

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA STROJNÍ

Studijní program: B2301 Strojní inženýrství  
Studijní zaměření: Stavba energetických strojů a zařízení

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Vyšetření torzních aerodynamických vazebních momentů a koeficientů  
lopatek v kaskádě

Autor: **Michal PANUŠKA**  
Vedoucí práce: **Prof. Ing. Jiří LINHART, CSc.**  
Konzultant: **Ing. Jiří HRUŠKA**

Akademický rok 2014/2015

## **Prohlášení o autorství**

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této bakalářské práce.

V Plzni dne: .....

.....

## **Poděkování**

Chtěl bych tímto velmi poděkovat prof. Ing. Jiřímu Linhartovi, CSc. za odborné vedení a pomoc při řešení teoretických problémů během psaní této práce. Další poděkování patří Ing. Jiřímu Hruškovi a Bc. Ladislavu Paškovi za pomoc při práci na experimentálním zařízení. V neposlední řadě také děkuji své rodině a přátelům za podporu během celého studia.

# ANOTAČNÍ LIST BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

<b>AUTOR</b>	Příjmení Panuška	Jméno Michal		
<b>STUDIJNÍ OBOR</b>	2301R016 „Stavba energetických strojů a zařízení“			
<b>VEDOUCÍ PRÁCE</b>	Příjmení (včetně titulů) prof. Ing. Linhart, CSc.	Jméno Jiří		
<b>PRACOVIŠTĚ</b>	ZČU - FST - KKE			
<b>DRUH PRÁCE</b>	<b>DIPLOMOVÁ</b>	<b>BAKALÁŘSKÁ</b>	Nehodící se škrtněte	
<b>NÁZEV PRÁCE</b>	Vyšetření torzních aerodynamických vazebních momentů a koeficientů lopatek v kaskádě			

<b>FAKULTA</b>	strojní	<b>KATEDRA</b>	KKE	<b>ROK ODEVZD.</b>	2015
----------------	---------	----------------	-----	--------------------	------

**POČET STRAN (A4 a ekvivalentů A4)**

<b>CELKEM</b>	54	<b>TEXTOVÁ ČÁST</b>	32	<b>GRAFICKÁ ČÁST</b>	22
---------------	----	---------------------	----	----------------------	----

<p style="text-align: center;"><b>STRUČNÝ POPIS (MAX 10 ŘÁDEK)</b></p> <p><b>ZAMĚŘENÍ, TÉMA, CÍL POZNATKY A PŘÍNOSY</b></p>	<p>Následující text je zaměřen na vyšetřování aerodynamických vazebních sil a momentů, které vyvolává proudění vzduchu v lopatkové kaskádě při torzním buzení. Měření probíhá v aerodynamickém tunelu, který je v práci také popsán. Buzená lopatka ovlivňuje přes proudící tekutinu ostatní lopatky a především sebe samu.</p>
<p style="text-align: center;"><b>KLÍČOVÁ SLOVA</b></p> <p style="text-align: center;"><b>ZPRAVIDLA JEDNOSLOVNÉ POJMY, KTERÉ VYSTIHUJÍ PODSTATU PRÁCE</b></p>	<p style="text-align: center;">experimentální měření, proudění, vibrace, aerodynamický tunel, elektrodynamický vibrátor</p>

## SUMMARY OF BACHELOR SHEET

<b>AUTHOR</b>	Surname Panuška	Name Michal	
<b>FIELD OF STUDY</b>	B2301R016 “Design of Power Machines and Equipment“		
<b>SUPERVISOR</b>	Surname (Inclusive of Degrees) prof. Ing. Linhart, CSc.	Name Jiří	
<b>INSTITUTION</b>	ZČU - FST - KKE		
<b>TYPE OF WORK</b>	<b>DIPLÓMA</b>	<b>BACHELOR</b>	Delete when not applicable
<b>TITLE OF THE WORK</b>	Investigation of aerodynamic coupling moments and coefficients in the blade cascade		

<b>FACULTY</b>	Mechanical Engineering	<b>DEPARTMENT</b>	Power System Engineering	<b>SUBMITTED IN</b>	2015
----------------	------------------------	-------------------	--------------------------	---------------------	------

### NUMBER OF PAGES (A4 and eq. A4)

<b>TOTALLY</b>	54	<b>TEXT PART</b>	32	<b>GRAPHICAL PART</b>	22
----------------	----	------------------	----	-----------------------	----

<b>BRIEF DESCRIPTION TOPIC, GOAL, RESULTS AND CONTRIBUTIONS</b>	Following pages are focused on the measuring of aerodynamic coupling forces and moments induced by air flow in blade cascade during torsion excitation. The measurement is done in wind tunnel, which is described as well. Excited blade affects the other blades over the flowing fluid and itself mainly.
<b>KEY WORDS</b>	experimental measuring, air flow, vibrations, wind tunnel, electrodynamic vibrator

# Obsah

Seznam použitých veličin	8
Úvod	9
<b>1 Experimentální zařízení</b>	<b>10</b>
1.1 Aerodynamická trať . . . . .	10
1.2 Měřicí prostor . . . . .	10
1.3 Vibrouzel . . . . .	11
1.3.1 Vibrátor . . . . .	11
1.3.2 Paralelogram . . . . .	11
1.3.3 Maketa lopatky . . . . .	11
1.3.4 Snímač polohy . . . . .	13
1.4 Příslušenství . . . . .	13
1.4.1 Prandtlova trubice . . . . .	13
1.4.2 Regulátor . . . . .	14
1.4.3 Sběrnice dat . . . . .	14
<b>2 Dílčí měření</b>	<b>15</b>
2.1 Frekvenční charakteristiky . . . . .	15
2.2 Vyrovnání rychlostního profilu . . . . .	15
2.3 Cejchování vibrátorů . . . . .	15
<b>3 Vyhodnocovací rovnice pro zjištění aerodynamických sil a momentů</b>	<b>19</b>
3.1 Stav bez proudění ( $w = 0$ ) . . . . .	21
3.2 Stav s prouděním vzduchu ( $w \neq 0$ ) . . . . .	22
3.3 Aerodynamické vazební koeficienty . . . . .	23
<b>4 Měření při torzním buzení</b>	<b>24</b>
<b>5 Výsledky měření</b>	<b>25</b>
Závěr	29
Literatura	30
Příloha A Naměřená data ( $\gamma = 4^\circ$ )	32
Příloha B Naměřená data ( $\gamma = 6^\circ$ )	37
Příloha C Naměřená data ( $\gamma = 8^\circ$ )	42
Příloha D Naměřená data ( $\gamma = 10^\circ$ )	47
Příloha E Výkres sestavy aerodynamického tunelu	52

## Seznam použitých veličin

Veličina	Název
$I_m$ [kg · m · rad <sup>-1</sup> ]	hmotnostní moment setrvačnosti běžného metru lopatky
$m$ [kg · m <sup>-1</sup> ]	hmotnost běžného metru lopatky
$B$ [kg · s <sup>-1</sup> · m <sup>-1</sup> · rad <sup>-1</sup> ]	koeficient útlumu běžného metru lopatky při torzním kmitání
$b$ [kg · s <sup>-1</sup> · m <sup>-1</sup> ]	koeficient útlumu běžného metru lopatky při suvném kmitání
$K$ [N · m · rad <sup>-1</sup> ]	tuhost běžného metru lopatky při torzním kmitání
$k$ [N · m <sup>-2</sup> ]	tuhost běžného metru lopatky při suvném kmitání
$\rho$ [kg · m <sup>-3</sup> ]	hustota vzduchu
$I$ [m <sup>4</sup> ]	kvadratický moment setrvačnosti průřezu k těžištní ose
$S$ [m <sup>2</sup> ]	průřez lopatky
$c$ [m]	tětiva lopatky
$p$ [N · m <sup>-2</sup> ]	tlak
$w$ [m · s <sup>-1</sup> ]	rychlost proudění vzduchu
$\gamma$ [°]	úhel náběhu proudícího vzduchu
$I_{nk}^{\alpha\alpha}, B_{nk}^{\alpha\alpha}, K_{nk}^{\alpha\alpha}, m_{nk}^{y\alpha}, b_{nk}^{y\alpha}, k_{nk}^{y\alpha}$ [-]	aerodynamické vazební koeficienty vyvolané působením buzení $k$ -té lopatky na $n$ -tou lopatku při torzním buzení
$I_{nk}^{\alpha y}, B_{nk}^{\alpha y}, K_{nk}^{\alpha y}, m_{nk}^{yy}, b_{nk}^{yy}, k_{nk}^{yy}$ [-]	aerodynamické vazební koeficienty vyvolané působením buzení $k$ -té lopatky na $n$ -tou lopatku při suvném buzení
$M_n$ [N], $F_n$ [N · m <sup>-1</sup> ]	vnější moment, resp. síla od vibrátoru
$M_n^T$ [N], $F_n^T$ [N · m <sup>-1</sup> ]	turbulentní moment, resp. síla

## Úvod

Dnešní svět si žádá čím dál více energie. Ať už se jedná o energii elektrickou či jinou, její převážnou část generují lopatkové stroje. Je tedy kladen důraz na co nejvyšší účinnost, ale také spolehlivost a životnost těchto strojů, jimiž jsou turbíny a turbokompresory. Lopatky turbín jsou namáhány množstvím statických a dynamických sil. Mezi dynamické síly patří např. vibrace, kterými se zabývá následující text. Vibrace jsou přenášeny jednak mechanicky přes rotor a dále přenášeny a buzeny aerodynamicky, a to: turbulentními víry o frekvenci otáčení blízké vlastní frekvenci lopatky, úplavovými jevy při přejíždění rotorových lopatek úplavy statorových lopatek, střídavým odtrháváním proudu od obtékaného profilu, tzv. *flutterem*, a polohovým mechanismem, vyvolaným vzájemnou změnou polohy sousedních lopatek při kmitání. *Flutter* ke své inicializaci vyžaduje alespoň slabé kmitání vyvolané jedním z ostatních mechanismů vibrací.

*Flutter* je v doslovném překladu „chvět se“ nebo „třepetat se“. V mechanice tekutin se toto označení používá, jak již bylo řečeno, pro samobuzené kmitání. Jedná se o mechanismus aerodynamického buzení kmitání příčně obtékaných těles, která již konají kmitavý pohyb. Tím se periodicky mění úhel náběhu proudu na obtékaný profil a jsou na něj vyvozeny síly a momenty, které toto kmitání buď zesilují nebo naopak zeslabují. U nestabilního kmitání musíme počítat s nelinearitou tohoto jevu. Pokud rychlost proudění a frekvence kmitání nabudou určitých tzv. kritických hodnot, dojde k silnému rozkmitání lopatky a může dojít až k jejímu porušení.

Ekonomicky výhodnější je samozřejmě numerická simulace této problematiky. Aby bylo možné tuto simulaci provést a dosáhnout co nejpřesnějších výsledků, je nutné mít k dispozici experimentálně zjištěná data. Zjišťování aerodynamických vazebních sil a koeficientů při torzním buzení lopatek v kaskádě experimentální metodou je předmětem předkládaného textu. Měření probíhalo na aerodynamické trati, která se nachází v laboratoři Katedry energetických strojů a zařízení na Západočeské univerzitě v Plzni. V následujících kapitolách je popsáno toto experimentální zařízení a způsob měření a vyhodnocování výsledků.

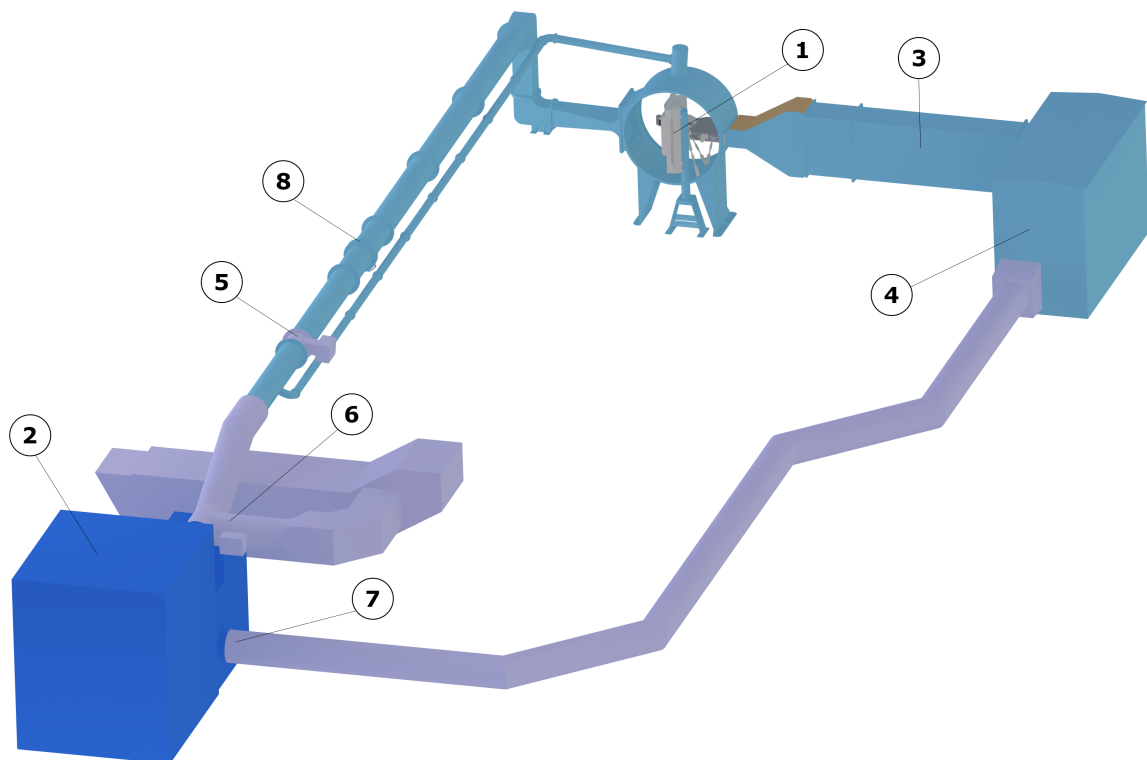


# 1 Experimentální zařízení

Experimentální zařízení slouží ke zjišťování aerodynamických vazebních sil a momentů v lopatkové kaskádě. Tato kaskáda čítá celkem devět lopatek, z nichž jsou čtyři opatřeny párem vibrátorů, které lopatky rozkmitávají do požadovaných výchylek a frekvencí. Zařízení tvoří aerodynamický tunel, měřicí prostor s modely lopatek a další příslušenství, jež bude podrobněji popsáno dále.

## 1.1 Aerodynamická trať

Aerodynamická trať je zobrazena na Obr. 1. Tvoří ji měřicí prostor **1**, šroubový kompresor typu Roots **2**, dvě ustalovací komory **3** a **4** a v neposlední řadě také potrubí pro vedení proudu vzduchu. Rychlost proudění vzduchu je možné regulovat otáčkami kompresoru, a také regulací sání, přisávání a výtlaku kompresoru, což zajišťují klapky **5**, **6** a **7**. Pro měření průtočného množství proudícího média je měřen tlak před a za clonou **8**, která se nachází za měřícím prostorem. Z důvodu co nejmenšího ovlivnění proudu vzduchu je vlastní měřicí prostor umístěn v sání kompresoru a nikoliv výtlaku. Trať je možné provozovat jak otevřenou, tak i uzavřenou. Uzavřenou trať je využíváno s výhodou v zimních měsících.

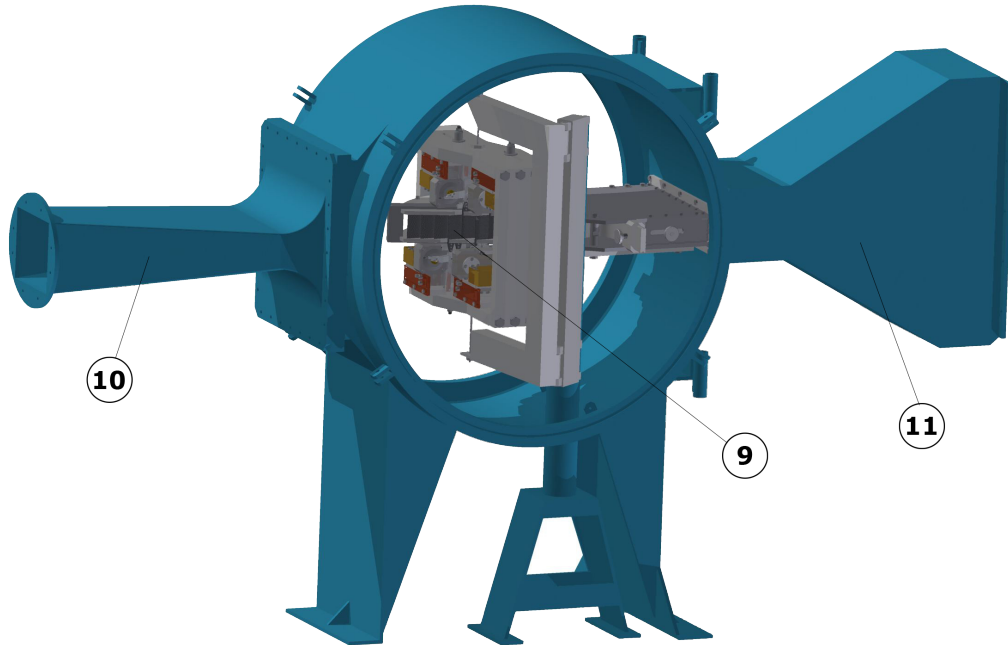


Obrázek 1: Aerodynamická trať

## 1.2 Měřicí prostor

V měřícím prostoru (Obr. 2) se nachází obtékaná lopatková kaskáda **9**. Proud vzduchu do prostoru měření vstupuje zužující se dýzou **10** a následně z něj vystupuje rozši-

řující se dýzou **11**. Čtyři z celkových devíti modelů lopatek jsou osazeny vibračními jednotkami a tvoří dohromady tzv. vibrouzly **12** (Obr. 3). Rám nesoucí vibrouzly **13** je zavěšen na otáčivém rameni dvěma ocelovými lany **14**. Ke koridoru vzduchu je rám připevněn pružnými členy, aby se zabránilo přenosu vibrací.



Obrázek 2: Měřicí prostor

## 1.3 Vibrouzel

### 1.3.1 Vibrátor

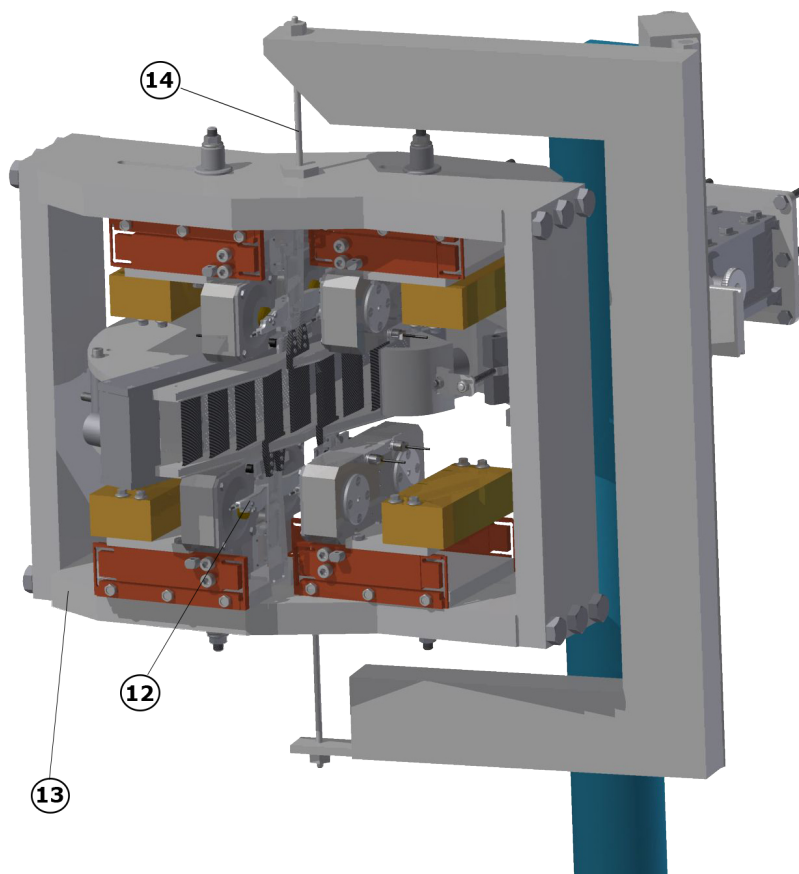
Elektrodynamický vibrátor **15** (Obr. 4), skládající se z magnetického obvodu a dále statické (magnetizační) a dynamické (pohyblivé) cívky, zajišťuje kmitavý pohyb. Jak již bylo řečeno, na jeden model lopatky připadají tyto vibrátory dva. Při shodné fázi je vykonáván čistě surný pohyb, při opačné čistě torzní kmitavý pohyb a při jiném fázovém posunu je kmitání kombinované.

### 1.3.2 Paralelogram

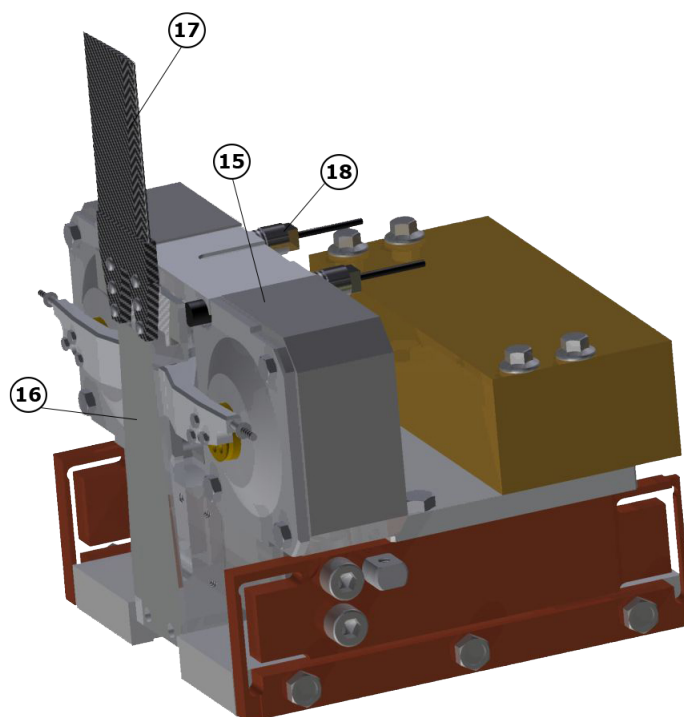
Paralelogram **16** dopomáhá k tomu, aby se lopatka pohybovala pouze surně a nedocházelo ke ohybu, tzn. aby pata lopatky měla totožnou výchylku jako její špička.

### 1.3.3 Maketa lopatky

Makety lopatek **17** jsou prizmatické se zmenšeným špičkovým profilem, které mají lopatky instalované v turbíně o výkonu 1000 MW v jaderné elektrárně Temelín. Vyrobeny jsou z kompozitu s uhlíkovými vlákny, a to z důvodu minimálních setrvačných sil a vysoké pevnosti.



Obrázek 3: Rameno s vibrouzly



Obrázek 4: Vibrouzel

### 1.3.4 Snímač polohy

Bezdotykový snímač polohy Schenck IN-085 na bázi vířivých proudů **18** slouží k přesnému zaznamenávání výchylky paralelogramu. Na každý paralelogram připadají dva tyto snímače a je tedy možné zaznamenávat výchylky i při torzním a kombinovaném kmitání.

## 1.4 Příslušenství

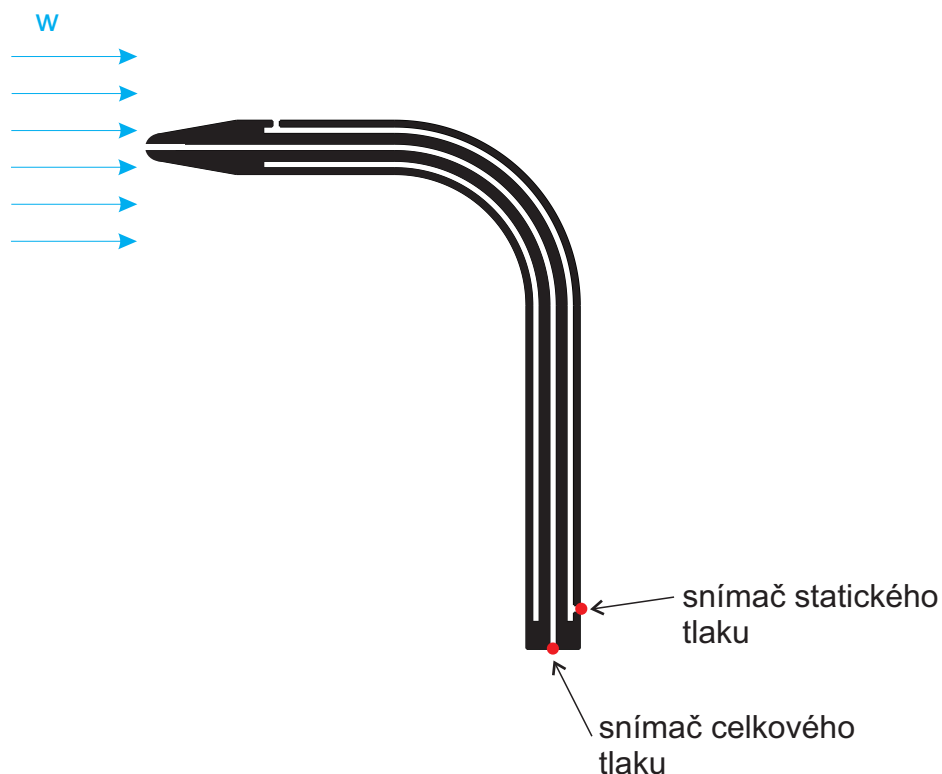
### 1.4.1 Prandtlova trubice

Pro měření rychlosti proudění vzduchu před samotným měřícím prostorem je využíváno Prandtlovy trubice. Ta měří jak celkový, tak statický tlak. Z Bernoulliho rovnice je možné vypočítat tuto rychlost následovně:

$$w = \sqrt{\frac{2(p_c - p_s)}{\rho}},$$

kde  $p_c$  je celkový tlak,  $p_s$  statický tlak a  $\rho$  je vypočteno ze stavové rovnice ideálního plynu

$$\frac{p}{\rho} = rT \Rightarrow \rho = \frac{p}{rT}.$$



Obrázek 5: Schéma Prandtlovy trubice

### **1.4.2 Regulátor**

Analogový regulátor slouží k zesilování signálu ovládajícího vibrace lopatek. Obsahuje celkem osm panelů (jeden pro každý z vibrátorů), na nichž je možné zhruba nastavit požadovaný proud, respektive amplitudu výchylky lopatky. Jemné doladění se pak provádí pomocí externích potenciometrů.

### **1.4.3 Sběrnice dat**

Sběrnice dat od firmy National Instruments slouží ke zpracování signálu jdoucího od snímačů polohy lopatek a tlakových sond. Tento signál je zpracováván do digitální podoby a poslán do počítače. Program, který slouží k měření a vyhodnocování výsledků, byl napsán speciálně pro tyto účely v programovacím jazyce Visual Basic.

## 2 Dílčí měření

Před vlastním měřením aerodynamických vazebních sil a momentů je nutné nejprve provést několik přípravných měření, která slouží k nastavení celého systému. Prvním z nich je určení frekvenčních charakteristik jednotlivých vibrouzlů. Dále je nutné vyrovnat rychlostní profil proudícího vzduchu, aby nedocházelo ke zkreslení měření. Nakonec je provedena kalibrace vibrouzlů pro určení vztahu mezi silami a proudem protékajícím cívkami vibrátorů.

### 2.1 Frekvenční charakteristiky

Jako první bylo provedeno určení frekvenčních charakteristik jednotlivých vibrouzlů. Z těchto charakteristik je možné určit rezonanční frekvenci vibrouzlů. Závislosti poměru amplitudy s proudem a fáze na budící frekvenci jsou zobrazeny na Obr. 6 a 7. Hledané vlastní frekvence nabývají hodnot 96 Hz u všech lopatek s výjimkou čtvrté, kde je hodnota o cca 3 Hz vyšší. Těmto frekvencím je nutné se při měření vyhnout, protože naměřené výsledky by byly zkreslující a nepřesné.

### 2.2 Vyrovnání rychlostního profilu

Obtákané profily, resp. modely lopatek jsou umístěny do kaskády, proto je nutno počítat s tím, že rozložení rychlosti proudícího média bude nerovnoměrné. Tato nerovnoměrnost by způsobila znehodnocení výsledků. Aby byl rychlostní profil co nejvíce vyrovnán, jsou v měřicím prostoru instalovány odsávací komory za porézními stěnami náběžného kanálu. Odsávány jsou pouze mezní vrstvy, přičemž nedochází k ovlivňování proudu. Pomocí hřebenové sondy, která je zakončena osmi Pitotovými trubiciemi, je možné kontrolovat celkový tlak v jednotlivých mezerách mezi lopatkami. Při plném otevření všech odsávacích komor jsou výsledky nejspokojivější.

### 2.3 Cejchování vibrátorů

Při vlastním měření sil a momentů nejsou tyto veličiny měřeny přímo, ale dochází k tomu pomocí měření proudu procházejícího cívkami. Pro určení závislosti mezi proudem a silou na jednotlivých párech cívek vibrátorů je nutné provést kalibraci neboli cejchování vibrátorů. Pro zjištění cejchovní konstanty  $K$  a fáze  $\varphi$  jsou provedena dvě měření bez proudění vzduchu pro každou lopatku, resp. vibrouzel. Při prvním ze dvou měření je rozkmitána lopatka o hmotnosti  $m$  a při druhém měření jsou přidána mosazná závaží na oba konce ramene paralelogramu o hmotnosti  $\Delta m$ . Níže je uveden postup odvození cejchovních konstant pro suvné buzení lopatek.

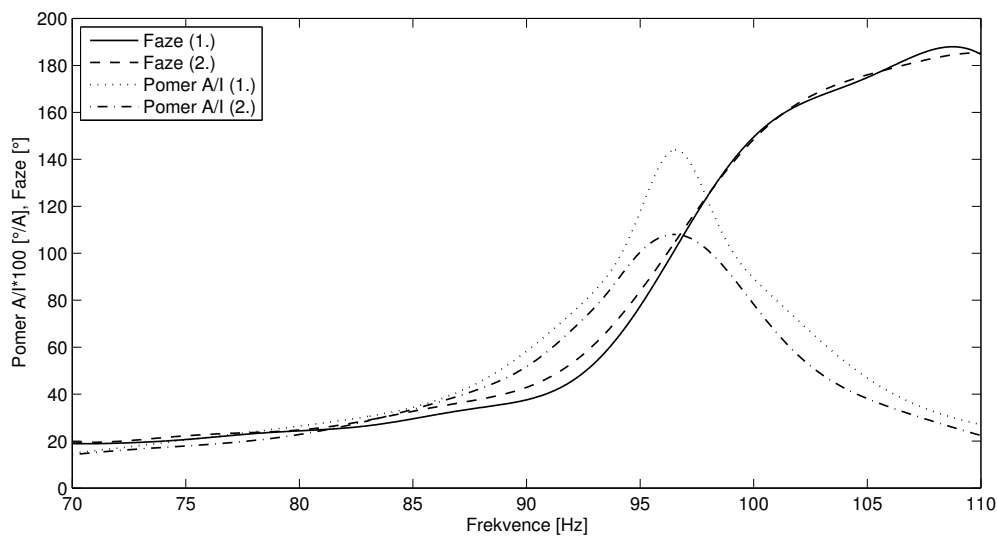
Hmotnost po přidání závaží je vyjádřena

$$m_{\Delta} = m + \Delta m. \quad (1)$$

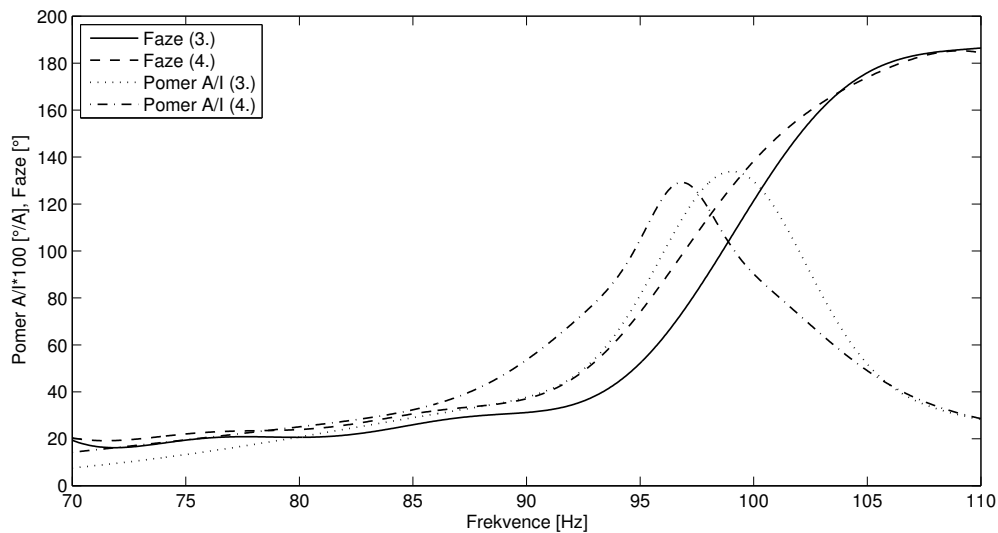
Pohybové rovnice bez závaží resp. s přidaným závažím jsou

$$(m_{\Delta} + \rho S m_{00}^{yy})\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F_{\Delta}, \quad (2)$$

$$(m + \rho S m_{00}^{yy})\ddot{y} + b\dot{y} + ky = F. \quad (3)$$



Obrázek 6: Frekvenční charakteristiky 1. a 2. lopatky



Obrázek 7: Frekvenční charakteristiky 3. a 4. lopatky

Odečtením (3) od (2) dostáváme

$$(m_{\Delta} - m)\ddot{y} = F_{\Delta} - F, \quad (4)$$

a dosadíme-li rovnici (1) do (4), pak

$$\Delta m \ddot{y} = F_{\Delta} - F. \quad (5)$$

Při měření, tedy když je lopatka rozkmitána, uvažujeme, že proud  $I$  předchází sílu  $F$  a ta výchylku  $y$ , jak je možné vidět na Obr. 8. Při matematickém vyjádření bereme za základ výchylku podle následujících rovnic:

$$y = |y| e^{i\omega t}, \quad (6)$$

$$I = |I| e^{i(\omega t + \varphi_I)}, \quad (7)$$

$$F = |F| e^{i(\omega t + \varphi_I - \varphi)} = K |I| e^{i(\omega t + \varphi_I - \varphi)}. \quad (8)$$

Po přidání závaží se za přivádění proudu  $I$  do cívek vibrátorů změnila výchylka na hodnotu  $y_{\Delta}$ . Fáze  $\varphi$  a úhlová rychlost  $\omega$  zůstávají neměnné z toho důvodu, že jsou dány zdrojem střídavého elektrického proudu. Pro určení závislosti výchylky na přivedeném proudu a pro výpočet cejchovních konstant je nutné změnit proud  $I$  na  $I_{\Delta}$ , aby se vrátila výchylka na původní hodnotu  $y$ . Dále síla  $F$  nabude hodnoty  $F_{\Delta}$  a fáze proudu  $\varphi_I$  přejde v  $\varphi_{I_{\Delta}}$ ,  $\omega$  a  $\varphi$  zůstávají opět konstantní. Dostaneme tedy nový stav popsany rovnicí (6) a dále vztahy

$$I_{\Delta} = |I_{\Delta}| e^{i(\omega t + \varphi_{I_{\Delta}})}, \quad (9)$$

$$F_{\Delta} = K |I_{\Delta}| e^{i(\omega t + \varphi_{I_{\Delta}} - \varphi)}. \quad (10)$$

Pro výpočet konstanty  $K$  a fáze  $\varphi$  do rovnice (5) dosadíme (6), (8) a (10).

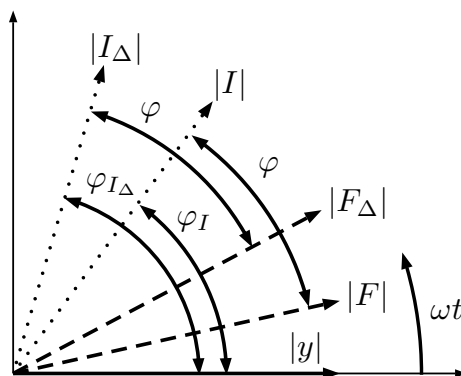
$$\Delta m |y| e^{i\omega t} (-\omega^2) = K |I_{\Delta}| e^{i(\omega t + \varphi_{I_{\Delta}} - \varphi)} - K |I| e^{i(\omega t + \varphi_I - \varphi)} \quad (11)$$

Po úpravě dostaneme

$$\Delta m |y| (-\omega^2) = K e^{-i\varphi} [ |I_{\Delta}| e^{i\varphi_{I_{\Delta}}} - |I| e^{i\varphi_I} ] \quad (12)$$

a pak

$$\frac{1}{K} e^{i\varphi} = - \frac{|I_{\Delta}| e^{i\varphi_{I_{\Delta}}} - |I| e^{i\varphi_I}}{\Delta m |y| \omega^2} = \frac{|I| e^{i\varphi_I} - |I_{\Delta}| e^{i\varphi_{I_{\Delta}}}}{\Delta m |y| \omega^2}. \quad (13)$$



Obrázek 8: Schéma fázového diagramu



	Suvné buzení		Torzní buzení	
	$K [-]$	$\varphi [^\circ]$	$K [-]$	$\varphi [^\circ]$
1. lopatka	3,253	79,816	4,752	77,685
2. lopatka	3,398	79,876	4,650	76,954
3. lopatka	3,163	79,960	4,926	77,934
4. lopatka	3,433	80,012	5,056	76,993

Tabulka 1: Cejchovní konstanty a fáze použité pro první měření

Ve vztahu

$$\frac{1}{K}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \frac{1}{\Delta m |y| \omega^2} [|I| (\cos \varphi_I + i \sin \varphi_I) - |I_\Delta| (\cos \varphi_{I_\Delta} + i \sin \varphi_{I_\Delta})] \quad (14)$$

porovnáme imaginární a reálnou část, zavedeme substituci a obdržíme

$$\frac{1}{K} \cos \varphi = \frac{1}{\Delta m |y| \omega^2} [|I| \cos \varphi_I - |I_\Delta| \cos \varphi_{I_\Delta}] = A, \quad (15)$$

$$\frac{1}{K} \sin \varphi = \frac{1}{\Delta m |y| \omega^2} [|I| \sin \varphi_I - |I_\Delta| \sin \varphi_{I_\Delta}] = B, \quad (16)$$

kde  $\omega = 2\pi f$ . Po sečtení kvadrátů rovnic (15) a (16) je možné stanovit  $K$  dle

$$\frac{1}{K^2} = A^2 + B^2 \Rightarrow K = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} [-] \quad (17)$$

a  $\varphi$  pak následovně

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{B}{A} [\operatorname{rad}]. \quad (18)$$

Vypočtené cejchovní konstanty jsou uvedeny v Tab.1. Hmotnost  $\Delta m$  v tomto případě byla 22 g (dvě závaží o hmotnosti 11 g). Amplituda výchylky  $|y|$  byla při suvném kmitání 0,25 mm a pro torzní buzení nabývala  $|\alpha|$  hodnoty 0, 4°. Hodnoty pro jednotlivé vibrouzly se liší pouze nepatrně. Cejchování bylo provedeno před každou sérií měření znovu.

### 3 Vyhodnocovací rovnice pro zjištění aerodynamických sil a momentů

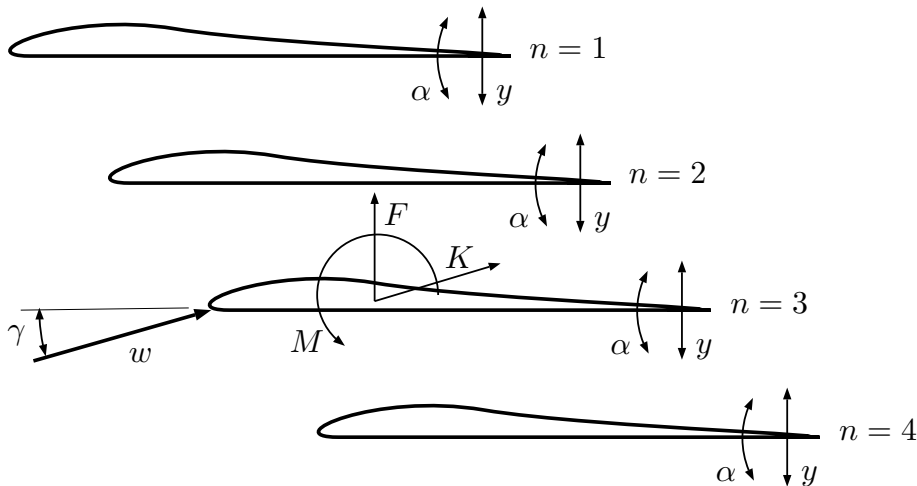
V této kapitole se budeme zabývat aerodynamickými silami a koeficienty při torzním buzení lopatek. Vzniklý tvar kmitání bude pravděpodobně složen z odezvy surné a torzní. Pro výpočet těchto sil, momentů a následně koeficientů je tedy nutné odvození vztahů jak pro surné kmitání, tak i pro torzní. Vycházíme z obecně známých pohybových rovnic pro surné a torzní kmitání. Tyto vztahy je nutné rozšířit o momenty, resp. síly, které na konkrétní  $n$ -tou lopatku vyvozuje  $k$ -tá lopatka. V případě  $n = k$  se jedná o vliv lopatky na sebe samu. Jednotlivé rovnice jsou indexovány dle Obr.9. Pohybová rovnice torzního kmitání je ve tvaru

$$I_m \ddot{\alpha}_n + B \dot{\alpha}_n + K \alpha_n + \rho I \sum_{k=1}^4 \left( \frac{Sc}{I} I_{nk}^{\alpha y} \ddot{y}_k + I_{nk}^{\alpha \alpha} \ddot{\alpha}_k \right) + \rho w c^3 \sum_{k=1}^4 \left( \frac{1}{c} B_{nk}^{\alpha y} \dot{y}_k + B_{nk}^{\alpha \alpha} \dot{\alpha}_k \right) + \frac{1}{2} \rho w^2 c^2 \sum_{k=1}^4 \left( \frac{1}{c} K_{nk}^{\alpha y} y_k + K_{nk}^{\alpha \alpha} \alpha_k \right) = M_n^T + M_n \quad (19)$$

a surného kmitání pak

$$m \ddot{y}_n + b \dot{y}_n + k y_n + \rho S \sum_{k=1}^4 \left( m_{nk}^{yy} \ddot{y}_k + \frac{I}{cS} m_{nk}^{y\alpha} \ddot{\alpha}_k \right) + \rho w c \sum_{k=1}^4 \left( b_{nk}^{yy} \dot{y}_k + c b_{nk}^{y\alpha} \dot{\alpha}_k \right) + \frac{1}{2} \rho w^2 \sum_{k=1}^4 \left( \frac{1}{c} k_{nk}^{yy} y_k + c k_{nk}^{y\alpha} \alpha_k \right) = F_n^T + F_n. \quad (20)$$

Mechanické síly budou uvažovány pouze za předpokladu, že  $n$  je rovno  $k$ . Toho je



Obrázek 9: Schéma lopatek v kaskádě

docíleno s pomocí funkce Kroneckerovo delta, která je definována

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq k \\ 1 & \text{pro } n = k. \end{cases}$$

Z rovnic je možné odstranit také členy, resp. koeficienty, které vznikají při suvném buzení, neboť budou lopatky buzeny výlučně torzně. Po výše zmíněných úpravách se pak vztahy (19) a (20) změni na

$$M_{nk}^{y\alpha} = \delta_{nk} (I_m \ddot{\alpha}_n + B \dot{\alpha}_n + K \alpha_n) + \rho I I_{nk}^{\alpha\alpha} \ddot{\alpha}_k + \rho \omega c^3 B_{nk}^{\alpha\alpha} \dot{\alpha}_k + \frac{1}{2} \rho \omega^2 c^2 K_{nk}^{\alpha\alpha} \alpha_k, \quad (21)$$

$$F_{nk}^{y\alpha} = \delta_{nk} (m \ddot{y}_n + b \dot{y}_n + k y_n) + \rho \frac{I}{c} m_{nk}^{y\alpha} \ddot{\alpha}_k + \rho \omega c^2 b_{nk}^{y\alpha} \dot{\alpha}_k + \frac{1}{2} \rho \omega^2 c k_{nk}^{y\alpha} \alpha_k. \quad (22)$$

Do vztahů (21) a (22) dosadíme výchylky dle

$$y_n = |y_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{y\alpha})}, \quad (23)$$

$$\alpha_n = |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})}, \quad (24)$$

$$y_k = |y_k| e^{i\omega t}, \quad (25)$$

$$\alpha_k = |\alpha_k| e^{i\omega t}, \quad (26)$$

kde zpoždění výchylky  $n$ -té lopatky vůči  $k$ -té způsobuje fázové posuny  $\varphi_{nk}^{y\alpha}$  a  $\varphi_{nk}^{\alpha\alpha}$ . Dále jsou dosazeny momenty a síly dle

$$M_{nk} = |M_{nk}| e^{i(\omega t - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})}, \quad (27)$$

$$F_{nk} = |F_{nk}| e^{i(\omega t - F \varphi_{nk}^{y\alpha})}, \quad (28)$$

kde opět figurují fázové posuny (tentokrát  $M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}$  a  $F \varphi_{nk}^{y\alpha}$ ) z výše zmíněného důvodu. Po tomto kroku obdržíme

$$\begin{aligned} |F_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\omega t - F \varphi_{nk}^{y\alpha})} &= \delta_{nk} \left( -\omega^2 m |y_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{y\alpha})} + i\omega b |y_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{y\alpha})} + k |y_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{y\alpha})} \right) \\ &\quad + \omega^2 \rho \frac{I}{c} m_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k| e^{i\omega t} + i\omega \rho \omega c^2 b_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k| e^{i\omega t} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 c k_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k| e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} |M_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\omega t - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} &= \delta_{nk} \left( -\omega^2 I_m |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + i\omega B |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + K |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} \right) \\ &\quad + \omega^2 \rho I I_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + i\omega \rho \omega c^3 B_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + \frac{1}{2} \rho \omega^2 c^2 K_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n| e^{i(\omega t - \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})}. \end{aligned} \quad (30)$$

Následně provedeme substituci pro absolutní hodnoty mechanických sil a momentů dle

$$\begin{aligned} |MS_n^y| &= \omega^2 m |y_n|, \quad |MS_n^\alpha| = \omega^2 I_m |\alpha_n|, \quad |MU_n^y| = \omega b |y_n|, \quad |MU_n^\alpha| = \omega B |\alpha_n|, \\ |MP_n^y| &= k |y_n|, \quad |MP_n^\alpha| = K |\alpha_n|, \end{aligned}$$

kde  $S$ ,  $U$  a  $P$  jsou síly a momenty setrvačné, útlumové a pružné, a aerodynamických sil a momentů pak podle

$$\begin{aligned} |AS_{nk}^{y\alpha}| &= \omega^2 \rho \frac{I}{c} m_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k|, \quad |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| = \omega^2 \rho I I_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n|, \quad |AU_{nk}^{y\alpha}| = \omega \rho \omega c^2 b_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k|, \\ |AU_{nk}^{\alpha\alpha}| &= \omega \rho \omega c^3 B_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n|, \quad |AP_{nk}^{y\alpha}| = \frac{1}{2} \rho \omega^2 c k_{nk}^{y\alpha} |\alpha_k|, \quad |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| = \frac{1}{2} \rho \omega^2 c^2 K_{nk}^{\alpha\alpha} |\alpha_n|. \end{aligned}$$

V témže kroku ještě rovnice vydělíme  $e^{i\omega t}$  a podle jednotkové kružnice můžeme dosadit  $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ,  $-i = e^{i\frac{3\pi}{2}}$  a  $-1 = e^{i\pi}$ . Dostaneme

$$\begin{aligned} |F_{nk}^{y\alpha}| e^{-iF \varphi_{nk}^{y\alpha}} + \delta_{nk} \left( |MS_n^y| e^{-i\varphi_{nk}^{y\alpha}} + |MU_n^y| e^{i(-\varphi_{nk}^{y\alpha} + \frac{3\pi}{2})} + |MP_n^y| e^{i(-\varphi_{nk}^{y\alpha} + \pi)} \right) \\ + |AS_{nk}^{y\alpha}| + |AU_{nk}^{y\alpha}| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |AP_{nk}^{y\alpha}| e^{i\pi} = 0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$|M_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{-i^M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} + \delta_{nk} \left( |MS_n^\alpha| e^{-i\varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} + |MU_n^\alpha| e^{i(-\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \frac{3\pi}{2})} + |MP_n^\alpha| e^{i(-\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \pi)} \right) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| + |AU_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i\pi} = 0. \quad (32)$$

Dále po vynásobení rovnice (31)  $e^{i\varphi_{nk}^{y\alpha}}$  a (32)  $e^{i\varphi_{nk}^{\alpha\alpha}}$  získáme

$$|F_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha})} + \delta_{nk} \left( |MS_n^y| + |MU_n^y| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |MP_n^y| e^{i\pi} \right) + |AS_{nk}^{y\alpha}| e^{i\varphi_{nk}^{y\alpha}} + |AU_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{y\alpha} + \frac{3\pi}{2})} + |AP_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{y\alpha} + \pi)} = 0, \quad (33)$$

$$|M_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + \delta_{nk} \left( |MS_n^\alpha| + |MU_n^\alpha| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |MP_n^\alpha| e^{i\pi} \right) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i\varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} + |AU_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \frac{3\pi}{2})} + |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \pi)} = 0. \quad (34)$$

### 3.1 Stav bez proudění ( $w = 0$ )

Pokud provádíme měření bez proudění vzduchu ( $w = 0$ ), pak vztah (33) a (34) pozbude aeroprůžných a aeroutlumových sil, resp. momentů. Obdržíme

$$|{}^0F_{nk}^{y\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha})} + \delta_{nk} \left( |MS_n^y| + |MU_n^y| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |MP_n^y| e^{i\pi} \right) + |AS_{nk}^{y\alpha}| e^{i\varphi_{nk}^{y\alpha}} = 0, \quad (35)$$

$$|{}^0M_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha})} + \delta_{nk} \left( |MS_n^\alpha| + |MU_n^\alpha| e^{i\frac{3\pi}{2}} + |MP_n^\alpha| e^{i\pi} \right) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| e^{i\varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} = 0. \quad (36)$$

Nyní je možné (35) a (36) rozepsat na reálné a imaginární složky. Reálné části jsou ve tvaru

$$|{}^0F_{nk}^{y\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (|MS_n^y| - |MP_n^y|) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} = 0, \quad (37)$$

$$|{}^0M_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (|MS_n^\alpha| - |MP_n^\alpha|) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = 0 \quad (38)$$

a imaginární pak

$$|{}^0F_{nk}^{y\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^y|) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} = 0, \quad (39)$$

$$|{}^0M_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^\alpha|) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = 0. \quad (40)$$

Z reálných složek těchto rovnic je možné vyjádřit

$$|AS_{nk}^{y\alpha}| = \frac{1}{\cos \varphi_{nk}^{y\alpha}} \left( \delta_{nk} (|MP_n^y| - |MS_n^y|) - |{}^0F_{nk}^{y\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha}) \right), \quad (41)$$

$$|AS_{nk}^{\alpha\alpha}| = \frac{1}{\cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} \left( \delta_{nk} (|MP_n^\alpha| - |MS_n^\alpha|) - |{}^0M_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) \right). \quad (42)$$

Pro připomenutí se jedná o aerodynamické setrvačné síly a momenty. Dále je možné za předpokladu  $n = k$ , tedy  $\delta_{nk} = 1$ , vyjádřit z imaginárních částí mechanické útlumové síly a momenty následovně:

$$|MU_n^y| = |{}^0F_{nk}^{y\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{y\alpha} - F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha}, \quad (43)$$

$$|MU_n^\alpha| = |{}^0M_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = 0. \quad (44)$$

### 3.2 Stav s prouděním vzduchu ( $w \neq 0$ )

Vezmeme opět vztah (33) a tentokrát indexujeme  $w$ . Znovu rozložíme na reálnou a imaginární složku. Reálná část je

$$|{}^w F_{nk}^{y\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{y\alpha} - {}^F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (|MS_n^y| - |MP_n^y|) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} + |AU_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} - |AP_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} = 0 \quad (45)$$

a imaginární

$$|{}^w F_{nk}^{y\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{y\alpha} - {}^F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^y|) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} - |AU_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} - |AP_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} = 0. \quad (46)$$

Z předchozího výpočtu s  $w = 0$  je známa aerosetrvačná a mechanická útlumová síla. Je tedy možné soustavu rovnic (45) a (46) řešit. Ze tvarů

$$|AU_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} - |AP_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} = -|{}^w F_{nk}^{y\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{y\alpha} - {}^F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (|MP_n^y| - |MS_n^y|) - |AS_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} = Y^{y\alpha}, \quad (47)$$

$$|AU_{nk}^{y\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{y\alpha} + |AP_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} = |{}^w F_{nk}^{y\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{y\alpha} - {}^F \varphi_{nk}^{y\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^y|) + |AS_{nk}^{y\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} = Z^{y\alpha} \quad (48)$$

již můžeme vyjádřit aeroútlumové a aeropružné síly:

$$|AU_{nk}^{y\alpha}| = \frac{Y^{y\alpha} \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} + Z^{y\alpha} \cos \varphi_{nk}^{y\alpha}}{\sin^2 \varphi_{nk}^{y\alpha} + \cos^2 \varphi_{nk}^{y\alpha}} = Y^{y\alpha} \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} + Z^{y\alpha} \cos \varphi_{nk}^{y\alpha}, \quad (49)$$

$$|AP_{nk}^{y\alpha}| = \frac{Z^{y\alpha} \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} + Y^{y\alpha} \cos \varphi_{nk}^{y\alpha}}{\sin^2 \varphi_{nk}^{y\alpha} + \cos^2 \varphi_{nk}^{y\alpha}} = Z^{y\alpha} \sin \varphi_{nk}^{y\alpha} + Y^{y\alpha} \cos \varphi_{nk}^{y\alpha}. \quad (50)$$

Zcela analogickým způsobem vypočteme ze vztahu (34), rozepsaného na reálnou (51) a imaginární část (52), aeropružné a aeroútlumové momenty. Opět použijeme vypočtené hodnoty ze stavu  $w = 0$ .

$$|{}^w M_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - {}^M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (|MS_n^\alpha| - |MP_n^\alpha|) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + |AU_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = 0 \quad (51)$$

$$|{}^w M_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - {}^M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^\alpha|) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - |AU_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = 0 \quad (52)$$

$$|AU_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = -|{}^w M_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - {}^M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (|MP_n^\alpha| - |MS_n^\alpha|) - |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = Y^{\alpha\alpha} \quad (53)$$

$$|AU_{nk}^{\alpha\alpha}| \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + |AP_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = |{}^w M_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin(\varphi_{nk}^{\alpha\alpha} - {}^M \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}) + \delta_{nk} (-|MU_n^\alpha|) + |AS_{nk}^{\alpha\alpha}| \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} = Z^{\alpha\alpha} \quad (54)$$

Výsledkem je

$$|AU_{nk}^{\alpha\alpha}| = \frac{Y^{\alpha\alpha} \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + Z^{\alpha\alpha} \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}}{\sin^2 \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \cos^2 \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} = Y^{\alpha\alpha} \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + Z^{\alpha\alpha} \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}, \quad (55)$$

$$|AP_{nk}^{\alpha\alpha}| = \frac{Z^{\alpha\alpha} \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + Y^{\alpha\alpha} \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}}{\sin^2 \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + \cos^2 \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}} = Z^{\alpha\alpha} \sin \varphi_{nk}^{\alpha\alpha} + Y^{\alpha\alpha} \cos \varphi_{nk}^{\alpha\alpha}. \quad (56)$$

### 3.3 Aerodynamické vazební koeficienty

Po odvození vztahů pro aerodynamické síly a momenty je nutné učinit poslední krok. Tím je vyjádření aerodynamických vazebních koeficientů  $b$  a  $k$  resp.  $B$  a  $K$ . Pro výpočet setrvačných sil a koeficientů by bylo nutné provést měření buď ve vakuu nebo s jinou tekutinou, jejíž hustota se liší od vzduchu. To ale není bohužel za současného stavu možné. Koeficienty vyjádříme ze zavedené substituce. Například aeroútlumový vazební koeficient při torzním buzení můžeme tedy vypočítat následovně:

$$B_{nk}^{\alpha\alpha} = \frac{|AU_{nk}^{\alpha\alpha}|}{\omega \rho w c^3 |\alpha_n|},$$

aeropružný vazební koeficient pak

$$K_{nk}^{\alpha\alpha} = \frac{2|AP_{nk}^{\alpha\alpha}|}{\rho w^2 c^2 |\alpha_n|}.$$

Pro ostatní koeficienty je postup analogický, proto zde není uveden.

## 4 Měření při torzním buzení

Výše popsanou kalibrací vibrátorů byla určena závislost síly na proudu, který prochází budícími cívkami, a fáze mezi proudem a silami. Následně je nutné proudem vzduchu vytemperovat celý aerodynamický tunel, aby na počátku měření nedocházelo k výrazným změnám teploty vzduchu.

Samotné měření probíhá ve dvou fázích:

- bez proudění vzduchu ( $w = 0$ )
- s proudem vzduchu ( $w \neq 0$ )

Nejprve je provedeno první zmíněné měření. Každá ze čtyř lopatek je postupně buzena frekvencí 70 Hz, která je dostatečně vzdálena od vlastní frekvence paralelogramů při torzním kmitání. Amplituda kmitání byla nastavena na  $0,4^\circ$ . Dalším krokem je měření s proudícím vzduchem. V případě této práce bylo měření prováděno v rozmezí rychlosti proudu  $55$  až  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  s krokem  $5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  a při úhlech náběhu  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  a  $10^\circ$ . Aby byla co nejvíce eliminována náhodná chyba, bylo každé měření opakováno desetkrát.

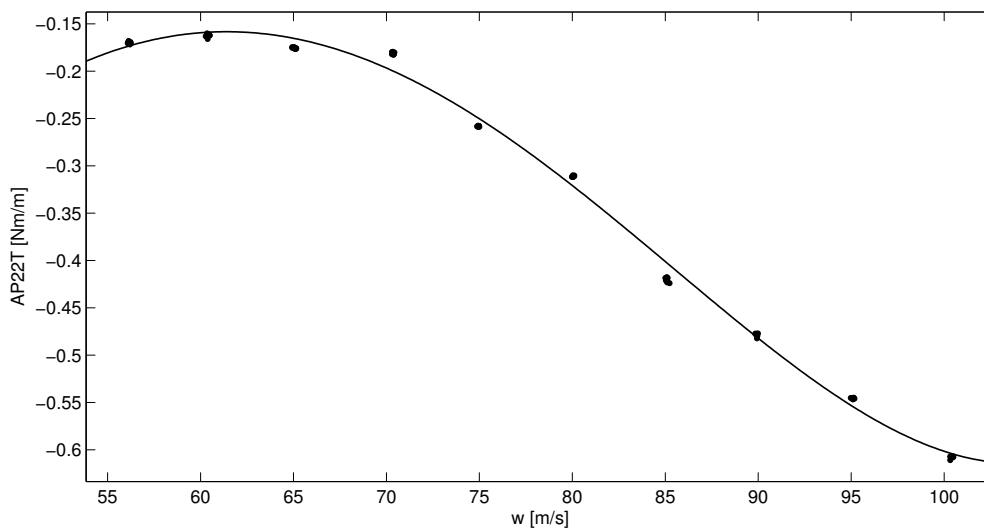
Provádění experimentu je časově náročné a není možné vše provést v jeden den. Z toho důvodu bylo rozděleno do čtyř dnů (jeden pro každý z úhlů náběhu). Časovou náročnost určuje jednak nutnost jemného doladování amplitud kmitání a jednak probíhající Fourierova transformace, která digitální signál z časové oblasti přesune do frekvenční oblasti. V tomto případě se jedná o rychlou Fourierovu transformaci (FFT), která slouží k rychlejšímu zpracování diskretní Fourierovy transformace (DFT) a k její inverzi.

## 5 Výsledky měření

Vybrané výsledky jsou zobrazeny na Obr. 10 až 14. Síly a momenty, kterými lopatka působí na sebe samu, se pohybují v řádech desetin. Oproti tomu při zkoumání vlivu  $k$ -té lopatky na  $n$ -tou jsou tyto veličiny o jeden až dva řády menší. Mohlo by se zdát, že jsou tyto hodnoty zanedbatelné. Pokud se frekvence jejich působení shoduje s vlastními frekvencemi lopatek, nebo se jim alespoň přiblíží, mohou mít tyto malé síly a momenty fatální následky.

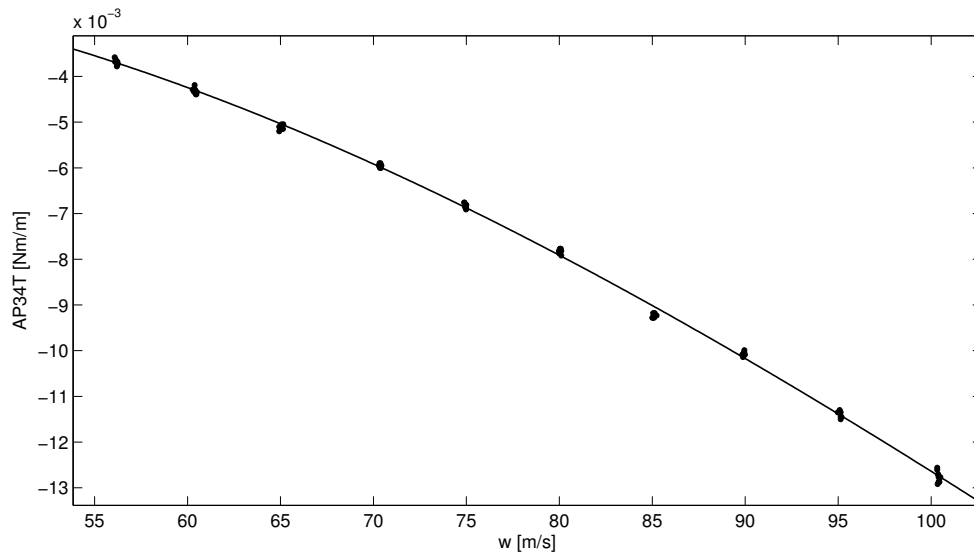
Na Obr. 15 je možné vidět aerodynamickou pružnou sílu, kterou působí první lopatka sama na sebe, při všech měřených úhlech náběhu. Závislost této síly na úhlu náběhu je lépe patrná na Obr. 16. Zřejmě je maxima dosaženo při  $\gamma = 8^\circ$ .

Zde jsou interpretovány pouze nejzajímavější průběhy výsledků. Ostatní naměřená data jsou uvedena v příloze. Hodnoty v podobě sil a momentů poskytují lepší představu o této problematice oproti bezrozměrných koeficientům. Síly a momenty přepočtené na zmíněné koeficienty je možné vidět na příloženém CD.

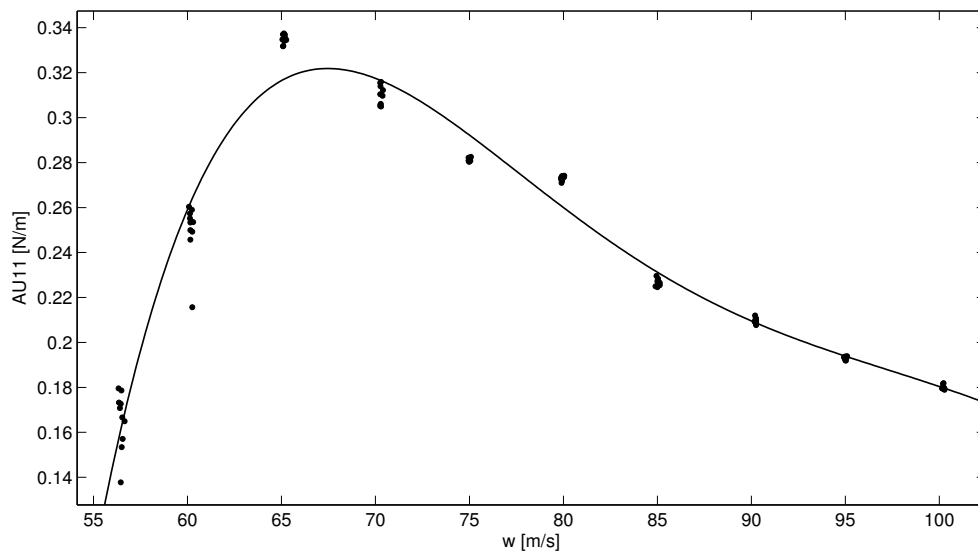


Obrázek 10: Aeropružný moment druhé lopatky působící na sebe samu při úhlu náběhu  $4^\circ$

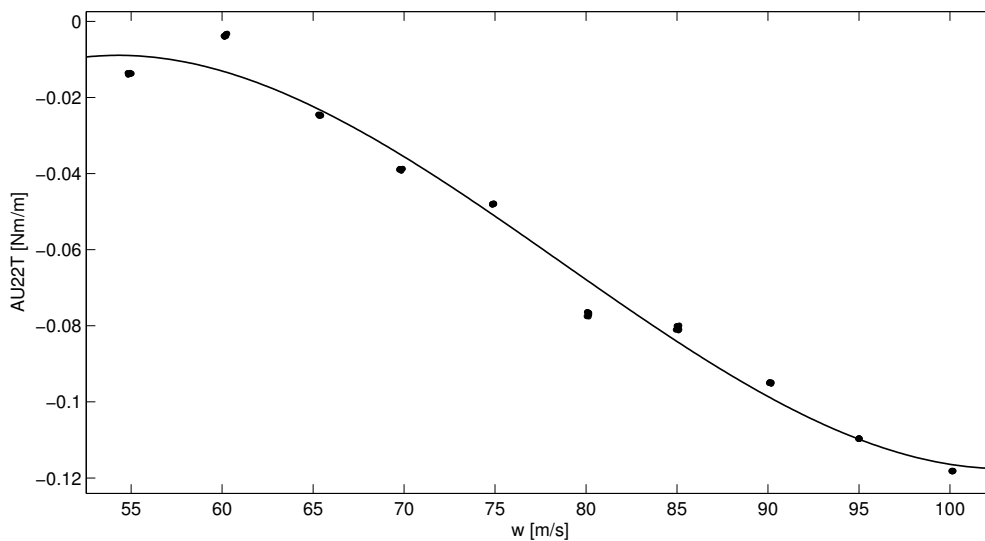




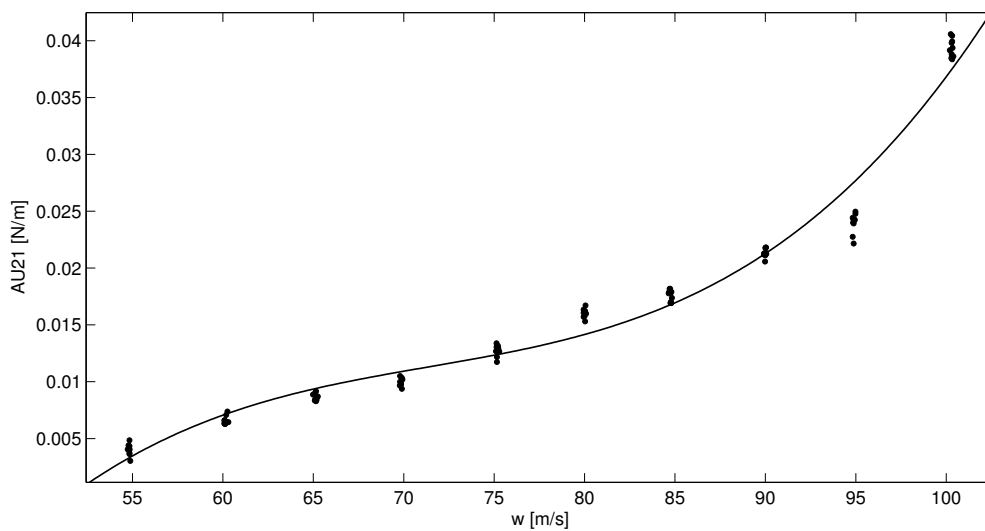
Obrázek 11: Aeroprůžný moment působící na třetí lopatku od kmitající čtvrté při úhlu náběhu  $4^\circ$



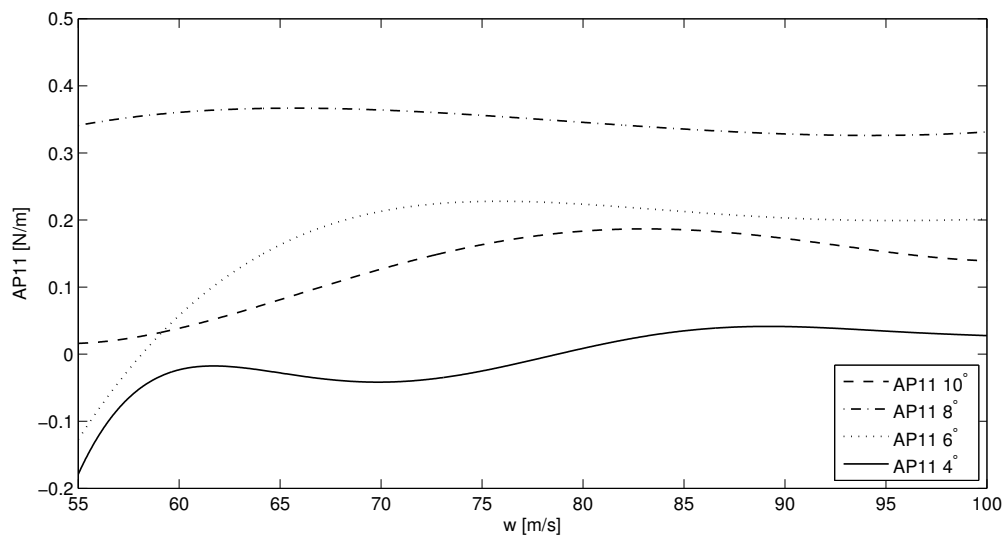
Obrázek 12: Aeroútlumová síla první lopatky působící na sebe samu při úhlu náběhu  $6^\circ$



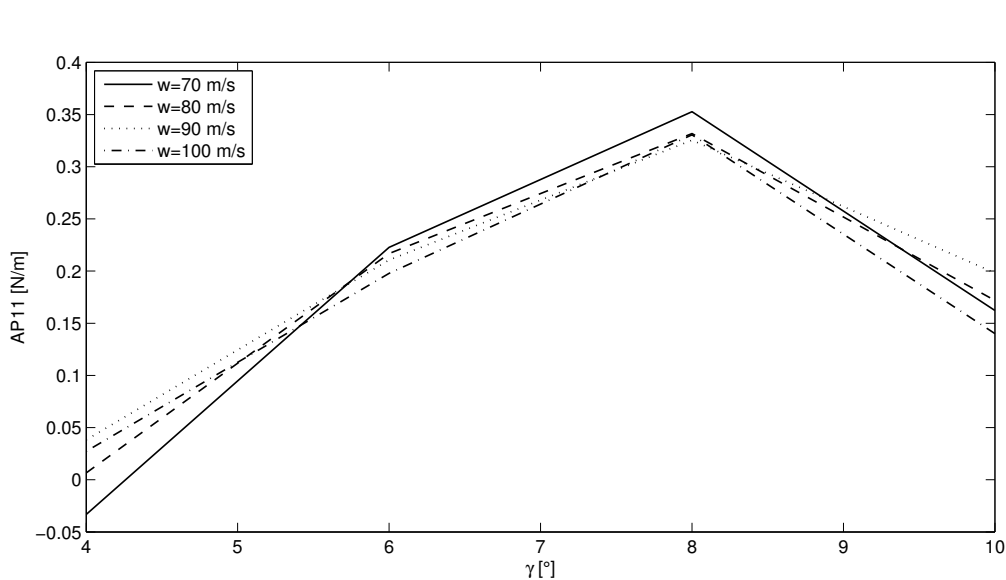
Obrázek 13: Aeroútlumový moment druhé lopatky působící na sebe samu při úhlu náběhu  $8^\circ$



Obrázek 14: Aeroútlumová síla působící na druhou lopatku od kmitající první při úhlu náběhu  $10^\circ$



Obrázek 15: Aeropružná síla první lopatky působící na sebe samu při různých úhlech náběhu



Obrázek 16: Aeropružná síla první lopatky působící na sebe samu v závislosti na úhlu náběhu při různých rychlostech

## Závěr

Úkolem této bakalářské práce bylo vyšetřit aerodynamické vazební síly a momenty v lopatkové kaskádě a popsat metodiku řešení. Měření bylo prováděno na experimentálním zařízení, které je umístěno v laboratořích Katedry energetických strojů a zařízení Fakulty strojní Západočeské univerzity v Plzni.

Nejprve bylo nutné provést přípravná měření. Byly vyšetřeny frekvenční charakteristiky jednotlivých vibrouzlů a vyrovnán rychlostní profil v lopatkové kaskádě. Pro zjištění závislosti síly na proudu, který prochází cívkami vibrátorů, a fáze mezi silou a proudem byly vibrátory ocejšovány. Samotné měření pak probíhalo při úhlech náběhu  $4^\circ$ ,  $6^\circ$ ,  $8^\circ$  a  $10^\circ$  při rychlostech proudu vzduchu v rozmezí  $55$  až  $100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Měření v aerodynamickém tunelu byla získána data pro vyšetření aerodynamických koeficientů pohybových rovnic, pomocí nichž se řeší vibrace tekutinově vázaných lopatkových profilů v proudícím mediu. Výsledky měření lze dále využít k naladění numerických výpočtů vibrujících lopatkových kaskád. Nejistota provedených měření není výrazná, zvážíme-li, že se jedná o síly na úrovni desetin, ale i setin newtonů. I tak malé síly však mohou vyvolat silný *flutter*.

Je nutné zmínit zjištěné nedostatky experimentálního zařízení. Zavěšení rámu s vibrouzly na ocelovém laně se ukázalo jako velice nestabilní. Při vyšších rychlostech proudícího vzduchu docházelo k přimknutí jedné nebo více lopatek ke stěně mezery, kterou procházejí do koridoru vzduchu. V těchto případech bylo nutné experiment přerušit a lopatky znovu ustavit. Lano se s časem prověšuje a je nutné rám před každým měřením vrátit zpět do původní polohy. Dalším nutným zlepšením je zapojení paralelního kompresoru nebo použití jiného kompresoru za účelem dosažení vyšších rychlostí, při kterých se již objevuje stlačitelnost. Studována je rovněž úprava pro měření s delšími lopatkami, kde by se zkoumané jevy projevovaly bezesporu více.

Řešená problematika je velice náročná a zajisté přinese významné poznatky pro zvýšení účinnosti a životnosti lopatkových strojů. Vyřešením zmíněných nedostatků experimentálního zařízení bude možné získávat přesnější a spolehlivější data pro širší spektrum úloh.

## Literatura

- [1] LINHART, J. *Aeroprůžnost*. Plzeň: ZČU, 2001. ISBN 80-7082-708-4
- [2] KRIVÁNKÁ, D. *Experimentální zjišťování aerodynamických koeficientů*. Plzeň: ZČU - KKE, 2008.
- [3] FENDERL, D. *Experimentální vyšetření aerodynamických vazeb při torzním kmitání mezi lopatkami v přímé mříži*. Bakalářská práce. Plzeň: ZČU, 2013.
- [4] PAŠEK, L. *Proměření a numerický výpočet planparalelního kmitání lopatek*. Bakalářská práce. Plzeň: ZČU, 2014.
- [5] PANUŠKA, M., LINHART, J. *Vyšetřování aerodynamických vazebních sil a momentů v lopatkové kaskádě*. Sborník: *Energetické stroje a zařízení, termomechanika a mechanika tekutin 2015*. Plzeň: ZČU, 2015. ISBN 978-80-261-0360-8
- [6] LINHART, J. *Zařízení pro experimentální vyšetření vazebních aerodynamických sil mezi trubkovými maketami v proudu vzduchu*. Plzeň: ZČU - KKE.

## Seznam obrázků

1	Aerodynamická trať . . . . .	10
2	Měřicí prostor . . . . .	11
3	Rameno s vibrouzly . . . . .	12
4	Vibrouzel . . . . .	12
5	Schéma Prandtlovy trubice . . . . .	13
6	Frekvenční charakteristiky 1. a 2. lopatky . . . . .	16
7	Frekvenční charakteristiky 3. a 4. lopatky . . . . .	16
8	Schéma fázového diagramu . . . . .	17
9	Schéma lopatek v kaskádě . . . . .	19
10	Aeropružný moment druhé lopatky působící na sebe samu při úhlu ná- běhu $4^\circ$ . . . . .	25
11	Aeropružný moment působící na třetí lopatku od kmitající čtvrté při úhlu náběhu $4^\circ$ . . . . .	26
12	Aeroútlumová síla první lopatky působící na sebe samu při úhlu náběhu $6^\circ$ . . . . .	26
13	Aeroútlumový moment druhé lopatky působící na sebe samu při úhlu náběhu $8^\circ$ . . . . .	27
14	Aeroútlumová síla působící na druhou lopatku od kmitající první při úhlu náběhu $10^\circ$ . . . . .	27
15	Aeropružná síla první lopatky působící na sebe samu při různých úhlech náběhu . . . . .	28
16	Aeropružná síla první lopatky působící na sebe samu v závislosti na úhlu náběhu při různých rychlostech . . . . .	28

## **Příloha A**

### **Naměřená data ( $\gamma = 4^\circ$ )**









Table with 27 columns labeled AU11 to AU44 and one column labeled 'w'. The table contains numerical data for each cell, representing a specific dataset or simulation results. The 'w' column values range from 80.00 to 100.33.

## **Příloha B**

### **Naměřená data ( $\gamma = 6^\circ$ )**







Table with 33 columns (w, AU11, AU21, AU31, AU41, AU51, AU12, AU22, AU32, AU42, AU52, AU13, AU23, AU33, AU43, AU53, AU14, AU24, AU34, AU44, AU54, AU15, AU25, AU35, AU45, AU55, AU16, AU26, AU36, AU46, AU56, AU17, AU27, AU37, AU47, AU57, AU18, AU28, AU38, AU48, AU58, AU19, AU29, AU39, AU49, AU59, AU20, AU30, AU40, AU50) and 100 rows of numerical data. The table contains a dense grid of floating-point values, likely representing a matrix or simulation results, with values ranging from approximately -0.1236 to 0.0086.



## **Příloha C**

### **Naměřená data ( $\gamma = 8^\circ$ )**





Table with 35 columns labeled AP11 through AP44T and 35 rows labeled 80.03 through 100.13. Each cell contains a numerical value representing a data point for a specific component and iteration.



## **Příloha D**

### **Naměřená data ( $\gamma = 10^\circ$ )**





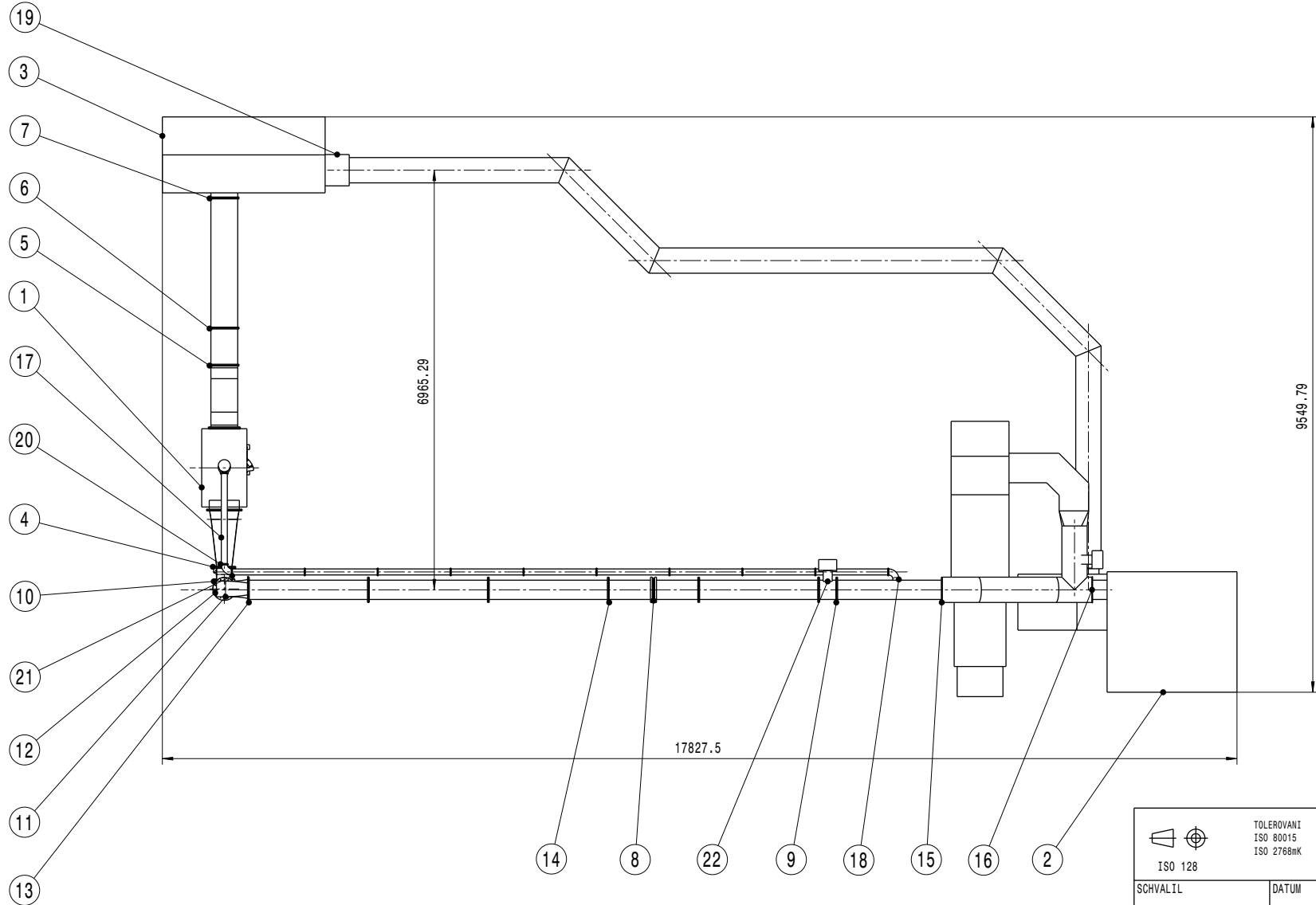
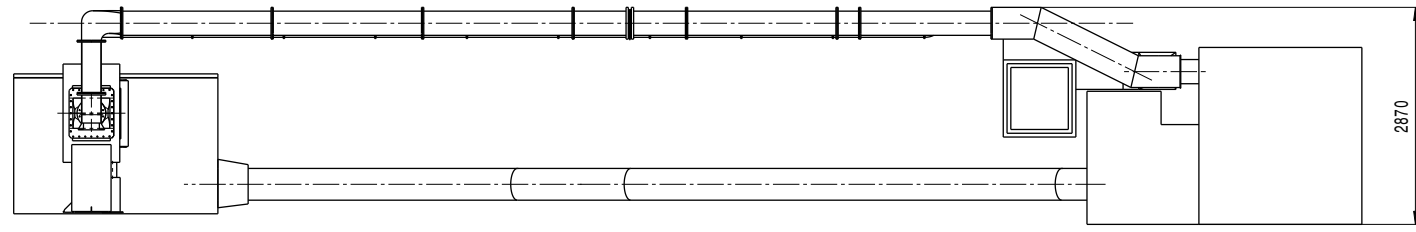






## **Příloha E**

### **Výkres sestavy aerodynamického tunelu**



Císlo	Nazev	ks
1	Merici prostor	1
2	Kompresor	1
3	Ustalovací komora	1
4	Vystup	1
5	Vstup 1	1
6	Vstup 2	1
7	Vstup 3	1
8	Clona	1
9	Klapka	1
10	Koleno 1	1
11	Koleno 2	1
12	Trubka 1	1
13	Trubka 2	4
14	Trubka 3	2
15	Trubka 4	1
16	Trubka 5	1
17	Koleno_M 1	1
18	Koleno_M 2	1
19	Trubka_Sp	1
20	Trubka_M 1	1
21	Trubka_M 2	9
22	Ovladani klapky	2

ISO 128

TOLEROVANI  
ISO 80015  
ISO 2768mK

SCHVALIL	DATUM
Kontroloval	DATUM
Kreslil Michal Panuska	DATUM 20. 6. 2015

Zapadocská univerzita v Plzni  
Vsechna práva vyhrazena/All rights reserved

NAZEV  
Vykres sestavy aerodynamického tunelu

FORMAT A2	CÍSLO VYKRESU SEST-01-2015	REV
MERITKO 1:50	HMOTNOST (kg) 13483,56	LIST 1/1