

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NUMERICKÁ INTEGRACE - ORTOGONÁLNÍ POLYNOMY
BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Tomáš Bárta
Matematická studia

Vedoucí práce: RNDr. Václav Kohout

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 15. dubna 2015

.....
vlastnoruční podpis

Tímto bych chtěl poděkovat panu RNDr. Václavu Kohoutovi za ochotnou a odbornou výpomoc během psaní této práce, za optimistický přístup a za notnou dávku projevené trpělivosti. Dík patří také mé rodině za podporu v průběhu celého studia.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINAL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	2
ÚVOD	4
1 HISTORICKÝ ÚVOD.....	5
2 ZÁKLADNÍ POJMY	9
3 APROXIMACE FUNKCÍ	14
4 ORTOGONÁLNÍ POLYNOMY.....	18
4.1 HILBERTOVY PROSTORY.....	18
4.2 GRAMŮV-SCHMIDTŮV ORTOGONALIZAČNÍ PROCES.....	20
4.3 SPECIÁLNÍ PŘÍKLADY ORTOGONÁLNÍCH POLYNOMŮ	25
4.3.1 Gramovy polynomy	25
4.3.2 Jacobiovy polynomy	27
4.3.3 Legendrovy polynomy	27
4.3.4 Čebyševovy polynomy.....	29
4.3.5 Laguerrovy polynomy	30
4.3.6 Hermitovy polynomy.....	32
5 GAUSSOVA KVADRATURA	34
5.1 LAGUERROVA-GAUSSOVA KVADRATURA	40
5.2 HERMITOVA-GAUSSOVA KVADRATURA	42
5.3 LEGENDROVA-GAUSSOVA KVADRATURA	43
5.4 ČEBYŠEVOVA-GAUSSOVA KVADRATURA.....	45
6 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY GAUSSOVÝCH KVADRATUR.....	47
ZÁVĚR.....	54
RESUMÉ	56
SEZNAM LITERATURY	57
SEZNAM OBRÁZKŮ, GRAFŮ A TABULEK.....	58

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol či příklad	Význam	Poprvé užito na str.
[1]	Odkaz na seznam literatury	9
(1)	Odkaz na výraz v textu	20
U	Sjednocení množin	9
\cap	Průnik množin	9
A^c	Doplněk množiny	9
\emptyset	Prázdná množina	9
f^{-1}	Inverzní zobrazení	10
$\text{lin}[A]$	Lineární obal množiny	11
$\ u\ $	Norma prvku	11
R^k	Eukleidovský prostor dimenze k	12
ω	Váhová funkce	13
Π_n	Prostor polynomů stupně nejvýše n	17
(u, v)	Skalární součin	18
A_j	Multiplikační konstanta ortogonálního polynomu	25
$G_j(x)$	Gramův polynom stupně j	25
$P_j(x)$	Legendrův polynom stupně j	27
$T_j(x)$	Čebyševův polynom stupně j	29
$L_j(x)$	Laguerrův polynom stupně j	30
$\frac{d^j f}{dx^j}$	j -tá derivace funkce f podle x	30
$H_j(x)$	Hermitův polynom stupně j	32
w_i	Váha Gaussovy kvadratury	34

Symbol či příklad	Význam	Poprvé užito na str.
a_i	Uzel Gaussovy kvadratury	34
\mathbf{A}	Matice A	35
c^T	Transponovaný vektor c	35
$f^{(j)}(x)$	j -tá derivace funkce f podle x	39
$p'(x)$	Derivace funkce p podle x	40

Úvod

Hlavním tématem této bakalářské práce jsou ortogonální polynomy a zejména pak jejich využití při numerické integraci. Protože jde však o problematiku, která není zatím v české literatuře příliš podrobně rozebrána, bude cílem práce nejprve shromáždit informace z českých i cizojazyčných zdrojů a popsat některé základní vlastnosti ortogonálních polynomů. Dalším cílem bude nastínit, proč je jejich používání výhodné a v čem jsou v praxi užitečné.

Poté již přistoupíme k vlastnímu využití ortogonálních polynomů při numerické integraci. Kromě formulace základních informací si ukážeme i některé speciální případy tohoto využití. Nakonec provedeme řešení několika konkrétních příkladů, na kterých si ukážeme vlastnosti numerické integrace pomocí ortogonálních polynomů a výhody jejich využití v praxi.

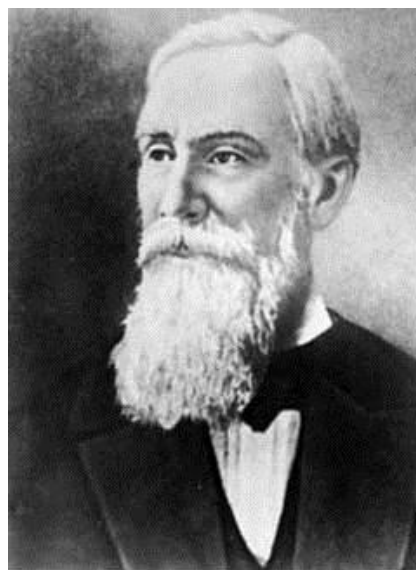
Protože téma ortogonálních polynomů není u nás příliš v povědomí širší veřejnosti, věnujeme kromě teoretického výkladu a praktického využití jednu část práce stručnému nastínění historického vývoje ortogonálních polynomů.

1 HISTORICKÝ ÚVOD

V první části práce se budeme v krátkosti věnovat vzniku ortogonálních polynomů a jejich vývoji. Vůbec prvními ortogonálními polynomy byly tzv. Legendrovy polynomy, pojmenované po svém autorovi. Adrien-Marie Legendre byl francouzský matematik žijící v letech 1752 až 1833. Jeho hlavní vědecký přínos byl v oblastech statistiky, teorie čísel, abstraktní algebry a matematické analýzy. Na jeho práci později navázala řada dalších významných matematiků. Legendre se například zabýval analýzou eliptických funkcí. Je také autorem metody nejmenších čtverců.

Dalším, kdo se zabýval problematikou ortogonálních polynomů, byl německý matematik Carl Gustav Jacob Jacobi, který žil v letech 1804 až 1851. Ten dokázal tuto problematiku zobecnit a dnes lze říci, že Legendrovy polynomy jsou zvláštním případem polynomů Jacobiových. Jacobi také dokázal navázat na Legendrovu práci týkající se eliptických funkcí a posunout poznání v této oblasti o kus dále. Legendre byl těmito Jacobiovými přínosy nadšen, a proto později došlo i ke spolupráci těchto dvou významných matematiků.

Na jejich práci týkající se ortogonálních polynomů navázal později ruský matematik, který v této oblasti sehrál zásadní roli a sestavil teorii obecných ortogonálních polynomů. Pafnutij Lvovič Čebyšev, který se později proslavil svými pracemi v mnoha oborech matematiky a praktického strojírenství, se narodil 26. května 1821 v ruské vesnici Okatovo v Borovském újezdě v Kalužské gubernii. Základní vzdělání získal doma. Učitelkami mu při tom byly jeho matka a jeho sestřenice. Roku 1832, kdy mu bylo 11 let, se i s rodinou přestěhoval do Moskvy, aby se tam on a jeho bratr připravili na nástup na místní univerzitu. Učitele mu zde dělal P. N. Pogorelski, který byl tou dobou považován za jednoho z nejlepších učitelů v Moskvě. Již jako šestnáctiletý chlapec se stal posluchačem Moskevské univerzity a o rok později získal první ocenění za matematickou práci v soutěži vypsané fakultou. Velký vliv na Čebyševovy výzkumné zájmy zde



Obrázek 1-P. L. Čebyšev

měl profesor aplikované matematiky Nikolai Dmitrievich Brashman. Ve dvaceti letech, roku 1841, získal P. L. Čebyšev svůj první univerzitní titul a pod Brashmanovým dohledem

pokračoval v magisterském studiu. Dva roky na to zveřejnil svou první vědeckou práci. Ta byla následována mnoha dalšími a Čebyšev tak rychle upoutal pozornost vědeckého světa.

V pětadvaceti letech se Čebyšev ucházel o titul magistra na Moskevské univerzitě a při té příležitosti zde zadal disertaci věnovanou počtu pravděpodobnosti. Roku 1847, tedy o rok později, byl povolán na Petrohradskou univerzitu, kde začala jeho profesorská činnost. Zde dosáhl v osmadvaceti letech hodnosti doktora. Jako disertace mu při tom sloužila jeho kniha „Theorie kongruencí“. Ve dvaatřiceti letech byl zvolen akademií věd adjunktem katedry užité matematiky a v osmatřiceti letech se stal již řádným akademikem. Mezitím roku 1854 zveřejnil první práci, ve které mluvil o Čebyševových polynomech, ale později celou obecnou teorii ortogonálních polynomů ještě výrazně rozvinul. Roku 1860 byl zvolen dopisujícím členem Akademie věd v Paříži a roku 1874 ho tato akademie zvolila svým zahraničním členem. Pafnutij Lvovič Čebyšev zemřel ráno 8. prosince 1894.

Nejvíce práce odvedl P. L. Čebyšev v teorii nejlepší aproximace funkce pomocí mnohočlenů. První úlohou, která ho k tomu přivedla, bylo vyšetřování Wattova rovnoběžníku. Cílem Čebyševa bylo nalézt mnohočlen daného stupně, který by se co nejméně odchýlil od nuly v některém daném intervalu proměnného argumentu. Čebyšev takové polynomy skutečně našel a ty po něm později byly pojmenovány „Čebyševovy polynomy“. Tyto polynomy mají mnohé zajímavé vlastnosti a mají široké uplatnění v různých oblastech matematiky a fyziky.

Čebyšev se zabýval obecně úkolem vyčíslit pro libovolnou funkci její hodnotu pro každou danou hodnotu jejího argumentu. Problémem bylo, že toho nelze dosáhnout u všech funkcí bezprostředním vypočítáním hodnot. Za tím účelem vznikl postup, při němž se daná funkce aproximuje polynomem této funkci blízkým. K tomu byla využívána úloha interpolace, tedy úloha, u které je cílem najít mnohočlen n -tého stupně nabývající stejných hodnot, jako daná funkce v $n + 1$ daných hodnotách argumentu. Tuto úlohu sice bylo možné řešit pomocí vzorců, odvozených známými matematiky jako byli Newton, Lagrange, Gauss, Bessel a další, avšak tato řešení měla četné nedostatky. Ukázalo se, že přidání nových hodnot funkce vyžaduje nové přepočítání všech vypočítaných hodnot. Ještě horší fakt byl ten, že u těchto řešení zvětšení čísla n , tedy počtu shodných hodnot

funkce a mnohočlenu, nezaručuje neomezené přiblížení jejich hodnot při všech hodnotách argumentu.

P. L. Čebyšev se nemohl s takovými nedostatky smířit a zvolil k úloze odlišný přístup. V jeho interpretaci úlohy interpolace je cílem najít takový mnohočlen daného stupně, který dává nejmenší absolutní hodnoty rozdílů hodnot funkce a mnohočlenu při všech hodnotách argumentu v daném intervalu jeho proměnné. Tento přístup se ukázal jako velmi výhodný a později ovlivnil práce mnoha dalších matematiků.

Zásadní roli sehrál Pafnutij Lvovič Čebyšev také ve vývoji počtu pravděpodobnosti. Jeho přičiněním se tato disciplína rozvinula z nedoceňovaného matematického odvětví ve skutečnou vědu. Čebyšev je také autorem dvou základních zákonů počtu pravděpodobnosti. Jedním z nich je zákon velkých čísel a druhým pak hlavní limitní věta. Kromě samotného rozvoje této vědy se také Pafnutij Lvovič zasadil o to, aby se dostala více do povědomí matematického světa a byla jí věnována adekvátní pozornost.

Další posun nejen v oblasti ortogonálních polynomů přinesl francouzský matematik Edmond Nicolas Laguerre. Ten žil v letech 1834 až 1886. Proslavil se zejména svým přínosem v oblasti geometrie a přispěl také do vývoje lineární algebry a matematické analýzy. Rozvinul také teorii eliptických funkcí. Nicméně věnoval se i aproximačním metodám a dnes je znám díky zvláštním funkcím, Laguerrovým polynomům, které jsou řešenými Laguerrovi diferenciální rovnice.

Laguerrovým současníkem byl jiný významný francouzský matematik Charles Hermite. Žil v letech 1822-1901 a byl Laguerrovým přítelem. Zejména v letech 1843 a 1844 docházelo často k jejich spolupráci ve formě vzájemné korespondence. Jeho hlavní přínos byl v oblasti teorie čísel a algebry. Dále se také zabýval ortogonálními polynomy a eliptickými funkcemi. S využitím eliptických funkcí dokázal obecně řešit algebraickou rovnici pátého stupně.

Dalším matematikem, který výrazně posunul teorii ortogonálních polynomů, byl dánský matematik Jorgen Pedersen Gram. Dnes ho známe především díky Gramovu-Schmidtovu ortogonalizačnímu procesu. Kromě toho se také věnoval teorii čísel.

Později byly zkoumány některé zvláštní vlastnosti ortogonálních polynomů. Roku 1907 studoval V. A. Steklov jejich asymptotické vlastnosti. Na jeho práci navázal v letech 1920 až 1924 G. Szegő, který zavedl polynomy, které byly kolmé na kruhu.

V současné době mají ortogonální polynomy rozmanitá využití v mnoha odvětvích matematiky i fyziky.

2 ZÁKLADNÍ POJMY

Než se začneme věnovat hlavní náplni této práce, kterou jsou ortogonální polynomy, musíme definovat některé základní pojmy. V této kapitole je čerpáno především ze zdrojů [1], [2], ze kterých je převzato také znění použitých definic.

Definice 2.1.

Nechť A, B jsou množiny prvků.

(a) Množinu A nazveme podmnožinou množiny B , jestliže pro každý prvek x platí $x \in A \Rightarrow x \in B$.

(b) Sjednocením $A \cup B$ množin A, B nazveme množinu všech prvků x , pro které platí $x \in A$ nebo $x \in B$.

(c) Průnikem $A \cap B$ množin A, B nazveme množinu všech prvků x , pro které platí $x \in A$ a zároveň $x \in B$.

(d) Je-li množina A podmnožinou množiny B , potom doplňkem množiny A vzhledem k množině B nazveme množinu A^C všech prvků x , pro které platí $x \notin A$ a zároveň $x \in B$.

(e) Rozdílem množin $A - B$ nazveme množinu všech prvků x , pro které platí $x \in A$ a zároveň $x \notin B$.

Definice 2.2.

Množina τ podmnožin množiny X se nazývá topologie na množině X , má-li následující vlastnosti:

(a₁): $\emptyset \in \tau, X \in \tau$, kde \emptyset je prázdná množina.

(a₂): Jestliže $U_i \in \tau$ pro $i = 1, \dots, n$, potom platí $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau$.

(a₃): Je-li (U_n) libovolný systém množin z množiny τ , platí

$$\bigcup_n U_n \in \tau.$$

Je-li τ topologie na množině X , nazýváme X topologický prostor a prvky systému τ otevřené množiny v X .

Definice 2.3.

Množina M podmnožin množiny X se nazývá σ -algebra na množině X , má-li následující vlastnosti:

$$(b_1): X \in M$$

(b_2): Je-li A podmnožinou množiny M , pak $A^c \in M$, kde A^c je doplněk množiny A vzhledem k množině X .

(b_3): Je-li $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, kde $A_n \in M$ pro $n = 1, 2, 3, \dots$, potom platí $A \in M$.

Je-li množina M σ -algebrou na množině X , nazýváme X měřitelným prostorem a prvky množiny M měřitelnými množinami v X .

Definice 2.4.

Je-li X měřitelný prostor, Y topologický prostor a f zobrazení X do Y , říkáme, že f je měřitelné právě tehdy, když pro každou otevřenou množinu V v Y je $f^{-1}(V)$ měřitelná množina v X .

Definice 2.5.

Nechť M je množina prvků (tyto prvky označíme u, v, \dots). Tuto množinu nazveme lineární množinou právě tehdy, když každé dvojici prvků u, v z M je přiřazen součet $u + v \in M$ a zároveň každému prvku $u \in M$ a každému číslu $a \in \mathbb{R}$ (\mathbb{R} je množina všech reálných čísel) je přiřazen součin $au = a \cdot u \in M$.

Definice 2.6.

Lineární množina H se nazývá lineární prostor (popř. vektorový prostor) právě tehdy, když jsou splněny následující axiomy:

$$(c_1): u_1 + u_2 = u_2 + u_1,$$

$$(c_2): u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3,$$

$$(c_3): u + u_1 = u + u_2 \Rightarrow u_1 = u_2,$$

$$(c_4): a(u_1 + u_2) = au_1 + au_2,$$

$$(c_5): (a + b)u = au + bu,$$

$$(c_6): (ab)u = a(bu),$$

$$(c_7): 1 \cdot u = u,$$

pro všechna $u, u_1, u_2, u_3 \in H$ a všechna $a, b \in \mathbb{R}$.

Definice 2.7.

Nechť H je lineární prostor. Prvek $u \in H$ se nazývá lineární kombinace prvků $u_1, \dots, u_m \in H$ právě tehdy, když

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = \sum_{i=1}^m a_i u_i,$$

kde a_1, \dots, a_m jsou reálná čísla a nazývají se koeficienty lineární kombinace.

Definice 2.8.

Nechť H je lineární prostor. Množina všech lineárních kombinací $u = \sum_{j=1}^m a_j u_j$, kde a_1, \dots, a_m jsou reálná čísla a $u_1, \dots, u_m \in A \subset H$ se nazývá lineární obal množiny A , značíme $\text{lin}[A]$.

Je-li množina A zadána výčtem prvků $A = \{u, v, \dots\}$, budeme značit lineární obal této množiny $\text{lin}[u, v, \dots]$.

Definice 2.9.

Nechť H je lineární prostor. Prvky $u_1, \dots, u_m \in H$ se nazývají lineárně nezávislé, jestliže je rovnost $a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$ splněna jen v případě $a_1 = \dots = a_m = 0$. V opačném případě se tyto prvky nazývají lineárně závislé.

Definice 2.10

Posloupnost (u_n) se nazývá posloupnost lineárně nezávislých prvků z prostoru H právě tehdy, když pro každé číslo $1, 2, \dots$ jsou prvky u_1, \dots, u_m lineárně nezávislé.

Definice 2.11.

Lineární prostor H se nazývá normovaný prostor právě tehdy, když každému prvku $u \in H$ je přiřazeno číslo $\|u\| \in \mathbb{R}$, pro které platí následující vlastnosti:

$$(d_1): \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$$

$$(d_2): \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|,$$

$$(d_3): \|au\| = |a| \|u\|,$$

kde a je reálné číslo. Číslo $\|u\|$ se nazývá norma prvku $u \in H$.

Definice 2.12.

Nezáporná míra je taková funkce μ , která je definována na σ -algebře M , zobrazuje M do intervalu $[0, \infty)$ a je spočetně aditivní. To znamená, že je-li (A_i) disjunktní systém prvků množiny M , potom platí:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu A_i$$

Prostor s mírou μ je měřitelný prostor, na jehož σ -algebře měřitelných množin je definována nezáporná míra.

Definice 2.13.

Eukleidovský prostor R^k dimenze k je množina všech bodů $x = (x_1, \dots, x_k)$, jejichž souřadnice x_i jsou reálná čísla a platí následující vztahy: Je-li $x = (x_1, \dots, x_k)$, $y = (y_1, \dots, y_k)$ a α reálné číslo, potom $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_k + y_k)$ a $\alpha x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_k)$. Na eukleidovském prostoru je definován skalární součin vztahem:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^k x_i y_i.$$

Věta 2.14.

Označme M_k množinu všech podmnožin $A \subset R^k$, které pro libovolnou množinu $B \subset R^k$ splňují vztah $l_k^*(B) = l_k^*(B \cap A) + l_k^*(B - A)$, kde $l_k^*(B)$ značí tzv. vnější k -rozměrnou Lebesgueovu míru množiny B . Platí, že M_k je σ -algebrou podmnožin prostoru R^k a funkce l_k , která je zúžením funkce l_k^* na množinu M_k je mírou na M_k a nazývá se k -rozměrná Lebesgueova míra. Množiny $A \in M_k$ se nazývají měřitelné v Lebesgueově smyslu. Míra l_k je úplná, což znamená, že každá podmnožina množiny, jejíž l_k míra je rovna 0, je l_k -měřitelná a její l_k -míra je také rovna 0.

Znění této věty a některé další vlastnosti Lebesgueovy míry jsou uvedeny například v [1, str. 18].

Definice 2.15.

Nechť X je prostor s nezápornou mírou μ . Je-li $p \in \mathbb{N}$ a f měřitelná funkce na X , definujeme

$$\|f\|_p = \sqrt[p]{\int_X |f|^p d\mu}$$

Systém všech f , pro něž $\|f\|_p < \infty$ označíme $L_p(\mu)$. Číslo $\|f\|_p$ se nazývá L_p -normou funkce f .

Prvky $L_1(\mu)$ se nazývají lesbuegovsky integrovatelné funkce.

V této práci nás budou zajímat především takové míry, pro které platí následující vlastnost. Je-li Z otevřený interval a M σ -algebra podmnožin tohoto intervalu, pak pro míru μ platí pro každé $A \in M$ $\mu(A) = \int_A \omega(x) dx$, kde ω je nezáporná funkce lesbuegovsky integrovatelná přes interval Z . Funkci ω budeme říkat váhová funkce.

3 APROXIMACE FUNKCÍ

Při psaní této kapitoly jsme využili především zdroj [3].

Matematická analýza je obor matematiky, jejímž úkolem je studovat funkce a operace s nimi. Běžnými úlohami matematické analýzy jsou například stanovení hodnoty funkce v daném bodě, výpočet hodnoty derivace, výpočet integrálu z dané funkce přes daný interval či řešení diferenciálních rovnic. Zpravidla jde o úlohy natolik složité, že nejsme schopni je řešit bez pomoci počítače. Avšak i za užití počítače jsme schopni modelovat pouze úlohy, jejichž vstupní i výstupní data jsou vektory o konečném počtu složek, tzv. numerické úlohy. Ve většině případů jsme však vystaveni úlohám, které numerické nejsou. Při řešení takových úloh bývá nutné nejprve provést aproximaci (přibližné nahrazení) zadané úlohy úlohou numerickou.

Oblasti matematiky, v nichž užíváme aproximací, jsou značně různorodé. Jedním z nejčastějších úkolů numerických metod matematické analýzy je aproximace funkcí. Při řešení úloh matematické analýzy totiž často nahrazujeme zadanou funkci f jinou funkcí φ , která v požadovaném smyslu napodobuje chování funkce f a zároveň se snadno zpracovává či modeluje na počítači. Tuto funkci φ pak nazýváme aproximací funkce f . Dalším typickým příkladem úloh matematické analýzy jsou numerické metody pro výpočet určitého integrálu z funkce f . Při nich nahrazujeme funkci f takovou funkcí, která se snadno integruje. Použití aproximace původní úlohy má však za následek nepřesnost v dosaženém výsledku. Úkolem numerických metod matematické analýzy je tedy i zkoumat odchylku získaného řešení od řešení přesného.

V této práci se budeme zabývat výhradně funkcemi jedné reálné proměnné. Při výběru vhodné aproximace zadané funkce postupujeme tak, že předem zvolíme tvar aproximující funkce, ve kterém vystupují proměnné parametry. Následně se snažíme určit takové hodnoty parametrů, aby získaná aproximace vyhovovala našim požadavkům. Velmi často postupujeme tak, že nejprve pevně zvolíme systém jednoduchých základních funkcí $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ takových, aby se s nimi dobře pracovalo. Danou funkci f pak aproximujeme lineární kombinací φ základních funkcí:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^n c_i \varphi_i(x) = c_0 \varphi_0(x) + c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_n \varphi_n(x),$$

kde c_0, c_1, \dots, c_n jsou reálná čísla. Problém výběru vhodné aproximace funkce f se tím převádí na určení hodnot parametrů c_0, c_1, \dots, c_n . Protože aproximace φ závisí na parametrech c_0, c_1, \dots, c_n lineárně, říkáme, že jde o aproximaci lineárního typu. Při pevně daných základních funkcích $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ nazýváme množinu všech funkcí ve tvaru:

$$\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

třídou aproximujících funkcí V_n .

Jsou-li základní funkce $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ dány jako $1, x, x^2, \dots, x^n$, případně jako

$1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n$, kde x_0 je pevné reálné číslo, je třída aproximujících funkcí V_n třídou polynomů nejvýše n -tého stupně.

Výběr vhodné aproximace funkce závisí na funkci E dané pro $x \in \langle a; b \rangle$ vztahem

$$E(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Tuto funkci budeme nazývat chybou aproximace. Při výběru dobré aproximace φ z dané třídy V_n budeme požadovat, aby byla chyba aproximace v nějakém smyslu malá. Ve většině případů nás však prakticky nezajímá znaménko chyby a kvalitu aproximace posuzujeme podle absolutní hodnoty chyby aproximace $|E(x)| = |f(x) - \varphi(x)|$. Máme ovšem mnoho možností, jak posuzovat velikost chyby aproximace. Jednou z nich je požadavek, aby maximální hodnota $|E(x)|$ na intervalu $\langle a; b \rangle$ byla menší než nějaké dané číslo $\varepsilon > 0$. Jinou možností je posuzovat velikost integrálu z funkce $|E(x)|$ přes interval $\langle a; b \rangle$. Jindy pro nás může být důležitá velikost $|E(x)|$ pouze v daných bodech intervalu $\langle a; b \rangle$. Volba způsobu posuzování chyby aproximace tedy závisí na nás. Volíme ho podle způsobu zadání funkce f a podle typu dané úlohy.

V další části si rozdělíme kritéria pro měření chyby aproximace na dva základní typy podle toho, zda kvalitu aproximace posuzujeme na základě hodnot chyby E ve všech bodech intervalu $\langle a; b \rangle$, nebo jen na základě hodnot ve vybraných bodech $x_i \in \langle a; b \rangle$. První z těchto případů nazveme spojitým, druhý pak diskrétním.

Ve spojitém případě se v praxi často využívá pro měření chyby aproximace veličina

$$\rho_{\max}(f, \varphi) = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f(x) - \varphi(x)|.$$

Typickým příkladem pro takové posuzování chyby aproximace jsou matematické úlohy, jejichž cílem je přibližný výpočet hodnot dané funkce, kde je našim požadavkem, aby $|E(x)|$ byla malá pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$.

Dalším častým způsobem měření chyby aproximace ve spojitém případě jsou veličiny

$$\rho_p(f, \varphi) = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^p dx},$$

kde $p \geq 1$. Z těchto veličin se v praxi nejvíce využívá

$$\rho_2(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 dx}.$$

Toto kritérium je někdy výhodné použít tak, aby se v něm více uplatňovaly hodnoty chyby aproximace v některých částech intervalu $\langle a; b \rangle$. To se provádí užitím váhové funkce ω , která je na intervalu $(a; b)$ kladná a spojitá. Při užití váhové funkce ω má předchozí veličina tvar

$$\rho_{2,\omega}(f, \varphi) = \sqrt{\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|^2 \omega(x) dx}.$$

V praxi však často nastává situace, kdy je funkce f zadána tabulkou funkčních hodnot $f(x_i)$ v bodech $x_i \in \langle a; b \rangle$, kde $i = 0, 1, \dots, m$. V takových situacích používáme pro měření chyby aproximace diskrétní obdoby veličin, které jsme využívali ve spojitém případě. První kritérium má tedy tvar $\rho_{max}^m(f, \varphi) = \max_{i=0,1,\dots,m} |f(x_i) - \varphi(x_i)|$.

Další veličiny mají pro měření chyby aproximace u diskrétních funkcí tvar

$$\rho_p^m(f, \varphi) = \sqrt[p]{\sum_{i=0}^m |f(x_i) - \varphi(x_i)|^p},$$

kde $p \geq 1$. Z těchto veličin se nejčastěji používá

$$\rho_2^m(f, \varphi) = \sqrt{\sum_{i=0}^m |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2}.$$

Potřebujeme-li dosáhnout toho, aby různé body x_i měly různý vliv na veličinu $\rho_2^m(f, \varphi)$, přiřadíme jim různé váhy ω_i , přičemž ω_i jsou pevně zvolená kladná čísla. Takto vzniklá veličina má tvar

$$\rho_{2,\omega}^m(f, \varphi) = \sqrt{\sum_{i=0}^m |f(x_i) - \varphi(x_i)|^2 \omega_i}.$$

Dále se již budeme věnovat aproximací pomocí polynomů. Třidu V_n aproximujících funkcí, která se skládá z polynomů stupně nejvýše n budeme značit Π_n . Důvodů pro používání polynomiálních aproximací existuje celá řada. Nejvýznamnějším z nich je skutečnost, že se polynomy dají plně popsat konečným počtem údajů, kterými jsou stupeň polynomu a jeho jednotlivé koeficienty, a že se jejich hodnoty dají bez problému počítat konečným počtem aritmetických operací. Dalším důvodem pro užití polynomů je to, že se s nimi dobře matematicky pracuje (je snadné je derivovat a integrovat). Důležité ale především je, že pomocí tříd Π_n můžeme spojitou funkci aproximovat s libovolnou přesností. Toto tvrzení je obsahem následující věty:

Věta 3.1. (Weierstrassova)

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a; b \rangle$. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n a polynom $\varphi \in \Pi_n$ n -tého stupně takový, že

$$\rho_{\max}(f, \varphi) = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon.$$

Důkaz této věty podal K. Weierstrass a je proveden například ve [4, str. 49].

4 ORTOGONÁLNÍ POLYNOMY

Ve zbytku této práce se budeme věnovat speciálnímu případu polynomů, a to polynomům ortogonálním.

4.1 HILBERTOVY PROSTORY

Před zavedením pomu ortogonální polynom je však třeba dodefinovat několik potřebných pojmů. Znění definic v této části práce je přejato ze zdrojů [1], [2].

Definice 4.1.1.

Reálný lineární prostor H se nazývá reálný prostor se skalárním součinem právě tehdy, když je každé dvojici prvků $u, v \in H$ přiřazeno takové reálné číslo (u, v) , že platí následující axiomy:

$$(e_1): (u, v) = (v, u),$$

$$(e_2): (au, v) = a(u, v),$$

$$(e_3): (u_1 + u_2, v) = (u_1, v) + (u_2, v),$$

$$(e_4): (u, u) \geq 0 \text{ pro každý prvek } u \in H, \text{ přičemž } (u, u) = 0 \text{ právě tehdy, když } u = 0,$$

přičemž a je libovolné reálné číslo a u_1, u_2 libovolné prvky reálného lineárního prostoru H . Číslo (u, v) se nazývá skalární součin prvků u, v .

Definice 4.1.2.

Prvky u, v se nazývají ortogonální právě tehdy, když $(u, v) = 0$.

Definice 4.1.3.

Posloupnost (u_n) prvků prostoru H se nazývá ortogonální systém právě tehdy, když

$$(u_n, u_m) = \begin{cases} = 0 & \text{pro } n \neq m \\ \neq 0 & \text{pro } n = m \end{cases}.$$

Z této definice plyne pro $n = m$, že $(u_n, u_n) \neq 0$, tj. $u_n \neq 0$. Všechny prvky ortogonálního systému jsou tedy různé od nulového prvku.

Definice 4.1.4.

Posloupnost (u_n) prvků prostoru H se nazývá ortonormální systém právě tehdy, když

$$(u_n, u_m) = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq m \\ 1 & \text{pro } n = m \end{cases}.$$

Z této definice plyne, že pro $n = m$ $(u_n, u_m) = \|u_n\|^2 = 1$. Norma $\|u_n\|$ všech členů ortonormálního systému (u_n) je tedy rovna 1.

Definice 4.1.5.

Lineární prostor H nazveme *metrickým prostorem právě tehdy, když je na něm definována vzdálenost ϱ s následujícími vlastnostmi:*

(f_1) : Pro všechny prvky $u, v \in H$ platí $0 \leq \varrho(u, v) < \infty$.

(f_2) : Rovnost $\varrho(u, v) = 0$ nastává právě tehdy, když $u = v$.

(f_3) : Pro všechny prvky $u, v \in H$ platí $\varrho(u, v) = \varrho(v, u)$.

(f_4) : Pro všechny prvky $u, v, w \in H$ platí $\varrho(u, v) \leq \varrho(u, w) + \varrho(w, v)$.

Vlastnost (f_4) se nazývá trojúhelníková nerovnost.

Definice 4.1.6.

Nechť (f_n) je posloupnost $L_p(\mu)$ a $f \in L_p(\mu)$ je taková funkce, pro kterou

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

Potom (f_n) konverguje k f v $L_p(\mu)$. Jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo N takové, že pro $m, n > N$ je $\|f_m - f_n\|_p < \varepsilon$, nazývá se posloupnost (f_n) *cauchyovská* v $L_p(\mu)$.

Na prostoru se skalárním součinem můžeme podle vlastnosti (e_4) definice 4.1.1. skalárního součinu definovat normu $\|u\|$ prvku $u \in H$ jako druhou odmocninu z (u, u) . Platí tedy $\|u\|^2 = (u, u)$.

Dále zde můžeme definovat vzdálenost prvků u, v jako $\|u - v\|$. Tím jsou splněny axiomy metrického prostoru. Jestliže je navíc takovýto prostor úplný, tj. každá cauchyovská posloupnost konverguje v H , potom se H nazývá Hilbertův prostor.

Více poznatků o Hilbertových prostorech lze najít například v [2, str. 94].

4.2 GRAMŮV-SCHMIDTŮV ORTOGONALIZAČNÍ PROCES

Nyní si ukážeme algoritmus, jehož využití vede k vytvoření systému ortogonálních prvků v daném Hilbertově prostoru.

Věta 4.2.1. *Nechť (u_n) je posloupnost lineárně nezávislých prvků Hilbertova prostoru H . Pak existuje takový ortogonální systém (v_n) prvků prostoru H , že platí*

$$\text{lin}[u_1, \dots, u_n] = \text{lin}[v_1, \dots, v_n] \text{ pro } n=1, 2, \dots$$

Důkaz: Důkaz budeme provádět matematickou indukcí. Nejprve položíme $u_1 = v_1$

($\|u_1\| \neq 0$). Je zřejmé, že $\text{lin}[v_1] = \text{lin}[u_1]$. Věta tedy platí pro $n = 1$. Dále budeme předpokládat, že již byly určeny prvky v_1, \dots, v_{n-1} tak, že platí

$$\begin{aligned} \text{lin}[u_1, \dots, u_{n-1}] &= \text{lin}[v_1, \dots, v_{n-1}], \\ (v_j, v_m) &= \begin{cases} = 0 & \text{pro } j < m < n \\ \neq 0 & \text{pro } j = m < n \end{cases}. \end{aligned} \quad (1)$$

Položíme

$$v_n = u_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_j v_j,$$

kde $a_j = \frac{(u_n, v_j)}{(v_j, v_j)}$ pro $j = 1, \dots, n-1$. Z předpokladu (1) plyne, že

$$(v_n, v_j) = (u_n - \sum_{m=1}^{n-1} a_m v_m, v_j) = (u_n, v_j) - \sum_{m=1}^{n-1} a_m (v_m, v_j) = a_j (v_j, v_j) - a_j (v_j, v_j),$$

a tedy $(v_n, v_j) = 0$.

Platí tedy $(v_j, v_m) = \begin{cases} = 0 & \text{pro } j < m \leq n \\ \neq 0 & \text{pro } j = m \leq n \end{cases}$ a posloupnost (v_n) je tedy ortogonální.

Protože $v_n \in \text{lin}[u_1, \dots, u_n]$, platí $\text{lin}[u_1, \dots, u_n] \supset \text{lin}[v_1, \dots, v_n]$. Zároveň však platí

$$u_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j v_j + v_n \in \text{lin}[v_1, \dots, v_n],$$

a proto $\text{lin}[u_1, \dots, u_n] \subset \text{lin}[v_1, \dots, v_n]$. Posloupnost (v_n) tedy splňuje požadavek $\text{lin}[u_1, \dots, u_n] = \text{lin}[v_1, \dots, v_n]$.

Věta včetně důkazu je přejata z [1, str. 62].

Výše popsaný algoritmus se nazývá Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces.

Takto získaný ortogonální systém není dán jednoznačně. Vynásobením libovolného prvku ortogonálního systému (v_n) získáme další ortogonální systém, jehož lineární obal se tímto krokem nezmění. To vyplývá z vlastnosti (e_2) definice 4.1.1. skalárního součinu. Je-li totiž $(u, v) = 0$, potom $(au, v) = a(u, v) = 0 \cdot a = 0$.

Příklad 4.2.2.

Mějme prvky $u_1 = (1, -1, 0, 1, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, 1, 2)$, $u_3 = (3, 0, -2, -1, 2)$, $u_4 = (-2, -1, -10, 8, 1)$ eukleidovského prostoru R^5 . Určeme ortogonální prvky v_1, v_2, v_3, v_4 na tomto prostoru tak, aby $\text{lin}[u_1, u_2, u_3, u_4] = \text{lin}[v_1, v_2, v_3, v_4]$.

Řešení: Položíme

$$v_1 = u_1 = (1, -1, 0, 1, 1).$$

V dalším kroku vyjádříme v_2 jako

$$\begin{aligned} v_2 &= u_2 - \frac{(u_2, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1. \\ v_2 &= (2, 1, -1, 1, 2) - \frac{(2, 1, -1, 1, 2) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)}{(1, -1, 0, 1, 1) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)} \cdot (1, -1, 0, 1, 1) \\ v_2 &= (2, 1, -1, 1, 2) - (1, -1, 0, 1, 1) \\ v_2 &= (1, 2, -1, 0, 1) \end{aligned}$$

Dále

$$\begin{aligned} v_3 &= u_3 - \frac{(u_3, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_3, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2. \\ v_3 &= (3, 0, -2, -1, 2) - \frac{(3, 0, -2, -1, 2) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)}{(1, -1, 0, 1, 1) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)} \cdot (1, -1, 0, 1, 1) \\ &\quad - \frac{(3, 0, -2, -1, 2) \cdot (1, 2, -1, 0, 1)}{(1, 2, -1, 0, 1) \cdot (1, 2, -1, 0, 1)} \cdot (1, 2, -1, 0, 1) \\ v_3 &= (3, 0, -2, -1, 2) - (1, -1, 0, 1, 1) - (1, 2, -1, 0, 1) \\ v_3 &= (1, -1, -1, -2, 0) \end{aligned}$$

Nakonec

$$v_4 = u_4 - \frac{(u_4, v_1)}{(v_1, v_1)} v_1 - \frac{(u_4, v_2)}{(v_2, v_2)} v_2 - \frac{(u_4, v_3)}{(v_3, v_3)} v_3.$$

$$v_4 = (-2, -1, -10, 8, 1) - \frac{(-2, -1, -10, 8, 1) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)}{(1, -1, 0, 1, 1) \cdot (1, -1, 0, 1, 1)} \cdot (1, -1, 0, 1, 1)$$

$$- \frac{(-2, -1, -10, 8, 1) \cdot (1, 2, -1, 0, 1)}{(1, 2, -1, 0, 1) \cdot (1, 2, -1, 0, 1)} \cdot (1, 2, -1, 0, 1)$$

$$- \frac{(-2, -1, -10, 8, 1) \cdot (1, -1, -1, -2, 0)}{(1, -1, -1, -2, 0) \cdot (1, -1, -1, -2, 0)} \cdot (1, -1, -1, -2, 0)$$

$$v_4 = (-2, -1, -10, 8, 1) - 2 \cdot (1, -1, 0, 1, 1) - (1, 2, -1, 0, 1) + (1, -1, -1, -2, 0)$$

$$v_4 = (-4, -2, -10, 4, -2)$$

Nyní se již budeme věnovat prostoru $L_2(\mu)$, konkrétně funkcím jedné reálné proměnné, spojitým na intervalu (a, b) . Budeme uvažovat takové míry μ , pro které platí $\mu(A) = \int_A \omega(x) dx$, kde ω je nezáporná váhová funkce lesbuegovsky integrovatelná na intervalu (a, b) .

Věta 4.2.3.

Na prostoru $L_2(\mu)$ můžeme definovat skalární součin funkcí f, g vztahem

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx.$$

Důkaz: Je třeba ověřit jednotlivé axiomy definice skalárního součinu.

- 1) $(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)\omega(x)dx = (g, f)$
- 2) $(af, g) = \int_a^b af(x)g(x)\omega(x)dx = a \int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx = a(f, g)$
- 3) $(f_1 + f_2, g) = \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))g(x)\omega(x)dx = \int_a^b f_1(x)g(x)\omega(x) + f_2(x)g(x)\omega(x)dx = \int_a^b f_1(x)g(x)\omega(x)dx + \int_a^b f_2(x)g(x)\omega(x)dx = (f_1, g) + (f_2, g)$
- 4) Vlastnost (e_4) plyne z vlastností normy $\|f\|_2$ viz definice 2.15. a vlastnost (d_1) definice 2.11.

Věta 4.2.4.

V diskretním případě (máme-li zadány funkce pouze pomocí funkčních hodnot v bodech x_i , kde $i = 1, 2, \dots, m$) definujeme skalární součin funkcí f, g vztahem

$$(f, g) = \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i)\omega_i,$$

kde ω_i jsou váhy (kladná čísla) v jednotlivých bodech x_i .

Důkaz: Znovu je třeba ověřit jednotlivé axiomy definice skalárního součinu.

- 1) $(f, g) = \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i)\omega_i = \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i)\omega_i = \sum_{i=0}^m g(x_i)f(x_i)\omega_i = (g, f)$
- 2) $(af, g) = \sum_{i=0}^m af(x_i)g(x_i)\omega_i = a \sum_{i=0}^m f(x_i)g(x_i)\omega_i = a(f, g)$
- 3) $(f_1 + f_2, g) = \sum_{i=0}^m (f_1(x_i) + f_2(x_i))g(x_i)\omega_i = \sum_{i=0}^m f_1(x_i)g(x_i)\omega_i + f_2(x_i)g(x_i)\omega_i = \sum_{i=0}^m f_1(x_i)g(x_i)\omega_i + \sum_{i=0}^m f_2(x_i)g(x_i)\omega_i = (f_1, g) + (f_2, g)$
- 4) Protože ω_i jsou kladná čísla a $f(x_i)f(x_i) = f(x_i)^2$ nezáporná čísla, pak určitě platí $(f, f) \geq 0$ a případ $(f, f) = 0$ nastává právě tehdy, když $f(x_i) = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$.

Z posledních dvou vět je patrné, že pojem ortogonality funkcí je závislý na volbě váhové funkce či na volbě vah v jednotlivých bodech v diskretním případě. Zavedením vzdálenosti funkcí f, g na tomto prostoru jako $\|f - g\|_2$ dostaneme Hilbertův prostor. Více v [2, str. 95].

V další části práce se již budeme věnovat množině polynomů na tomto Hilbertově prostoru. Tu můžeme vnímat jako lineární obal prvků posloupnosti (u_j) , kde $u_0 = 1$ a $u_i = x^i$ pro $i = 1, 2, \dots, j$. Budeme ji značit symbolem Π_j . Provedeme-li pro tuto posloupnost Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces, získáme posloupnost ortogonálních polynomů. Pro ně lze vyjádřit rekurentní vztah následujícím způsobem.

Věta 4.2.5.

Na množině Π_j existuje taková posloupnost polynomů p_j , $j = 1, 2, \dots$, že platí $(p_i, p_k) = 0$ pro všechna $i \neq k$. Tyto polynomy jsou dány jednoznačně následujícím rekurentním vztahem:

$$p_0(x) = 1,$$

$$p_{i+1}(x) = (x - \alpha_{i+1})p_i(x) - \beta_{i+1}^2 p_{i-1},$$

kde pokládáme $p_{-1} = 0$ a platí

$$\alpha_{i+1} = \frac{(xp_i, p_i)}{(p_i, p_i)} \text{ pro } i \geq 0,$$

$$\beta_{i+1}^2 = \begin{cases} 0 & \text{pro } i = 0 \\ \frac{(p_i, p_i)}{(p_{i-1}, p_{i-1})} & \text{pro } i \geq 1 \end{cases}.$$

Důkaz: Důkaz budeme provádět matematickou indukcí. Položíme $p_0(x) = 1$. Dále budeme předpokládat, že jsme již sestrojili ortogonální polynomy pro $j \leq i$ a ukázali jsme, že jsou dány jednoznačně. Nyní potřebujeme ukázat, že existuje polynom $p_{i+1} \in \Pi_{i+1}$, který je dán jednoznačně, pro který $(p_{i+1}, p_j) = 0$ pro $j \leq i$ a který splňuje vztah

$$p_{i+1}(x) = (x - \alpha_{i+1})p_i(x) - \beta_{i+1}^2 p_{i-1}.$$

Každý polynom $p_{i+1} \in \Pi_{i+1}$ lze zapsat ve tvaru

$$p_{i+1}(x) = (x - \alpha_{i+1})p_i(x) + c_{i-1}p_{i-1}(x) + c_{i-2}p_{i-2}(x) + \dots + c_0p_0,$$

protože koeficient u nejvyšší mocniny x v námi tvořených polynomech má hodnotu 1. Protože $(p_j, p_k) = 0$ pro všechna $j, k \leq i$ kde $j \neq k$, podmínka $(p_{i+1}, p_j) = 0$ pro $j \leq i$ platí pouze v případě

$$(p_{i+1}, p_i) = (xp_i, p_i) - \alpha_{i+1}(p_i, p_i) = 0,$$

$$(p_{i+1}, p_{j-1}) = ((x - \alpha_{i+1})p_i, p_{j-1}) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = (xp_{j-1}, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = 0 \text{ pro } j \leq 1.$$

Tím dostáváme soustavu lineárních rovnic, kde neznámé jsou α_{i+1} a c_{j-1} . Protože $(p_i, p_i) \neq 0$ a zároveň $(p_{j-1}, p_{j-1}) \neq 0$, má tato soustava jednoznačné řešení.

Z první rovnice tedy dostaneme

$$\alpha_{i+1} = \frac{(xp_i, p_i)}{(p_i, p_i)}.$$

Dále využijeme indukční předpoklad

$$p_j(x) = (x - \alpha_j)p_{j-1}(x) - \beta_j^2 p_{j-2}(x).$$

Z něj si můžeme vyjádřit

$$xp_{j-1} = p_j(x) + \alpha_j p_{j-1}(x) + \beta_j^2 p_{j-2}(x),$$

z čehož dostaneme vyjádření

$$(xp_{j-1}, p_i) = (p_j, p_i).$$

Dosazením tohoto výrazu do zbývajících rovnic dostaneme vztah

$$(p_j, p_i) + c_{j-1}(p_{j-1}, p_{j-1}) = 0,$$

a tedy

$$c_{j-1} = -\frac{(p_j, p_i)}{(p_{j-1}, p_{j-1})} = \begin{cases} -\beta_{i+1}^2 & \text{pro } j = i \\ 0 & \text{pro } j < i \end{cases}$$

Tím je věta dokázána.

Znění této věty včetně důkazu je přejato z [5, str. 151].

V praxi se nám v některých případech příliš nehodí polynomy, jejichž koeficient u nejvyšší mocniny x má hodnotu 1. V těchto případech násobíme polynomy p_j vhodnou multiplikativní konstantou A_j .

4.3 SPECIÁLNÍ PŘÍKLADY ORTOGONÁLNÍCH POLYNOMŮ

V poslední části čtvrté kapitoly se budeme věnovat některým speciálním příkladům ortogonálních polynomů.

4.3.1 GRAMOVY POLYNOMY

Nejprve uvedeme jeden příklad diskrétně ortogonálních polynomů, a to pro množinu bodů x_i pro $i = 0, 1, \dots, m$, které jsou ekvidistantní, tj. $x_{i+1} - x_i = h$ pro všechna $i = 0, 1, \dots, m - 1$, kde h je kladné reálné číslo. Dále budeme uvažovat váhy bodů $\omega_i = 1$ pro $i = 0, 1, \dots, m$ a takové ekvidistantní body, které jsou rozloženy symetricky kolem počátku s krokem $h = 1$, tj. $x_i = i - \frac{1}{2}m$ pro $i = 0, 1, \dots, m$. Za těchto podmínek můžeme sestavit ortogonální polynomy následným rekurentním vztahem:

$$G_0(x) = 1,$$

$$G_1(x) = x,$$

$$G_{j+1}(x) = xG_j(x) - \frac{j^2[(m+1)^2 - j^2]}{4(4j^2 - 1)}G_{j-1}(x) \text{ pro } j \geq 1.$$

Tyto diskrétně ortogonální polynomy G_j , kde $j = 0, 1, \dots, m$, nazýváme Gramovy polynomy. Několik dalších Gramových polynomů má tedy tvar:

$$G_2(x) = x^2 - \frac{1}{12}[(m+1)^2 - 1],$$

$$G_3(x) = x^3 - \frac{1}{20}[3(m+1)^2 - 7]x,$$

$$G_4(x) = x^4 - \frac{1}{14}[3(m+1)^2 - 13]x^2 + \frac{3}{560}m(m+2)[(m+1)^2 - 9].$$

Více o nich lze najít ve zdroji [3, str. 60], ze kterého jsou také přejata data použitá v této části.

Příklad 4.3.1.

Pro $m = 4$ dostáváme Gramovy polynomy ve tvaru:

$$G_0(x) = 1,$$

$$G_1(x) = x,$$

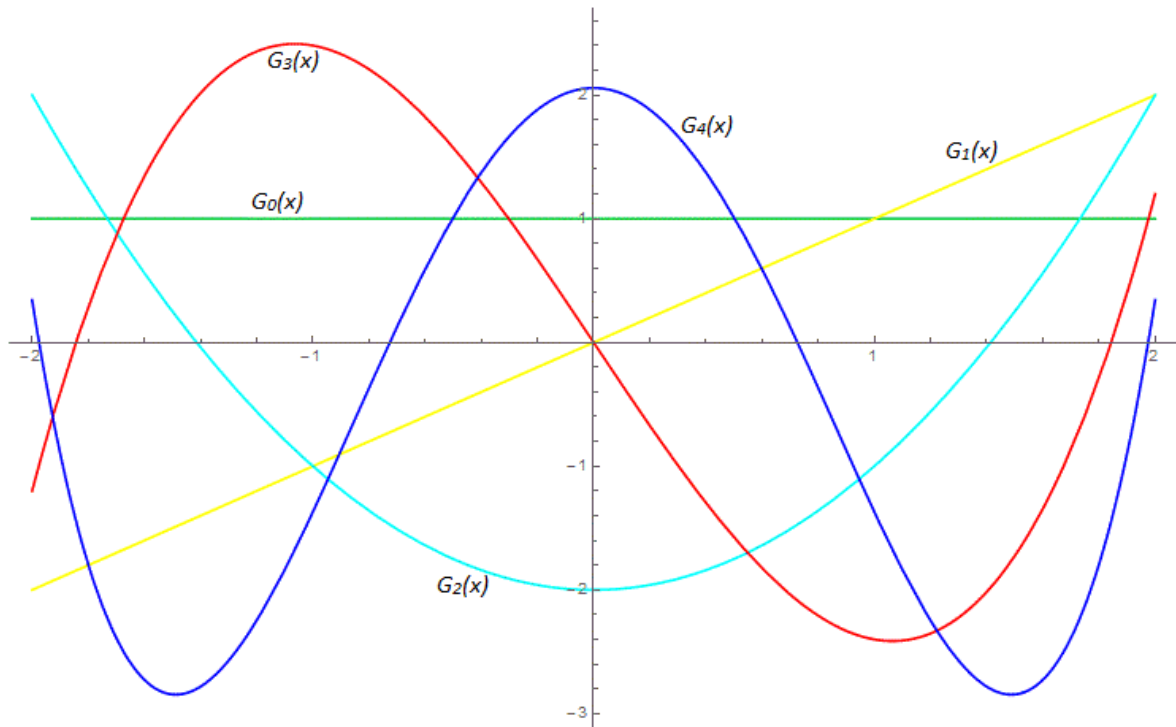
$$G_2(x) = x^2 - 2,$$

$$G_3(x) = x^3 - \frac{17}{5}x,$$

$$G_4(x) = x^4 - \frac{31}{7}x^2 + \frac{72}{35}.$$

Jejich grafické znázornění je zachyceno v grafu 1.

Gramovy polynomy mají význam například v aproximaci funkce metodou nejmenších čtverců.



Graf 1-Gramovy polynomy

4.3.2 JACOBOVY POLYNOMY

Dále se již budeme zabývat příklady spojitě ortogonálních polynomů. Významným příkladem takových polynomů jsou Jacobiovy polynomy. Jde o polynomy ortogonální na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ s váhovou funkcí

$$\omega(x) = (1-x)^a(1+x)^b, \quad (2)$$

kde a, b jsou reálná čísla větší než -1 .

4.3.3 LEGENDROVY POLYNOMY

Speciálním případem Jacobiových polynomů jsou Legendrovy polynomy. Jde o případ, kdy čísla a, b ze vzorce (2) jsou rovna 0. Váhová funkce má tedy tvar $\omega(x) = 1$. S touto váhovou funkcí můžeme na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ definovat ortogonální polynomy následujícím způsobem:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} [(x^2 - 1)^j] \text{ pro } j = 1, 2, \dots$$

Rekurentní vztah má v případě Legendrových polynomů tvar

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x,$$

$$P_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1}xP_j(x) - \frac{j}{j+1}P_{j-1}(x).$$

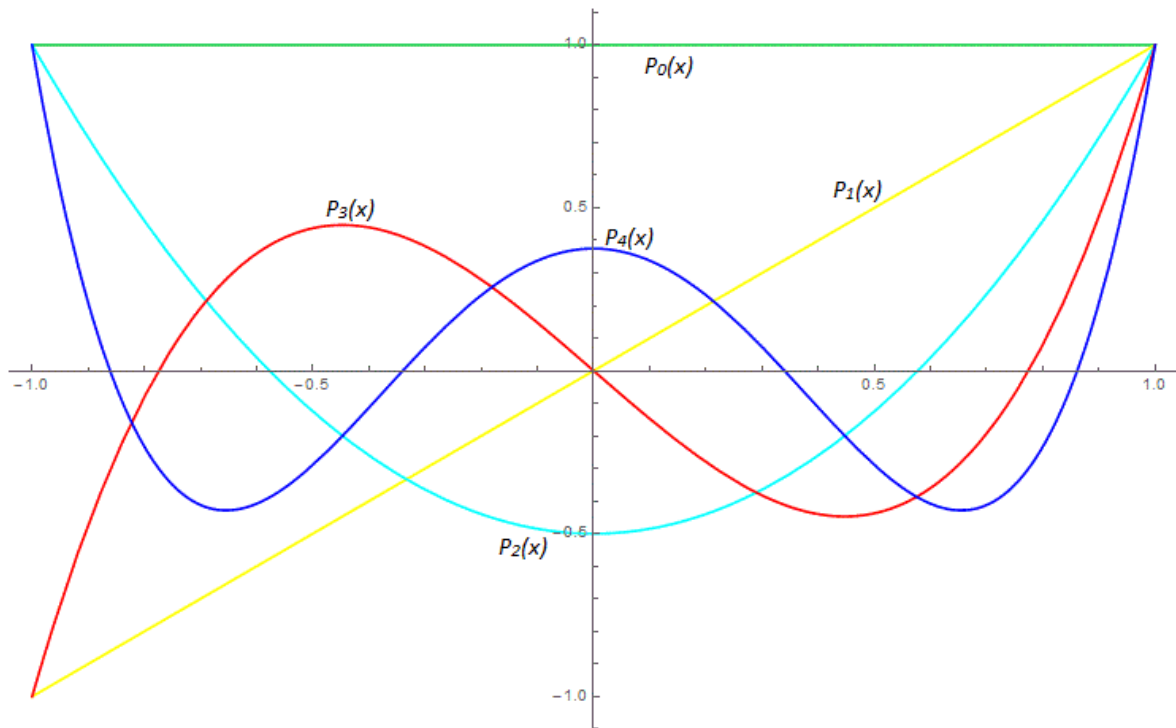
Několik dalších Legendrových polynomů je tedy ve tvaru

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3).$$

Jejich grafické znázornění zachycuje graf 2.



Graf 2-Legendrové polynomy

Zajímavou vlastností Legendrových polynomů je, že jde o střídavě liché a sudé funkce.

Platí tedy $P_j(-x) = (-1)^j P_j(x)$.

Potřebujeme-li vyjádřit Legendrové polynomy pro obecný interval $\langle a, b \rangle$, využijeme jednoduchou substituci

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}, \quad (3)$$

kteřá převádí interval $\langle a, b \rangle$ v proměnné x na interval $\langle -1, 1 \rangle$ v proměnné t .

Důležitou roli hrají Legendrovy polynomy při numerickém integrování. To si ukážeme v příští kapitole této práce. Více informací o Legendrových polynomech lze získat například v [4, str. 112] nebo v [3, str. 60]. Z těchto zdrojů jsou také čerpána data použitá v této části práce.

4.3.4 ČEBYŠEVOVY POLYNOMY

Druhým významným speciálním případem Jacobiových polynomů jsou Čebyševovy polynomy. Zde jsou koeficienty a, b ze vztahu (2) rovny $a = b = -\frac{1}{2}$. Váhová funkce má tedy tvar $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. S touto váhovou funkcí mají ortogonální polynomy na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ tvar:

$$T_j(x) = \cos(j \arccos(x)) \text{ pro } j = 0, 1, \dots$$

Rekurentní vztah pro Čebyševovy polynomy je pak

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_j(x) = 2xT_{j-1}(x) - T_{j-2}(x) \text{ pro } j = 2, 3, \dots$$

Několik dalších Čebyševových polynomů tedy vypadá následovně:

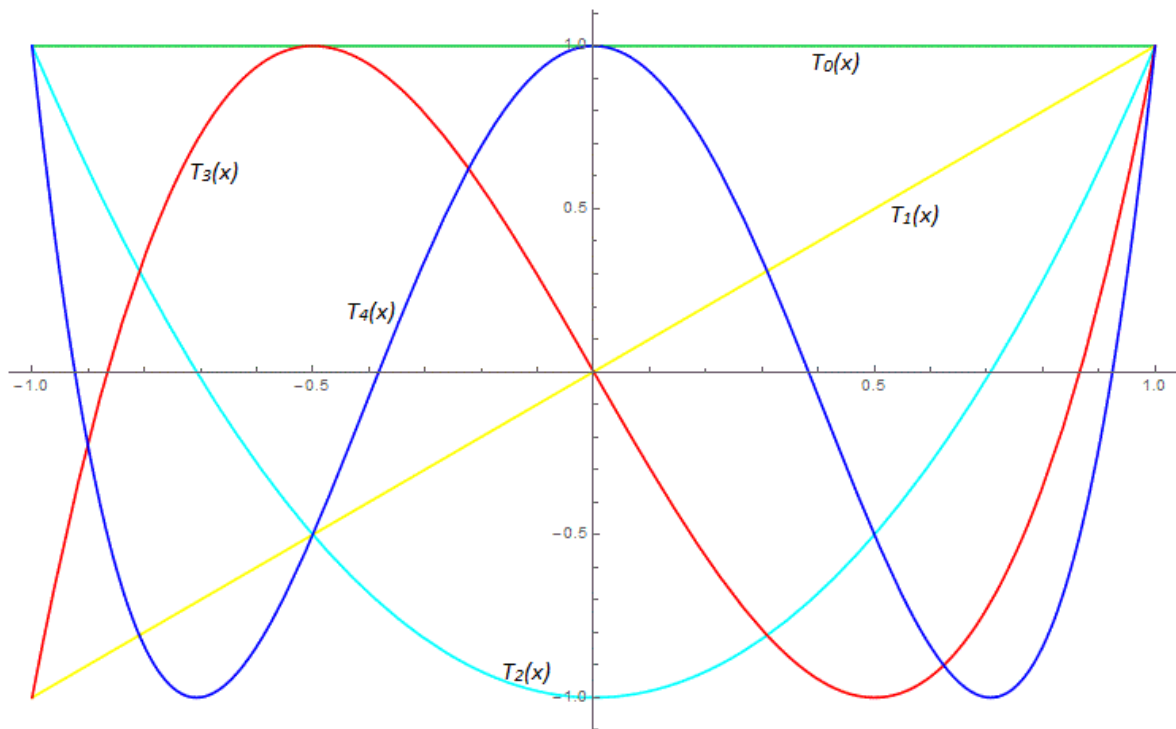
$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Jejich grafické znázornění nám ukazuje graf 3.

I v případě Čebyševových polynomů jde o střídavě liché a sudé funkce a platí tedy $T_j(-x) = (-1)^j T_j(x)$. Pafnutij Lvovič Čebyšev tyto polynomy odvodil nejprve za účelem efektivní a co nejpřesnější tvorby zeměpisných map, dnes však mají uplatnění v nejrůznějších oborech matematiky či fyziky. Mají například důležité minimalizační vlastnosti, viz [4, str. 314]. Data v této části jsou použita ze zdroje [3, str. 59].



Graf 3-Čebyševovy polynomy

4.3.5 LAGUERROVY POLYNOMY

Dalším příkladem spojitých ortogonálních polynomů jsou Laguerrovy polynomy. Jedná se o polynomy, které jsou ortogonální na intervalu $\langle 0, \infty \rangle$ s váhovou funkcí $\omega(x) = e^{-x}$ a které jsou definovány vztahem

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_j(x) = e^x \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{x^j}{e^x} \right) \text{ pro } j = 1, 2, \dots$$

Pro Laguerrovy polynomy platí rekurentní vztah

$$L_{-1}(x) = 0,$$

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_{j+1} = (2j + 1 - x)L_j(x) - j^2 L_{j-1}(x) \text{ pro } j = 0, 1, \dots$$

Několik dalších Laguerrových polynomů má tedy tvar

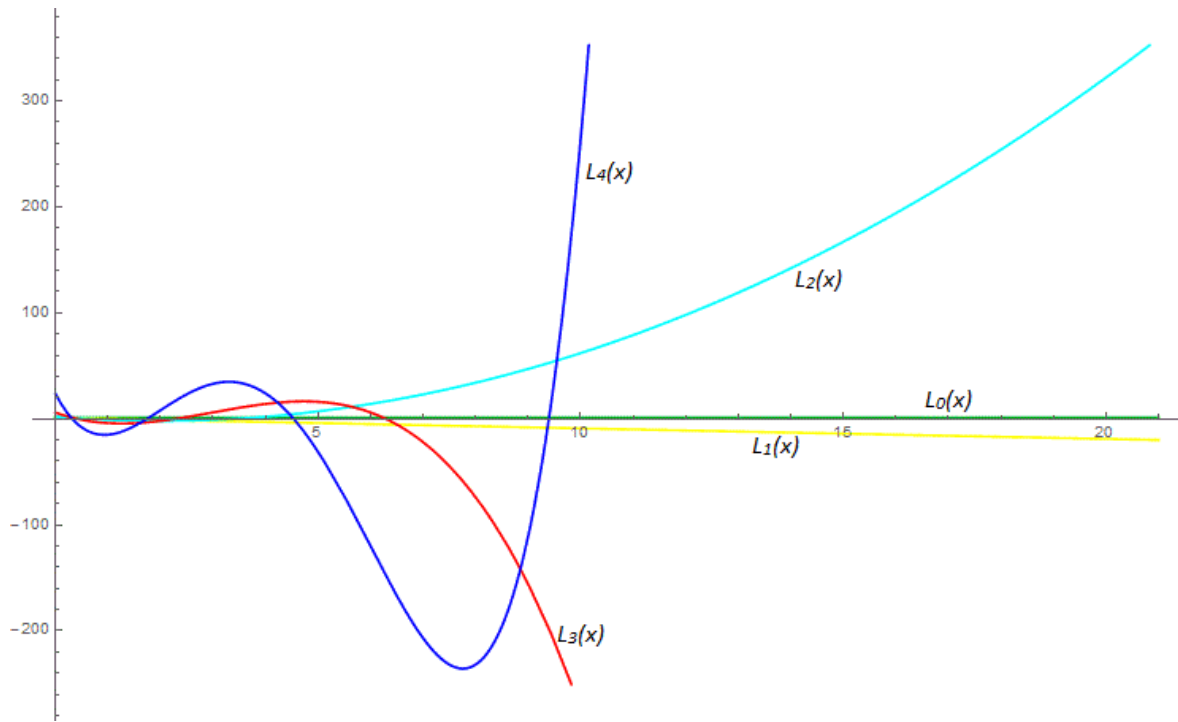
$$L_1(x) = 1 - x,$$

$$L_2(x) = 2 - 4x + x^2,$$

$$L_3(x) = 6 - 18x + 9x^2 - x^3,$$

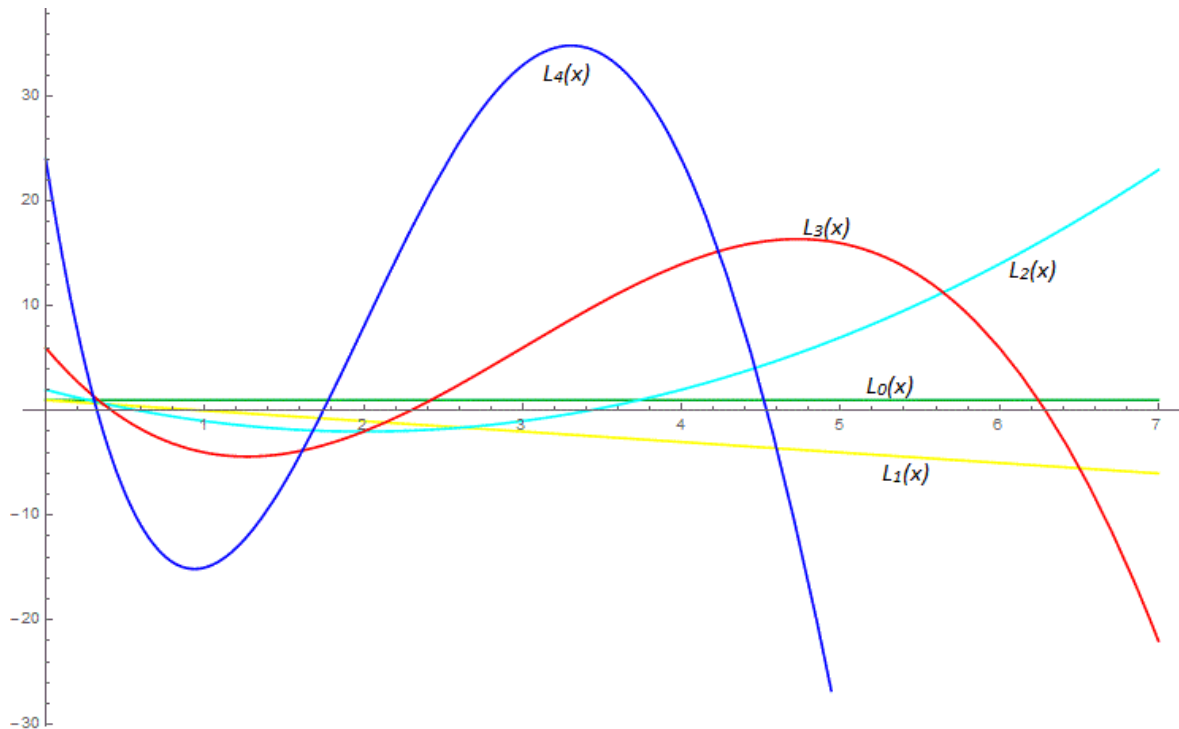
$$L_4(x) = 24 - 96x + 72x^2 - 16x^3 + x^4.$$

Jejich grafické znázornění zachycuje graf 4.



Graf 4-Laguerrovy polynomy 1

Pro malou přehlednost grafu 4 pro nižší hodnoty x je v grafu 5 znázorněno přiblížení této oblasti. Laguerrovy polynomy mají poměrně zajímavé využití při numerickém integrování. Toto využití si ukážeme v dalších částech práce. Data použitá v této části práce jsou přejata z [4, str. 119].



Graf 5-Laguerrovy polynomy 2

4.3.6 HERMITOVY POLYNOMY

Posledním příkladem spojitě ortogonálních polynomů, který v této práci přiblížíme, jsou Hermitovy polynomy. Jde o polynomy, které jsou ortogonální na intervalu $(-\infty, \infty)$ s váhovou funkcí $\omega(x) = e^{-x^2}$. Jsou definovány vztahem

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_j(x) = e^{x^2} \frac{d^j}{dx^j} \left(\frac{(-1)^j}{e^{x^2}} \right).$$

Pro Hermitovy polynomy platí rekurentní vztah

$$H_{-1}(x) = 0,$$

$$H_0(x) = 1,$$

$$H_{j+1}(x) = 2xH_j(x) - 2jH_{j-1}(x) \text{ pro } j = 0, 1, \dots$$

Několik dalších Hermitových polynomů má tedy tvar

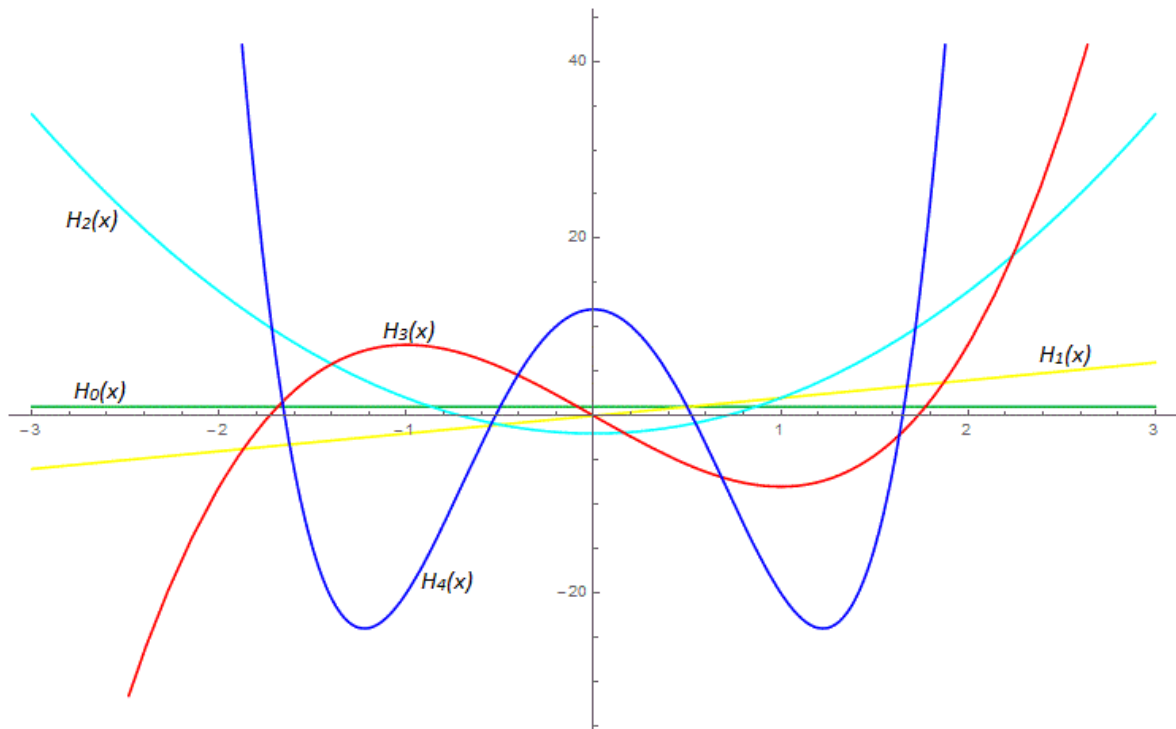
$$H_1(x) = 2x,$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 4x^3 - 12x,$$

$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

Jejich grafické znázornění je zobrazeno v grafu 6.



Graf 6-Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy jsou střídavě liché a sudé funkce, tj. platí $H_j(-x) = (-1)^j H_j(x)$.

V praxi mají velmi významné uplatnění zvláště v matematické statistice. Data v této části práce jsou použita z [4, str. 120].

5 GAUSSOVA KVADRATURA

V páté kapitole se budeme věnovat numerické kvadratuře. Při její tvorbě jsme využívali zdroje [4], [5], [6]. Naším cílem zde bude ukázat, jak efektivně vypočítat přibližnou hodnotu určitého integrálu z dané funkce $f(x)$. Za tím účelem budeme integrál aproximovat lineární kombinací funkčních hodnot integrované funkce ve vhodné zvolených bodech daného intervalu. Budeme tedy aproximovat integrál

$$I(f) = \int_a^b \omega(x)f(x)dx,$$

kde $\omega(x)$ je váhová funkce, součtem

$$I_n(f) = \sum_{i=1}^n w_i f(a_i).$$

Tento součet budeme nazývat kvadraturním vzorcem, čísla w_i jeho vahami a body a_i , o nichž předpokládáme, že leží uvnitř intervalu $\langle a, b \rangle$, jeho uzly. Chybu kvadraturního vzorce pak budeme definovat vztahem $E_n(f) = I(f) - I_n(f)$.

V této práci se budeme zabývat pouze jedním typem kvadraturních vzorců, a to Gaussovými kvadraturními vzorci. Jde o vzorce, které integrují přesně polynomy až do stupně $2n - 1$ včetně. Při jejich definování budeme využívat některé důležité vlastnosti ortogonálních polynomů. Každý polynom $p \in \Pi_k$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci ortogonálních polynomů p_0, \dots, p_k . To plyne z vlastností Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace. Pro ortogonální polynom stupně n plyne z vlastností skalárního součinu $(p, p_n) = 0$ pro všechna $p \in \Pi_{n-1}$. Dále mají ortogonální polynomy následující vlastnost:

Věta 5.1.

Kořeny x_i , kde $i = 1, \dots, n$, ortogonálního polynomu p_n jsou reálné, navzájem různé a všechny leží v otevřeném intervalu (a, b) .

Důkaz: Uvažujme body x_1, \dots, x_l v nichž polynom $p_n(x)$ mění znaménko a které leží v otevřeném intervalu (a, b) . Potom součin $(x - x_1) \cdots (x - x_l)p_n(x)$ nemění znaménko v (a, b) . Protože $p_n(x)$ je ortogonální ke všem polynomům stupně nižšího než n na intervalu (a, b) , platí

$$\int_a^b (x - x_1) \cdots (x - x_l) p_n(x) \omega(x) dx = 0,$$

pro všechna $l < n$. Integrovaná funkce však nemění znaménko, a proto nemůže být integrál roven 0. Musí tedy platit $l = n$. Tím je dokázáno, že všechny kořeny polynomu p_n musí být reálné, navzájem různé a musí ležet v intervalu (a, b) .

Věta včetně důkazu je přejata z [4, str. 116].

Jinou důležitou vlastnost ortogonálních polynomů nám ukazuje další věta.

Věta 5.2.

Matice typu $n \times n$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_0(t_1) & \cdots & p_0(t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & \cdots & p_{n-1}(t_n) \end{pmatrix}$$

je pro argumenty t_i , kde $i = 1, \dots, n$, regulární.

Důkaz: Předpokládejme, že matice \mathbf{A} je singulární. Pak existuje řádkový vektor

$c^T = (c_0, \dots, c_{n-1}) \neq 0$ takový, že $c^T \mathbf{A} = 0$. Polynom

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$$

stupně $p < n$ má n navzájem různých kořenů t_1, \dots, t_n . To může nastat pouze v případě, kdy $q(x) = 0$. Dále nechť l je nejvyšší index takový, že $c_l \neq 0$. Pak můžeme vyjádřit

$$p_l(x) = -\frac{1}{c_l} \sum_{i=0}^{l-1} c_i p_i(x).$$

Tím dostáváme spor, protože polynom na pravé straně rovnosti má nižší stupeň, než polynom $p_l(x) \in \Pi_l$.

Znění věty včetně důkazu jsme použili z [5, str. 153].

Tato věta nám ukazuje, že úloha nalezení funkce ve tvaru

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$$

takové, že $p(t_i) = f_i$ pro $i = 1, \dots, n$, má vždy jednoznačné řešení.

S využitím těchto dvou vět nám již umožňuje formulovat větu, která bude stěžejní pro další část práce.

Věta 5.3.

a) Necht' x_1, \dots, x_n jsou kořeny ortogonálního polynomu $p_n(x)$ stupně n a necht' čísla w_1, \dots, w_n jsou řešení soustavy rovnic

$$\sum_{i=1}^n p_k(x_i)w_i = \begin{cases} (p_0, p_0) & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}. \quad (4)$$

Pak jsou pro $i = 1, 2, \dots, n$ čísla $w_i > 0$ a platí

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i p(x_i) \quad (5)$$

pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n-1}$. Kladná čísla w_i nazýváme vahami.

b) Naopak, pokud čísla w_i, x_i , kde $i = 1, \dots, n$, jsou taková, že platí (5) pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n-1}$, pak x_i jsou kořeny ortogonálního polynomu p_n a váhy w_i splňují (4).

c) Není možné najít taková čísla w_i, x_i , kde $i = 1, \dots, n$, aby platil vztah (5) pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n}$.

Důkaz: Podle věty 5.1. jsou kořeny x_i , kde $i = 1, \dots, n$, ortogonálního polynomu p_n reálná a navzájem různá čísla ležící v otevřeném intervalu (a, b) . Matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} p_0(x_1) & \cdots & p_0(x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{pmatrix} \quad (6)$$

je regulární podle věty 5.2. Soustava rovnic (4) má tedy jednoznačné řešení. Uvažujme libovolný polynom $p \in \Pi_{2n-1}$. Každý takový polynom může být zapsán způsobem

$$p(x) = p_n(x)q(x) + r(x), \quad (7)$$

kde q, r jsou polynomy v Π_{n-1} , které můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci ortogonálních polynomů

$$q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x),$$

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x).$$

Poněvadž $p_0(x) = 1$, můžeme s využitím (7) vyjádřit

$$\int_a^b p(x)\omega(x)dx = (p_n, q) + (r, p_0) = \beta_0(p_0, p_0).$$

Dále lze také s využitím (7) (protože $p_n(x_i) = 0$) a (4) vyjádřit

$$\sum_{i=1}^n w_i p(x_i) = \sum_{i=1}^n w_i r(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left(\sum_{i=1}^n w_i p_k(x_i) \right) = \beta_0(p_0, p_0).$$

Tím je dokázán vztah (5).

Dále je třeba ukázat, že pokud pro čísla w_i, x_i , kde $i = 1, \dots, n$, platí vztah (5) pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n-1}$, pak jsou čísla $w_i > 0$ pro $i = 1, \dots, n$.

To lze dokázat užitím vztahu (5) na polynomy

$$\bar{p}_j(x) = \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x - x_h)^2 \in \Pi_{2n-2},$$

kde $j = 1, \dots, n$.

Můžeme tedy psát

$$0 < \int_a^b \bar{p}_j(x)\omega(x)dx = \sum_{i=1}^n w_i \bar{p}_j(x_i) = w_j \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x - x_h)^2.$$

Tím je dokončen důkaz části věty a).

Nyní předpokládejme, že pro čísla w_i, x_i , kde $i = 1, \dots, n$, platí vztah (5) pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n}$. Potom polynom

$$\bar{p}_j(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)^2 \in \Pi_{2n}.$$

Použitím tohoto polynomu dostáváme spor

$$0 < \int_a^b \bar{p}(x) \omega(x) dx = \sum_{i=1}^n w_i \bar{p}(x_i) = 0.$$

Tím je dokázána část věty c).

Abychom dokázali část věty b), budeme předpokládat, že pro čísla w_i, x_i , kde $i = 1, \dots, n$, platí vztah (5) pro všechny polynomy $p \in \Pi_{2n-1}$. Čísla x_i musí být navzájem různá, protože v opačném případě bychom mohli formulovat stejný vztah pro integrál s využitím pouze $n - 1$ čísel x_i a to by bylo v rozporu s částí této věty c).

Použitím vztahu (5) na ortogonální polynomy p_k , kde $k = 0, \dots, n - 1$, dostaneme

$$\sum_{i=1}^n w_i p_k(x_i) = \int_a^b p_k(x) \omega(x) dx = (p_k, p_0) = \begin{cases} (p_0, p_0) & \text{pro } k = 0 \\ 0 & \text{pro } k = 1, 2, \dots, n - 1 \end{cases}.$$

Jinými slovy váhy w_i musí splňovat (4).

Použitím vztahu (5) na polynomy $p(x) = p_k(x)p_n(x)$, kde $k = 0, \dots, n - 1$, dostaneme

$$0 = (p_k, p_n) = \sum_{i=1}^n w_i p_n(x_i) p_k(x_i),$$

kde $k = 0, \dots, n - 1$.

Jinými slovy vektor $c = (w_1 p_n(x_1), \dots, w_n p_n(x_n))^T$ je řešením homogenní soustavy rovnic $Ac = 0$, kde A je matice ve tvaru (6). Protože čísla x_i pro $i = 1, \dots, n$ jsou navzájem různá, je matice A podle věty 5.2. regulární. Proto musí být $c = 0$ a tedy

$w_i p_n(x_i) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Protože $w_i > 0$, musí být $p_n(x_i) = 0$ pro $i = 1, \dots, n$. Tím je dokončen důkaz části věty b).

Věta i důkaz jsou přejaty z [5, str. 153].

Vztah (5) nazýváme Gaussovým kvadrurním vzorcem. Ten je přesný pro polynomy stupně nejvýše $2n - 1$. Pro ostatní funkce lze vyjádřit chybu Gaussovy kvadratury pomocí následující věty.

Věta 5.4.

Nechť f je funkce, která má na intervalu (a, b) $2n$ spojité derivací. Potom

$$E_n(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - \sum_{i=1}^n w_i f(x_i) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} (p_n, p_n)$$

pro $\xi \in (a, b)$.

Tato věta platí pro ortogonální polynom, u něhož je multiplikativní konstanta (tj. koeficient u nejvyšší mocniny x) rovna 1. Někdy je ovšem vhodné volit jinou multiplikativní konstantu A_n . S jejím použitím má pak chyba Gaussovy kvadratury tvar

$$E_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{A_n^2 (2n)!} (p_n, p_n).$$

Znění této věty je přejato z [4, str. 117]. Zde lze také nalézt její odvození.

Váhy Gaussovy kvadratury lze psát ve tvaru

$$w_j = \int_a^b \omega(x) l_j(x) dx.$$

kde l_j je elementární Lagrangeův interpolační polynom ve tvaru

$$l_j(x) = \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{j-1})(x - a_{j+1}) \dots (x - a_n)}{(a_j - a_1) \dots (a_j - a_{j-1})(a_j - a_{j+1}) \dots (a_j - a_n)}.$$

Tento polynom je vhodné psát ve tvaru

$$l_j(x) = \frac{p_n(x)}{(x - a_j)p'_n(a_j)},$$

kde

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - a_i),$$

$$p'_n(a_j) = \frac{dp_n}{dx} \text{ v bodě } x = a_j.$$

Z tohoto tvaru lze odvodit v praxi mnohem užitečnější tvar vah Gaussových kvadratur:

$$w_j = -\frac{A_{n+1}(p_n, p_n)}{A_n p_{n+1}(a_j) p'_n(a_j)}, \quad (8)$$

kde $j = 1, \dots, n$.

Více o Lagrangeově interpolaci se můžeme dočíst například v [4], [6]. Tvar (8) je odvozen v [4, str. 117].

S využitím těchto poznatků si již můžeme ukázat několik používaných typů Gaussových kvadratur.

5.1 LAGUERROVA-GAUSSOVA KVADRATURA

Nejprve budeme uvažovat takové kvadratury, kde jako ortogonální polynomy použijeme polynomy Laguerrovy. Pro ně mají multiplikativní konstanty A_n hodnotu $A_n = (-1)^n$. Dále u nich platí

$$(L_n, L_n) = (n!)^2.$$

Pro jednotlivé váhy u nich dostáváme tvar

$$w_j = \frac{(n!)^2}{L_n(a_j)L_{n+1}(a_j)}.$$

Pro chybu této kvadratury získáváme vyjádření

$$E_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

kde $\xi \in (0, \infty)$.

Tuto kvadraturu nazýváme Laguerrovou-Gaussovou kvadraturou. Laguerrov-Gaussův kvadrurní vzorec má pak tvar

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(a_j) + E_n.$$

V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty uzlů a vah pro několik hodnot n .

n	Uzly a_j	Váhy w_j
2	0,585786	0,853553
	3,414214	0,146447
3	0,415775	0,711093
	2,294280	0,278518
	6,289945	0,010389
4	0,322548	0,603154
	1,745761	0,357419
	4,536620	0,038888
	9,395071	0,000539
5	0,263560	0,521756
	1,413403	0,398667
	3,596426	0,075942
	7,085810	0,003612
	12,640801	0,000023

Tabulka 1-Laguerrova-Gaussova kvadratura

Data v této části práce jsme čerpali z [4, str. 119].

5.2 HERMITOVA-GAUSSOVA KVADRATURA

Dalším typem Gaussovy kvadratury, který si přiblížíme, je Hermitova-Gaussova kvadratura. U ní využíváme Hermitovy polynomy. Jejich multiplikační konstanta A_n má hodnotu $A_n = 2^n$. Platí pro ně

$$(H_n, H_n) = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Pro jejich váhy tedy dostaneme tvar

$$w_j = -\frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{H_n'(a_j) H_{n+1}(a_j)}.$$

Pro chybu Hermitovy-Gaussovy kvadratury platí

$$E_n = \frac{n! \sqrt{\pi}}{2^n (2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

kde $\xi \in (-\infty, \infty)$.

Hermitův-Gaussův kvadrurní vzorec má pak tvar

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(a_j) + E_n$$

Hodnoty uzlů a_j a vah w_j pro několik hodnot n jsou uvedeny v tabulce 2.

Použitá data jsme převzali z [4, str. 120].

n	Uzly a_j	Váhy w_j
2	$\pm 0,707107$	0,886227
3	0 $\pm 1,224745$	1,181636 0,295409
4	$\pm 0,524648$ $\pm 1,650680$	0,804914 0,081313
5	0 $\pm 0,958572$ $\pm 2,020183$	0,945309 0,393619 0,019953

Tabulka 2-Hermitova-Gaussova kvadratura

5.3 LEGENDROVA-GAUSSOVA KVADRATURA

Dalším typem Gaussových kvadratur, kterému se budeme věnovat, jsou Legendrovy-Gaussovy kvadratury. Vzhledem ke vztahu mezi Jacobiovými a Legendrovými polynomy můžeme říct, že jde o podtyp Jacobiovy-Gaussovy kvadratury.

V Legendrových-Gaussových kvadraturách bereme za ortogonální polynomy Legendrovy. U nich má multiplikativní konstanta A_n hodnotu

$$A_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Dále pro ně platí

$$(P_n, P_n) = -\frac{2}{2n+1}.$$

Váhy můžeme tedy vyjádřit vztahem

$$w_j = -\frac{2}{(n+1)P'_n(a_j)P_{n+1}(a_j)}.$$

Nakonec pro chybu Legendrov-Gaussovy kvadratury platí

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi),$$

kde $\xi \in (-1, 1)$.

Legendrův-Gaussův kvadrurní vzorec pak píšeme ve tvaru

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n w_j f(a_j) + E_n.$$

V tabulce 3 jsou hodnoty uzlů a_j a vah w_j pro některé hodnoty n .

n	Uzly a_j	Váhy w_j
2	$\pm 0,577350$	1
3	0 $\pm 0,774597$	8/9 5/9
4	$\pm 0,339981$ $\pm 0,861136$	0,652145 0,347855
5	0 $\pm 0,538469$ $\pm 0,906180$	0,568889 0,478629 0,236929

Tabulka 3-Legendrova-Gaussova kvadratura

V této části jsme použili data z [4, str. 112].

5.4 ČEBYŠEVOVA-GAUSSOVA KVADRATURA

Posledním typem Gaussových kvadratur, který si ukážeme, jsou Čebyševovy-Gaussovy kvadratury. Znovu můžeme říct, že jde o zvláštní případ Jacobiovy-Gaussovy kvadratury. V Čebyševových-Gaussových kvadraturách bereme za ortogonální polynomy Čebyševovy polynomy. Jejich multiplikativní konstanta A_n má hodnotu $A_n = 2^{n-1}$. Platí pro ně $(T_n, T_n) = \frac{\pi}{2}$. Pro váhy w_j platí tedy vztah

$$w_j = -\frac{\pi}{T'_n(a_j)T_{n+1}(a_j)}.$$

V kořenech Čebyševova polynomu $T_n(x)$ musí platit

$$\cos(n \arccos x) = 0$$

a zároveň

$$\sin(n \arccos x) = \pm 1.$$

Proto

$$\begin{aligned} T_{n+1}(a_j) &= \cos[(n+1) \arccos a_j] = \\ &= \cos(n \arccos a_j) a_j - \sin(n \arccos a_j) \sin(\arccos a_j) = \pm \sqrt{(1-a_j^2)}. \end{aligned}$$

Také musí platit

$$T'_n(a_j) = \sin(n \arccos a_j) \frac{n}{\sqrt{(1-a_j^2)}}.$$

S využitím těchto poznatků dostaneme značně zjednodušený tvar pro váhy

$$w_j = \frac{\pi}{n}.$$

Chybu Čebyševovy-Gaussovy kvadratury můžeme psát ve tvaru

$$E_n = \frac{2\pi}{2^{2n}(2n)!} f^{(2n)}(\xi),$$

kde $\xi \in (-1, 1)$.

Čebyševův-Gaussův kvadrurní vzorec má pak následující podobu:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} f(x) dx = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n f(a_j) + E_n.$$

Z vlastností Čebyševových polynomů lze vyjádřit jejich kořeny ve tvaru

$$a_j = \cos \frac{(2j-1)\pi}{2n}, \text{ kde } j = 1, \dots, n.$$

Hodnoty uzlů a_j a vah w_j pro některá n jsou uvedeny v tabulce 4.

n	Uzly a_j	Váhy w_j
2	$\pm 0,707107$	1,570796
3	0 $\pm 0,866025$	1,047198 1,047198
4	$\pm 0,382683$ $\pm 0,923880$	0,785398 0,785398
5	0 $\pm 0,587785$ $\pm 0,951057$	0,628319 0,628319 0,628319

Tabulka 4-Čebyševova-Gaussova kvadratura

Při psaní této části jsme využili data z [4, str. 122].

6 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY GAUSSOVÝCH KVADRATUR

Cílem poslední části práce bude na příkladech ukázat využití Gaussových kvadratur v praxi. Nejprve si ukážeme využití Laguerrova-Gaussova kvadraturního vzorce. S jeho pomocí můžeme bez problémů přesně integrovat součin libovolného polynomu a funkce e^{-x} v mezích od nuly do nekonečna.

Příklad 6.1.

Vypočtete integrál

$$\int_0^{\infty} \frac{(2x^3 - 3x^2 + x - 4)}{e^x} dx.$$

Nejprve vyřešíme úlohu běžným analytickým způsobem. Protože je horní mez ∞ , jde o nevlastní integrál. Využijeme-li třikrát metodu pro integrování per partes, dostaneme:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(2x^3 - 3x^2 + x - 4)}{e^x} dx &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \frac{(2x^3 - 3x^2 + x - 4)}{e^x} dx \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} ([-e^{-x}(2x^3 - 3x^2 + x - 4) - e^{-x}(6x^2 - 6x + 1) - e^{-x}(12x + 6) - 12e^{-x}]_0^t) = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} ([-e^{-x}(2x^3 + 3x^2 + 7x + 3)]_0^t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (-e^{-t}(2t^3 + 3t^2 + 7t + 3) + 3) = 3. \end{aligned}$$

Je vidět, že tento postup je poměrně zdlouhavý a pro polynomy vyšších stupňů se bude výpočet kvůli nutnosti opakovaného užívání metody per partes značně protahovat.

Nyní si ukážeme řešení s využitím Laguerrova-Gaussova kvadraturního vzorce. Všimněme si, že v integrandu je polynom stupně 3. Poněvadž Gaussovy kvadraturní vzorce dávají přesné výsledky pro polynomy stupně nejvýše $2n - 1$, zvolíme při řešení tohoto příkladu $n = 2$. Dostaneme tedy

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(2x^3 - 3x^2 + x - 4)}{e^x} dx &\cong \\ &\cong 0,853553[2(0,585786)^3 - 3(0,585786)^2 + 0,585786 - 4] + \\ &+ 0,146447[2(3,414214)^3 - 3(3,414214)^2 + 3,414214 - 4] \cong \\ &\cong -3,449746 + 6,449768 = 3,000022. \end{aligned}$$

Tento postup vede ke správnému výsledku mnohem rychleji a jediná chyba, ke které zde dochází, je způsobena dosazováním zaokrouhlených hodnot uzlů a vah do vzorce.

Laguerrova-Gaussova kvadratura má uplatnění například v kvantové mechanice, kde lze s jejím využitím popsat vlnovou funkci při zkoumání stavu atomu vodíku.

Dále si ukážeme význam Hermitovy-Gaussovy kvadratury. Ta má v praxi využití zejména ve statistice, kde díky ní dají snadno počítat hodnoty jednotlivých momentů normálního rozdělení.

Příklad 6.2.

Vypočtěte druhý a třetí moment normovaného normálního rozdělení $N(0, 1)$.

Normované normální rozdělení má hustotu ve tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Druhý moment lze vypočítat jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Abychom dostali požadovaný tvar integrálu, použijeme substituci

$$\frac{x}{\sqrt{2}} = t.$$

Platí tedy

$$\frac{dx}{\sqrt{2}} = dt.$$

Po přepočítání mezí integrálu zjistíme, že integrujeme znovu od $-\infty$ do ∞ .

Dostáváme tedy

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2t^2}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt.$$

Protože se nám uvnitř integrálu vyskytuje polynom stupně 2, můžeme zvolit pro Hermitův-Gaussův kvadraturní vzorec $n = 2$.

První moment normovaného normálního rozdělení je tedy roven

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\sqrt{\pi}} [0,886227(-0,707107)^2 + 0,886227(0,707107)^2] = \\ & = \frac{4}{\sqrt{\pi}} [0,886227(0,707107)^2] \cong 1. \end{aligned}$$

Třetí moment normovaného normálního rozdělení lze vypočítat jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Použijeme-li stejnou substituci jako v předešlém případě, dostaneme

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sqrt{2}t^3}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^3 e^{-t^2} dt.$$

V integrandu se vyskytuje polynom stupně 3, a proto v Hermitově-Gaussově kvadrurním vzorci znovu volíme $n = 2$.

Třetí moment normovaného normálního rozdělení je tedy

$$2\sqrt{\frac{2}{\pi}} [0,886227(-0,707107)^3 + 0,886227(0,707107)^3] \cong 0.$$

V dalších příkladech si ukážeme využití Legendrových-Gaussových kvadratur. Ty je výhodné používat pro vyčíslení integrálů z funkcí, jejichž tvar je natolik složitý, že je velmi náročné či nemožné jejich integrál běžným způsobem vypočítat. Na následujícím příkladu si ukážeme, jak se projeví zvolená hodnota n na přesnosti Legendrova-Gaussova kvadrurního vzorce.

Příklad 6.3.

Vypočtete integrál

$$\int_{-1}^1 \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx.$$

Nejprve si vypočítáme přesný výsledek pomocí běžného analytického postupu.

Použijeme substituci

$$t = \frac{\pi}{2}x.$$

Dostaneme tedy

$$dt = \frac{\pi}{2} dx.$$

Po přepočítání mezí integrálu budeme integrovat od $-\frac{\pi}{2}$ do $\frac{\pi}{2}$.

Po dosazení dostáváme integrál

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) dt = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = 2[\sin(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2(1 - (-1)) = 4.$$

Nyní příklad vyřešíme pomocí Legendrovy-Gaussovy kvadratury pro $n = 2$.

Máme tedy

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &\cong \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(-0,577350)\right) + \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}0,577350\right) \cong \\ &\cong 1,935821 + 1,935821 = 3,871642. \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že pro $n = 2$ není výsledek příliš přesný.

Dále vyřešíme stejný příklad pro $n = 3$.

V tomto případě můžeme psát

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx &\cong \frac{5}{9} \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(-0,774597)\right) + \frac{8}{9} \pi \cos(0) + \frac{5}{9} \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}0,774597\right) \cong \\ &\cong 0,605125 + 2,792527 + 0,605125 = 4,002777. \end{aligned}$$

Pouhým zvýšením n o 1 se náš výsledek výrazně zpřesnil.

Nakonec vypočítáme stejný příklad pro $n = 5$.

V tomto případě máme

$$\int_{-1}^1 \pi \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) dx \cong 0,236929\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(-0,906180)\right) +$$

$$+ 0,478629\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}(-0,538469)\right) + 0,568889\pi \cos(0) +$$

$$+ 0,478629\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}0,538469\right) + 0,236929\pi \cos\left(\frac{\pi}{2}0,906180\right) \cong$$

$$\cong 0,109297 + 0,997096 + 1,787218 + 0,997096 + 0,109297 = 4,000004.$$

V tomto případě už tedy dostáváme poměrně přesný výsledek.

V dalším příkladu si ukážeme použití Legendrova-Gaussova kvadrurního vzorce pro integrování s jinými mezemi, než jsou -1 a 1.

Příklad 6.4.

Vypočtěte integrál

$$\int_0^4 (4x^3 - 6x^2 + 8x - 3) dx.$$

Nejprve budeme znovu příklad řešit analyticky. Máme tedy

$$\int_0^4 (4x^3 - 6x^2 + 8x - 23) dx = [x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 23x]_0^4 = 256 - 128 + 64 - 92 =$$

$$= 100.$$

Při řešení Legendrovým-Gaussovým kvadrurním vzorcem použijeme substituci (3):

$$t = \frac{x-2}{2} \rightarrow x = 2t + 2.$$

Získáváme

$$dx = 2dt.$$

Po přepočítání mezí budeme počítat integrál od -1 do 1. To jsou požadované meze pro využití Legendrova-Gaussova kvadrurního vzorce a po dosazení můžeme počítat integrál:

$$\int_{-1}^1 2[4(2t+2)^3 - 6(2t+2)^2 + 8(2t+2) - 23]dt.$$

Protože integrujeme polynom stupně 3, využijeme Legendrův-Gaussův kvadrurní vzorec pro $n = 2$. Dostáváme

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 2[4(2t+2)^3 - 6(2t+2)^2 + 8(2t+2) - 23]dt \cong \\ & \cong 2\{4[2(-0,577350) + 2]^3 - 6[2(-0,577350) + 2]^2 + 8[2(-0,577350) + 2] - 23\} + \\ & + 2\{4[2(0,577350) + 2]^3 - 6[2(0,577350) + 2]^2 + 8[2(0,577350) + 2] - 23\} \cong \\ & \cong -36,217633 + 136,217544 = 99,999911 \end{aligned}$$

V tomto případě je chyba způsobena pouze dosazením zaokrouhlených hodnot uzlů a vah Legendrova-Gaussova kvadrurního vzorce.

Nakonec si uvedeme příklad výpočtu pomocí Čebyševovy-Gaussovy kvadratury. Ta je užitečná v případech, kdy je integrand roven součinu funkcí, z nichž jedna má tvar

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 6.5.

Vypočtete integrál

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x + \frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Nejprve provedeme klasické analytické řešení. Integrál si můžeme rozložit na součet integrálů

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x + \frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_{-1}^1 \frac{\frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Zjevně

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0,$$

protože jde o integrál liché funkce přes interval souměrný podle počátku.

Můžeme tedy psát

$$\int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x + \frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Protože v mezích integrálů není integrand definován, jde o nevlastní integrál, který budeme počítat jako

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x + \frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \frac{3}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(\frac{3}{\pi} \int_t^0 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) + \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{\pi} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(\frac{3}{\pi} [\arcsin x]_t^0 \right) + \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{\pi} [\arcsin x]_0^s \right) = \lim_{t \rightarrow -1^+} \left(0 + \frac{3}{2} \right) + \lim_{s \rightarrow 1^-} \left(\frac{3}{2} + 0 \right) = 3. \end{aligned}$$

Nyní si ukážeme řešení pomocí Čebyševova-Gaussova kvadraturního vzorce. Protože se v integrandu vyskytuje polynom stupně 3, použijeme $n = 2$.

Daný polynom tedy můžeme počítat jako

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{2x^3 - 5x + \frac{3}{\pi}}{\sqrt{1-x^2}} dx &\cong 1,570796 \left[2(-0,707107)^3 - 5(-0,707107) + \frac{3}{\pi} \right] + \\ &+ 1,570796 \left[2(0,707107)^3 - 5(0,707107) + \frac{3}{\pi} \right] \cong 5,942882 - 2,942883 = \\ &= 2,999999. \end{aligned}$$

Chyba je v tomto případě způsobena pouze dosazením zaokrouhlených hodnot vah a uzlů do Čebyševova-Gaussova kvadraturního vzorce.

ZÁVĚR

První část práce jsme věnovali stručnému přiblížení historického vývoje ortogonálních polynomů. Zvláště jsme přitom rozebrali život ruského matematika P. L. Čebyševa, protože jeho vědecký přínos byl velmi významný, ale jeho osoba není naší veřejnosti příliš známá.

V druhé kapitole jsme se již začali věnovat teoretické části práce. Dříve než jsme se však mohli zabývat vlastní problematikou ortogonálních polynomů, bylo zapotřebí definovat základní pojmy a formulovat základní věty, ze kterých pak vycházel zbytek práce. Hlavním výsledkem druhé kapitoly bylo definování prostorů $L_p(\mu)$.

Ve třetí kapitole jsme shrnuli některé základní poznatky matematické analýzy o aproximaci problémů, které jsou obtížně řešitelné, úlohami numerickými. Zvláště jsme se věnovali aproximaci funkcí. Tuto úlohu jsme si popsali nejprve obecně a následně jsme si přiblížili výhody aproximace funkce pomocí polynomů. Mezi ně patří kromě skutečnosti, že se s polynomy dobře pracuje, hlavně věta, která nám ukazuje, že pomocí polynomů lze aproximovat funkce s libovolnou přesností.

Čtvrtá kapitola je již věnována hlavnímu tématu práce, kterým jsou ortogonální polynomy. V jejím úvodu jsme definovali pojem skalární součin a nakonec i Hilbertův prostor. Díky tomu jsme pak mohli formulovat a dokázat obecný Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Pro jeho lepší pochopení jsme předvedli vzorové řešení příkladu Gramovy-Schmidtovy ortogonalizace.

Dále jsme již začali rozebírat ortogonální polynomy jako takové. Nejprve jsme si formulovali tvar skalárního součinu na prostoru $L_2(\mu)$ a dokázali jeho vlastnosti. Dále jsme uvedli a dokázali obecný rekurentní vztah pro tvorbu ortogonálních polynomů. Na závěr čtvrté kapitoly jsme představili několik speciálních příkladů ortogonálních polynomů. Kromě toho, že jsme ukázali některé vlastnosti těchto příkladů, jsme pro větší názornost doplnili tuto část grafy příslušných ortogonálních polynomů.

V následující páté kapitole jsme přešli k využití ortogonálních polynomů při numerické integraci. První část této kapitoly jsme věnovali dvěma přípravným větám, díky nimž jsme následně formulovali stěžejní větu páté kapitoly, ve které jsme uvedli a dokázali obecný tvar Gaussova kvadrurního vzorce. Kromě tohoto tvaru jsme uvedli i tvar vyjádření jeho chyby. Ve zbytku této kapitoly jsme ukázali některé speciální příklady Gaussovy

kvadratury. Kromě tvarů příslušných kvadraturních vzorců a některých jejich vlastností jsme v této části uvedli i tabulky s některými hodnotami jejich uzlů a vah.

Poslední kapitola byla již věnována řešení konkrétních příkladů Gaussových kvadratur. Abychom ukázali přínos těchto kvadratur, řešili jsme většinu příkladů nejprve běžným analytickým způsobem a následně pomocí Gaussových kvadraturních vzorců. Ukázali jsme jejich přesnost pro integrování polynomů i to, jak se pro jiné funkce s rostoucím n chyba Gaussova kvadraturního vzorce zmenšuje. Také jsme v této části uvedli příklady využití Gaussových kvadraturních vzorců.

Práci můžeme uzavřít s tím, že jsme shrnuli a ukázali základní poznatky o ortogonálních polynomech, ale zdaleka jsme toto široké téma nevyčerpali. Mohli bychom dále například rozebrat chování ortogonálních polynomů v oboru komplexních čísel. Dále bychom se mohli zabývat jejich významem při řešení diferenciálních rovnic, který je také velmi zajímavý a v této práci jsme mu nevěnovali pozornost. Mohli bychom také více rozebrat využití jednotlivých typů ortogonálních polynomů v praxi, které je například u Čebyševových či Hermitových polynomů velmi široké.

RESUMÉ

The main topic of this bachelor thesis is orthogonal polynomials and their utilization in numerical integration. The first chapter is about history of orthogonal polynomials.

In the second chapter there are basic definitions, which are fundamental for the rest of this thesis. Then in the third chapter we pursue approximation of functions and then we show, why is in praxis useful to approximate functions by polynomials.

The fourth chapter is about the main topic, the orthogonal polynomials. At first we formulate the Gram-Schmidt orthogonalization and then we use it to deduce recurrence relations of orthogonal polynomials. In conclusion we state some special examples of orthogonal polynomials.

The fifth chapter is about the utilization of orthogonal polynomials in numerical integration. There is formulated the main theorem about the Gaussian quadrature in it. Then we show some special types of Gaussian quadrature.

In the last chapter we solve several exercises to show some properties of Gaussian quadrature and the utilization of it.

SEZNAM LITERATURY

Adrien-Marie Legendre. In: *Encyclopædia Britannica* [online]. 2014 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/334981/Adrien-Marie-Legendre>

Carl Gustav Jacob Jacobi. In: *MacTutor* [online]. 2000 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Jacobi.html>

Pafnuty Lvovich Chebyshev. In: *MacTutor* [online]. 2002 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Chebyshev.html>

PAFNUTIJ LVOVIČ ČEBYŠEV. *Časopis pro pěstování matematiky*. 1953, č. 11. Dostupné z: http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/117069/CasPestMat_078-1953-1_20.pdf

Laguerre, Edmond Nicolas. In: *Complete Dictionary of Scientific Biography* [online]. 2008 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830902427.html>

Charles Hermite. In: *MacTutor* [online]. 2001 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Hermite.html>

Jorgen Pedersen Gram. In: *MacTutor* [online]. 2001 [cit. 2015-03-26]. Dostupné z: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gram.html>

[1] MATUŠŮ, Josef. *Ortogonalní systémy*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1985, 91 s.

[2] RUDIN, Walter. *Analýza v reálném a komplexním oboru*. Vyd. 2., přeprac. Praha: Academia, 2003, 460 s. ISBN 80-200-1125-0.

[3] PŘIKRYL, Petr. *Numerické metody matematické analýzy*. Vyd. 1. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1985, 187 s.

[4] RALSTON, Anthony. *Základy numerické matematiky*. 1. české vyd. Praha: Academia, 1973, 635 s.

[5] STOER, Josef a Roland BULIRSCH. *Introduction to numerical analysis*. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, c1993, xiii, 660 p. ISBN 35-409-7878-X.

[6] VITÁSEK, Emil. *Numerické metody*. 1. vyd. Praha: SNTL, 1987, 512 s.

SEZNAM OBRÁZKŮ, GRAFŮ A TABULEK

Obrázek 1-P. L. Čebyšev.....	5
Graf 1-Gramovy polynomy	27
Graf 2-Legendrovy polynomy	28
Graf 3-Čebyševovy polynomy.....	30
Graf 4-Laguerrovy polynomy 1.....	31
Graf 5-Laguerrovy polynomy 2.....	32
Graf 6-Hermitovy polynomy.....	33
Tabulka 1-Laguerrova-Gaussova kvadratura.....	41
Tabulka 2-Hermitova-Gaussova kvadratura.....	43
Tabulka 3-Legendrova-Gaussova kvadratura	44
Tabulka 4-Čebyševova-Gaussova kvadratura.....	46