Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

QR-rozklad matice

Bakalářská práce

Veronika Laznová

Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň 2015

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 10. dubna 2015

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Děkuji své vedoucí bakalářské práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za velmi milý a ochotný přístup během psaní práce. Vážím si zejména její trpělivosti. Na veškeré otázky mně vždy s ochotou a úsměvem na rtech odpověděla. Na základě velmi cenných rad a motivujících připomínek mě dokázala vést správným směrem.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

$\mathbf{R}$ … množina reálných čísel

R … horní trojúhelníková matice

E … jednotková matice

Q … ortonormální matice

A^T… transponovaná matice k matici A

A^{-1}… inverzní matice k matici A

$\|\ldots\|$ … norma prvku vektorového prostoru

sgn … funkce signum

$f(u, v)$ … skalární součin vektorů u a v

$H(u)$ … Householderova matice určená vektorem u

$\neq$ … nerovnost

$\leq, \geq$ … neostrá nerovnost

$<, >$ … ostrá nerovnost

$\sqrt{}$ … druhá odmocnina

$\{ , \}$ … množinové závorky

o … nulový vektor

hod(A) … hodnost matice A

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

ÚVOD

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybrala QR-rozklad matice. Jedná se o téma, které mě zaujalo na první pohled, neboť se v samotném názvu vyskytuje slovo matice. Maticemi se zabývá odvětví matematiky zvané lineární algebra. Lineární algebra společně s matematickou analýzou patří mezi má nejoblíbenější odvětví. Zejména z tohoto důvodu mě téma natolik nadchlo, že jsem si ho vybrala.

Od práce očekávám, že se seznámím s problematikou QR-rozkladu matic. Chci si osvojit způsoby, pomocí nichž lze QR-rozklad provést. Takových způsobů existuje několik. Zaměřím se přibližně na dva až tři. Pokládám si za cíl u každého způsobu vypočítat několik příkladů. Je všeobecně známé, že na příkladech se probírané definice a věty lépe pochopí. Osvojím si je jak já, tak i čtenář. Neméně důležité je využití teoretických znalostí v praxi. Je potřeba se zamyslet nad tím, jaké druhy úloh mohu pomocí QR-rozkladu řešit.

Než se pustím do samotného psaní, seznámím se s odbornou literaturou na dané téma.
Na začátku je potřeba ucelit si informace, myšlenky a udělat si představu, jak bakalářskou práci strukturovat. Vlastní text chci psát jednoduše a výstižně. Nechci používat dlouhá, složitá souvětí ani text přesycený odbornými termíny. Text budu směřovat tak, aby čtenáře zaujal a snadno ho pochopil.

Zpracování bakalářské práce nebude jednoduché. Člověk musí být především trpělivý.
Po celou dobu psaní se chci řídit latinským mottem: „Per aspera ad astra."

1 ZÁKLADNÍ POJMY

V práci se budeme zabývat QR-rozkladem matic. Co si pod tímto pojmem představit, se dozvíme v následujícím textu. Jedná se o rozklad, který je možné provést mnoha způsoby. V průběhu práce si rozebereme hned několik z nich. Rozklad má i praktické využití, je možné ho využít při řešení soustav lineárních rovnic nebo pro výpočet vlastních čísel matic takových soustav.

Jako první si uvedeme větu, která mluví o existenci QR-rozkladu.

Věta 1: O existenci QR-rozkladu
Nechť A je matice typu (m, n), m ≥ n, s lineárně nezávislými sloupci, jejíž prvky jsou z množiny reálných čísel **R**, pak existuje ortonormální matice Q typu (m, n) a horní trojúhelníková matice R n-tého řádu tak, že

$$A = QR. \tag{1}$$

Poznámka: Jak prvky matice Q, tak prvky matice R jsou rovněž z množiny reálných čísel **R**.

Definice 1: QR-rozklad
Rozklad (1) uvedený ve větě 1 nazveme QR-rozkladem matice.

Například: Součin matic

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

nazveme QR-rozkladem matice

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jedná-li se o QR-rozklad matice, potom

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

První matice, jež je obsažena v QR-rozkladu, se nazývá ortonormální (viz definice 3) a značíme ji

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Druhou maticí je horní trojúhelníková matice (viz definice 4)

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & \frac{-\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{3\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Definice 2: Ortogonální matice

Ortogonální maticí A rozumíme matici, pro niž platí, že součin $A^T \cdot A$ se rovná čtvercové diagonální matici.

Připomeňme, že pod pojmem diagonální matice rozumíme matici, která má mimo hlavní diagonálu pouze nuly a na hlavní diagonále může mít libovolná čísla.

Speciálním případem diagonální matice je matice jednotková.

Pro názornost si obecně zapíšeme například čtvercovou diagonální matici řádu tři:

$$\begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}.$$

Diagonální matice nemusí být nutně čtvercová. Matice, mající mimo hlavní diagonálu pouze nuly, je bez ohledu na počet řádků či sloupců vždy diagonální.

Příklad 1: Vynásobíme-li ortogonální matici $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ maticí k ní transponovanou zleva, měla by nám podle definice vyjít diagonální matice.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem jsme ověřili, že opravdu nám vyšla matice, která má mimo hlavní diagonálu nuly, matice A je tedy ortogonální.

Definice 3: **Ortonormální matice**

Matice Q se nazývá ortonormální, jestliže $Q^T \cdot Q = E$, kde E je jednotková matice.

V krátkosti si zopakujeme, co je jednotková matice. Čtvercovou diagonální matici, kde jsou všechny prvky d_{kk} rovny 1 a zbylé prvky nulové, nazýváme maticí jednotkovou.

Jako příklad si uvedeme jednotkovou matici řádu tři $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Uvedená definice 3 je velmi krátká, přesto však má velký význam. Říká, že pokud vynásobíme zleva matici maticí, ve které jsou prohozené řádky se sloupci, dostaneme jednotkovou matici. Pro názornost a snazší pochopení si vše ukážeme na příkladu.

<u>Příklad 2:</u> Ortonormální matici $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$, vytvořenou z ortogonální matice A uvedené v příkladu 1 znormováním [1] jejích sloupcových vektorů, vynásobíme maticí Q^T zleva.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ověřili jsme, že skutečně vyjde matice jednotková.

Pro ortonormální matice platí několik vlastností, jejichž důkazy lze zvládnout samostatně nebo je můžeme dohledat v odborné literatuře.

<u>Vlastnosti ortonormálních matic</u>

1. Invertovaná ortonormální matice se rovná transponované ortonormální matici.
$$Q^{-1} = Q^T$$
2. Součin ortonormálních matic je opět matice ortonormální.
3. Transponovaná matice k matici ortonormální je matice ortonormální.

Definice 4: Horní trojúhelníková matice

Matici $R = (a_{ij})$ řádu n, pro kterou $a_{ij} = 0$ pro každé i > j nazýváme maticí horní trojúhelníkovou.

Jako příklad si uvedeme horní trojúhelníkovou matici řádu tři

$$R = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Po dosazení konkrétních čísel je horní trojúhelníkovou maticí například matice

$$R = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Je patrné, že prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové.

---

[1] Pojem normování je podrobně rozebrán v poznámce, která je součástí příkladu číslo 3.

Věta 2: O jednoznačnosti QR-rozkladu
Jsou-li sloupce matice A typu (m, n), m ≥ n, jejíž prvky jsou z množiny **R**, lineárně nezávislé, potom v QR-rozkladu jsou matice R a prvních n sloupců matice Q určeny až na znaménko jednoznačně.

Věta nám říká, máme-li regulární čtvercovou matici, potom je její QR-rozklad určený až na znaménko jednoznačně.
Vyslovenou větu si dokážeme.

Než se pustíme do samotného důkazu, seznámíme se s **pravidly**, které jsou pro násobení matic ve vztahu k jejich invertování a transponování důležité.

a) Máme-li transponovanou matici k matici A a znovu jí transponujeme, dostaneme původní matici A.
$$(A^T)^T = A$$
b) Transponovaný součin matic $A \cdot B$ lze zapsat jako součin transponované matice B s transponovanou maticí A zleva.
$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$
c) Pro invertování platí podobné vlastnosti. Jestliže invertovanou matici k matici A znovu invertujeme, dostaneme původní matici A.
$$(A^{-1})^{-1} = A$$
d) Stejně tak lze invertovaný součin matic $A \cdot B$ zapsat jako součin invertované matice B s invertovanou maticí A zleva.
$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Důkaz V. 2:
Větu dokážeme sporem.
Máme matici A, budeme uvažovat případ, kdy existují dva QR-rozklady.
$$A = Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$
Oba rozklady se rovnají.
$$Q_1 R_1 = Q_2 R_2$$
Pokud si trojúhelníkové matice převedeme na jednu stranu a ortonormální na druhou, dostaneme:
$$Q_2^{-1} Q_1 = R_2 R_1^{-1}.$$

Pro ortonormální matice platí vlastnost $Q^{-1} = Q^T$, z toho plyne, že:
$$Q_2^T Q_1 = R_2 R_1^{-1}. \qquad (*)$$
Obě strany rovnosti umocníme na minus prvou, tímto krokem si pomůžeme k ověření ortonormality matice $R_2 R_1^{-1}$.
$$\left(Q_2^T Q_1\right)^{-1} = \left(R_2 R_1^{-1}\right)^{-1}$$
Uvedený zápis lze rozepsat dle pravidel pro násobení matic ve vztahu k jejich invertování.

Tedy
$$\left(R_2 R_1^{-1}\right)^{-1} = \left(Q_2^T Q_1\right)^{-1} = Q_1^{-1} \cdot \left(Q_2^T\right)^{-1}.$$

Z vlastnosti ortonormálních matic číslo 2 vyplývá, že pokud máme ortonormální matici Q_2, bude také matice Q_2^T ortonormální. Vzhledem k tomu, že invertovaná ortonormální matice se rovná transponované ortonormální matici, můžeme napsat, že

$$Q_1^{-1} \cdot (Q_2^T)^{-1} = Q_1^T \cdot (Q_2^T)^T.$$

Vzhledem k tomu, že platí pravidlo b) uvedené bezprostředně před důkazem, mohu součin matic dle něj rozepsat.

$$Q_1^T \cdot (Q_2^T)^T = (Q_2^T \cdot Q_1)^T$$

Platí-li rovnost (*), potom musí platit

$$(R_2 R_1^{-1})^{-1} = (R_2 R_1^{-1})^T,$$

z toho vyplývá, že matice $R_2 R_1^{-1}$ je ortonormální.

Jestliže matice R_1 je horní trojúhelníková matice, potom je horní trojúhelníkovou maticí i matice k ní inverzní. Součin dvou horních trojúhelníkových matic je opět matice horní trojúhelníková.

Matice, která je horní trojúhelníková a zároveň ortonormální, musí být diagonální.
Taková matice existuje pouze jedna a to jednotková.

$$R_2 R_1^{-1} = E$$

Z této rovnosti plyne, že

$$\boldsymbol{R_1} = \boldsymbol{R_2} \text{ a } \boldsymbol{Q_1} = \boldsymbol{Q_2}.$$

2 VÝPOČET QR-ROZKLADU UŽITÍM GRAMOVA-SCHMIDTOVA ORTOGONALIZAČNÍHO PROCESU

2.1 GRAMŮV-SCHMIDTŮV ORTOGONALIZAČNÍ PROCES

Prvním ze způsobů, kterým lze provést QR-rozklad (1) nějaké matice, je Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Jedná se o proces, který není numericky náročný.
V čem proces spočívá?
Máme-li matici M, jednotlivé její sloupcové vektory si označíme u_1, u_2, u_3, …, u_n. Ortogonalizujeme množinu U = {u_1, u_2, u_3, …, u_n}, tzn. hledáme ortogonální množinu V = {v_1, v_2, v_3, …, v_n}, pro kterou platí, že vektory jsou navzájem kolmé a každý vektor z množiny V = {v_1, v_2, v_3, ..., v_n} mohu napsat lin. kombinací vektorů z množiny U = {u_1, u_2, u_3, …, u_n}.

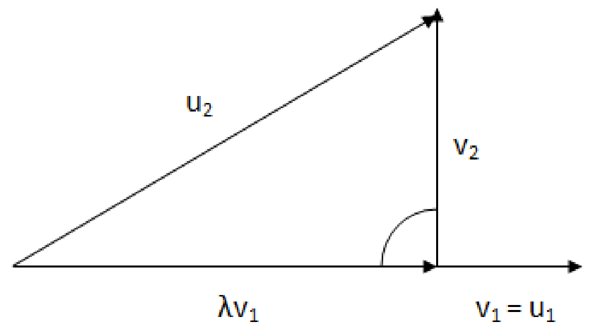
Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces zahrnuje několik kroků.

1. Vektor u_1 položíme rovný vektoru v_1.

$$u_1 = v_1 \tag{2}$$

2. Pomocí vektoru u_2 z množiny U vytvoříme v ortogonální množině V vektor v_2 kolmý na v_1, viz obrázek.

$$u_2 = \lambda v_1 + v_2$$



Obrázek 1: Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces - sestrojení druhého vektoru ortogonální množiny

Obrázek 1: Na obrázku máme schématicky znázorněný vektor u_1, který je totožný s vektorem v_1. Vektor v_2 je vyjádřen pomocí vektoru u_2 a násobku vektoru v_1. Z obrázku je také patrné, že vektory v_1 a v_2 jsou na sebe kolmé.

Po vyjádření v_2 z rovnice dostaneme:

$$v_2 = u_2 - \lambda v_1.$$

Abychom získali vektor v_2, musíme znát násobek vektoru v_1 označený písmenem λ. Ten vypočítáme pomocí skalárních součinů a následnou jejich úpravou.

Skalární součin vektorů u, v označme $f(u, v)$. Pro skalární součin vektoru v_1, v_2 platí $f(v_1, v_2) = 0$, protože jsou na sebe kolmé.

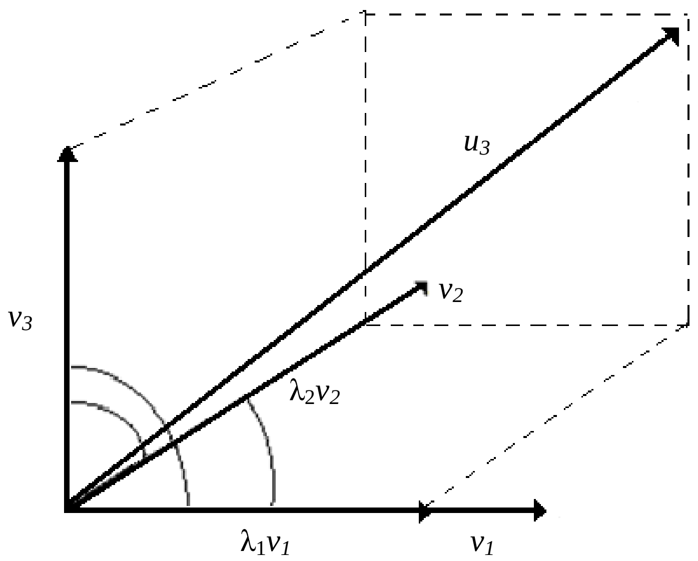
$$f\,(v_1, v_2) = f(v_1, u_2 - \lambda v_1)$$
$$f\,(v_1, v_2) = f\,(v_1, u_2) - \lambda f(v_1, v_1)$$
$$0 = f\,(v_1, u_2) - \lambda f\,(v_1, v_1)$$

$$\lambda = \frac{f\,(v_1, u_2)}{f\,(v_1, v_1)}$$

$$\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{u_2} - \frac{\boldsymbol{f\,(v_1, u_2)}}{\boldsymbol{f\,(v_1, v_1)}}\,\boldsymbol{v_1} \tag{3}$$

3. V dalším kroku pomocí vektoru u_3 najdeme vektor v_3 kolmý na v_1 i v_2, viz obrázek.

$$u_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_1 v_2 + v_3$$
$$v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \tag{4}$$



Obrázek 2: Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces - sestrojení třetího vektoru ortogonální množiny

Obrázek 2: Na obrázku 2 vidíme, že nejen vektory v_1 a v_2 jsou na sebe kolmé, ale také vektor v_3 na vektor v_1 i v_2.

Neznámé násobky λ_1, λ_2 nalezneme z podmínek pro kolmost vektorů v_3, v_1 a v_3, v_2.

$$f(v_3, v_1) = 0$$
$$f(v_3, v_2) = 0$$

Vypočteme součin $f\,(v_3, v_1)$, přičemž vektor v_3 uvažujeme ve tvaru (4).

$$f(v_3, v_1) = f(u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, v_1)$$
$$f(v_3, v_1) = f(u_3, v_1) - \lambda_1\, f(v_1, v_1) - \lambda_2\, f(v_2, v_1)$$
$$0 = f(u_3, v_1) - \lambda_1\, f(v_1, v_1)$$

$$\lambda_1 = \frac{f\ (u_3, v_1)}{f\ (v_1, v_1)}$$

Pro nalezení λ_2 musíme vynásobit vektor v_3 vektorem v_2.

$$f(v_3, v_2) = f(u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, v_2)$$
$$f(v_3, v_2) = f(u_3, v_2) - \lambda_1\, f(v_1, v_2) - \lambda_2\, f(v_2, v_2)$$
$$0 = f(u_3, v_2) - \lambda_2\, f(v_2, v_2)$$

$$\lambda_2 = \frac{f\ (u_3, v_2)}{f\ (v_2, v_2)}$$

$$\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{u_3} - \frac{\boldsymbol{f\ (u_3, v_1)}}{\boldsymbol{f\ (v_1, v_1)}}\ \boldsymbol{v_1} - \frac{\boldsymbol{f\ (u_3, v_2)}}{\boldsymbol{f (v_2, v_2)}}\ v_2 \qquad (5)$$

S dalšími vektory z množiny U až do vektoru u_n pracujeme obdobně. Z již uvedených vztahů je patrné, jak lze dopočítat veškeré násobky vektorů konstruované ortogonální množiny V.

Např. pro vektor v_n platí:

$$v_n = u_n - \frac{f(u_n, v_1)}{f(v_1, v_1)}\ v_1 - \frac{f(u_n, v_2)}{f(v_2 . v_2)} v_2 - \ ... - \frac{f(u_n, v_{n-1})}{f(v_{n-1}, v_{n-1})}\ v_{n-1}$$

2.2 VÝPOČET ORTONORMÁLNÍ MATICE Q

Nyní si ukážeme hledání jak ortogonální, tak i ortonormální matice z QR-rozkladu pro různé typy matic:

a) matice s lineárně nezávislými sloupky
   - matice typu (m, m)
   - matice typu (m, n), kde m > n
   - matice typu (m, n), kde m < n

b) matice s lineárně závislými sloupky typu (m, m)

Příklad 3: Je dána matice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hledejme ortonormální matici Q vystupující v QR-rozkladu matice B, tj. takovou matici Q, pro niž platí $B = Q \cdot R$, kde R je horní trojúhelníková matice.

Upravíme-li matici na odstupňovaný tvar, zjistíme, že množina sloupcových vektorů matice B je lineárně nezávislá.

Než začneme ortogonalizovat, označíme si sloupcové vektory matice B jako u_1, u_2, u_3.

Matice $B = (u_1|u_2|u_3)$.
Vektory: $u_1 = (2, 1, 3)$
$u_2 = (2, 0, 1)$
$u_3 = (-1, -2, 0)$.

1. Vektor v_1 položíme roven vektoru u_1, viz (2).
2. Vektor v_2 dopočítáme dle nám známého vzorce (3) $v_2 = u_2 - \lambda v_1$, kde $\lambda = \frac{f\,(v_1,u_2)}{f\,(v_1,v_1)}$.

$$\text{Tedy } \lambda = \frac{2\cdot2+1\cdot0+3\cdot1}{2\cdot2+1\cdot1+3\cdot3} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2},$$
$$\text{po dosazení } v_2 = (2,0,1) - \frac{1}{2}(2,1,3) = \left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

S vektorem v_2 by se nám obtížně počítalo, proto vezmeme jeho násobek (v našem případě dvojnásobek).
Je patrné, že násobek vektoru v_2 bude také kolmý na vektor v_1.
Násobek vektoru v_2 si označíme jako w_2. Tedy

w_2 = **(2, -1, -1)**.

3. Vektor v_3 počítáme podle vztahu (5), tzn. $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$, kde $\lambda_1 = \frac{f\,(u_3,v_1)}{f\,(v_1,v_1)}$ a $\lambda_2 = \frac{f\,(u_3,w_2)}{f\,(w_2,w_2)}$. (Vektor v_2 jsme nahradili jeho násobkem w_2, se kterým se nám bude lépe počítat.)

$$\lambda_1 = \frac{(-1)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 + 0\cdot 3}{2\cdot 2 + 1\cdot 1 + 3\cdot 3} = -\frac{4}{14} = -\frac{2}{7}$$

$$\lambda_2 = \frac{(-1)\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) + 0\cdot(-1)}{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)} = \frac{0}{6}$$

$$v_3 = (-1,-2,0) + \frac{2}{7}(2,1,3) - 0(2,-1,-1) = \left(-\frac{3}{7}, -\frac{12}{7}, \frac{6}{7}\right)$$

Opět si zvolíme násobek vektoru v_3, aby se nám lépe počítalo.

(-3, -12, 6)

Vidíme, že vektor lze vydělit číslem 3, proto

w_3 = **(-1, -4, 2).**

Matice, jejíž sloupcové vektory jsou vektory w_1, w_2 a w_3, se nazývá matice ortogonální

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podle definice 2 v úvodu práce, musí být součinem matice a maticí k ní transponované (v patřičném pořadí) matice diagonální.
Se stejným příkladem jsme pracovali v příkladě 1, tudíž máme ušetřenou práci a vidíme,

že po vynásobení matic nám vyjde skutečně matice diagonální.

Zdálo by se, že jsme hotoví, ale není tomu tak. Abychom získali ortonormální matici, musíme jednotlivé vektory znormovat. Co si pod pojmem normování představit? Nic složitého. Jednotlivé vektory vydělíme normou.

Poznámka: Norma (velikost) vektoru

Normou vektoru $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ rozumíme $\|u\| = \sqrt{x_1{}^2 + x_2{}^2 + \ldots + x_n{}^2}$.

Norma vektoru: $\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$

$$\|w_2\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|w_3\| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{21}.$$

Nyní už můžeme zapsat ortonormální matici matice B z QR-rozkladu

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}.$$

Správnost výsledků si můžeme ověřit jak výpočtem, tak i pomocí počítačových programů. Jedním z nejpoužívanějších je na internetu běžně dostupný WolframAlpha [9]. Matici do něj zadáme povelem Orthogonalize [{….}], tj. Orthogonalize[{{2,1,3},{2,-1,-1}, {-1,-4,2}}].

<u>Příklad 4:</u> Najděte ortonormální matici Q z QR-rozkladu matice

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde se setkáváme s maticí, která není čtvercová. Přesto zvolíme stejný postup jako v předchozím příkladu.

Matice $S = (u_1|u_2|u_3)$.

Označme si vektory $u_1 = (2, -1, 1, 2)$

$u_2 = (1, -1, 1, 3)$

$u_3 = (1, 0, 1, 1)$.

1. Vektor v_1 se rovná vektoru u_1.
2. Vektor $v_2 = u_2 - \lambda v_1$, kde $\lambda = \frac{f\,(v_1, u_2)}{f\,(v_1, v_1)}$.

$$\lambda = \frac{2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2} = \frac{10}{10} = 1$$

$$v_2 = (1, -1, 1, 3) - (2, -1, 1, 2) = (\mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

3. $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$, kde $\lambda_1 = \frac{f\,(u_3,v_1)}{f\,(v_1,v_1)}$ a $\lambda_2 = \frac{f\,(u_3,v_2)}{f\,(v_2,v_2)}$.

$$\lambda_1 = \frac{1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 1\cdot 2}{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1}{(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$
$$v_3 = (1,0,1,1) - \frac{1}{2}(2,-1,1,2) + 0(1,0,0,1) = \left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$$

Aby se nám lépe počítalo s vektorem v_3, budeme počítat s jeho násobkem. Tentokrát dvojnásobkem. Tedy

$$w_3 = \mathbf{(0, 1, 1, 0)}.$$

Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem jsme našli ortogonální matici z QR-rozkladu matice S:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vypočteme normy sloupcových vektorů:

$$\|v_1\| = \sqrt{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 2} = \sqrt{10}$$
$$\|v_2\| = \sqrt{(-1)\cdot(-1) + 0\cdot 0 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = \sqrt{2}$$
$$\|w_3\| = \sqrt{0\cdot 0 + 1\cdot 1 + 1\cdot 1 + 0\cdot 0} = \sqrt{2}.$$

Ortonormální matice z QR-rozkladu matice S je:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Zde se setkáváme s maticí, jež má více řádků než sloupců. Výpočtem ověříme, zda se jedná skutečně o matici ortonormální.

Matici Q vynásobíme maticí Q^T zleva, vyjde-li nám matice jednotková, jedná se skutečně o matici ortonormální.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Příklad 5: Vypočítejte ortonormální matici Q z QR-rozkladu matice

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V tomto případě se jedná o matici typu (m, n), kde m < n. Z věty 1 víme, že QR-rozklad pro takový typ matice není zajištěn. Přesto se pokusíme dopočítat ortonormální matici Q.

Jedná se o matici, která není čtvercová.

Matice $F = (u_1|u_2|u_3|u_4)$.
Označíme si vektory $u_1 = (2, -1, 1)$
$u_2 = (1, -1, 1)$
$u_3 = (1, 0, 1)$
$u_4 = (2, 3, 1)$.

1. Vektor v_1 se rovná vektoru u_1.
2. Vektor $v_2 = u_2 - \lambda v_1$, kde $\lambda = \frac{f(v_1,u_2)}{f(v_1,v_1)}$.

$$\lambda = \frac{2\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1}{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$
$$v_2 = (1,-1,1) - \frac{2}{3}(2,-1,1) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$$

Opět budeme počítat s násobkem vektoru v_2, neboť se zlomky by se nám počítalo obtížně.

w_2 = **(-1, -1, 1)**

3. $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 w_2$, kde $\lambda_1 = \frac{f\,(u_3,v_1)}{f\,(v_1,v_1)}$ a $\lambda_2 = \frac{f\,(u_3,w_2)}{f\,(w_2,w_2)}$.

$$\lambda_1 = \frac{1\cdot 2 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1}{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$\lambda_2 = \frac{1\cdot(-1) + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1} = 0$$
$$v_3 = (1,0,1) - \frac{1}{2}(2,-1,1) - 0(1,-1,1) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Násobkem v_3 je vektor

w_3 = **(0, 1, 1)**.

4. Vektor v_4 dopočítáme dle vztahu $v_4 = u_4 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 w_2 - \lambda_3 w_3$, kde $\lambda_1 = \frac{f(u_4,v_1)}{f(v_1,v_1)}$, $\lambda_2 = \frac{f(u_4,w_2)}{f(w_2,w_2)}$, $\lambda_3 = \frac{f(u_4,w_3)}{f(w_3,w_3)}$.

$$\lambda_1 = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
$$\lambda_2 = \frac{2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{(-1) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = -\frac{4}{3}$$
$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$v_4 = (2,3,1) - \frac{1}{3}(2,-1,1) + \frac{4}{3}(-1,-1,1) - 2(0,1,1) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$$

Ortogonální matice matice *F*, potřebná k dopočítání matice *Q*, je:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Normy sloupcových vektorů ortogonální matice matice *F*:

$$\|v_1\| = \sqrt{2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = \sqrt{6}$$
$$\|w_2\| = \sqrt{(-1) \cdot (-1) + (-1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1} = \sqrt{3}$$
$$\|w_3\| = \sqrt{0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}$$
$$\|v_4\| = \sqrt{0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0} = 0.$$

Ortonormální matice *Q* z QR-rozkladu matice *F* je:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Z matice je patrné, že pokud máme obdélníkovou matici (m, n), kde m < n, v ortonormální matici se nám jeden ze sloupců vynuluje.

K ověření ortonormality stačí vynásobit matici maticí k ní transponovanou zleva, musí vyjít jednotková matice.

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

V našem případě jednotková matice nevyšla. Můžeme říct, že ortonormální matice k matici *F* neexistuje, tedy neexistuje ani QR-rozklad. O existenci QR-rozkladu je psáno ve větě 1, kde se píše, že rozklad je zajištěn pouze pro matice typu (m, n), m ≥ n. My jsme pracovali s maticí typu (m, n), kde m < n.

Příklad 6: Vypočítejte ortonormální matici Q z QR-rozkladu matice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & 8 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Na první pohled je patrné, že matice má lineárně závislé sloupky. Třetí sloupek lze vynulovat odečtením dvojnásobku sloupku prvního.

Matice $M = (u_1|u_2|u_3)$.
Označíme si vektory u_1, u_2, u_3: vektor u_1 = (2, 4, 2)
vektor u_2 = (-1, 0, 1)
vektor u_3 = (4, 8, 4).

1. Vektor u_1 je roven vektoru v_1.
2. Vektor v_2 dopočítáme dle nám známého vzorce $v_2 = u_2 - \lambda v_1$, kde $\lambda = \frac{f\ (v_1, u_2)}{f\ (v_1, v_1)}$.

$$\lambda = \frac{2 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 1}{2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2} = \frac{0}{24} = 0$$

Po dosazení v_2 = (-1, 0, 1) - 0 (2, 4, 2)
v_2 = **(-1, 0, 1)**.

3. Vektor $v_3 = u_3 - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2$,

$$\lambda_1 = \frac{f\ (u_3, v_1)}{f\ (v_1, v_1)} = \frac{4 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 4 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2} = \frac{48}{24} = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{f\ (u_3, v_2)}{f\ (v_2, v_2)} = \frac{4 \cdot (-1) + 8 \cdot 0 + 4 \cdot 1}{(-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = \frac{0}{2} = 0$$

v_3 = (4,8,4) - 2 (2,4,2) - 0 (-1,0,1) = **(0, 0, 0)**.

Budeme-li postupovat stejně jako v předchozím příkladě, sestavíme matici se sloupky v_1, v_2 a v_3:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ortonormální matici získáme znormováním jejích vektorů.
Vypočteme normy sloupcových vektorů

$$\|v_1\| = \sqrt{2^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$
$$\|v_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$
$$\|v_3\| = \sqrt{0} = 0.$$

Nyní můžeme napsat ortonormální matici z QR-rozkladu:

$$\mathrm{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

V matici si všimneme vynulovaného sloupce, je způsobený lineární závislostí sloupků matice.

I zde si ověříme ortonormalitu výpočtem. Součin matice Q^T s maticí Q musí být roven jednotkové matici, pokud je Q ortonormální.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Také zde nám jednotková matice nevyšla. Čím je to způsobené? Podmínka, že počet řádků matice musí být větší nebo roven počtu sloupců matice, je splněna. Nastal však problém v již zmiňované lineární závislosti sloupků. Má-li matice (m, m) lineárně závislé sloupky, lze ji ekvivalentními úpravami upravit na matici s menším počtem lineárně nezávislých řádků než je sloupců. Pro takový typ matice QR-rozklad neexistuje. Poznamenejme, že také matice (m, n), kde m > n, která má lineárně závislé sloupky, např.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

(poslední sloupek je součtem prvního a –2 násobku druhého) nemá z tohoto důvodu QR-rozklad.

2.3 VÝPOČET HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE R

Nyní když víme, jak vypočítat ortonormální matici, můžeme se pustit do samotného QR-rozkladu.

Máme-li matici A a ortonormální matici Q vypočítanou Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem, pak snadno dopočítáme horní trojúhelníkovou matici R. Předpokládejme, že $A = QR$, pak $R = Q^{-1} \cdot A$. Protože Q je ortonormální, platí vztah $Q^{-1} = Q^T$. Horní trojúhelníkovou matici R tedy dopočítáme vztahem

$$R = Q^T \cdot A. \qquad (6)$$

2.4 VÝPOČET QR-ROZKLADU

Příklad 7: Proveďte QR-rozklad matice $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, jestliže víme,

že $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}$ je ortonormální matice matice B v jejím QR-rozkladu.

(Matici Q jsme dopočítali v příkladě 3 Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem.)

Podle vztahu (6), uvedeném v podkapitole 2.3, se horní trojúhelníková matice rovná součinu transponované matice Q s původní maticí B.
Transponovaná matice k matici Q:

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix}.$$

Horní trojúhelníková matice má proto tvar:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{3}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{21}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14\sqrt{14} & 7\sqrt{14} & -4\sqrt{14} \\ 0 & 7\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

Tedy QR-rozkladem matice B je součin

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{21}} \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{4}{\sqrt{21}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{21}} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 14\sqrt{14} & 7\sqrt{14} & -4\sqrt{14} \\ 0 & 7\sqrt{6} & 0 \\ 0 & 0 & 6\sqrt{21} \end{pmatrix}.$$

Příklad 8: Proveďte QR-rozklad matice $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, jestliže ortonormální matice matice S v jejím QR-rozkladu je $Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$.

(Matici Q jsme dopočítali v příkladě 4 Gramovým-Schmidtovým ortogonalizačním procesem.)

Podle vztahu (6) dopočítáme horní trojúhelníkovou matici R.

Transponovaná matice k matici Q je

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní lze dopočítat horní trojúhelníkovou matici

$$R = Q^T \cdot S = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

QR-rozkladem matice S je součin

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{10} & \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

3 VÝPOČET QR-ROZKLADU UŽITÍM HOUSEHOLDEROVY MATICE ZRCADLENÍ

V předchozí kapitole jsme ortogonální, resp. ortonormální matici Q v QR-rozkladu matice A hledali Gramovým-Schmidtovým algoritmem. Sloupcové vektory matice A jsme ortogonalizovali a následně znormovali. V této kapitole se seznámíme s hledáním ortogonální, resp. ortonormální matice Q zcela odlišným způsobem.

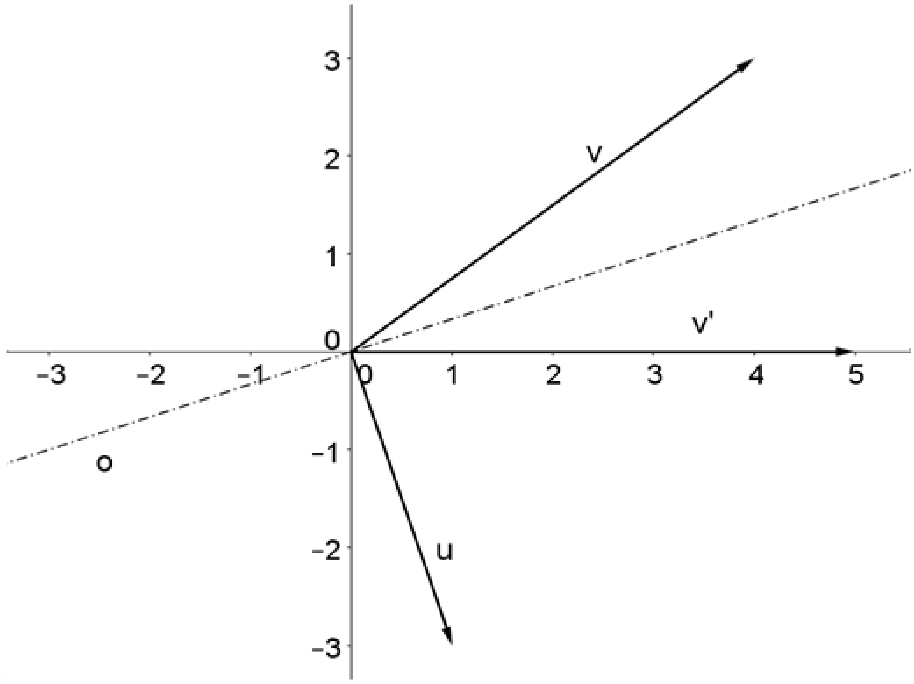
Z geometrie víme, viz např. str. 21 v [4], že matice popisující shodná zobrazení je ortonormální. V kapitole 2 jsme se dověděli a následně jsme si dokázali, že $R = Q^T \cdot A$, kde Q^T je také ortonormální matice. Z toho vyplývá, že transformací sloupců matice A, tedy nalezením shodných zobrazení, která sloupce matice A vhodně transformují, získáme matici R. Transformovat budeme jednotlivé sloupce matice A postupně. Vezmeme-li si první sloupec matice A, budeme ho transformovat tak, abychom získali vektor, mající pouze první složku nenulovou.

Shodným zobrazením v prostoru, které tuto transformaci zprostředkuje, je rovinová souměrnost nebo otočení kolem osy. (V rovině je takovým zobrazením osová souměrnost nebo otočení kolem bodu.)

Rovinová souměrnost se popisuje Householderovou maticí, otáčení kolem osy Givensovou maticí. My se podrobněji podíváme právě na popis matic Householderovou.

3.1 HOUSEHOLDEROVA MATICE ZRCADLENÍ

Uvažujme nejprve rovinovou souměrnost v rovině, tj. osovou souměrnost. Pomocí ní přeměníme nějaký nenulový vektor v, např. $v = (4, 3)$, na vektor v', který má stejnou velikost a pouze první souřadnici různou od nuly. Protože $\|v\| = 5$, umíme bez dalšího uhodnout, že $v' = (5, 0)$ nebo $v' = (-5, 0)$. Osová souměrnost, která zobrazí v na vektor v' je určena počátkem soustavy souřadnic a osou o. Směrový vektor osy je dán součtem vektorů v a v', je tedy roven vektoru (9, 3), jako normálový vektor lze vzít vektor $u = (1, -3)$, viz obrázek.



Obrázek 3: Osová souměrnost v rovině - určení směrového vektoru osy souměrnosti

Definujme nyní Householderovu matici, pomocí níž bude možno popsat uvedenou osovou souměrnost v závislosti na vektoru u.

Definice 5: Householderova matice
Matice ve tvaru

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{E} - \frac{2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T}{\|\boldsymbol{u}\|^2} \tag{7}$$

se nazývá Householderova matice zrcadlení.

<u>Příklad 9</u>:

1. Pomocí (7) vypočtěte Householderovu matici $H(u)$ pro $u = (1, -3)^T$.
2. Ověřte, že se součinem $H(u) \cdot v$, kde $v = (4, 3)^T$, vektor v transformuje na vektor v'.
3. Vypočtěte součin $H(u) \cdot A$, kde
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Všimněte si, že v je prvním sloupcovým vektorem matice A a vysvětlete, co se po transformaci Householderovou maticí stane s druhým sloupcovým vektorem.

Řešení:

1. Abychom mohli dosadit do vztahu (7), musíme vypočítat součin vektorů $u \cdot u^T$ a velikost vektoru u.

   Součin vektorů
$$uu^T = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot (1 \quad -3) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Velikost vektoru *u*

$$\|u\| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}.$$

Nyní máme veškeré potřebné výpočty a můžeme dosazovat. Tedy Householderova matice vektoru *u*

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{2}{10} & -\frac{6}{10} \\ -\frac{6}{10} & \frac{18}{10} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix}.$$

2. Provedeme-li součin matice *H(u)* s vektorem *v*, změníme vektor *v* na vektor *v´*, jenž bude mít druhou složku nulovou

$$H(u) \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$v' = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Správnost výpočtu si ověříme pomocí velikostí vektorů. Vektor *v* má velikost

$$\|v\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Vektor *v´* bude mít nulovou druhou složku, přesto musí mít velikost stejnou jako vektor *v*. Z toho vyplývá, že se první složka musí rovnat 5.

4. Počítáme-li součin matic

$$H(u) \cdot A,$$

vidíme, že první sloupec matice *A* je vektor *v*. Bez váhání můžeme napsat do prvního sloupce výsledné matice vektor *v´*. Druhý sloupec dopočítáme.

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Jak si můžeme všimnout, dostali jsme horní trojúhelníkovou matici. První sloupcový vektor se transformoval na vektor se stejnou velikostí mající druhou složku nulovou. Druhý sloupcový vektor *w* = (-2, 1) se transformoval na vektor

w' = (-1, -2). Oba mají stejnou velikost.

Zamyslíme-li se nad tím, co jsme vypočítali, zjistíme, že už máme QR-rozklad matice A. Householderova matice

$$H(u) = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix}$$

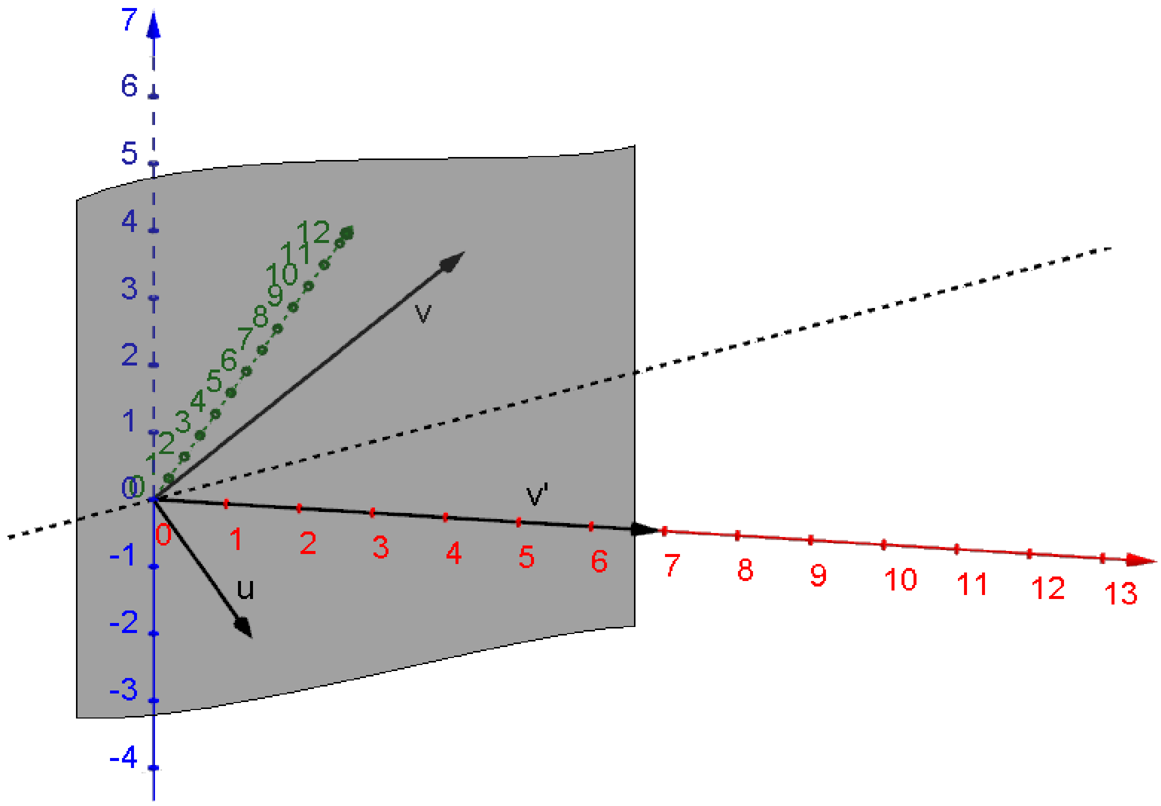
je ortonormální, neboť

$$\begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix} = \frac{4}{100} \begin{pmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} = E.$$

Můžeme si všimnout, že je navíc i symetrická. Předchozím výpočtem jsme našli horní trojúhelníkovou matici R. Známe tedy QR-rozklad matice A:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{8}{10} & \frac{6}{10} \\ \frac{6}{10} & -\frac{8}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zkusme nyní přiblížit působení Householderovy matice na vektor v v prostoru. Nechť je např. v = (3, 6, 2), pak je $\|v\|$ = 7. Rádi bychom Householderovou transformací získali vektor v' = (7, 0, 0) nebo (–7, 0, 0), který má kromě první souřadnice všechny souřadnice nulové. Zobrazením, které vzoru v přiřadí obraz v' je rovinová souměrnost určená rovinou ρ. Rovina ρ prochází počátkem soustavy souřadnic a dále je určena směrovým vektorem $v + v'$ = (10, 6, 2) a směrovým vektorem $v \times v'$ = (0, –1, 3). Rovinu je úspornější určit normálovým vektorem u = (2, –3, –1) kolmým na oba směrové vektory a počátkem, viz obrázek.



Obrázek 4: Rovinová souměrnost v prostoru - působení Householderovy matice na vektor v prostoru

<u>Příklad 10</u>: Vypočtěte Householderovu matici $H(u)$ pro $u = (2, -3, -1)^T$. Ověřte, že se součinem $H(u) \cdot v$, kde $v = (3, 6, 2)^T$, vektor v změní na vektor, který má nenulovou pouze první souřadnici.

Stejně jako v příkladě 9 si musíme nejprve vypočítat součin $u \cdot u^T$ a velikost vektoru u.

Součinem vektorů je matice

$$uu^T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -6 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Velikost vektoru

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}.$$

Nyní dosadíme do vztahu (7)

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 & -6 & -2 \\ -6 & 9 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{9}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{14} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}.$$

Všimněme si opět, že Householderova matice je symetrická. Abychom si ověřili, že vektor v bude mít po vynásobení Householderovou maticí nenulovou pouze první složku, provedeme součin matice $H(u)$ s vektorem v.

$$H(u) \cdot v = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{6}{14} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

tedy

$$v' = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Výpočtem jsme si potvrdili, že se nám vektor v změnil na vektor, který má mimo první složku všechny složky nulové. V našem případě se vektor $v = (3, 6, 2)^T$ změnil na vektor $v' = (7, 0, 0)^T$.

U praktických úloh není vždy pohodlné hledat vektor u, který prostřednictvím Householderovy matice $H(u)$ změní vektor v na vektor v', pomocí geometrických úvah a se zapojením analytické geometrie. Následující věta popisuje, jak pro libovolný nenulový vektor x určit vektor u tak, aby $H(u)$ transformovala vektoru x na vektor, který má nenulovou pouze první souřadnici.

Věta 3:
Pro každý vektor $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, kde $x \in \mathbf{R}^n$ lze definovat matici H.
Matice

$H = H(u)$, kde $u = x + \operatorname{sgn}(x_1)\, \|x\|\, e_1$ právě tehdy, když $x_1 \neq \|x\|$,
$H = E$, pokud $x_1 = \|x\|$.

Matice H je maticí ortonormální a platí pro ni

$$Hx = \|x\| e_1.$$

Abychom nezůstali u pouhé věty, osvětlíme, co znamená.

Jestliže velikost vektoru x se nerovná první složce vektoru x, potom matici H sestrojíme jako Householderovu matici s vektorem $u = H(x + \operatorname{sgn}(x_1)\, \|x\|\, e_1)$, kde $\|x\|$ je velikost vektoru x, e_1 vektor $(1, 0, 0, \dots, 0)$ a funkce signum určuje, zda použijeme znaménko plus

nebo minus. Znaménko určí první složka vektoru x, pokud je kladná, použijeme plus, pokud záporná, použijeme minus.
Jestliže se rovná první složka vektoru x jeho velikosti, potom matice $H = E$.

Důkaz V.3:

a) Chceme dokázat, že

$$H = E,$$

jestliže

$$x_1 = \|x\|.$$

Víme, že velikost vektoru se počítá pomocí vztahu

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

proto

$$x_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Odmocninu odstraníme umocněním na druhou

$$x_1^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Aby platila rovnost, musí se členy $x_2, x_3, \ldots, x_n$ rovnat 0. Z toho plyne, že

$$x = (x_1, 0, \ldots, 0)$$

a tedy

$$x = x_1 \cdot (1,0, \ldots 0) = x_1 e_1.$$

Protože $\|x\| = x_1$, je

$$x = \|x\| \cdot e_1.$$

Platí $E \cdot x = x$, potom

$$E \cdot x = \|x\| \cdot e_1.$$

Matice E je ortogonální a platí pro ni $E \cdot x = \|x\| \cdot e_1$. Pokud $\|x\| = x_1$, našli jsme matici $H = E$ požadovaných vlastností.

b) Ve druhé části chceme dokázat, že $H = H(x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|e_1)$ v případě, že $x_1 \neq \|x\|$.
Jestliže

$$x_1 \neq \|x\|,$$

potom

$$x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|e_1 \neq o.$$

Zjednodušíme si součet na součet vektorů z a y.
Vektor $z = x$

$y = \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|e_1$.

Z rovnosti $x = z$ je patrné, že se rovnají i velikosti

$$\|x\| = \|z\|.$$

Normu vektoru y lze vyjádřit na základě několika úvah. Jako první dosadíme za y

$$\|y\| = \|\operatorname{sgn}(x_1)\|x\|e_1\|.$$

Norma součinu čísla a vektoru se rovná součinu čísla v absolutní hodnotě s normou vektoru, proto

$$\|y\| = |\mathrm{sgn}(\mathrm{x}_1)|\ \|x\|\|e_1\|.$$

Vzhledem k tomu, že funkce signum nabývá pouze hodnoty 1 a -1. Budeme v absolutní hodnotě mluvit vždy o 1. Tudíž získáváme rovnost

$$\|y\| = \|x\|.$$

Na základě námi ověřených rovností můžeme napsat, že platí

$$\|x\| = \|z\| = \|y\|.$$

Pro každé dva vektory, jejichž normy se rovnají lze dokázat, že je můžeme na sebe převést Householderovou transformací.

Učiníme tak, použijeme-li vztah

$$y = H(y - z)z,$$

jehož důkaz nalezneme v [7].
Tedy

$$y = \mathrm{sgn}(\mathrm{x}_1)\|x\|e_1 = H(\mathrm{sgn}(\mathrm{x}_1)\|x\|e_1 + x)x.$$

Jak přetransformovat pomocí věty 3 libovolný vektor *x* na vektor, který má kromě první složky všechny složky nulové?

- Máme-li vektor

  $$\mathrm{x} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})^\mathrm{T},$$

  musíme vypočítat jeho velikost

  $$\|x\| = \sqrt{\mathrm{x}_1{}^2 + \mathrm{x}_2{}^2 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{n}{}^2}.$$

  Poznámka: Velikost vektoru jsme v kapitole 2.2 označovali jako normu vektoru.

- Z vektoru *x* dospějeme k vektoru *u* podle vzorce

  $$u = x + \mathrm{sgn}(\mathrm{x}_1)\|x\|e_1.$$

  Jestliže je první složka vektoru *x* kladná, potom použijeme vzorec ve tvaru

  $$u = x + \|x\|e_1,$$

  v případě záporné první složky

  $$u = x - \|x\|e_1.$$

  Vektor e_1 je vektorem jednotkovým

  $$(1\ , 0, \ldots, 0).$$

  Po dosazení hodnot získáváme vektor

  $$u = (u_1,\ u_2, \ldots, u_n)^T.$$

- Abychom mohli dosazovat do vzorce (7)

  $$H(u) = E - \frac{2uu^T}{\|u\|^2},$$

  chybí nám dopočítat velikost vektoru *u* a součin uu^T.

Velikost vektoru se počítá stejně, jako se počítala velikost vektoru x.
Tedy

$$\|u\| = \sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + \cdots + u_n{}^2}.$$

Pro součin uu^T platí

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \cdot (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n) = \begin{pmatrix} u_1u_1 & u_1u_2 & \dots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2u_2 & \dots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_1 & u_nu_2 & \dots & u_nu_n \end{pmatrix}.$$

Podíváme-li se na matici uu^T pozorně, zjistíme, že se jedná o matici symetrickou. Symetrie je vlastnost, jež nám usnadní výpočet, budeme-li pracovat bez počítače.

Nyní už stačí pouze dosadit do (7).

- Vynásobíme-li matici *H(u)* vektorem x, dostáváme vektor, jehož složky jsou až na první složku nulové.

$$H(u) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Obecný popis si ukážeme na příkladu.

<u>Příklad 11 :</u>
Vektor $x = (-2, 3, -1)^T$ transformujte na vektor, který bude ve tvaru $(z, 0, 0)^T$, tedy pouze první složka vektoru nebude nulová.
Nejprve musíme vypočítat velikost vektoru x

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}\,.$$

Nyní se budeme držet věty 3, která nám říká, že pokud $x_1 \neq \|x\|$, potom vektor

$$u = x + \operatorname{sgn}(x_1)\|x\|e_1.$$

Funkce signum určuje znaménko, které se ve vzorci objeví. V našem případě je první složkou vektoru číslo -2, proto

$$u = x - \|x\|e_1.$$

Vektor e_1 je vektor jednotkový. Jeho první složka je 1 a ostatní nulové

$$e_1 = (1, 0, 0).$$

Po dosazení získáváme vektor u:

$$u = ((-2) - \sqrt{14}, 3, -1)^T.$$

Nyní známe vektor u a můžeme se pustit do výpočtů potřebných k sestavení matice *H(u).*

Skalárním součinem vektorů u a u^T je matice:

$$uu^T = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{14} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2-\sqrt{14} & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18+4\sqrt{14} & -6-3\sqrt{14} & 2+\sqrt{14} \\ -6-3\sqrt{14} & 9 & -3 \\ 2+\sqrt{14} & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Posledním krokem před samotnou konstrukcí Householderovy matice je vypočítání velikosti vektoru u a následné umocnění na druhou.

$$\|u\| = \sqrt{\left(-2-\sqrt{14}\right)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{4(7+\sqrt{14})}$$

$$\|u\|^2 = 4(7+\sqrt{14})$$

Nyní sestavíme matici

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{70}(7-\sqrt{14}) \begin{pmatrix} 18+4\sqrt{14} & -6-3\sqrt{14} & 2+\sqrt{14} \\ -6-3\sqrt{14} & 9 & -3 \\ 2+\sqrt{14} & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{3\sqrt{14}}{14} & -\frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & \frac{1}{70}(7+9\sqrt{14}) & \frac{3}{70}(7-\sqrt{14}) \\ -\frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{3}{70}(7-\sqrt{14}) & \frac{1}{70}(63+\sqrt{14}) \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li matici *H(u)* zadaným vektorem *x*, dostaneme vektor, jehož složky jsou kromě první nulové.

$$H(u)x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{14}}{7} & \frac{3\sqrt{14}}{14} & -\frac{\sqrt{14}}{14} \\ \frac{3\sqrt{14}}{14} & \frac{1}{70}(7+9\sqrt{14}) & \frac{3}{70}(7-\sqrt{14}) \\ -\frac{\sqrt{14}}{14} & \frac{3}{70}(7-\sqrt{14}) & \frac{1}{70}(63+\sqrt{14}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(\boldsymbol{\frac{6\sqrt{14}}{7}}, \mathbf{0}, \mathbf{0}\right)^{\boldsymbol{T}}$$

<u>Příklad 12:</u>

Vektor $x = (-2, 1, 1)^T$ pomocí Householderovy matice transformujte na vektor, jehož první složka je nenulová, ostatní nulové.

Budeme počítat stejným způsobem jako příklad 11.

Velikost vektoru x

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

První složka vektoru x není kladná, proto použijeme vztah:

$$u = x - \|x\| e_1.$$

Vektor e_1 je stejně jako v předchozím příkladě (1, 0, 0).
Po dosazení konkrétních hodnot dostáváme

$$u = (-2 - \sqrt{6}, 1, 1)^{\mathrm{T}}.$$

Velikost vektoru u:

$$\|u\| = \sqrt{\left(-2-\sqrt{6}\right)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4(3+\sqrt{6})}.$$

Posledním krokem než zkonstruujeme Householderovu matici je vypočítání součinu uu^T. Tedy

$$uu^T = \begin{pmatrix} -2-\sqrt{6} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2-\sqrt{6} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+4\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} \\ -2-\sqrt{6} & 1 & 1 \\ -2-\sqrt{6} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Získaný součin použijeme k výpočtu Householderovy matice

$$H(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{3-\sqrt{6}}{6} \begin{pmatrix} 10+4\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} & -2-\sqrt{6} \\ -2-\sqrt{6} & 1 & 1 \\ -2-\sqrt{6} & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6}\left(6+\sqrt{6}\right) & \frac{1}{6}\left(\sqrt{6}-3\right) \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6}\left(\sqrt{6}-3\right) & \frac{1}{6}(9-\sqrt{6}) \end{pmatrix}.$$

Vynásobením matice $H(u)$ zadaným vektorem x získáváme řešení

$$H(u)x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6}\left(6+\sqrt{6}\right) & \frac{1}{6}\left(\sqrt{6}-3\right) \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{1}{6}\left(\sqrt{6}-3\right) & \frac{1}{6}(9-\sqrt{6}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (\boldsymbol{\sqrt{6}}, \mathbf{0}, \mathbf{0})^{\boldsymbol{T}}.$$

Abychom mohli provést QR-rozklad matice, je potřeba vypočítat horní trojúhelníkovou matici R a ortogonální matici Q.

3.2 HLEDÁNÍ HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE R

Máme-li zadanou matici A řádu n

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

potom matice R dosáhneme pomocí Householderových matic vytvořených z jednotlivých sloupků matice.

Jako první vypočítáme Householderovu matici, pomocí níž se první sloupek matice, tj.

$$(a_{11},\ a_{21}, \dots, a_{n1})^T,$$

transformuje na vektor s pouze první souřadnicí různou od 0. Nazveme ji $H(u_1)$.

Po vynásobení matice $H(u_1)$ maticí A dostaneme matici ve tvaru

$$H(u_1)\cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

označme si ji A_1.

V matici A_1 máme první sloupek ve tvaru, v němž musí v horní trojúhelníkové matici být. Je potřeba se zaměřit na úpravu sloupku druhého. Výpočtem Householderovy matice pro

$$(b_{12}, b_{22}, \dots, b_{n2})^T$$

si nepomůžeme.

Cílem není ve druhém sloupku mít veškeré řádky až na první nulové, ale je potřeba mít první dva řádky upravené tak, aby jejich hodnoty se nerovnaly 0. Jak toho docílit?

Vezmeme v úvahu podmatici matice A_1, která neobsahuje její první řádek a sloupek. Označme si ji A_1‘,

$$A_1' = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

V tomto případě nám nic nebrání vypočítat Householderovu matici $H(u_2)$ prvního sloupku matice A_1‘

$$(b_{22},\ b_{32}, \dots, b_{n2})^T.$$

Po vynásobení matice $H(u_2)$ maticí A_1‘dospějeme k matici

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Stejným postupem budeme pokračovat, dokud nedospějeme k matici

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} x_{n-1\,n-1} & x_{n-1\,n} \\ 0 & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nyní se nabízí otázka, jak sestavit horní trojúhelníkovou matici R. Realizace není náročná. Známe-li matici

$$A_1 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

pak její podmatici

$$A_1' = \begin{pmatrix} b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

jež vznikla vyškrtnutím prvního řádku a prvního sloupce, nahradíme maticí

$$A_2 = \begin{pmatrix} c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Tímto algoritmem pokračujeme dál, dokud nenahradíme podmatici matice A_{n-2} maticí A_{n-1}.

Matice R je tedy

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ 0 & 0 & d_{33} & \dots & d_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & x_{n-1\,n-1} & x_{n-1\,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Pro ilustraci a snazší pochopení výkladu uvedeme příklad.

<u>Příklad 13:</u> Nalezněte horní trojúhelníkovou matici matice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Jelikož se držíme námi předepsaného postupu, vypočítáme Householderovu matici $H(u_1)$ prvního sloupku

$$x = (3, 6, 2)^T.$$

Velikost vektoru

$$\|x\| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{49} = 7.$$

Vektor u_1 dopočítáme dle vztahu

$$u_1 = x + \|x\| e_1.$$

Tedy

$$u_1 = (10, 6, 2)^T.$$

$$\|u_1\| = \sqrt{10^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{140}.$$

$$u_1 u_1^T = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (10 \quad 6 \quad 2) = \begin{pmatrix} 100 & 60 & 20 \\ 60 & 36 & 12 \\ 20 & 12 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$H(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{70}\begin{pmatrix} 100 & 60 & 20 \\ 60 & 36 & 12 \\ 20 & 12 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{17}{35} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení matice *H(u₁)* maticí *A* dostáváme matici

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{17}{35} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{33}{35} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & \frac{24}{5} & \frac{9}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Podmatice matice A_1 je

$$A_1' = \begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix}.$$

Nyní je potřeba vypočítat opět Householderovu matici pro transformaci prvního sloupku matice A_1‘. Označme si ho

$$y = \left(\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right).$$

Z vektoru y vypočteme vektor u_2 a následně Householderovu matici (postup je stejný jako u předešlého vektoru x).

Householderova matice je

$$H(u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Stejně jako matici $H(u_1)$ vynásobíme i matici $H(u_2)$ maticí A_1‘

$$A_2 = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{24}{5} & \frac{9}{5} \\ \frac{18}{5} & \frac{13}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice R je tedy

$$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.3 HLEDÁNÍ ORTOGONÁLNÍ MATICE Q

Transponovanou matici k matici Q dopočítáme pomocí Householderových matic $H(u_1)$, $H(u_2)$, … , $H(u_n)$, $H(u_{n-1})$. Matice $H(u_1)$ je největšího řádu, matice $H(u_{n-1})$ nejmenšího. Matici $H(u_{n-1})$ doplníme jednotkovou maticí tak, aby byla stejného řádu jako matice $H(u_1)$. Stejným způsobem doplníme matici $H(u_n)$. Pokračujeme až do matice $H(u_2)$. Matici $H(u_1)$ nedoplňujeme, neboť je řádu, do kterého jsme doplňovali ostatní matice. Vzniklé matice vynásobíme, jak je uvedeno ve vzorci

$$Q^T = \begin{pmatrix} E_{n-2} & 0 \\ 0 & H(u_{n-1}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{n-1} & 0 \\ 0 & H(u_n) \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ 0 & H(u_3) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & H(u_2) \end{pmatrix} \cdot H(u_1),$$

kde $E_{n-2}, E_{n-1}, \ldots, E_2, E_1$ jsou jednotkové matice řádu n–2, n–1, …, 2, 1.

Vzhledem k tomu, že v příkladě 13 máme k matici D dopočítané matice $H(u_1)$ a $H(u_2)$, ukážeme si hledání ortogonální matice také na ní.

Příklad 14: Nalezněte ortogonální matici matice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

známe-li matici $H(u_1) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{17}{35} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{33}{35} \end{pmatrix}$ a matici $H(u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$.

Matice

$$Q^T = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & H(u_2) \end{pmatrix} \cdot H(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{17}{35} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & -\frac{6}{7} & \frac{33}{35} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{22}{175} & \frac{3}{25} \\ \frac{2}{7} & -\frac{171}{175} & \frac{222}{175} \end{pmatrix},$$

tedy

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{22}{175} & -\frac{171}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{25} & \frac{222}{175} \end{pmatrix}.$$

3.4 VÝPOČET QR-ROZKLADU

Příklad 15: Proveďte QR-rozklad matice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -6 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Zde máme velmi ulehčenou práci, protože horní trojúhelníkovou matici pro matici D jsme vypočítali v příkladě 13 a matici ortonormální v příkladě 14.

QR-rozkladem matice D je součin

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{6}{7} & \frac{22}{175} & -\frac{171}{175} \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{25} & \frac{222}{175} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V následujícím příkladě si provedeme komplexní výpočet QR-rozkladu zadané matice.

Příklad 16: Proveďte QR-rozklad matice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

pomocí Householderovy matice zrcadlení.

Matici A musíme upravit do tvaru horní trojúhelníkové matice. Jak víme z předchozí kapitoly, jedná se o matici, která má pod hlavní diagonálou nuly. U naší matice dosáhneme takového tvaru aplikacemi Householderových matic na jednotlivé sloupky matice.

Jako první vytvoříme Householderovu matici $H(u_1)$ z vektoru

$$(-1, 2, 2)^T.$$

Označme si ho například x.
Využijeme postup jako v příkladě 9 a 10.

Velikost vektoru x:

$$\|x\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Platí, že

$$u_1 = x + \mathrm{sgn}(\mathrm{x}_1)\|x\|e_1.$$

V našem případě máme první složku vektoru x zápornou, proto
$$u_1 = x - \|x\|e_1 = (-4,\ 2,\ 2)^{\mathrm{T}}.$$
Jeho velikost je
$$\|u_1\| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Součin $u_1 \cdot u_1^T$

$$\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix} \cdot (-4 \quad 2 \quad 2) = \begin{pmatrix}16 & -8 & -8\\-8 & 4 & 4\\-8 & 4 & 4\end{pmatrix}.$$

$$H(u_1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} - \frac{1}{12}\begin{pmatrix}16 & -8 & -8\\-8 & 4 & 4\\-8 & 4 & 4\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

Matici A_1, která bude mít v prvním sloupci pouze na prvním řádku nenulovou hodnotu, dostaneme tak, že vynásobíme matici $H(u_1)$ maticí A.
Tedy

$$A_1 = \begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & -1 & -2\\-3 & 4 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & -\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & \frac{7}{3}\\ 0 & 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Dostali jsme matici A_1, jejíž první sloupek má nenulovou hodnotu pouze v prvním řádku. Abychom dostali matici trojúhelníkovou, bude potřeba vynulovat třetí řádek ve druhém sloupci. Docílíme toho opět pomocí Householderovy matice, kterou aplikujeme na vektor

$$y = (-1;\ 1)^{\mathrm{T}}$$

z matice

$$A_1' = \begin{pmatrix}-1 & \frac{7}{3}\\ 1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix},$$

jež je podmaticí matice A_1. Dostali jsme ji vyškrtnutím prvního sloupce a prvního řádku v matici A_1.

Po stejných krocích jako u vektoru x jsme se dostali k vektoru

$$u_2 = (-1 - \sqrt{2};\ 1)^T$$

a následně k matici

$$H(u_2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení matice $H(u_2)$ maticí A_1‘ dostaneme matici

$$A_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & \frac{7}{3} \\ 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{8}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Nyní nám nebrání nic v sestavení horní trojúhelníkové matice R. Známe-li matici A_1, potom její podmatici A_1‘ nahradíme maticí A_2. Vzhledem k tomu, že jsme měli zadanou matici typu 3x3, jsme již po jediném kroku hotový.

Tedy

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Matici Q^T dopočítáme jako součin matice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(u_2) \end{pmatrix}$ a $H(u_1)$.

$$\mathrm{Q^T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H(u_2) \end{pmatrix} \cdot H(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Transponujeme-li matici Q^T, získáme

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

QR-rozkladem matice A je součin

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & -\frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{8}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Příklad 17: Proveďte QR-rozklad matice

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

pomocí Householderovy matice zrcadlení.

Nyní se setkáváme s maticí, která není čtvercová. Jak si ověříme výpočtem, i zde funguje při hledání QR-rozkladu Householderova matice zrcadlení.
Jako první si vytvoříme Householderovu matici z vektoru

$$x = (-2, 6, 3)^T.$$

Velikost vektoru x

$$\|x\| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7.$$

K dopočítání vektoru u_1 použijeme vztah

$$u_1 = x - \|x\| e_1.$$

Vektor

$$u_1 = (-9,\ 6,\ 3)^T,$$

jeho velikost je

$$\|u_1\| = \sqrt{(-9)^2 + 6^2 + 3^2} = \sqrt{126}.$$

Nyní nám nic nebrání k dopočítání součinu $u_1 \cdot u_1^T$

$$\begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (-9 \quad 6 \quad 3) = \begin{pmatrix} 81 & -54 & -27 \\ -54 & 36 & 18 \\ -27 & 18 & 9 \end{pmatrix}.$$

Householderovou maticí vektoru u_1 je matice

$$H(u_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 81 & -54 & -27 \\ -54 & 36 & 18 \\ -27 & 18 & 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Po vynásobení matice $H(u_1)$ maticí C dostáváme matici

$$C_1 = H(u_1) \cdot C = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matice není v horním trojúhelníkovém tvaru. Je potřeba vynulovat třetí řádek ve druhém sloupci. Toho dosáhneme aplikací Householderovy matice na vektor

$$y = (2, 1)^{\mathrm{T}},$$

který je podmaticí matice C_1.

K vektoru u_2 dospějeme stejným postupem jako k vektoru u_1.

$$u_2 = (2+\sqrt{5}, 1)^T$$

$$H(u_2) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Po vynásobení matice $H(u_2)$ vektorem $y = (2, 1)^{\mathrm{T}}$ dostaneme matici

$$C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní nám nic nebrání v sestavení horní trojúhelníkové matice R. Známe-li matici C_1, potom její podmatici $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ nahradíme maticí C_2

$$R = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Transponovanou matici k matici Q dopočítáme pomocí vzorce

$$\mathrm{Q}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{H}(\mathrm{u}_2) \end{pmatrix} \cdot H(u_1).$$

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{6}{7} & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & \frac{6}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{15}{7\sqrt{5}} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Matice Q je maticí transponovanou k matici Q^T.

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

QR-rozkladem matice *C* je součin matic

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{7} & -\frac{15}{7\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{6}{7} & -\frac{4}{7\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{3}{7} & -\frac{2}{7\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 0 & -\sqrt{5} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4 UŽITÍ QR-ROZKLADU

V předchozích kapitolách jsme si vysvětlili, jak provádět QR-rozklad matice pomocí dvou nejznámějších metod. Jedná se o rozklad pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu a rozklad pomocí Householderovy matice zrcadlení. V některé odborné literatuře se lze dočíst, že pomocí Householderovy matice je QR-rozklad méně náročný. Kde v praxi QR-rozklad matice použijeme, jsme se zatím nezmiňovali.

Užití QR-rozkladu je velmi rozmanité. Pomáhá při řešení soustav lineárních rovnic, hledání vlastních čísel a v mnoha dalších případech. Pomocí něj lze počítat i mnoho záležitostí v oblasti fyziky. My se zaměříme především na řešení soustav lineárních rovnic.

4.1 ŘEŠENÍ SOUSTAV LINEÁRNÍCH ROVNIC

Budeme rozlišovat několik typů soustav m rovnic o n neznámých. V soustavě může být rovnic více než neznámých, méně než neznámých nebo stejně. Veškeré soustavy rovnic budeme řešit v množině reálných čísel, neboť QR-rozklad je definovaný pouze pro matice nad **R**.

Nejprve se zaměříme na soustavu rovnic, kde je hodnost matice *A* rovna řádu matice.

4.1.1 SOUSTAVA N LINEÁRNÍCH ROVNIC O N NEZNÁMÝCH

Máme-li soustavu rovnic

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_n + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{gathered}$$

můžeme ji zapsat pomocí matic

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ve tvaru

$$A \cdot x = b.$$

Matice A je čtvercová řádu n. Vzhledem k tomu, že řádky i sloupky jsou lineárně nezávislé, můžeme říct, že vyhovuje Frobeniově podmínce, tzn. její hodnost
hod(*A*) = hod($A|b$).
Soustava rovnic má právě jedno řešení, protože hod(*A*) = n.

Matice *x* je maticí řešení soustavy rovnic.

Máme soustavu rovnic

$$A \cdot x = b.$$

Z věty 1 víme, že

$$A = QR,$$

proto

$$QRx = b$$

$$Rx = Q^T b \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{b}). \qquad (9)$$

Jak postupovat při výpočtu?

K nalezení řešení potřebujeme vypočítat horní trojúhelníkovou matici R a ortonormální matici Q matice A. Získáme je buď QR-rozkladem pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu (postup uveden v kapitole 2.2 a 2.3) nebo prostřednictvím Householderovy matice zrcadlení (postup je uveden v kapitole 3.2 a 3.3).

Známe-li matici R a matici Q, snadno dopočítáme konkrétní hodnoty neznámých.

Uvedenou problematiku snáze pochopíme, ukážeme-li si konkrétní příklad.

<u>Příklad 18:</u> Nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic

$$5x_1 + 3x_2 = 15$$
$$-10x_1 + 6x_2 = 9.$$

Nejprve soustavu lineárních rovnic vypočítáme sčítací metodou.

$$\begin{array}{c} 5x_1 + 3x_2 = 15 \;/\cdot 2 \\ \underline{-10x_1 + 6x_2 = 9} \\ 10x_1 + 6x_2 = 30 \\ \underline{-10x_1 + 6x_2 = 9} \\ 12x_2 = 39 \\ x_2 = \dfrac{13}{4} \end{array}$$

$$5x_1 + 3 \cdot \frac{13}{4} = 15$$
$$5x_1 = \frac{21}{4}$$
$$x_1 = \frac{21}{20}$$

Známe řešení soustavy rovnic, podle kterého si zkontrolujeme řešení dopočítané na základě QR-rozkladu.

Maticí *A* je čtvercová matice řádu 2

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix},$$

maticí *b* matice typu (2, 1)

$$b = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Soustavu rovnic lze zapsat maticovým zápisem

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Jak jsme si uvedli, nejdříve vypočítáme horní trojúhelníkovou matici *R* a ortonormální matici *Q* matice *A*. Vzhledem k tomu, že příkladů na QR-rozklad matice jsme podrobně rozebrali dost, použijeme k výpočtu program [9]. Výsledku dosáhneme zadáním příkazu QR decomposition[{…}], v našem případě QR decomposition[{{5,3},{-10,6}]. Je důležité nepřehlédnout, že nám program vypočítá matici Q^{+} nikoli *Q*. Znaménko + znamená, že se jedná o matici transponovanou.

Získali jsme horní trojúhelníkovou matici

$$R = \begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

a ortonormální matici *Q*

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Dosadíme podle vztahu

$$Rx = Q^T b$$

$$\begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \end{pmatrix},$$

po úpravách

$$\begin{pmatrix} 5\sqrt{5} & -\frac{9}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{12}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{\sqrt{5}} \\ \frac{39}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Nyní můžeme matice zpět rozepsat na soustavu rovnic, ovšem značně jednodušší

$$5\sqrt{5}x_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}x_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$
$$\frac{12}{\sqrt{5}}x_2 = \frac{39}{\sqrt{5}}.$$

Z druhé rovnice lze rovnou vyjádřit neznámá x_2
$$x_2 = \frac{13}{4}.$$

Dosazením x_2 do první rovnice dopočítáme i druhou neznámou x_1
$$5\sqrt{5}x_1 - \frac{9}{\sqrt{5}}\left(\frac{13}{4}\right) = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$x_1 = \frac{21}{20}.$$

Řešením soustavy rovnic je vektor $\boldsymbol{x} = \left(\frac{\mathbf{21}}{\mathbf{20}}, \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{4}}\right)^{\boldsymbol{T}}$.

Jak vidíme, řešení se shoduje s řešením, které vyšlo u sčítací metody.

Řešení na základě QR-rozkladu se využívá u „velkých“ soustav rovnic o desítkách neznámých. V těchto případech zajišťuje dobré numerické vlastnosti. Zde jsme počítali „malou“ soustavu rovnic, kterou lze velmi snadno řešit jak metodou sčítací, tak metodou dosazovací. Řešení pomocí QR-rozkladu postrádá v takovém případě smysl, neboť je mnohem náročnější. Jednoduché soustavy uvádím zejména proto, abychom si lépe osvojili postup řešení a snadno ověřili správnost výsledků.

<u>Příklad 19:</u> Nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$x_1 + x_2 - x_3 = 1.$$

Stejně jako v předchozím příkladě vypočítáme soustavu rovnic sčítací metodou.
$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \ /\cdot(-1)$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$\underline{x_1 + x_2 - x_3 = 1 \ /\cdot(-3)}$$
$$-3x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$$
$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$$
$$\underline{-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -3}$$
$$3x_3 = 1$$
$$\underline{-x_2 + 5x_3 = 0}$$

$$x_3 = \frac{1}{3}$$

$$-x_2 + 5 \cdot \frac{1}{3} = 0$$
$$x_2 = \frac{5}{3}$$

Do třetí rovnice dosadíme vyšlé hodnoty x_3 a x_2

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$
$$x_1 + \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = 1$$
$$x_1 = -\frac{1}{3}.$$

Zde se setkáváme se třemi rovnicemi o třech neznámých. Dostaneme matici *A*, která bude čtvercová a bude řádu 3

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matice *b* je typu (3, 1)

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soustava rovnic lze zapsat maticovým zápisem

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Opět si pomocí programu [9] vypočítáme horní trojúhelníkovou matici *R* a ortonormální matici *Q* matice *A*.

Tedy

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{19} & \frac{13}{\sqrt{19}} & \frac{2}{\sqrt{19}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{19}} & -4\sqrt{\frac{2}{19}} + \frac{1}{\sqrt{38}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{19}} & -\frac{1}{\sqrt{38}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{19}} & -\frac{1}{\sqrt{38}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{19}} & 3\sqrt{\frac{2}{19}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dosadíme do nám známého vztahu (8)

$$Rx = Q^T b$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{19} & \frac{13}{\sqrt{19}} & \frac{2}{\sqrt{19}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{19}} & -4\sqrt{\frac{2}{19}} + \frac{1}{\sqrt{38}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{19}} & \frac{3}{\sqrt{19}} & \frac{1}{\sqrt{19}} \\ -\frac{1}{\sqrt{38}} & -\frac{1}{\sqrt{38}} & 3\sqrt{\frac{2}{19}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a upravíme

$$\begin{pmatrix} \sqrt{19} & \frac{13}{\sqrt{19}} & \frac{2}{\sqrt{19}} \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{19}} & -4\sqrt{\frac{2}{19}} + \frac{1}{\sqrt{38}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

K nalezení matice *x* potřebujeme vypočítat inverzní matici k matici *R*

$$\frac{1}{114}\begin{pmatrix} 6\sqrt{19} & -39\sqrt{38} & -95\sqrt{2} \\ 0 & 57\sqrt{38} & 133\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 38\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Dosazením do vztahu (9) nalezneme řešení

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6\sqrt{19}}{114} & \frac{-39\sqrt{38}}{114} & \frac{-95\sqrt{2}}{114} \\ 0 & \frac{57\sqrt{38}}{114} & \frac{133\sqrt{2}}{114} \\ 0 & 0 & \frac{38\sqrt{2}}{114} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{16}{\sqrt{19}} \\ \frac{1}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Řešením soustavy rovnic je vektor $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)^{T}$.

4.1.2 SOUSTAVA M LINEÁRNÍCH ROVNIC O N NEZNÁMÝCH, KDE M < N

Jedná se o soustavu rovnic, kde je více neznámých než máme zadaných rovnic.

Máme-li soustavu rovnic

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{gathered}$$

zapíšeme ji pomocí matic

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Matice A typu (m, n), kde m < n, je v takovém případě obdélníková. Má více sloupců než řádků. Soustava je řešitelná, pokud její hodnost hod(A) = hod($A|b$).

Počet řešení určuje hod(A), která je v našem případě menší než n, tvoří-li m řádkových vektorů matice A lineárně nezávislou množinu. Z toho vyplývá, že soustava lineárních rovnic má v takovém případě nekonečně mnoho řešení.

Zapišme danou soustavu maticově

$$A \cdot x = b.$$

K popsanému typu matice A však dle (1) neexistuje QR-rozklad. K vyřešení soustavy rovnic využijeme QR-rozklad matice, která je transponovaná k matici soustavy. Podle vlastnosti b) na str. 7 je

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Na základě uvedeného vztahu dospějeme k zápisu

$$(A \cdot x)^T = b^T,$$

tedy

$$x^T \cdot A^T = b^T.$$

Transponovaná matice A bude (n, m), n > m. Pro takový typ matice existuje QR-rozklad. Jestliže

$$A^T = QR, \qquad (10)$$

kde Q je obdélníková matice typu (m, n) a matice R čtvercová matice typu (m, m), potom po dosazení získáme vztah

$$x^T \cdot QR = b^T.$$

Opět provedeme transpozici matic, zde je důležité si uvědomit, že transpozicí transponované matice dostaneme původní matici

$$(QR)^T \cdot x = b.$$

Rozepíšeme transpozici součinu

$$R^T \cdot Q^T \cdot x = b.$$

Převedeme matici R^T na druhou stranu rovnice

$$Q^T \cdot x = (R^T)^{-1} \cdot b.$$

V poslední řadě potřebujeme převést matici Q^T na pravou stranu. Platí rovnost $Q^T = Q^{-1}$, tudíž matici x vyjádříme, vynásobíme-li rovnici maticí Q:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \cdot (\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{T}})^{-1} \cdot \boldsymbol{b}. \qquad (11)$$

K výpočtu je vhodné vědět, že platí vztah $(R^T)^{-1} = (R^{-1})^T$.

Jak postupovat při výpočtu?

Budeme-li mít zadanou soustavu m rovnic o n neznámých, kde m < n, budeme muset provést QR-rozklad. QR-rozklad matice A neexistuje, protože se jedná o matici, jež má více sloupců než řádků. Z této na první pohled bezvýchodné situace se dostaneme velmi snadno. Transponujeme-li matici A, dostaneme matici, která bude mít více řádků než sloupců a budeme moct QR-rozklad provést. Opět je pouze na nás, zda použijeme Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces nebo Householderovu matici zrcadlení. QR-rozkladem získáme horní trojúhelníkovou matici R a ortonormální matici Q.
Dále budeme pracovat s horní trojúhelníkovou maticí R, nejprve ji transponujeme, pak k ní nalezneme matici inverzní.
Před samotným závěrem je potřeba vypočítat součin $(R^T)^{-1} \cdot b$, který dosadíme do vzorce

$$x = Q\left(\left(R_1{}^T\right)^{-1} \cdot b\right)$$

a vypočítáme matici řešení x.

Příklad 20: Vypočítejte soustavu lineárních rovnic

$$-x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2$$
$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1.$$

Jedná se o soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých. Neznámých máme více než rovnic, proto je matice A typu (2, 4).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve si zkusíme nalézt řešení soustavy rovnic jinou metodou, než je pomocí QR-rozkladu.

Matici $(A|b)$ upravíme do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{matrix} -1 & 0 & 2 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 4 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} -4 & 0 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & -11 & 12 \end{matrix}\middle| \begin{matrix} -8 \\ -4 \end{matrix}\right)$$

$$x_2 - 11x_3 + 12x_4 = -4$$
$$\boldsymbol{x_2 = 11x_3 - 12x_4 - 4}$$

$$-4x_1 - 8x_3 + 8x_4 = -8$$
$$-4x_1 = 8x_3 - 8x_4 - 8$$
$$\boldsymbol{x_1 = -2x_3 + 2x_4 + 2}$$

Řešením je každá čtveřice$(-2x_3 + 2x_4 + 2,\ 11x_3 - 12x_4,\ x_3,\ x_4)$, kde x_3 a x_4 jsou parametry z **R**. Je patrné, že soustava rovnic bude mít nekonečně mnoho řešení.

Nyní provedeme výpočet pomocí QR-rozkladu.

QR-rozklad jsme definovali pouze pro matice typu (m, n), kde m ≥ n. Neumíme tedy vypočítat QR-rozklad matice A, kde m < n, proto určíme QR-rozklad matice A^T

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Využijeme opět program [9].

Matice A^T lze rozložit pomocí matic

$$Q = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix},$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Dalším krokem je transponování matice R a následné nalezení k ní inverzní matice. Tedy

$$R^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -6 & \sqrt{6} \end{pmatrix},$$

$$(R^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{6}} & \sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li matici $(R^T)^{-1}$ maticí b, dostaneme matici, kterou potřebujeme k poslednímu výpočtu a následnému nalezení řešení.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{6}} & \sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{20}{3\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

V této chvíli můžeme dosadit do vztahu (11)

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \sqrt{\frac{2}{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{20}{3\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{10}{9} \\ \frac{14}{9} \\ -\frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Na základě výpočtu nám vyšlo jedno konkrétní řešení. Dostáváme se do rozporu, protože jsme si uvedli, že matice typu (m, n), kde m < n má nekonečně mnoho řešení. Uděláme zkoušku, abychom ověřili, zda je řešení skutečně správné.

Do každé z rovnic dosadíme vyšlé hodnoty:

$$-x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 2$$
$$-2 + 2 \cdot \frac{14}{9} - 2 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = 2$$
$$2 = 2$$

$$4x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1$$
$$4 \cdot 2 + \frac{10}{9} - 3 \cdot \frac{14}{9} + 4 \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) = 1$$
$$1 = 1.$$

Námi vypočítané řešení soustavy lineárních rovnic je správné. Levé strany rovnic se rovnají těm pravým. Jedná se o jedno z nekonečně mnoha řešení.

My bychom si mohli najít i další řešení. Zvolíme-li parametry $x_3 = 1, x_4 = -1$, dosazením vypočítáme $x_2 = -3, x_1 = 2$.

Řešením soustavy rovnic je potom vektor x = (2, -3, 1, -1).

Lze dokázat, že řešení vypočítané pomocí QR-rozkladu je specifické. Jeho norma je menší než norma všech ostatních řešení. Důkaz lze dohledat v [1].

Ověření provedeme výpočtem.
Norma vektoru $\left(2,\ \frac{10}{9}, \frac{14}{9}, -\frac{4}{9}\right)$ je

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{10}{9}\right)^2 + \left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{212}{27}}.$$

Norma druhého dopočítaného vektoru (2, -3, 1, -1) je

$$\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{15}.$$

Norma prvního vektoru je opravdu menší než norma vektoru druhého. Stejně tak by byly menší i normy všech ostatních řešení.

<u>Příklad 21:</u> Nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 2$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 3.$$

Soustavu rovnic si napíšeme pomocí matic

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Matice A je typu (3, 5).
Pro matici typu (m, n), kde m < n, neexistuje QR-rozklad, proto si matici A transponujeme. Dostaneme matici, kde m > n a budeme moci provést QR-rozklad.

$$A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

QR-rozklad matice A^T si vypočítáme v programu [9].

Matici A^T rozložíme na součin ortonormální matice Q a horní trojúhelníkové matice R

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{38}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{38}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & \sqrt{2} & \frac{3}{2\sqrt{2}} \\ 0 & \sqrt{6} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ 0 & 0 & \frac{19}{\sqrt{38}} \end{pmatrix}.$$

Nyní je potřeba najít transponovanou matici k matici R

$$R^T = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{6} & 0 \\ \frac{3}{2\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{19}{\sqrt{38}} \end{pmatrix}$$

a následně k ní najít inverzní matici

$$(R^T)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{7\sqrt{38}}{152} & \frac{\sqrt{38}}{76} & \frac{\sqrt{38}}{19} \end{pmatrix}.$$

Pomocným výpočtem je provedení součinu $(R^T)^{-1} \cdot b$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{12} & \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 \\ -\frac{7\sqrt{38}}{152} & \frac{\sqrt{38}}{76} & \frac{\sqrt{38}}{19} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{21\sqrt{38}}{152} \end{pmatrix}.$$

Nyní dosadíme do vztahu (11)

$$x = Q\left(\left({R_1}^T\right)^{-1} \cdot b\right),$$

tedy

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{38}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{3}{2\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{38}} \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{38}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{21\sqrt{38}}{152} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{152} \\ \frac{17}{76} \\ \frac{1}{38} \\ \frac{10}{19} \\ \frac{143}{152} \end{pmatrix}.$$

Vektor $\boldsymbol{x} = \left(-\frac{\mathbf{17}}{\mathbf{152}}, \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{76}}, \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{19}}, \frac{\mathbf{143}}{\mathbf{152}}\right)^{\boldsymbol{T}}$ je jedním z nekonečně mnoha řešení.

4.1.3 SOUSTAVA M LINEÁRNÍCH ROVNIC O N NEZNÁMÝCH, KDE M > N

Jedná se o třetí a zároveň poslední druh soustavy lineárních rovnic.
Zde se setkáváme s maticí *A*, která opět není čtvercová. Jedná se o obdélníkovou matici typu (m, n), kde m > n a n je počet jejích lineárně nezávislých sloupců

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

V matici bude méně sloupců než řádků. Zamyslíme-li se nad zněním Frobeniovy podmínky, dospějeme k závěru, že taková matice jí nevyhovuje. Soustava lineárních rovnic velmi pravděpodobně nebude mít řešení, protože menší počet neznámých (n) má vyhovovat většímu počtu podmínek (m).

Ačkoli jsme si uvedli, že soustava rovnic nebude mít s největší pravděpodobností řešení, podrobně tento typ soustavy prozkoumáme.

Soustavu rovnic lze pomocí matic zapsat

$$Ax = b.$$

Jestliže matice *A* lze zapsat jako součin ortonormální matice *Q* a horní trojúhelníkové matice *R*, potom

$$QRx = b.$$

Matice *Q* je typu (m, n), matice *R* řádu n.
Úpravami stejnými jako v kapitole 4.1.1. dospějeme ke vztahu (8) a (9)

$$Rx = Q^T \cdot b$$
$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{R}^{-1} \cdot \boldsymbol{Q}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{b}.$$

Jak postupovat při výpočtu?

Jestliže máme soustavu rovnic, která má neznámých méně než je rovnic, potom budeme postupovat jako v případě, kdy máme soustavu m rovnic o m neznámých.
Známe-li matici A, provedeme její QR-rozklad. Získáme ortonormální matici Q a horní trojúhelníkovou matici R. Matici Q je potřeba transponovat, matici R invertovat, abychom mohli dosadit do vzorce

$$x = R^{-1} \cdot Q^T \cdot b$$

a dopočítat řešení.

Příklad 22: Nalezněte řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Uvedená soustava rovnic lze zapsat pomocí matic

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Nejprve si zkusíme soustavu rovnic vyřešit běžným postupem a to úpravou rozšířené matice do odstupňovaného tvaru.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right)$$

Vidíme, že soustava nebude mít řešení, protože $\mathrm{hod}(A) \neq \mathrm{hod}(A|b)$.

Matice A je maticí obdélníkovou typu (4, 3). Jedná se o matici, kde je m > n. Pro takový druh matice existuje QR-rozklad.

QR-rozkladem matice *A* je součin matic

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{8}{\sqrt{91}} & \frac{-5}{\sqrt{247}} \\ \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{-5}{\sqrt{91}} & \frac{-5}{\sqrt{247}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{91}} & \frac{14}{\sqrt{247}} \\ \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{91}} & \frac{1}{\sqrt{247}} \end{pmatrix}$$

a

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{91}}{7} & \frac{6\sqrt{91}}{91} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{247}}{13} \end{pmatrix}.$$

Jestliže známe matici *Q* i *R* můžeme vypočítat řešení pomocí vztahu

$$R \cdot x = Q^T b.$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{91}}{7} & \frac{6\sqrt{91}}{91} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{247}}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{2}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} & \frac{1}{\sqrt{7}} \\ \frac{8}{\sqrt{91}} & \frac{-5}{\sqrt{91}} & \frac{1}{\sqrt{91}} & \frac{1}{\sqrt{91}} \\ \frac{-5}{\sqrt{247}} & \frac{-5}{\sqrt{247}} & \frac{14}{\sqrt{247}} & \frac{1}{\sqrt{247}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} & \frac{6\sqrt{7}}{7} \\ 0 & \frac{\sqrt{91}}{7} & \frac{6\sqrt{91}}{91} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{247}}{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{7}} \\ \frac{16}{\sqrt{91}} \\ \frac{16}{\sqrt{247}} \end{pmatrix}.$$

Nalezneme invertovanou matici k matici *R*

$$R^{-1} = \frac{1}{1729} \begin{pmatrix} 247\sqrt{7} & -114\sqrt{91} & -42\sqrt{247} \\ 0 & 133\sqrt{91} & -42\sqrt{247} \\ 0 & 0 & 91\sqrt{247} \end{pmatrix}$$

a dosadíme do vzorce

$$x = R^{-1} \cdot Q^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{1729}\begin{pmatrix} 247\sqrt{7} & -114\sqrt{91} & -42\sqrt{247} \\ 0 & 133\sqrt{91} & -42\sqrt{247} \\ 0 & 0 & 91\sqrt{247} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{\sqrt{7}} \\ \frac{16}{\sqrt{91}} \\ \frac{16}{\sqrt{247}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{19} \\ \frac{16}{19} \\ \frac{16}{19} \end{pmatrix}.$$

Vyšlo nám jedno konkrétní řešení

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{19} \\ \frac{16}{19} \\ \frac{16}{19} \end{pmatrix}.$$

Dostáváme se do rozporu. Jak je možné, že nám vyšlo konkrétní řešení, když jsme si řekli, že soustava rovnic nebude mít řešení žádné?

Abychom získali jistotu, že námi vypočítané řešení je opravdu správné, provedeme zkoušku. Vypočítané neznámé dosadíme do původních rovnic.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$
$$\left(-\frac{3}{19}\right) + 2\left(\frac{16}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) \neq 2$$
$$\frac{45}{19} \neq 2$$

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$2\left(-\frac{3}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) \neq 1$$
$$\frac{26}{19} \neq 1$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$\left(-\frac{3}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) + 2\left(\frac{16}{19}\right) \neq 2$$
$$\frac{45}{19} \neq 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$\left(-\frac{3}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) + \left(\frac{16}{19}\right) \neq 3$$
$$\frac{29}{19} \neq 3.$$

Ani v jedné rovnici se po dosazení nerovná pravá strana straně levé. Je tedy patrné, že námi vypočítané řešení není správné. Soustava rovnic opravdu řešení nemá. Řešení, které jsme získali pomocí náročného výpočtu je pouze přibližné.

Napíšeme-li si odchylky levé strany rovnice od strany pravé, po dosazení námi vypočítaných neznámých

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{19} \\ \frac{7}{19} \\ \frac{7}{19} \\ \frac{28}{19} \end{pmatrix}$$

zjistíme, že se jedná o odchylky velmi malé. Jak už někdo z nás může tušit, námi vypočítaná matice x je maticí přibližného řešení. Navíc se jedná o přibližné řešení se specifickou vlastností, jeho norma bude mít nejmenší hodnotu. Všechna jiná přibližná řešení budou mít normu větší než

$$\sqrt{\left(-\frac{3}{19}\right)^2 + \left(\frac{16}{19}\right)^2 + \left(\frac{16}{19}\right)^2} = \frac{\sqrt{521}}{19} \doteq 1{,}201.$$

Námi řešená rovnice nemá žádné řešení. Přibližné řešení s nejmenší normou je

$$\boldsymbol{x_1 = -\frac{3}{19}}, \qquad \boldsymbol{x_2 = \frac{16}{19}}, \qquad \boldsymbol{x_3 = \frac{16}{19}}.$$

<u>Příklad 23:</u> Nalezněte řešení soustavy rovnic

$$\begin{gathered} x_1 - 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3 \end{gathered}$$

Soustavu rovnic zapíšeme pomocí matic A a b.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Matice A je typu (5, 4), počet řádků je větší než počet sloupců, proto bude existovat QR-rozklad. Ten vypočítáme pomocí programu [9].

QR-rozkladem matice A je součin ortonormální matice Q a horní trojúhelníkové matice R

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{7\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{42}}{35} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{30} & \frac{2\sqrt{42}}{15} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & -\frac{\sqrt{42}}{42} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{9\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{42}}{70} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{60} & \frac{\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix}.$$

Provedeme transpozici matice Q

$$Q^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{9\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{60} \\ -\frac{\sqrt{42}}{35} & \frac{2\sqrt{42}}{15} & -\frac{\sqrt{42}}{42} & -\frac{\sqrt{42}}{70} & \frac{\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix},$$

následně dosadíme do vzorce

$$R \cdot x = Q^T b.$$

Tedy

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ -\frac{7\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{30} & -\frac{\sqrt{3}}{12} & \frac{9\sqrt{3}}{20} & -\frac{\sqrt{3}}{60} \\ -\frac{\sqrt{42}}{35} & \frac{2\sqrt{42}}{15} & -\frac{\sqrt{42}}{42} & -\frac{\sqrt{42}}{70} & \frac{\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{15} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\sqrt{42}}{15} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{9\sqrt{3}}{20} \\ \frac{79\sqrt{42}}{210} \end{pmatrix}.$$

Po zpětném sestavení rovnic, získáme soustavu

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - \frac{3}{2}x_3 + x_4 &= \frac{7}{2} \\ 2x_2 - \frac{1}{4}x_3 + x_4 &= \frac{1}{4} \\ \frac{5\sqrt{3}}{4}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{15}x_4 &= -\frac{9\sqrt{3}}{20} \\ \frac{4\sqrt{42}}{15}x_4 &= \frac{79\sqrt{42}}{210}. \end{aligned}$$

Ze čtvrté rovnice si rovnou vyjádříme neznámou

$$x_4 = \frac{79}{56}.$$

Po dosazení do rovnice

$$\frac{5\sqrt{3}}{4}x_3 - \frac{\sqrt{3}}{15}x_4 = -\frac{9\sqrt{3}}{20},$$

dostaneme

$$x_3 = -\frac{299}{1050}.$$

Neznámou x_2 vyjádříme z druhé rovnice pomocí x_4 a x_3

$$x_2 = -\frac{2587}{4200}.$$

Jako poslední vyjádříme neznámou x_1 z první rovnice

$$x_1 = \frac{598}{525}.$$

Matice řešení je

$$x = \begin{pmatrix} \frac{598}{525} \\ -\frac{2587}{4200} \\ -\frac{299}{1050} \\ \frac{79}{56} \end{pmatrix}.$$

Pro ověření správnosti řešení dosadíme vypočítané hodnoty do původních rovnic soustavy

$$x_1 - 2x_3 = 1$$
$$\frac{598}{525} - 2 \cdot \left(-\frac{299}{1050}\right) \neq 1$$
$$\frac{299}{175} \neq 1$$

$$-x_2 + x_4 = 2$$
$$-\left(-\frac{2587}{4200}\right) + \frac{79}{56} \neq 2$$
$$\frac{152}{75} \neq 2$$

$$x_1 - x_3 = 2$$
$$\frac{598}{525} - \left(-\frac{299}{1050}\right) \neq 2$$
$$\frac{299}{210} \neq 2$$

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$\frac{598}{525} + \left(-\frac{299}{1050}\right) \neq 1$$
$$\frac{299}{350} \neq 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3$$
$$\frac{598}{525} + 2 \cdot \left(-\frac{2587}{4200}\right) - \left(-\frac{299}{1050}\right) + 2 \cdot \frac{79}{56} \neq 3$$
$$\frac{226}{75} \neq 3.$$

Stejně jako v předchozím příkladě námi vypočítané řešení není řešením soustavy rovnic, jelikož se v žádné rovnici po dosazení nerovná pravá strana rovnice straně levé. Řešení, jež jsme vypočítali, je pouze přibližné. Jeho norma je nejmenší možná. Všechna ostatní přibližná řešení by měla normu větší.

ZÁVĚR

Během psaní bakalářské práce na téma QR-rozklad matice se nevyskytl žádný závažný problém. Pomocí literatury, ať už v tištěné nebo elektronické podobě, jsem načerpala mnoho informací a poznatků, které jsem následně použila ve své práci. Samotné téma splnilo mé očekávání. Obohatilo mě novými poznatky, které se budou jistě hodit během dalšího studia. Počítání s maticemi mě bavilo a považuji ho za velmi zajímavé.

Jedním z mých cílů bylo psát práci jazykem, který nebude obsahovat příliš odborných termínů a složitých souvětí. Chtěla jsem text psát svými slovy a použít pouze několik základních vět a definic. Cíl jsem dle mého splnila. Domnívám se, že pro potenciální čtenáře bude zpracování tímto způsobem mnohem přijatelnější a pochopitelnější. Uvědomuji si, že text nemusí číst pouze lidé studující matematiku a k ní příbuzné obory.

Celou práci jsem rozčlenila do čtyř kapitol. V první kapitole jsem se zaměřila na obecné definice a poznatky, bez nichž by bylo obtížné QR-rozklad pochopit. Druhá kapitola se věnuje prvnímu způsobu QR-rozkladu. Jedná se o Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces. Uvedla jsem obecný postup, podle něhož lze rozklad provést a vše podrobně ukázala na několika příkladech. Každý krok v příkladech jsem řádně okomentovala. Třetí kapitola je velmi podobná druhé. Jediným rozdílem je, že se QR-rozklad provádí pomocí Householderovy matice zrcadlení. V poslední kapitole jsem se zaměřila na praktické záležitosti, tedy užití rozkladu. Speciálně jsem rozebrala řešení všech případů soustav lineárních rovnic pomocí QR-rozkladu. Základní znalosti ohledně soustav lineárních rovnic jsem nevysvětlovala, neboť předpokládám, že jsou čtenáři předem známé.

Slyšela jsem názor, že rozklad pomocí Gramova-Schmidtova ortogonalizačního procesu se považuje za delší a numericky náročnější než rozklad pomocí Householderovy matice zrcadlení. Na základě výpočtů, které jsem ve své práci uskutečnila, mohu říct, že je skutečně delší. Gramův-Schmidtův ortogonalizační proces zahrnuje více početních operací, na druhou stranu se nepočítá s maticemi. Operace s maticemi se někomu mohou jevit mnohem náročnější. Oba způsoby rozkladu mají své klady i zápory.

Téma QR-rozklad matice je velmi rozsáhlé. Existuje několik dalších způsobů QR-rozkladu, o nichž se ve své práci nezmiňuji. Stejně tak by se dalo mluvit i o dalších využitích, např. při výpočtu vlastních čísel.

Doufám, že má bakalářská práce bude pro čtenáře obohacující. Přála bych si, aby v ní každý našel alespoň část toho, co hledá.

RESUMÉ

Das Thema meiner Bachelorarbeit ist die QR-Matrixzerlegung. Es handelt sich um einen Bestandteil der linearen Algebra. Ich habe die Arbeit in vier Kapitel geteilt. Am Anfang habe ich die für das Verstehen der Problematik der QR-Zerlegung wichtigen Grundbegriffe aufgelistet. Im zweiten und im dritten Kapitel habe ich mich zwei Grundarten der QR-Zerlegung gewidmet – durch Gram-Schmidtsche Orthogonalisierung und nach Householder-Matrix. Bei jeder Art habe ich einige Beispiele berechnet und ordentlich kommentiert. Im letzten Teil meiner Arbeit habe ich mich mit der Anwendung der Zerlegung anhand der Lösung von linearen Gleichungssystemen befasst.

Ich hoffe, dass die Leser von meiner Arbeit angesprochen werden. Ich wünsche mir, dass meine Arbeit beim Lesen lohnenswert wird und dass der Leser neue Informationen bekommt.

SEZNAM LITERATURY A OSTATNÍCH ZDROJŮ

[1] BEČVÁŘ, Jiří. *Lineární algebra*. [online]. 2010 [cit. 2015-04-10]. Dostupné z: http: //www.mff.cuni.cz/fakulta/mfp/download/books/becvar_-_linearni_algebra.pdf

[2] FIEDLER, Miroslav. *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice*. 1. vyd. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1981. L 11-B3-IV-41f/11811

[3] HOLENDA, Jiří. *O maticích*. 1. vyd. Plzeň: Vydavatelský servis, 2007. ISBN 978-80-86843-16-2

[4] LÁVIČKA, Miroslav. *KMA/G2 Geometrie 2* [online]. 2006 [cit. 2015-04-10]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~lavicka/subjects/G2/texty/G2_text.pdf

[5] TESKOVÁ, Libuše. *Lineární algebra*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2005. ISBN 80-7043-413-9

[6] TULACH, Antonín. *Rozklady matic* [online]. 2008 [cit. 2015-04-10]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/175484/prif_b/Rozklady_matic.pdf

[7] ZEMÁNEK, Petr. *QR-rozklad* [online]. 2006 [cit. 2015-04-10]. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~zemanekp/files/QR-rozklad_%5Bseminarni_prace_-_Petr_Zemanek%5D.pdf

[8] QR decomposition. *Wikipedia.en* [online]. 2015-02-21 [cit. 2015-04-10]. Dostupné z: http://en.wikipedia.org/wiki/QR_decomposition

[9] WOLFRAM|ALPHA: COMPUTATIONAL KNOWLEDGE ENGINE [online]. [cit. 2015-04-01]. Dostupné z: http://www.wolframalpha.com/

SEZNAM OBRÁZKŮ

PŘÍLOHY

CD s bakalářskou prací ve formátu PDF