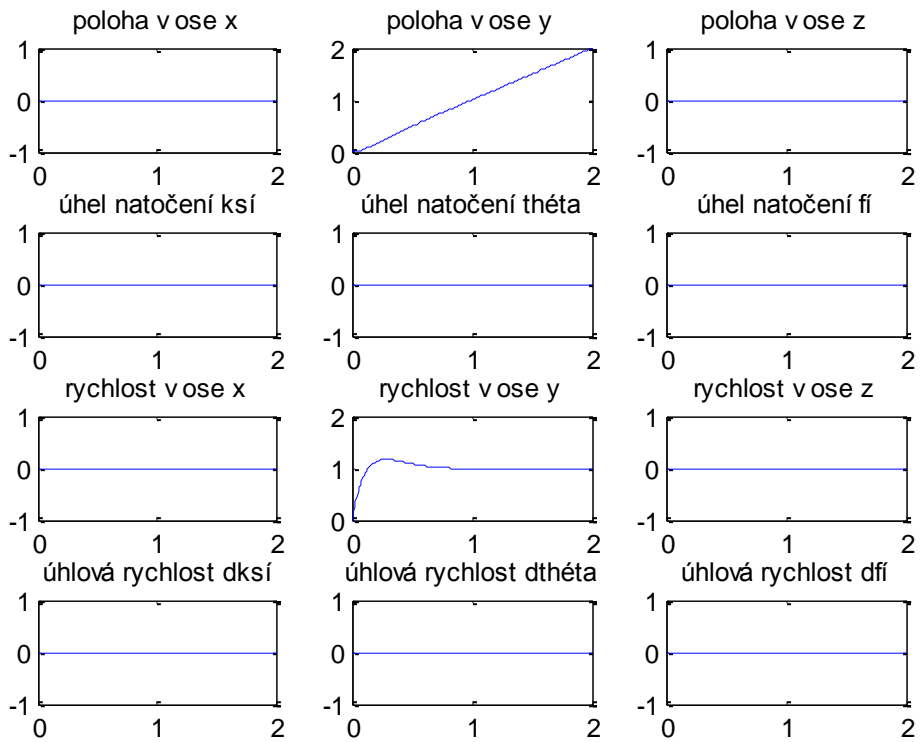
Obrázek 39 Subsystém Síly

Simulaci lze ověřit odezvy na jednotkový skok u každé požadované hodnoty zvlášť a ověřit, že je systém velmi dobře dekomponovaný. To je vidět na obr. 40 – 45.

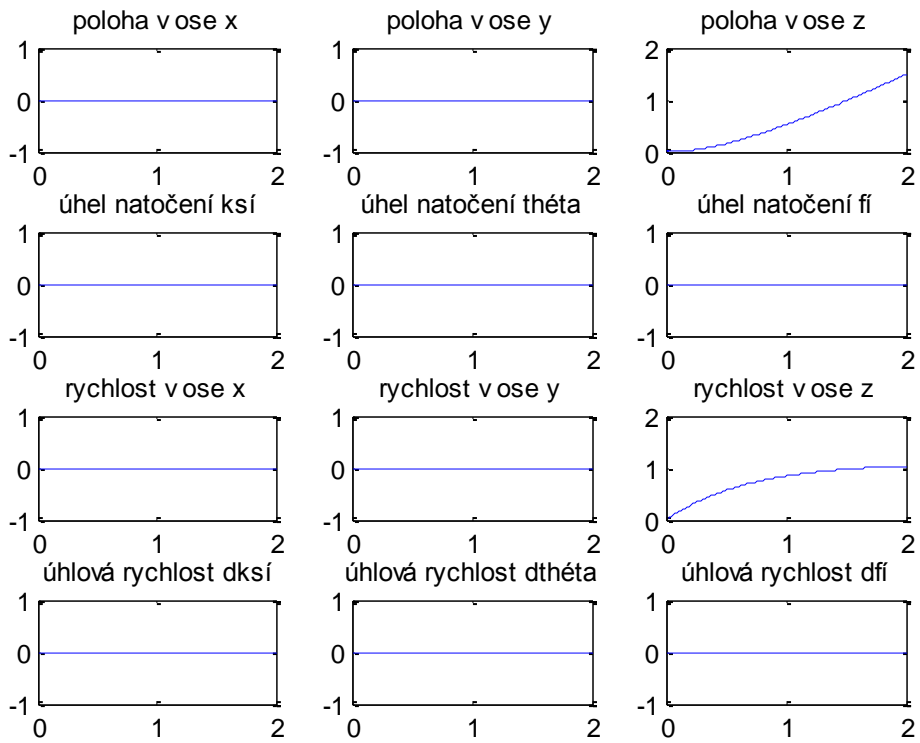


Obrázek 40 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose x

Je vidět že regulace je rychlá a přesná. Ostatní výstupy systému na požadovanou rychlost v ose x nereagují.

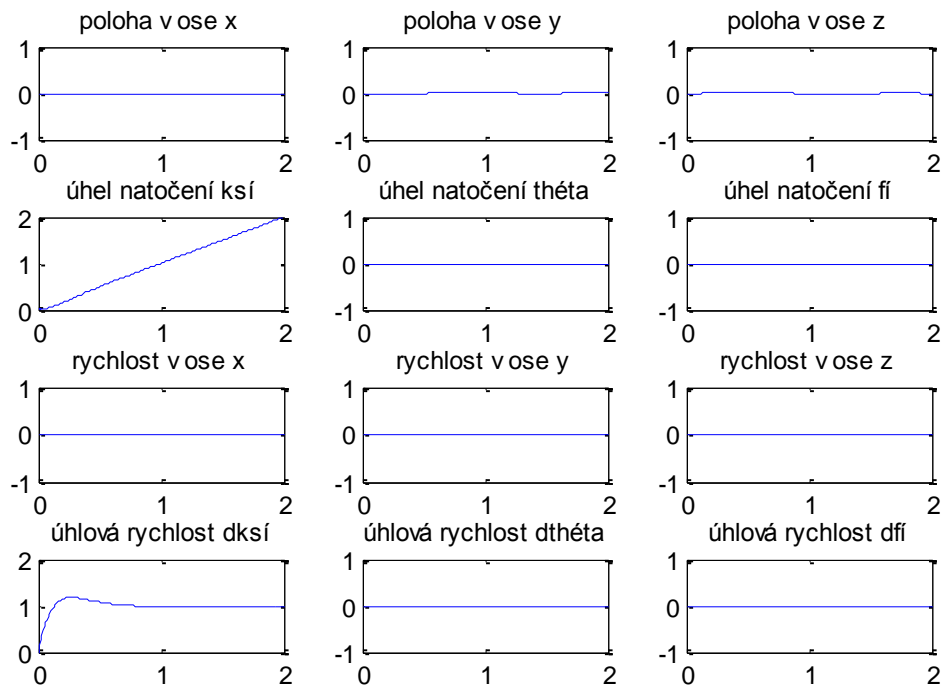


Obrázek 41 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose y

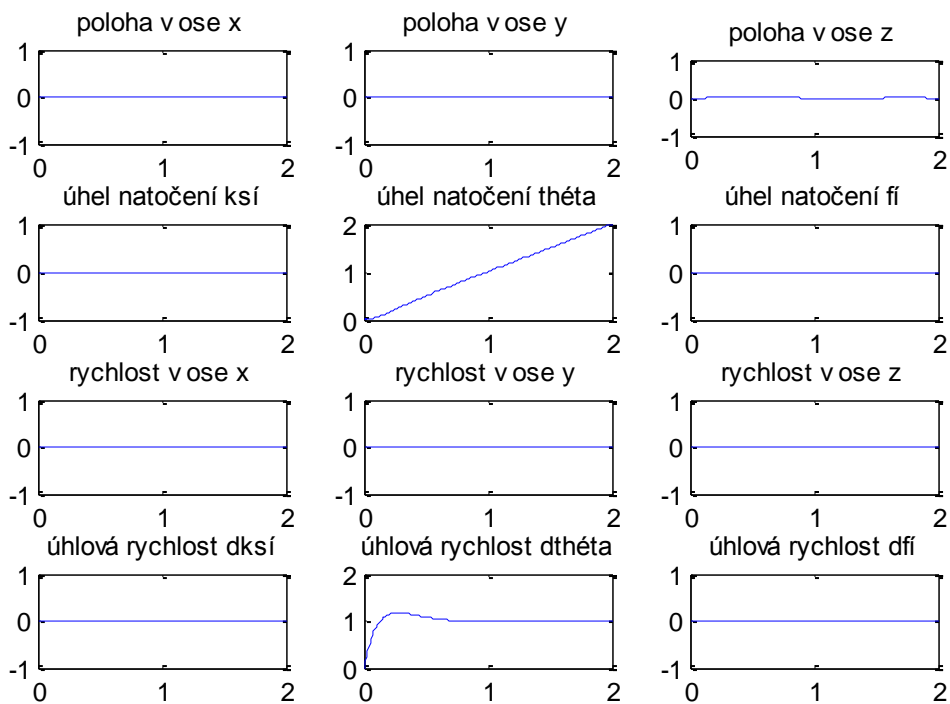


Obrázek 42 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti v ose z

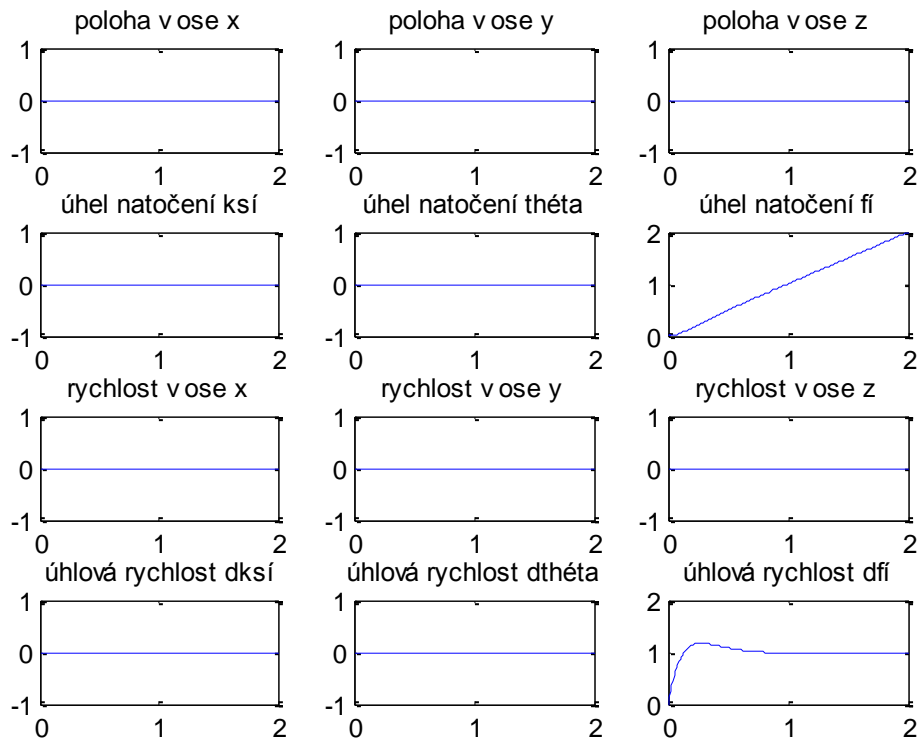
V ose z je navržený regulátor jiné struktury než v dalších osách a snaha odstranit vysoký překmit po dosažení požadované hodnoty má za následek pomalejší průběh regulace.



Obrázek 43 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy x

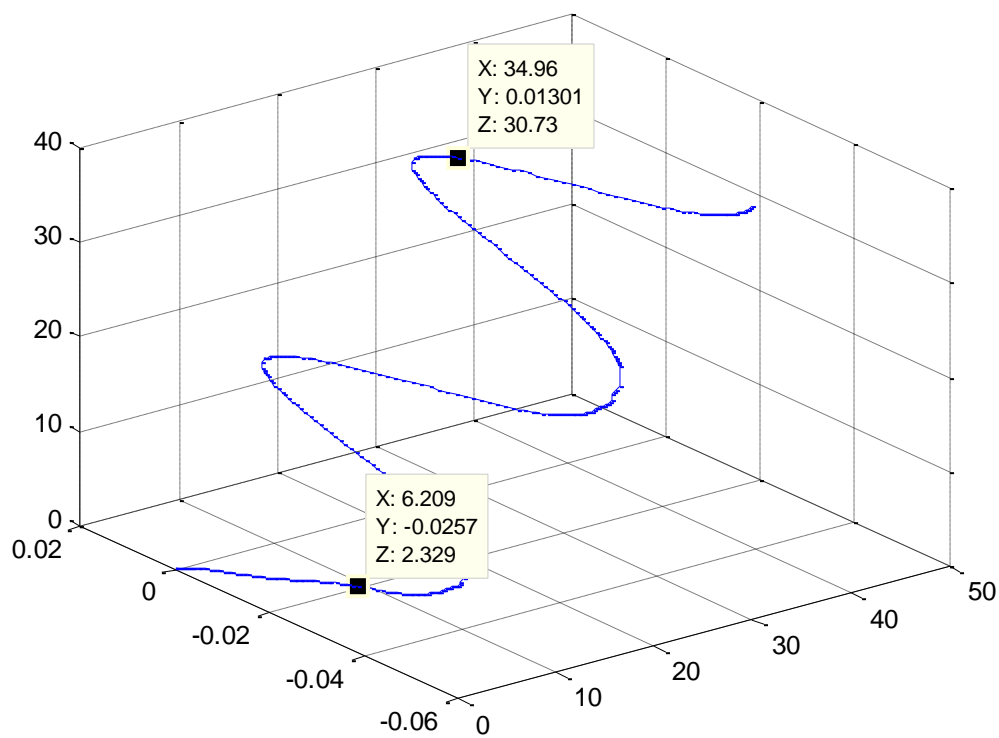


Obrázek 44 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy y



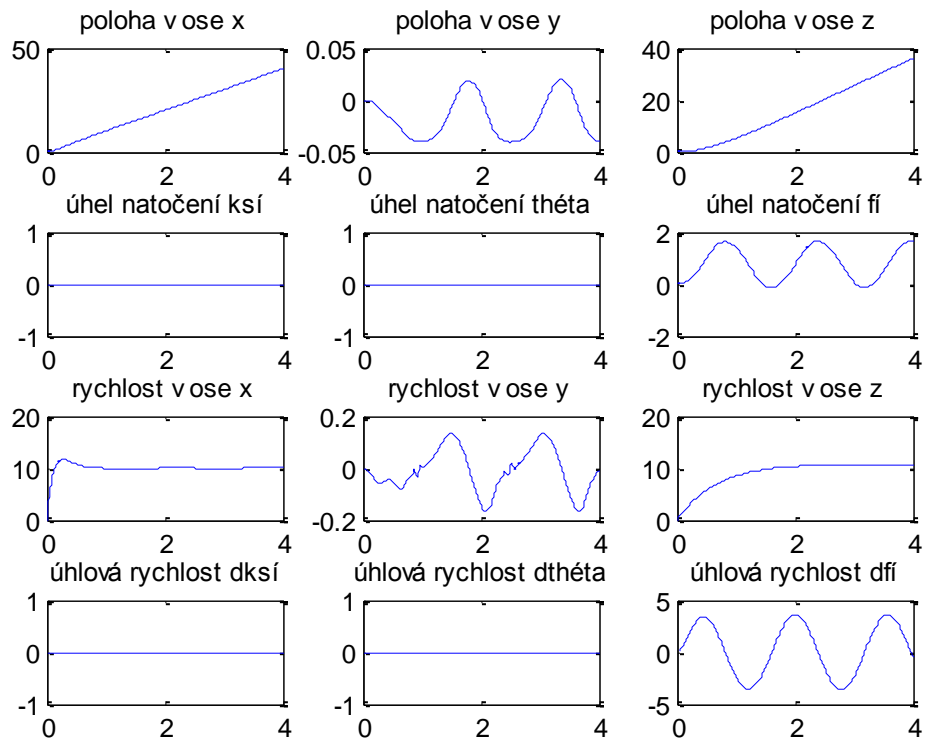
Obrázek 45 Reakce systému na jednotkový skok požadované rychlosti kolem osy z

Funkčnost regulace lze ověřit zvolením požadované rychlosti ve více směrech na jednou:



Obrázek 46 Pohyb ponorky v prostoru v reakci na požadované rychlosti v různých směrech

Na obr. 46 je zobrazen pohyb ponorky v prostoru v situaci, kdy je požadavek na konstantní rychlosti v osách x a z a současně požadavek na sinusové kolísání úhlové rychlosti okolo osy z . Tutéž situaci je možné rozložit do jednotlivých směrů jako na obr. 47.



Obrázek 47 Reakce výstupů na požadované hodnoty

Je vidět, že navržené řízení plnohodnotně postačuje při nízkých rychlostech a ve všech směrech s výjimkou osy z dosahuje velké rychlosti s nízkým překmitem. Stabilita je zajištěna umístěním pólů uzavřené smyčky regulátorem.

7 Závěr

Diplomová práce detailně popisuje způsob odvození pohybových rovnic malého ponorného zařízení. V práci není brán zřetel na vliv přívodního kabelu k ponorce, avšak v matematickém popisu pohybu ponorky je uvažován vliv prostředí prostřednictvím třecích a odporových sil, působících proti pohybu ponorného zařízení. Je uvažován vliv způsobu obtékání kapaliny kolem tělesa a tzv. přidaná hmotnost a přidaná setrvačnost vlivem molekul vody v bezprostřední blízkosti tělesa.

Dále jsou uvedeny některé metody identifikace těchto třecích sil a neznámých parametrů ponorky. Za pomoci fyzického kyvadla byly provedeny experimenty na jejichž výsledky bylo několik těchto identifikačních metod použito. Z porovnání naměřených a odhadnutých průběhů pomocí identifikovaných parametrů je zřejmé že největší přesnosti odhadu dosahují numerické iterační metody identifikace, byť jsou založené na linearizovaném modelu. V praxi často užívaná metoda nejmenších čtverců je závislá na přesnosti odhadu úhlové rychlosti resp. úhlového zrychlení fyzického kyvadla, které nebyly při experimentu měřeny. Výsledky měření mohou být ovlivněny i nevhodně zvolenou strukturou matematického popisu kyvadla.

Identifikované parametry ponorky a odporové síly jsou zahrnuty do matematického modelu ponorného zařízení, a jeho linearizované podoby je pak využito pro návrh efektivního řízení metodou požadovaného umístění pólů. Touto metodou je navrženo 6 dynamických regulátorů pro ovládání rychlosti v každém ze šesti stupňů volnosti ponorky. Navržené regulátory jsou použity na původní nelinearizovaný model ponorky. Výsledky regulace jsou uvedeny v kapitole 5.

V práci je kladen důraz především na experimentální zjištění parametrů diagnostického ponorného zařízení a na rozbor metod, sloužících k této identifikaci. Nabízí však ucelený přehled o způsobu návrhu malé ponorky od odvození jejího modelu, po syntézu regulátorů.

Literatura

- [1] JIŘÍ LIMPOUCH. *Numerické metody*. Praha, 2008. Učební text. České vysoké učení technické. Dostupné na: <http://www-troja.fjfi.cvut.cz/~limpouch/numet/extrem/node12.html>
- [2] KUBÍČEK, M. DUBCOVÁ, M. JANOVSÁ, D., *Numerické metody a algoritmy*. Praha, 2005. 133 s. Učební text. Vysoká škola chemicko-technická v Praze. Dostupné na: http://vydavatelstvi.vscht.cz/knihy/uid_isbn-80-7080-558-7/pages-img/133.html
- [3] ŠEBKOVÁ, K. *Klasická mechanika – soustava hmotných bodů a tuhé těleso*. Praha, 2006. 22 s. Učební text. Univerzita Karlova v Praze. Dostupné na: http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/materialy/soustavy_hb_tuhe_teloso.pdf
- [4] ŠTĚPÁN, M. *Nelineární aproximace signálů, implementace algoritmu pro nelineární odhad parametrů v Matlabu*. Brno, 2003. Vysoké učení technické v Brně. Dostupné na: <http://www.elektrorevue.cz/clanky/03017/index.html>
- [5] REICHL, J. VŠETIČKA, M. *Encyklopedie fyziky*. Dostupné na: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/913-torzni-kyvadlo>
- [6] BLÁHA, L. *Odhad potřebného výkonu motorů*. Plzeň, 2012. 17 s. Průběžná zpráva. Západočeská univerzita v Plzni.
- [7] VOLF, I. ŠEDIVÝ, P. *Pohyby tělesa v odporujícím prostředí*. 16 s. Učební text. Dostupné na: <http://fyzikalniolympiada.cz/texty/odpor.pdf>
- [8] KREJČÍ, P. *Mechanika těles – dynamika*. Brno, 2005. Učební text. Vysoké učení technické v Brně. Dostupné na: http://www.umt.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/dynamika/kapitola_3.html
- [9] *Wikipedie, otevřená encyklopedie*. Poslední revize 19.6.2015. Dostupné na: http://cs.wikipedia.org/wiki/Steinerova_v%C4%9Bta
- [10] *Wikiknih*. Poslední revize 23.5.2012. Dostupné na: https://cs.wikibooks.org/wiki/Geometrie/Afinn%C3%AD_transformace_sou%C5%99adnic
- [11] GISH, LYNN, A. *Design of an AUV recharging system*. Cambridge, 2004. 134 s. Odborný článek. Massachusetts institute of technology. Dostupné na: <http://dspace.mit.edu/handle/1721.1/33445#files-area>
- [12] HARRISON, H.R. NETTLETON, T. *Advanced engineering dynamics*. New York, 1997. 307 s.
- [13] *Wikipedia, the free encyclopedia*. Poslední revize 5.11.2013. Dostupné na: https://en.wikipedia.org/wiki/Unmanned_underwater_vehicle
- [14] SCHLEGEL, M. *Mechanické systémy*. Plzeň, 2007. 31 s. Učební text. Západočeská univerzita v Plzni.