Západočeská Univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

**BAKALÁŘSKÁ PRÁCE**

Lukáš Horák

# Sčítací metody pro nekonečné řady

Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Obecná matematika

Plzeň 2012

Poděkování

Upřímně ďekuji panu RNDr. Petru Tomiczkovi, CSc. za vedení bakalářské práce a za velice pečlivé čtení jejího textu.

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citované literatury.

V ........ dne ............ Podpis autora

Název práce: Sčítací metody pro nekonečné řady

Autor: Lukáš Horák

Katedra: Katedra matematiky

Vedoucí bakalářské práce: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Abstrakt:
*Tato bakalářská práce se zabývá sčítacími metodami pro nekonečné řady. Nejprve definujeme konvergenci řady a studujeme nejdůležitější vlastnosti konvergentních řad a kritéria konvergence řad. Také se zabýváme Cauchyho součinem konvergentních řad. V další části práce zavádíme sčítací metody pro nekonečné řady, studujeme regulární lineární sčítací metody jako zobecnění pojmu konvergence řady a definujeme sčítací metody pomocí lineárních transformací posloupnosti částečných součtů řady. Uvádíme větu, která charakterizuje jistou třídu sčítacích metod a dále uvádíme několik vět o Cauchyho součinu sčitatelných řad. V poslední části práce se zabýváme možnostmi využití matematického softwaru při sčítání nekonečných řad pomocí sčítacích metod.*

Klíčová slova: *konvergentní řada, divergentní řada, Cauchyův součin řad, sčítací metoda, Cesàrova sčítací metoda, Hölderova sčítací metoda.*

Title: Summation methods for infinite series

Author: Lukáš Horák

Department: Department od Mathematics

Supervisor: RNDr. Petr Tomiczek, CSc.

Abstract:
*This bachelor thesis deals with summation methods for infinite series. First, we define convergence of series and study the most important properties of convergent series and convergence criterions. We also deal with the Cauchy product of convergent series. In the next part of the thesis we introduce summation methods, study regular linear methods as a generalization of the notion of convergence and define summation methods by means of linear transformations of the sequence of partial sums of a series. We state a theorem, which characterizes a class of summation methods and also several theorems about Cauchy product of summable series. In the last part of the thesis we discuss usage of mathematical software for summing infinite series by summation methods.*

Keywords: *convergent series, divergent series, Cauchy product of series, Cesàre summation method, Hölder summation method.*

# Seznam použitých symbolů

$\mathbb{N}$ .......... množina všech přirozených čísel

$\mathbb{N}_0$ .......... $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$\mathbb{R}$ .......... množina všech reálných čísel

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ .......... nekonečná posloupnost reálných čísel

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .......... nekonečná řada příslušná posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\liminf_{n\to\infty} a_n$ .......... infimum množiny hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$\limsup_{n\to\infty} a_n$ .......... supremum množiny hromadných hodnot posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

$e$ .......... Eulerovo číslo, $e \doteq 2,718$

$\gamma$ .......... Eulerova konstanta, $\gamma \doteq 0,577$

$\ln(x)$ .......... $\log_e(x)$

$a_n = o(b_n)$ .......... $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

$\int_a^b f(x)dx$ .......... integrál funkce $f$ přes interval $(a, b)$

$l_s(x)$ .......... s-násobné složení funkce $\ln(x)$

$a^+$ .......... $\max\{a, 0\}$

$a^-$ .......... $\min\{-a, 0\}$

$c(T)$ .......... pole konvergence metody $T$

$(a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ .......... nekonečná matice s prvky $a_{mn}$

$(T)\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ .......... řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je sčitatelná metodou $T$ k součtu $s$

$\mathfrak{H}$ .......... Huttonova sčítací metoda

$\mathfrak{C}$ .......... Cesàrova sčítací metoda

$\mathfrak{L}_A$ .......... lineární sčítací metoda s maticí A

$\mathfrak{C}^k$ .......... Cesàrova sčítací metoda řádu k

$\mathcal{H}^k$ .......... Hölderova sčítací metoda řádu k

$\mathfrak{R}_q$ .......... metoda Rieszových průměrů

# Obsah

# Úvod

Nekonečné řady jsou jedním ze základních nástrojů matematické analýzy. Již Archimédes při studiu plochy paraboly odvodil vzorec pro součet nekonečné geometrické řady: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. Nekonečnými řadami se později zabývala řada významných matematiků. V 17. a 18. století například Newton, Leibniz, Bernoulli, Lagrange, Euler a mnoho dalších. Pojem konvergence řady ale nebyl přesně definován a s řadami se pracovalo spíše algebraickými metodami. To však v některých případech vedlo k rozporům, uveďme například následující „výpočet“:

$$\begin{aligned} 1-1+1-1+\cdots &= (1-1)+(1-1)+\cdots = 0 \\ 1-1+1-1+\cdots &= 1-(1-1)-(1-1)+\cdots = 1 \end{aligned} \tag{1}$$

Euler rozlišoval konvergentní a divergentní řady a byl toho názoru, že každé nekonečné řadě by měla být přiřazena jistá hodnota, jakýsi zobecněný součet. Problémy vznikající při práci s divergentními řadami přisuzoval nedokonalosti používaných metod sčítání. V 19. století došlo k důkladnému vybudování základů matematické analýzy zásluhou Abela, Gausse, Cauchyho, Bolzana a dalších matematiků. Divergentní řady byly přitom odsunuty na okraj zájmu a pracovalo se převážně s konvergentními řadami, výjimku tvoří práce Fouriera a Poissona. Na konci 19. století se začali znovu zabývat divergentními řadami Cesàro a Borel. Cesàro definoval sčítací metodu, která se dnes nazývá Cesàrova. Jeho definici zobecnil Hölder a později i sám Cesàro. Ten dokázal i několik tvrzení o Cauchyho součinu Cesàrovsky sčitatelných řad. Fejér začátkem 20. století dokázal, že Fourierova řada každé spojité $2\pi$-periodické funkce je Cesàrovsky sčitatelná k této funkci všude, i když v běžném smyslu může v mnoha bodech divergovat. Tyto výsledky prolomily nedůvěru k divergentním řadám. Podrobnější informace o historii matematické analýzy lze nalézt v [1, 5].

V této práci se zabýváme sčítacími metodami pro nekonečné řady. V první kapitole se věnujeme konvergenci řady, kritériím konvergence pro řady s kladnými i obecnými členy a větám o konvergentních řadách. V závěru kapitoly uvádíme několik vět o Cauchyho součinu konvergentních řad.
Ve druhé kapitole definujeme sčítací metody a zaměřujeme se na regulární lineární sčítací metody, které lze považovat za zobecnění konvergence. Ukazujeme, jak lze definovat lineární sčítací metody pomocí lineárních transformací posloupnosti částečných součtů řady. Pro takto definované metody uvádíme nutnou a postačující podmínku jejich regularity. V závěru kapitoly se vracíme ke Cauchyho součinu řad a uvádíme několik vět o Cauchyho součinu Cesàrovsky sčitatelných řad.
V poslední kapitole se věnujeme využití matematického softwaru při sčítání nekonečných řad sčítacími metodami. Diskutujeme možnosti programu **Wolfram *Mathematica* 8** a řešíme pomocí něj několik příkladů, které jsme v předchozích kapitolách řešili analyticky.

# 1. Nekonečné řady

V této kapitole definujeme základní pojmy z teorie nekonečných řad a uvedeme nejdůležitější vlastnosti nekonečných řad. Dále se budeme zabývat otázkou jejich konvergence, absolutní a neabsolutní konvergencí, a násobením nekonečných řad.

## 1.1 Základní poznatky z teorie nekonečných řad

Tato část textu je zpracována podle [2, 6].

**Definice 1.1.1.**
Nechť $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \tag{1.1}$$

se nazývá **nekonečná řada** příslušná posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Čísla $a_n,\ n \in \mathbb{N}$ se nazývají **členy řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro jejíž $n$-tý člen platí $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ se **nazývá posloupnost částečných součtů řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Existuje-li konečná limita posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$, pak tuto limitu nazýváme **součtem nekonečné řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a píšeme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Je-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ divergentní, pak říkáme že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní. Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, říkáme, že řada **diverguje k** $+\infty$. Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = -\infty$, říkáme, že řada **diverguje k** $-\infty$. Pokud $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje ani jako nevlastní limita, říkáme že nekonečná řada **osciluje**. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ užíváme jak pro označení řady příslušné k posloupnosti $a_n$, tak pro označení hodnoty součtu této řady.

**Příklad 1.1.1.** (Geometrická řada)
Nechť $q, a \in \mathbb{R}$. Posloupnost $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$, pro kterou platí $g_n = aq^{n-1}$ se nazývá geometrická posloupnost. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} g_n = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ příslušná ke geometrické posloupnosti se nazývá nekonečná geometrická řada. Pro konkrétní volbu parametrů $a, q$ dává nekonečná geometrická řada příklady konvergentní, divergentní k $\pm\infty$ a divergentní oscilující nekonečné řady.

Je-li $a \in \mathbb{R}, q = 1$, je $g_n = a$ a pro posloupnost částečných součtů platí

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k = na. \tag{1.2}$$

Pro $a > 0$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = +\infty$, pro $a < 0$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} na = -\infty$. Geometrická řada je tedy v těchto případech divergentní. Pro $a = 0$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(n \cdot 0) = 0$ a geometrická řada je konvergentní.

Je-li $a \in \mathbb{R}, q \neq 1$, platí pro posloupnost částečných součtů geometrické řady vztah

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} g_k = a \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}. \tag{1.3}$$

Pro $a = 0$ je $s_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$ a geometrická řada je konvergentní. Pro $a \neq 0$ závisí konvergence a divergence geometrické řady na hodnotě parametru $q$. Pro $|q| < 1$ je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = \frac{a}{1-q}$ a geometrická řada je konvergentní. Pro $|q| \geq 1$ je geometrická řada divergentní. Přitom pro $q > 1$ platí $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{q^n-1}{q-1} = a \cdot +\infty$. Pro $q < 1$ má posloupnost $s_n = a \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ dva hromadné body $+\infty$, $-\infty$ a geometrická řada je divergentní oscilující.

**Věta 1.1.1.** (Nutná podmínka konvergence nekonečné řady)
Pro konvergentní řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Důkaz:**
Je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ je také $\lim_{n\to\infty} s_{n+1} = s$. Odtud pro $a_{n+1} = s_{n+1} - s_n$ plyne $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{n+1} - s_n) = s - s = 0$.

**Věta 1.1.2.** (Bolzanovo-Cauchyovo kritérium konvergence nekonečné řady)
Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní právě tehdy, když platí následující podmínka:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n > n_0 \ \forall p \in \mathbb{N} : \ \Big| \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k \Big| < 0. \tag{1.4}$$

**Důkaz:**
Věta je přímým důsledkem Bolzanova-Cauchyova kritéria konvergence posloupnosti. Použitím tohoto kritéria na posloupnost $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ lze dokázat tvrzení věty.

**Věta 1.1.3.** (Algebra nekonečných řad)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní řady a nechť $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \cdot \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \cdot \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \tag{1.5}$$

**Důkaz:**
Označíme-li $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ plyne věta z věty o algebře limit, která říká, že za předpokladů naší věty platí

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha s_n + \beta t_n) = \alpha \cdot \lim_{n\to\infty} s_n + \beta \cdot \lim_{n\to\infty} t_n. \tag{1.6}$$

**Věta 1.1.4.**
Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní nebo divergentní k $\pm\infty$ a označme $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Nechť $k_n \in \mathbb{N}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Pak řada

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \ldots \tag{1.7}$$

má také součet $s$.

**Důkaz:**
Platí $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. Posloupnost částečných součtů řady $(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) +$

$(a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \ldots$ je posloupnost $s_{k_n}$, což je posloupnost vybraná z posloupnosti $s_n$ a musí tedy mít stejnou limitu: $\lim_{n\to\infty} s_{k_n} = \lim_{n\to\infty} s_n = s$.

**Příklad 1.1.2.** (Vynechání nulových členů)
Předchozí věta nám mimo jiné umožňuje vynechat v nekonečné řadě nulové členy podobně jako v konečném součtu. Při volbě posloupnosti $\{k_n\} = 2n$ například platí

$$0 + a_1 + 0 + a_2 + \cdots = (0 + a_1) + (0 + a_2) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1.8}$$

Podobně můžeme vhodnou volbou posloupnosti $\{k_n\}$ vynechat nulové členy i v jiných řadách.

**Věta 1.1.5.** (Invariance konvergence vůči posunutí sčítacího indexu)
Nechť $k \in \mathbb{N}$. Pak obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ konvergují, nebo obě divergují k $+\infty$, nebo obě divergují k $-\infty$, nebo obě oscilují. Pokud obě konvergují, tak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n. \tag{1.9}$$

**Důkaz:**
Řadu $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ můžeme podle věty 1.1.4. analogicky jako v příkladu 1.1.2. psát takto: $0 + 0 + \cdots + 0 + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Označme n-tý částečný součet této řady $t_n$. Pro $n > k$ platí $t_n = \sum_{p=k+1}^{n} a_p$. Pro n-tý částečný součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a pro $n > k$ platí $s_n = \sum_{p=1}^{n} a_p = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + t_n$. Z toho plyne, že $\lim_{n\to\infty} s_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) + \lim_{n\to\infty} t_n$ což je tvrzení věty.

## 1.2 Nekonečné řady s kladnými členy

V této části textu se budeme věnovat pouze nekonečným řadám které mají všechny členy kladné, tedy $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0$. Přitom stačí aby nerovnost platila jen od jistého indexu, protože podle věty 1.1.5. je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Pokud chceme vyšetřovat nekonečnou řadu, která má všechny členy záporné, stačí od řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přejít k řadě $\sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$, protože podle věty 1.1.3. platí $-\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n)$.

Většinu nekonečných řad nedokážeme sečíst podle definice, protože se nám nepodaří vyjádřit posloupnost částečných součtů v nějakém přijatelném tvaru, ze kterého bychom uměli vypočítat hodnotu limity. Výjimkou je geometrická řada a řada z následujícího příkladu. U většiny ostatních řad se spokojíme se zjištěním, že daná řada konverguje či diverguje. Této otázce se budou věnovat následující věty. Mnoho dalších tvrzení o řadách s kladnými členy lze nalézt v knize [4].

**Příklad 1.2.1.** (Teleskopická řada)
Sečteme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Provedeme rozklad na parciální zlomky $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)}$. Pro posloupnost částečných součtů platí $s_n = \sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}) = 1 - \frac{1}{(n+1)}$. Součet teleskopické řady je $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(1 - \frac{1}{(n+1)}) = 1$.

**Věta 1.2.1.**
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Pak je buď konvergentní, nebo diverguje k $+\infty$.

**Důkaz:**
Posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ je vzhledem k nerovnosti $\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_n > 0$ rostoucí. Je-li shora omezená, platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup s_n = s \in \mathbb{R}$. Není-li shora omezená, platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \sup s_n = +\infty$.

Pro rozhodnutí o konvergenci nebo divergenci nekonečné řady s kladnými členy stačí podle důkazu předchozí věty rozhodnout o omezenosti posloupnosti částečných součtů. Z tohoto pozorování plyne následující věta.

**Věta 1.2.2.** (Srovnávací kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady s kladnými členy. Nechť pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a $\forall n > k$ platí $a_n \leq b_n$. Potom z konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a z divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Důkaz:**
Podle věty 1.1.5. stačí vyšetřovat řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k+1}^{\infty} b_n$. Označme posloupnosti jejich částečných součtů $s_n$, respektive $t_n$. Vzhledem k nerovnosti $a_n \leq b_n$ platí nerovnost $s_n \leq t_n$.
Nechť je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní. Potom platí pro $\forall n > k$

$$s_n \leq t_n \leq \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=k+1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Posloupnost $s_n$ je tedy shora omezená a podle důkazu věty 1.2.1 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.
Nechť je nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní. Pak posloupnost $s_n$ není omezená a vzhledem k nerovnosti $s_n \leq t_n$ ani posloupnost $t_n$ není omezená, což podle důkazu věty 1.2.1 znamená, že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

Užitečným důsledkem srovnávacího kritéria je limitní srovnávací kritérium.

**Věta 1.2.3.** (Limitní srovnávací kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady s kladnými členy a nechť $\exists \alpha > 0$ takové, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

**Důkaz:** Z $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$ vyplývá, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists k > 0\ \forall n > k : |\frac{a_n}{b_n} - \alpha| < \varepsilon$. Odtud dále plyne $\forall n > k$ nerovnost $(\alpha - \varepsilon) b_n < a_n < (\alpha + \varepsilon) b_n$. Volbou $(\alpha - \varepsilon) > 0$ a užitím věty 1.2.2. dostáváme tvrzení věty.

Dalším důsledkem srovnávacího kritéria je Cauchyovo odmocninové kritérium. Je to vlastně speciální případ srovnávacího kritéria, kdy je za jednu z řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zvolena geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$.

**Věta 1.2.4.** (Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Existuje-li $q < 1$ a $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > k$ platí $\sqrt[n]{a_n} < q$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Platí-li nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ pro nekonečně mnoho $n$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

**Důkaz:**
Z nerovnosti $\sqrt[n]{a_n} < q$ plyne nerovnost $a_n < q^n$, což je pro $q < 1$ konvergentní geometrická řada a podle věty 1.2.2. je tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.
Z nerovnosti $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, platné pro nekonečně mnoho hodnot $n$, plyne nerovnost $a_n \geq 1$, což znamená že $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ a není tedy splněná nutná podmínka konvergence nekonečné řady (viz věta 1.1.1.).

Odmocninové Cauchyovo kritérium má také svojí limitní verzi.

**Věta 1.2.5.** (Limitní Cauchyovo odmocninové kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Je-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

**Důkaz:**
Z nerovnosti $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ plyne existence $q$ takového, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < q < 1$. Odtud plyne existence $k \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost $\sqrt[n]{a_n} < q$ platí $\forall n > k$, což podle věty 1.2.4. znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.
Z nerovnosti $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ plyne existence $k \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ platí pro $\forall n > k$, což podle věty 1.2.4. znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Dalším důsledkem srovnávacího kritéria je následující věta.

**Věta 1.2.6.**
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady s kladnými členy a nechť existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n > k$ platí nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentní, je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní, je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergentní.

**Důkaz:**
Pro $n > k$ platí $\frac{a_n}{a_k} = \frac{a_n \cdot a_{n-1} \cdots a_{k+1}}{a_{n-1} \cdot a_{n-2} \cdots a_k} \leq \frac{b_n \cdot b_{n-1} \cdots b_{k+1}}{b_{n-1} \cdot b_{n-2} \cdots b_k} = \frac{b_n}{b_k}$. Tedy $a_n \leq \frac{a_k}{b_k} \cdot b_n$ pro $n > k$. Z této nerovnosti a srovnávacího kritéria plyne tvrzení věty.

Podobně jako při odvození Cauchyova odmocninového kritéria můžeme využít znalost konvergence a divergence geometrické řady a odvodit z věty 1.2.6. další kritérium.

**Věta 1.2.7.** (d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Existuje-li $q < 1$ a $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > k$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Existuje-li $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna $n > k$ platí $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

**Důkaz:**
Věta plyne z věty 1.2.6. a z toho, že geometrická řada $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ je pro $0 < q < 1$ konvergentní a pro $q \geq 1$ divergentní.

Stejně jako srovnávací kritérium a Cauchyovo odmocninové kritérium má i d'Alam-bertovo podílové kritérium limitní verzi.

**Věta 1.2.8.** (Limitní d'Alambertovo podílové kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní. Je-li $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, pak je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentní.

**Důkaz:**
Z nerovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ plyne existence $q$ takového, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$. Odtud plyne existence $k \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$ platí pro $\forall n > k$, což podle věty 1.2.7. znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentní.
Z nerovnosti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ plyne existence $k \in \mathbb{N}$ takového, že nerovnost $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ platí pro $\forall n > k$, což podle věty 1.2.7. znamená, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je divergentní.

Věty 1.2.3. až 1.2.8. jsou odvozeny pomocí srovnávacího kritéria 1.2.2. a znalosti podmínek za kterých konverguje, respektive diverguje geometrická řada. Podobně bychom mohli postupovat i pro jiné řady, pokud bychom byli schopni rozhodnout o jejich konvergenci či divergenci bez použití srovnávacího kritéria. K tomu nám může pomoci následující kritérium.

**Věta 1.2.9.** (Integrální kritérium)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy a nechť posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí. Nechť $f$ je nezáporná nerostoucí reálná funkce, definovaná na intervalu $\langle 1, +\infty)$, pro kterou platí $f(n) = a_n$. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

**Důkaz:**
Z monotonie funkce $f$ plyne její integrovatelnost.
Na intervalech typu $\langle k-1, k\rangle, k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ platí nerovnost

$$f(x) \geq a_k \tag{1.11}$$

a na intervalech typu $\langle k, k+1\rangle, k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$f(x) \leq a_k. \tag{1.12}$$

Z těchto nerovností vyplývají nerovnosti

$$\int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k \leq \int_{k-1}^{k} f(x)dx. \tag{1.13}$$

Jejich sečtením pro $k = 2, 3, \ldots, n$ dostaneme nerovnost

$$\int_2^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{k=2}^{n} a_k \leq \int_1^{n} f(x)dx. \tag{1.14}$$

Pro posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ pak platí nerovnosti

$$s_n \geq a_1 + \int_2^{n+1} f(x)dx. \tag{1.15}$$

$$s_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx. \tag{1.16}$$

Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje, je posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ omezená. Tedy $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ s_n \leq M$. Z nerovnosti:

$$s_n \geq a_1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \tag{1.17}$$

dostaneme nerovnost

$$\int_1^{n+1} f(x)dx \leq \int_1^{2} f(x)dx - a_1 + M, \tag{1.18}$$

ze které limitním přechodem $n \to \infty$ vyplývá konvergence integrálu $\int_1^{\infty} f(x)dx$.

Pokud integrál $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konverguje, existuje $L > 0$ takové, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\int_1^{n} f(x)dx \leq L$. Z nerovnosti:

$$s_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx \tag{1.19}$$

dostáváme nerovnost

$$s_n \leq a_1 + L \tag{1.20}$$

což znamená že posloupnost částečných součtů $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy konverguje.

Užitečnost této věty ilustruje několik následujících příkladů.

**Příklad 1.2.2.** (Eulerova konstanta)
Označíme $I_n = \int_1^{n} f(x)dx$. Z nerovností:

$$s_n \geq a_1 + \int_2^{n+1} f(x)dx \tag{1.21}$$

$$s_n \leq a_1 + \int_1^{n} f(x)dx \tag{1.22}$$

dostaneme nerovnosti

$$0 \leq a_1 - \int_1^{2} f(x)dx \leq s_n - I_n \leq a_1. \tag{1.23}$$

Dokážeme, že posloupnost $\{s_n - I_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost reálných čísel a to nezávisle na konvergenci nebo divergenci integrálu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ a řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Platí:

$$s_{n+1} - I_{n+1} - (s_n - I_n) = a_{n+1} - \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 0 \tag{1.24}$$

Poslední nerovnost platí podle (1.11). Posloupnost $\{s_n - I_n\}_{n=1}^{\infty}$ má tedy vždy konečnou limitu, jejíž hodnota podle (1.23) leží mezi 0 a $a_1$, součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se tedy od integrálu $\int_1^{\infty} f(x)dx$ liší maximálně o $a_1$. Například pro volbu $a_n = \frac{1}{n}, f(x) = \frac{1}{x}$ dostáváme existenci a konečnost limity

$$\lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \int_1^n \frac{dx}{x}) = \lim_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Číslo $\gamma$ se nazývá Eulerova konstanta a její hodnota je přibližně 0.577.

**Příklad 1.2.3.** (Konvergence řad s členy typu $\frac{1}{n^\alpha}$)
Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Pro $\alpha \le 0$ nesplňuje řada nutnou podmínku konvergence 1.1.1. a je tedy divergentní. Pro $\alpha > 0$ použijeme integrální kritérium s volbou $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ která splňuje předpoklady pro jeho použití.
Pro $\alpha > 1$ platí $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_1^{\infty} = \frac{1}{\alpha-1}$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní.
Pro $\alpha = 1$ platí $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^{\infty} = +\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je divergentní.
Pro $1 > \alpha > 0$ platí $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = [\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}]_1^{\infty} = +\infty$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je divergentní.

**Příklad 1.2.4.**
Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.
Funkce $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ splňuje předpoklady integrálního kritéria. Konvergence řady je tedy ekvivalentní konvergenci integrálu $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = [\ln t]_{\ln 2}^{\infty} = +\infty$. Řada je divergentní.

**Příklad 1.2.5.**
Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^\alpha n}$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.
Analogicky jako v předchozím příkladu použijeme integrální kritérium a substituci $\ln x = t$. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^\alpha x} = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$. To je z hlediska konvergence stejný integrál jako v příkladu 1.2.3. a řada tedy konverguje pro $\alpha > 1$.

**Příklad 1.2.6.**
Označíme symbolem $l_s(x)$ s-násobné složení funkce logaritmus, $s \in \mathbb{N}$. Tedy $l_1(x) = \ln x, l_2(x) = \ln(\ln x)$ atd. Obecně můžeme substitucí $l_s x = t$ převést konvergenci integrálu $\int_m^{\infty} \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x) \cdots (l_s(x))^\alpha}$ na konvergenci integrálu $\int_{l_s(m)}^{\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ a potom o konvergenci řady $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n) \cdots (l_s(n))^\alpha}$ rozhodnout podle příkladu 1.2.3. Dolní mez v integrálu je volena tak, aby integrovaná funkce byla dobře definovaná.

**Příklad 1.2.7.** (Cauchyovo kondenzační kritérium)
Jsou-li splněny předpoklady integrálního kritéria, je konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ekvivalentní konvergenci integrálu $\int_1^{\infty} f(x)dx$. Tento integrál můžeme substitucí $x = 2^t$ převést na integrál $\ln(2) \cdot \int_0^{\infty} 2^t f(2^t)dt$ jehož konvergence je ekvivalentní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Celkem tedy dostáváme následující tvrzení: nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Toto tvrzení se nazývá Cauchyovo kondenzační kritérium.

**Věta 1.2.10.** (Kummerovo kritérium konvergence)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada s kladnými členy. Nechť $d_n$ je posloupnost kladných reálných čísel taková, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ diverguje. Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje pokud

$$\liminf_{n\to\infty}(d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}) > 0 \tag{1.26}$$

a diverguje pokud

$$\limsup_{n\to\infty}(d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}) < 0. \tag{1.27}$$

**Důkaz:**
Nechť $h < \liminf_{n\to\infty}(d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1})$. Pak existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že pro $\forall m \geq k$ platí:

$$d_m \frac{a_m}{a_{m+1}} - d_{m+1} > h. \tag{1.28}$$

Úpravou nerovnosti na tvar

$$a_m d_m - a_{m+1} d_{m+1} > h a_{m+1} \tag{1.29}$$

a sečtením těchto nerovností pro $m = k, k+1, \ldots, n-1$ dostaneme nerovnost

$$a_k d_k - a_n d_n > h(a_{k+1} + \cdots + a_n). \tag{1.30}$$

Z této nerovnosti dále vyplývá nerovnost

$$a_{k+1} + \cdots + a_n < \frac{a_k d_k}{h}. \tag{1.31}$$

Pravá strana této nerovnosti nezávisí na $n$, což znamená že posloupnost částečných součtů $s_n = \sum_{i=k+1}^{n} a_i$ je omezená. Řada $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ je tedy konvergentní a podle věty 1.1.4. je i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentní.
V druhém případě analogickými úpravami dokážeme existenci $k \in \mathbb{N}$ takového, že pro $\forall n \geq k$ platí nerovnost $a_n d_n > a_k d_k$. Členy řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ jsou tedy větší než členy divergentní řady $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_k d_k}{d_n}$, takže řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je také divergentní.

**Příklad 1.2.8.**
Zvolíme-li v Kummerově kritériu posloupnost $\{d_n = 1\}_{n=1}^{\infty}$, dostaneme pro konvergenci podmínku

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 \tag{1.32}$$

a pro divergenci podmínku

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1, \tag{1.33}$$

což je jiná verze podílového kritéria.

**Příklad 1.2.9.** (Raabeovo kritérium)
Zvolíme-li v Kummerově kritériu posloupnost $\{d_n = n\}_{n=1}^{\infty}$, dostaneme pro konvergenci podmínku

$$\liminf_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1 \tag{1.34}$$

a pro divergenci podmínku

$$\liminf_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1) > 1, \tag{1.35}$$

toto kritérium se nazývá Raabeovo.

V příkladu 1.2.6. jsme odvodili divergenci řad $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{d_n}$ s volbou $\{d_n = n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{d_n = n \ln n\}_{n=2}^{\infty}$,$\{d_n = n \ln n \ln(\ln n)\}_{n=3}^{\infty}$ atd. Tyto posloupnosti tedy můžeme použít v Kummerově kritériu a získávat tak další a další konvergenční kritéria.

## 1.3 Nekonečné řady s obecnými členy

Nyní se budeme zabývat řadami $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se členy $a_n \in \mathbb{R}$. Informace pro tuto část textu jsem čerpal z knih [3, 6]. Konvergenci těchto řad můžeme často ověřit pomocí následující věty, která umožňuje věty z předchozí kapitoly užít i na řady s obecnými reálnými členy.

**Věta 1.3.1.**
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je nekonečná řada, $a_n \in \mathbb{R}$ a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Důkaz:**
Věta plyne z nerovnosti $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ a Bolzanova-Cauchyova kritéria (věta 1.1.2.).

**Definice 1.3.1.** (Absolutně a neabsolutně konvergentní řada)
Chceme-li vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, můžeme se nejdříve pokusit vyšetřit konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Pokud je tato řada konvergentní, je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. V takovém případě říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je **absolutně konvergentní**. V případě divergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ však o konvergenci nebo divergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nemůžeme nic říci. Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a současně řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverguje, říkáme že je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **neabsolutně konvergentní**.

Při odvození kritérií neabsolutní konvergence bude užitečná následující identita, známá jako Abelova parciální sumace, která je analogií metody per partes pro konečné součty. Označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ a_k = s_k - s_{k-1}$. Potom:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} s_k b_{k+1}, \tag{1.36}$$

$s_0$ je prázdná suma a platí tedy $s_0 = 0$. V poslední sumě proto můžeme sčítat od jedničky:

$$\sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_n. \tag{1.37}$$

Pomocí Abelovy parciální sumace nyní odvodíme kritérium neabsolutní konvergence.

**Věta 1.3.2.** (Dirichletovo a Abelovo kritérium konvergence)
Nechť $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ je nerostoucí kladná posloupnost reálných čísel a nechť je pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splněná některá z následujících podmínek:
(Dirichletova podmínka) Posloupnost $\{s_k\}_{k=1}^{n}$ je omezená a $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$.
(Abelova podmínka) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje.
Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konverguje.

**Důkaz**
Dokážeme, že za daných podmínek řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ splňuje Bolzanovo-Cauchyovo kritérium. Nechť platí Dirichletova podmínka. Budeme odhadovat absolutní hodnotu výrazu $s_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k$. Pomocí Abelovy parciální sumace dostaneme:

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{n+p} b_k(s_k - s_{k-1}) &= -s_n b_{n+1} + s_{n+1}(b_{n+1} - b_{n+2}) + \dots \\ &+ s_{n+p-1}(b_{n+p-1} - b_{n+p}) + s_{n+p} b_{n+p}.\end{aligned} \tag{1.38}$$

Nechť $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu $\exists K > 0$ takové, že $|s_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $b_n \to 0$ monotónně, což dává odhad:

$$\begin{aligned}|s_{n,p}| &\leq |-b_{n+1}s_n| + |b_{n+p}s_{sn+p}| + K(b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+2} - \dots - b_{n+p}| \\ &\leq 3Kb_{n+1} < \varepsilon.\end{aligned} \tag{1.39}$$

Tento odhad dokazuje platnost věty za předpokladu splnění Dirichletovy podmínky. Dokážeme druhou část věty. Nechť platí Abelova podmínka a zvolme $\varepsilon > 0$ a k němu $\eta < \frac{\varepsilon}{b_1}$. Z předpokladu konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existuje $n \in \mathbb{N}$ pro které platí pro $\forall p \in \mathbb{N}$ odhad:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| < \eta. \tag{1.40}$$

Použitím Abelovy parciální sumace a vlastností posloupnosi $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ dostáváme odhad:

$$|b_{n+1}a_{n+1} + \dots + b_{n+p}a_{n+p}| \leq b_{n+1}|a_{n+1} + \dots + a_{n+p}| \leq \eta b_1 < \varepsilon. \tag{1.41}$$

Tím je dokázána i druhá část věty.

**Příklad 1.3.1.** (Alternující řada)
Vyšetříme konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$ má omezenou posloupnost částečných součtů a posloupnost $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je klesající s limitou 0. Je tedy splněna Dirichletova podmínka z předchozí věty a řada je konvergentní. Přitom řada $\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-1)^n}{n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je podle integrálního kritéria divergentní, takže konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ je neabsolutní.
Řady typu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ se nazývají alternující řady. Je-li posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající s limitou 0, je alternující řada konvergentní podle Dirichletova kritéria.

**Definice 1.3.1.**
Označme $a_n^+ = \max\{a_n, 0\}, a_n^- = \max\{-a_n, 0\}$. Při tomto označení platí $a_n =$

$a_n^+ - a_n^-$ a můžeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vyšetřovat pomocí dvojice řad s nezápornými členy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ označíme $s^+$ a součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ označíme $s^-$.

**Věta 1.3.3.**
Obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ jsou konvergentní právě tehdy, když je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutně konvergentní.V takovém případě platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s = s^+ - s^-. \tag{1.42}$$

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ divergentní a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ konvergentní, platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty. \tag{1.43}$$

Je-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ konvergentní a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ divergentní, platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty. \tag{1.44}$$

**Důkaz:**
Platí $|a_n| = a_n^+ + a_n^-, a_n^+ \leq |a_n|, a_n^- \leq |a_n|$. Z absolutní konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ tedy plyne konvergence obou řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ a naopak z konvergence obou řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ plyne konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a tedy i řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Navíc platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$. Z této rovnosti vyplývají i zbylá dvě tvrzení.

Pro konečné součty platí komutativní zákon, jednotlivé sčítance můžeme sčítat v libovolném pořadí a existence ani hodnota součtu tím není nijak ovlivněna. U nekonečných řad je situace složitější. Zavedeme pojem přerovnání řady a uvedeme věty, které řeší otázku existence a hodnoty součtu přerovnané řady.

**Definice 1.3.2.** (Přerovnání posloupnosti)
Nechť $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost přirozených čísel taková, že každé přirozené číslo se v ní vyskytuje právě jednou. Říkáme, že posloupnost $\{a_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ vznikla z posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **přerovnáním**. O řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ říkáme, že vznikla z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **přerovnáním**.

Následující věta říká, že pro absolutně konvergentní řady je situace analogická jako pro konečné součty, přerovnáním absolutně konvergentní řady se její vlastnosti nemění.

**Věta 1.3.4.** (O přerovnání absolutně konvergentní řady)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je absolutně konvergentní řada, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$. Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ vznikla z řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ přerovnáním. Pak $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ je také absolutně konvergentní řada a $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} = s$.

**Důkaz:**
Nejprve dokážeme absolutní konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$. Pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \le s$. Nechť $n = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Pak platí:

$$|a_{k_1} + \cdots + a_{k_m}| \le |a_{k_1}| + \cdots + |a_{k_m}| \le |a_1| + \cdots + |a_n| \le s. \tag{1.45}$$

Limitním přechodem $m \to \infty$ dostáváme absolutní konvergenci řady $\sum_{m=1}^{\infty} a_{k_m}$. Dokážeme nyní, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ má stejný součet jako řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Označíme $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i, \sigma_n = \sum_{i=1}^{n} a_{k_i}$. Chceme dokázat, že $\lim_{n\to\infty}(s_n - \sigma_n) = 0$. Nechť $\varepsilon > 0$. Pak existuje $r \in \mathbb{N}$ takové, že $\sum_{i=r+1}^{\infty} |a_i| < \varepsilon$. Podle první části důkazu platí pro libovolnou konečnou posloupnost $\{m_i\}_{i=1}^{l}$ přirozených čísel větších něž $r$ nerovnost $|a_{m_1}| + \cdots + |a_{m_l}| < \varepsilon$. Protože posloupnost $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ obsahuje všechna přirozená čísla, existuje index $q \in \mathbb{N}$ takový, že v posloupnosti $k_1, \dots, k_q$ jsou obsažena všechna čísla $1, \dots, r$. Zvolíme $n_0 = \max\{q, r\}$. Potom se pro $n \ge n_0$ v rozdílu $s_n - \sigma_n = (a_1 + \cdots + a_n) - (a_{k_1} + \cdots + a_{k_n})$ odečtou všechny členy $a_1, \dots, a_r$. Rozdíl $s_n - \sigma_n$ má tedy tvar $\pm a_{m_1} \pm \cdots \pm a_{m_l}$. Platí tedy pro $n \ge n_0$ nerovnost

$$|s_n - \sigma_n| \le |a_{m_1}| + \cdots + |a_{m_l}| < \varepsilon. \tag{1.46}$$

Tím je dokázáno i druhé tvrzení věty.

**Poznámka:**
Pro neabsolutně konvergentní řady věta neplatí. Dá se dokonce dokázat, že každou neabsolutně konvergentní řadu je možné přerovnat tak, aby konvergovala k libovolnému předem zvolenému číslu, nebo aby divergovala k $+\infty$, nebo aby divergovala k $-\infty$, nebo aby oscilovala. Důkaz lze nalézt v [3].

## 1.4 Násobení nekonečných řad

Věnujme se nyní otázce násobení nekonečných řad. Definice součinu řad je úzce spojená s teorií násobných řad, které se zde ale nebudeme věnovat. Součin řad budeme definovat jedním z mnoha možných způsobů, naše definice pochází od Cauchyho a je motivována pravidlem pro násobení polynomů. Podrobnější informace o problematice násobných řad a násobení řad lze nalézt v [3, 4, 5].

**Definice 1.4.1.** (Cauchyho součin řad)
Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jsou nekonečné řady. Řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ nazýváme **Cauchyho součinem** řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

V definici Cauchyho součinu vlastně definujeme jisté uspořádání dvojic $(a_k, b_l)$, $k, l \in \mathbb{N}$. Členy řady potom sčítáme v pořadí daném tímto uspořádáním. Přitom podle poznámky za větou 1.3.4. víme, že u neabsolutně konvergentních řad záleží na pořadí v jakém jednotlivé členy řady sčítáme. Následující věta řeší otázku konvergence Cauchyho součinu řad.

**Věta 1.4.1.** (O součinu absolutně konvergentních řad)

Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ jsou absolutně konvergentní nekonečné řady. Pak jejich Cauchyho součin je absolutně konvergentní řada a platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = st. \tag{1.47}$$

**Důkaz:**
Dokážeme absolutní konvergenci Cauchyho součinu. Stačí dokázat, že Cauchyho součin konvergentních řad s kladnými členy konverguje. Předpokládejme tedy, že řady $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ mají kladné členy a jsou konvergentní. Potom platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} c_k d_{i-k+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_i d_k = \Big(\sum_{i=1}^{n} c_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{n} d_k\Big) \leq \Big(\sum_{i=1}^{\infty} c_i\Big) \cdot \Big(\sum_{k=1}^{\infty} d_k\Big). \tag{1.48}$$

Z toho plyne absolutní konvergence Cauchyho součinu. Důkaz vztahu (1.47) je založen na větě 1.3.4. a lze ho nalézt v [5].

**Poznámka:**
V knize [3] je uvedena věta, podle které Cauchyho součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje, je-li jedna z řad konvergentní absolutně a druhá neabsolutně. Cauchyho součin dvou neabsolutně konvergentních řad nemusí konvergovat, jak ukazuje následující příklad.

**Příklad 1.4.1.**
Řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ s členy $a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ jsou podle příkladu 1.3.1. neabsolutně konvergentní. Pro členy jejich Cauchyho součinu platí:

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \frac{(-1)^{n-k+1}}{\sqrt{n-k+1}}\Big| \geq \frac{n}{\sqrt{n}\sqrt{n}} = 1. \tag{1.49}$$

Není tedy splněna nutná podmínka konvergence.

Další věty o násobení nekonečných řad uvedeme v závěru následující kapitoly o sčítacích metodách.

# 2. Sčítací metody pro nekonečné řady

V této kapitole nám půjde o zobecnění pojmu konvergence řady. Zobrazení, které konvergentní posloupnosti přiřadí její limitu je lineární funkcionál na prostoru všech konvergentních posloupností. Tento funkcionál budeme chtít rozšířit na širší množinu posloupností tak, aby přiřadil konečnou hodnotu i některým divergentním posloupnostem. Kapitola je zpracována podle [7, 8].

## 2.1 Základní pojmy z teorie sčítacích metod

Zavedeme základní pojmy z teorie sčítacích metod pro nekonečné řady a definujeme dvě jednoduché sčítací metody.

**Definice 2.1.1.** (Limitovací a sčítací metoda)
Nechť $V$ je vektorový prostor všech reálných posloupností a $T$ zobrazení $T : V \to \mathbb{R}$. Definiční obor zobrazení $T$ označíme $c(T)$. Dvojici $(c(T), T)$ nazveme **limitovací metodou** $T$. O posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in c(T)$ řekneme, že je **limitována** metodou $T$ k číslu $a = T(\{a_n\}_{n=1}^{\infty})$. Zapisujeme $(T) \lim_{n\to\infty} a_n = a$. Množinu $c(T)$ nazýváme polem konvergence metody $T$. Chápeme-li posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ jako posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nazýváme dvojici $(c(T), T)$ **sčítací metodou** $T$. O řadě $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ říkáme, že je **sčitatelná** metodou $T$ k číslu $s = T(\{s_n\}_{n=1}^{\infty})$ a zapisujeme $(T) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

Každou posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme chápat jako posloupnost částečných součtů řady $s_1 + (s_2 - s_1) + \dots$ a tím můžeme každou sčítací metodu považovat za limitovací metodu a naopak. Protože nás budou zajímat především nekonečné řady, budeme mluvit spíše o sčítacích metodách.

**Příklad 2.1.1.** (Konvergence jako sčítací metoda)
Nechť $c(\Sigma)$ je množina všech posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Zobrazení $\Sigma$ definujeme předpisem $\Sigma(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} s_n$. Pak je dvojice $(c(\Sigma), \Sigma)$ sčítací metoda. Tato sčítací metoda splývá s pojmem konvergence řady, místo symbolu $(\Sigma) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ budeme dále užívat jen symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

**Definice 2.1.2.** (Huttonova sčítací metoda)
Nechť $c(\mathfrak{H})$ je množina všech posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že posloupnost $\{h_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{s_n + s_{n+1}}{2}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje a nechť zobrazení $\mathfrak{H}$ je definováno předpisem $\mathfrak{H}(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} h_n = (\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak je dvojice $(c(\mathfrak{H}), \mathfrak{H})$ sčítací metoda. Tato metoda se nazývá **Huttonova sčítací metoda**.

**Definice 2.1.3.** (Cesàrova sčítací metoda)
Nechť $c(\mathfrak{C})$ je množina všech posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že posloupnost $\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}$ koverguje a nechť $\mathfrak{C}$ je zobrazení definované předpisem $\mathfrak{C}(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = (\mathfrak{C}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak je dvojice $(c(\mathfrak{C}), \mathfrak{C})$ sčítací metoda.

Tato metoda se nazývá **Cesàrova sčítací metoda**.

Jak ukazuje příklad 2.1.1., je možné chápat konvergenci jako speciální případ sčítací metody pro nekonečné řady. Předmětem našeho dalšího zájmu budou ty sčítací metody, které lze považovat za zobecnění konvergence. Budeme studovat třídy sčítacích metod, které mají důležité vlastnosti společné s konvergencí, ale přitom je pomocí nich možné sečíst i některé oscilující řady. Podle věty 1.1.3. je zobrazení $T(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} s_n$, kde $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost částečných součtů řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, lineární zobrazení. Tím je motivována následující definice.

**Definice 2.1.4.** (Lineární sčítací metoda)
Nechť $(c(T), T)$ je sčítací metoda. Je-li zobrazení $T$ lineární, nazveme metodu $(c(T), T)$ **lineární sčítací metodou**. Pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ potom vzhledem k linearitě zobrazení $T$ platí implikace $x, y \in c(T) \Rightarrow (\alpha x + y) \in c(T)$ a pole konvergence metody $T$ je tedy vektorový podprostor prostoru všech reálných posloupností.

**Věta 2.1.1.** (Linearita Huttonovy sčítací metody)
Huttonova sčítací metoda je lineární.

**Důkaz:**
Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in c(\mathfrak{H})$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{H}(\alpha\{s_n\}_{n=1}^{\infty} + \{t_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty}(\frac{\alpha s_n + t_n + \alpha s_{n-1} + t_{n-1}}{2}) = \\
&\alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{s_n + s_{n-1}}{2} + \lim_{n\to\infty} \frac{t_n + t_{n-1}}{2} = \alpha\mathfrak{H}(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) + \mathfrak{H}(\{t_n\}_{n=1}^{\infty}).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

**Věta 2.1.2.** (Linearita Cesàrovy sčítací metody)
Cesàrova sčítací metoda je lineární.

**Důkaz:**
Nechť $\alpha \in \mathbb{R}$, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$,$\{t_n\}_{n=1}^{\infty} \in c(\mathfrak{C})$. Potom platí:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{C}(\alpha\{s_n\}_{n=1}^{\infty} + \{t_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(\alpha s_k + t_k)}{n} = \\
&\alpha \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n} = \alpha\mathfrak{C}(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) + \mathfrak{C}(\{t_n\}_{n=1}^{\infty}).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Má-li být sčítací metoda zobecněním konvergence, měla by zachovávat klasický součet u těch řad, které jsou konvergentní. To nás vede k další definici.

**Definice 2.1.5.** (Regulární sčítací metoda)
Nechť $(c(T), T)$ je sčítací metoda. Označme symbolem $c(\Sigma)$ množinu všech posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje. Platí-li inkluze $c(\Sigma) \subset c(T)$, nazveme sčítací metodu $(c(T), T)$ **konzervativní**. Platí-li dokonce pro $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \in c(\Sigma)$ rovnost $(T)\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nazveme sčítací

metodu $(c(T), T)$ **regulární**. Regulární sčítací metody jsou tedy ty, které zachovávají součty konvergentních řad.

**Věta 2.1.3.** (Regularita Huttonovy sčítací metody)
Huttonova sčítací metoda je regulární.

**Důkaz:**
Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Potom platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n + s_{n-1}}{2} = (\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.3}$$

**Věta 2.1.4.** (Regularita Cesàrovy sčítací metody)
Cesàrova sčítací metoda je regulární.

**Důkaz:**
Nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje a nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost jejích částečných součtů. Chceme dokázat, že ze vztahu $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ vyplývá $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} = s$. Nejdříve dokážeme tvrzení pro případ $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. Nechť je dáno $\varepsilon > 0$. Pak existuje index $n_0$ takový, že platí $|s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $n > n_0$. Označíme $M = \max\{s_1, \ldots, s_{n_0}\}$ a zvolíme $n_1 = \max\{n_0, \frac{2Mn_0}{\varepsilon}\}$. Pro $n > n_1$ platí:

$$\left|\frac{s_1 + \cdots + s_{n_0}}{n} + \frac{s_{n_0+1} + \cdots + s_n}{n}\right| \leq \frac{Mn_0}{n} + \frac{(n - n_0)\varepsilon}{2n} \leq \varepsilon. \tag{2.4}$$

Tím je tvrzení dokázáno pro $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$. V obecném případě $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ zavedeme posloupnost $\{s_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ vztahem $s_n^* = s_n - s$. Pro takto zvolenou posloupnost platí $\lim_{n\to\infty} s_n^* = 0$ a podle předchozího tedy platí:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k^*}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n}(s_k - s)}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} - s\right). \tag{2.5}$$

Tím je věta dokázána.

Lineární regulární sčítací metody jsou přirozeným zobecněním konvergence. Abychom mohli skutečně mluvit o zobecnění a ne jen o alternativní definici, musíme se ujistit, že daná sčítací metoda přiřazuje konečný součet i některé divergentní řadě. Proto definujeme netriviální sčítací metody.

**Definice 2.1.6.** (Netriviální sčítací metoda)
Nechť $(c(T), T)$ je regulární lineární sčítací metoda. Nechť množina $c(\Sigma)$ je vlastní podmnožina množiny $c(T)$. Pak sčítací metodu $(c(T), T)$ nazveme **netriviální sčítací metodou**.

**Příklad 2.1.2.** (Netrivialita Huttonovy sčítací metody)
Dokážeme, že Huttonova sčítací metoda je netriviální sčítací metoda tím, že sečteme geometrickou řadu s kvocientem $q = -1$, tedy řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$. Posloup-

nost částečných součtů této řady má tvar $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, 0, 1, 0, \dots\}$ a tedy platí:

$$(\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n + s_{n+1}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \tag{2.6}$$

Rovnice $(\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \frac{1}{1-q}$ je tedy platná jak pro $|q| < 1$, tak pro $q = -1$.

**Příklad 2.1.3.** (Netrivialita Cesàrovy sčítací metody)
Opět sečteme geometrickou řadu s kvocientem $q = -1$. Připomeňme definici $\sigma_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}$. Studujeme posloupnosti lichých a sudých členů této posloupnosti. Sudé členy: $\sigma_{2n} = \frac{\sum_{k=1}^{2n} s_k}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$. Liché členy: $\sigma_{2n-1} = \frac{\sum_{k=1}^{2n-1} s_k}{2n-1} = \frac{n}{2n-1} \to \frac{1}{2}$. Posloupnost lichých členů má stejnou limitu jako posloupnost sudých členů a tedy platí $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}$.

Podle věty 1.1.1. je podmínka $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ nutná pro konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Z předchozího příkladu plyne, že tato podmínka není nutnou podmínkou pro sčitatelnost řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Huttonovou, respektive Cesàrovou sčítací metodou. Analogická podmínka pro Huttonovu metodu je obsahem následující věty.

**Věta 2.1.5.** (Nutná podmínka sčitatelnosti řady Huttonovou metodou)
Nechť $(\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak platí $\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = 0$.

**Důkaz:**

$$s = (\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n + s_{n-1}}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n-1}}{2}. \tag{2.7}$$

Z konvergence poslední řady plyne tvrzení věty.

Podaří-li se nám Huttonovou metodou sečíst nekonečnou řadu, můžeme se ptát, zda řada nebyla konvergentní i v klasickém smyslu a náš výsledek je jen důsledek regularity Huttonovi metody. Hovoří o tom následující věta.

**Věta 2.1.6.**
Nechť $(\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ právě tehdy, když $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

**Důkaz:**

$$(\mathfrak{H}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{s_n + s_{n-1}}{2} = \lim_{n\to\infty} (s_{n-1} + \frac{a_n}{2}) = s. \tag{2.8}$$

Z poslední rovnosti plyne tvrzení věty.

**Věta 2.1.7.** (Nutná podmínka sčitatelnosti řady Cesàrovou metodou)
Nechť $(\mathfrak{C}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak platí $a_n = o(n),\ s_n = o(n)$.

**Důkaz:**
Ze vztahu $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = s$ plyne $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \sigma_{n+1} = s$, takže $\lim_{n\to\infty} (\sigma_n - \frac{n+1}{n} \sigma_{n+1})$

$= 0$. Dále upravíme:

$$
\begin{aligned}
&|\sigma_n - \frac{n+1}{n}\sigma_{n+1}| = |\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} - \frac{(n+1)\sum_{k=1}^{n+1} s_k}{n(n+1)}| = \\
&|\frac{(n+1)\sum_{k=1}^{n} s_k - (n+1)\sum_{k=1}^{n+1} s_k}{n(n+1)}| = |\frac{s_{n+1}}{n}|.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

To znamená, že $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = 0$ a také $\lim_{n\to\infty} \frac{s_{n+1}-s_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

**Věta 2.1.8.**
Nechť $(\mathfrak{C}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_{k+1}}{n} = 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

**Důkaz:**

$$
\begin{aligned}
&s_n - \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} = \\
&\frac{n\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} a_i}{n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_{k+1}}{n}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Limitním přechodem $n \to \infty$ dostáváme tvrzení věty.

Přímým důsledkem této věty je následující věta.

**Věta 2.1.9.**
Nechť $(\mathfrak{C}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$ a nechť $\lim_{n\to\infty} n a_{n+1} = 0$. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

**Důkaz:**
Z předpokladu $\lim_{n\to\infty} n a_{n+1} = 0$ odvodíme stejně jako v důkazu věty 2.1.4. platnost vztahu $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k a_{k+1}}{n} = 0$ a tím jsou splněny předpoklady předchozí věty.

## 2.2 Sčítací metody definované pomocí lineárních transformací

**Definice 2.2.1.**
Nechť $A = (a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ je nekonečná reálná matice, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ reálná posloupnost a nechť pro $\forall m \in \mathbb{N}$ konverguje řada:

$$t_m = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n. \tag{2.11}$$

Pak systém rovností (2.11) nazýváme lineární transformací posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a posloupnost $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ nazýváme $A$**-transformací** posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$. Matici $A$ ztotožňujeme se zobrazením $A : \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{t_m\}_{m=1}^{\infty}$.

**Definice 2.2.2.:**
Nechť $\{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ je $A$-transformace posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $A = (a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ je

nekonečná reálná matice. Označme $c(\mathfrak{L}_A) = \{\{s_n\}_{n=1}^{\infty}; \exists \lim_{m\to\infty} t_m \in \mathbb{R}\}$ a definujme zobrazení $\mathfrak{L}_A(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{m\to\infty} t_m$. Pak dvojici $(c(\mathfrak{L}_A), \mathfrak{L}_A)$ nazýváme **sčítací metodou** $\mathfrak{L}_A$.

**Příklad 2.2.1.**
Konvergence řady chápaná jako sčítací metoda je příkladem metody $\mathfrak{L}_A$ s maticí:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

Pro takto definovanou matici $A$ platí $A(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ a tedy $\mathfrak{L}_A(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} s_n$.

**Příklad 2.2.2.**

Huttonova sčítací metoda je příkladem metody $\mathfrak{L}_A$ s maticí:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

Tedy v n-tém řádku matice $A$ jsou prvky $a_n, a_{n+1}$ rovny jedné polovině a všechny ostatní prvky jsou nulové. Při takové volbě matice $A$ totiž platí rovnost $A\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{s_n+s_{n+1}}{2}\}_{n=1}^{\infty} = \{h_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Příklad 2.2.3.**
Cesàrova sčítací metoda je příkladem metody $\mathfrak{L}_A$ s maticí:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

Tedy v n-tém řádku je prvních n prvků rovno $\frac{1}{n}$ a ostatní prvky jsou nulové. Při takové volbě matice $A$ totiž platí rovnost $A\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty}$.

**Věta 2.2.1.** (O linearitě $\mathfrak{L}_A$ metod)
Nechť $\mathfrak{L}_A$ je sčítací metoda definovaná pomocí nekonečné reálné matice $A = (a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$. Pak je metoda $\mathfrak{L}_A$ lineární.

**Důkaz:**
Zobrazení $\mathfrak{L}_A$ je složením zobrazení $A : \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \to \{t_m\}_{m=1}^{\infty}$ a zobrazení $t_m \to$

$\lim_{m\to\infty} t_m$, která jsou obě lineární.

Předchozí věta zaručuje linearitu sčítacích metod $\mathfrak{L}_A$. Otázkou zůstává, za jakých podmínek je metoda $\mathfrak{L}_A$ regulární. Následující věta udává nejen postačující, ale i nutné podmínky pro regularitu $\mathfrak{L}_A$ metody.

**Věta 2.2.2.** (Silverman-Toeplitzova)
Nechť $\mathfrak{L}_A$ je sčítací metoda definovaná pomocí nekonečné reálné matice $A = (a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$. Pak je metoda $\mathfrak{L}_A$ regulární právě tehdy, když jsou splněny následující podmínky:

$$\exists B > 0\ \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leq B. \tag{2.15}$$

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 1. \tag{2.16}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \lim_{m\to\infty} a_{mn} = 0. \tag{2.17}$$

**Důkaz:**
Dokážeme pouze to, že podmínky jsou postačující. Důkaz toho, že jsou i nutné, je poměrně dlouhý a lze ho nalézt například v knize [7].

Nechť jsou tedy podmínky splněny a nechť $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Dokážeme nejprve konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n$. Z konvergence posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne její omezenost. Existuje tedy $K > 0$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : |s_n| < K$. Platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}s_n| \leq K \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leq KB. \tag{2.18}$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}s_n|$ je tedy absolutně konvergentní. Nyní chceme dokázat, že $\forall \varepsilon > 0\ \exists M\ \forall m > M :\ \left|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}s_n - s\right| < \varepsilon$.

Z konvergence posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne existence $n_1 \in \mathbb{N}$ takového, že pro $n > n_1$ platí $|s_n - s| < \frac{\varepsilon}{4B}$. Ze třetí podmínky věty plyne existence indexů $m_1, m_2, \ldots, m_{n_1}$ takových, že pro $n \leq n_1, m > m_n$ platí

$$|a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{4n_1K}. \tag{2.19}$$

Zvolíme $m^* = \max\{m_1, \ldots, m_{n_1}\}$. Potom:

$$\Big|\sum_{n=1}^{n_1} a_{mn}s_n\Big| \leq \sum_{n=1}^{n_1} |a_{mn}s_n| < \sum_{n=1}^{n_1} \frac{|s_n|\varepsilon}{4n_1K} < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.20}$$

Z druhé podmínky věty plyne existence $m^{**}$ takového, že pro $m > m^{**}$ platí:

$$\Big|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} - 1\Big| < \frac{\varepsilon}{6K}. \tag{2.21}$$

Podle (2.19) platí pro $m > m^*$:

$$|\sum_{n=1}^{n_1} a_{mn}| \leq \sum_{n=1}^{n_1} |a_{mn}| < \frac{\varepsilon}{4K}. \tag{2.22}$$

Podle (2.21) a (2.22) platí pro $m > \max\{m^*, m^{**}\}$:

$$\begin{aligned} |\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{mn} - 1| &= |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} - \sum_{n=1}^{n_1} a_{mn} - 1| \\ &\leq |\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} - 1| + |\sum_{n=1}^{n_1} a_{mn}| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{6K} + \frac{\varepsilon}{4K} < \frac{\varepsilon}{2K}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Dále z první podmínky věty a z konvergence posloupnosti $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ plyne

$$|\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{mn}(s_n - s)| \leq \sum_{n=n_1+1}^{\infty} |a_{mn}||s_n - s| < \frac{\varepsilon}{4B} \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| \leq \frac{\varepsilon}{4}. \tag{2.24}$$

Provedeme závěrečný odhad:

$$\begin{aligned} &|\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} s_n - s| \leq \\ &|\sum_{n=1}^{n_1} a_{mn} s_n| + |\sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{mn}(s_n - s)| + |s|| \sum_{n=n_1+1}^{\infty} a_{mn} - 1| \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.25}$$

**Příklad 2.2.4.**
Víme, že Cesàrova metoda je regulární. Ověříme to znovu pomocí Silverman-Toeplitzovy věty. Matice Cesàrovy metody je uvedena v příkladu 2.2.3. Platí pro ni:

$$\begin{aligned} \forall m \in \mathbb{N} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_{mn}| &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} = 1. \\ \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{m} = 1. \\ \forall n \in \mathbb{N} : \lim_{m\to\infty} a_{mn} &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Všechny předpoklady věty jsou splněny a metoda je tedy regulární.

Nyní definujeme další sčítací metody. Matice Cesàrovy sčítací metoda transformuje posloupnost částečných součtů řady na posloupnost aritmetických průměrů částečných součtů řady. Následující metoda tento postup zobecňuje tím, že místo aritmetických průměrů využívá obecnější průměry.

**Definice 2.2.3.** (Metoda Rieszových průměrů)
Nechť $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost pro kterou platí $q_1 > 0, q_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Nechť $c(\mathfrak{R}_q)$ je množina posloupností $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ takových, že posloupnost $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{\sum_{k=1}^{n} q_k s_k}{\sum_{k=1}^{n} q_k}\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje. Definujeme zobrazení $\mathfrak{R}_q$ předpisem $\mathfrak{R}_q(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} r_n = (\mathfrak{R}_q)\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Pak je dvojice $(c(\mathfrak{R}_q), \mathfrak{R}_q)$ sčítací metoda. Tato sčítací metoda se nazývá **metoda Rieszových průměrů**.

Pokud volíme posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ vztahem $q_n = 1$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$, je metoda Rieszových průměrů shodná s Cesàrovou metodou.

Metoda Rieszových průměrů je $\mathfrak{L}_A$ metoda s maticí:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{q_1}{q_1+q_2} & \frac{q_2}{q_1+q_2} & 0 & \cdots \\ \frac{q_1}{q_1+q_2+q_3} & \frac{q_2}{q_1+q_2+q_3} & \frac{q_3}{q_1+q_2+q_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.27}$$

Podle věty 2.2.1. je to lineární sčítací metoda. Následující věta udává postačující podmínku pro její regularitu.

**Věta 2.2.3.** (Postačující podmínka pro regularitu metody Rieszových průměrů)
Nechť $\mathfrak{R}_q$ je metoda Rieszových průměrů a nechť platí $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = +\infty$. Pak je tato metoda regulární.

**Důkaz:**
Pro matici metody Rieszových průměrů dokážeme platnost všech tří podmínek Silverman-Toeplitzovy věty. Pro $\forall m \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \frac{\sum_{n=1}^{m} q_n}{\sum_{n=1}^{m} q_n} = 1$, čímž jsou splněny první dvě podmínky zmíněné věty. Zvolíme-li $n \in \mathbb{N}$, platí $\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty} \frac{q_n}{\sum_{k=1}^{m} q_k} = 0$, čímž je splněna i poslední podmínka.

Následující metoda je opět zobecněním Cesàrovy metody. Cesàrova metoda je založena na myšlence nahrazení posloupnosti částečných součtů posloupností jejích aritmetických průměrů. Pokud ani tato nová posloupnost nemá limitu, můžeme postup opakovat.

**Definice 2.2.4.**
Nechť $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ je reálná posloupnost. Definujeme posloupnost $\{H_n^0\}_{n=1}^{\infty}$ vztahem $H_n^0 = s_n$ a dále rekurentně pro $k \geq 1$ definujeme posloupnosti $\{H_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ vztahy $H_n^k = \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i^{k-1}}{n}$. Pro $k \geq 0$ definujeme množiny

$$c(\mathcal{H}^k) = \{\{s_n\}_{n=1}^{\infty}; \exists \lim_{n\to\infty} H_n^k \in \mathbb{R}\} \tag{2.28}$$

a zobrazení

$$\mathcal{H}^k(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} H_n^k = \mathcal{H}^k \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.29}$$

Potom je pro $k \geq 0$ dvojice $(c(\mathcal{H}^k), \mathcal{H}^k)$ sčítací metoda. Tato metoda se nazývá **Hölderova sčítací metoda řádu** $k$.

Metoda $\mathcal{H}^0$ je totožná s konvergencí řady a metoda $\mathcal{H}^1$ je totožná s Cesàrovou sčítací metodou. Hölderova sčítací metoda řádu $k$ je $\mathfrak{L}_{H_k}$ metodou pro jistou matici $H_k$. Je-li $A$ matice Cesàrovy sčítací metody, pak matici $H_k$ získáme jako $k$-tou mocninu matice $A$, jak je vidět z definice Hölderovy sčítací metody. Z toho okamžitě plyne linearita Hölderovy sčítací metody. Následující věta říká, že pokud Hölderova sčítací metoda řádu $k$ sčítá řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ k součtu $s$, pak každá Hölderova sčítací metoda řádu vyššího než $k$ jí také sčítá k součtu $s$. Z toho plyne i regularita Hölderovy sčítací metody řádu $k$.

**Věta 2.2.4.** (Kompatibilita $\mathcal{H}^k$ metod)
Nechť $l > k \geq 0$ a nechť $(\mathcal{H}^k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak také $(\mathcal{H}^l) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

**Důkaz:**
Větu dokážeme matematickou indukcí. Pro $l = k + 1$ platí:

$$(\mathcal{H}^l) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} H_n^{k+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i^k}{n} = (\mathcal{H}^k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \tag{2.30}$$

Předpokládáme platnost tvrzení pro $l = k + n$ a dokazujeme jeho platnost pro $l = k + n + 1$:

$$(\mathcal{H}^l) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} H_n^{k+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} H_i^{k+n}}{n} = (\mathcal{H}^{k+n}) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \tag{2.31}$$

Tím je věta dokázána. Volbou $k = 0$ dostáváme regularitu Hölderovy sčítací metody libovolného řádu.

Nutné podmínky pro $\mathcal{H}^k$ sčitatelnost jsou obsahem následující věty.

**Věta 2.2.5.** (Nutná podmínka pro $\mathcal{H}^k$ sčitatelnost)
Nechť $(\mathcal{H}^k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak platí $s_n = o(n^k)$ a také $a_n = o(n^k)$.

**Důkaz:**
Pro posloupnosti $\{H_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ z definice Hölderovy sčítací metody platí vztahy:

$$\begin{aligned}
&H_n^k = s + o(1).\\
&H_n^{k-1} = nH_n^k - (n-1)H_{n-1}^k = o(n).\\
&\dots\\
&H_n^0 = nH_n^1 - (n-1)H_{n-1}^1 = s_n = o(n^k).\\
&s_n - s_{n-1} = a_n = o(n^k).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

**Příklad 2.2.5.**
Podle předchozí věty není řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ sčitatelná metodami $\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1$ . Seč-

teme ji metodou $\mathcal{H}^2$. Nejdříve sestrojíme posloupnosti $\{H_n^0\}_{n=1}^\infty, \{H_n^1\}_{n=1}^\infty, \{H_n^2\}_{n=1}^\infty$.

$$\begin{aligned}
\{H_n^0\}_{n=1}^\infty &= \{1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}.\\
H_n^1 &= \frac{\sum_{i=1}^n H_i^0}{n} = 0 \text{ pro } n \text{ sudé.}\\
H_n^1 &= \frac{\sum_{i=1}^n H_i^0}{n} = \frac{n+1}{2n} \text{ pro } n \text{ liché.}\\
H_n^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n H_i^1}{n}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Pro $n$ liché sčítáme $\frac{n+1}{2}$ nenulových sčítanců tvaru $\frac{(2i-1)+1}{2(2i-1)},\ i=1,\dots,\frac{n+1}{2}$:

$$H_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}} \frac{(2i-1)+1}{2(2i-1)}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}(1+\frac{1}{2i-1})}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{n+1}{2}+\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2i-1})}{n} \to \frac{1}{4}. \tag{2.34}$$

Pro $n$ sudé sčítáme $\frac{n}{2}$ nenulových sčítanců tvaru $\frac{(2i-1)+1}{2(2i-1)},\ i=1,\dots,\frac{n}{2}$:

$$H_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \frac{(2i-1)+1}{2(2i-1)}}{n} = \frac{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}(1+\frac{1}{2i-1})}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{n}{2}+\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2i-1})}{n} \to \frac{1}{4}. \tag{2.35}$$

Využili jsme přitom výsledku příkladu 1.2.2., podle kterého je

$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)) = \gamma \in \mathbb{R}. \tag{2.36}$$

Z této rovnosti vyplývá:

$$\begin{aligned}
\frac{\sum_{i=1}^{\frac{n+1}{2}}\frac{1}{2i-1}}{n} &\le \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n)}{n} \to 0 \text{ pro } n \text{ liché.}\\
\frac{\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}}\frac{1}{2i-1}}{n} &\le \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{n} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln(n)}{n} \to 0 \text{ pro } n \text{ sudé.}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Posloupnost sudých i lichých členů má tedy stejnou limitu a proto platí:

$$(\mathcal{H}^2)\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1} n = \frac{1}{4}. \tag{2.38}$$

**Definice 2.2.5.** (Metoda Cesàrových průměrů řádu $k$)
Nechť $\{s_n\}_{n=1}^\infty = \{\sum_{k=1}^n a_k\}_{n=1}^\infty$ je reálná posloupnost, definujeme posloupnost $\{\sigma_n^0\}_{n=1}^\infty$ vztahem $\sigma_n^0 = s_n$ a pro $k \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnosti $\{\sigma_n^k\}_{n=1}^\infty$ vztahy

$$\sigma_n^k = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{i+k-1}{k-1} s_{n-i}}{\binom{n+k}{k}}. \tag{2.39}$$

Dále pro $k \ge 0$ definujeme množiny

$$c(\mathfrak{C}^k) = \{\{s_n\}_{n=1}^\infty; \exists \lim_{n\to\infty} \sigma_n^k \in \mathbb{R}\} \tag{2.40}$$

a zobrazení $\mathfrak{C}^k$:

$$\mathfrak{C}^k(\{s_n\}_{n=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n^k. \tag{2.41}$$

Pak je pro každé $k \geq 0$ dvojice $(c(\mathfrak{C}^k), \mathfrak{C}^k)$ sčítací metoda, nazýváme jí metoda Cesàrovských průměrů řádu $k$.

$\mathfrak{C}^0$ je konvergence řady, $\mathfrak{C}^1$ je Cesàrova metoda. Metoda $\mathfrak{C}^k$ je $\mathfrak{L}_{A_k}$ metoda, kde matice $A_k$ má tvar:

$$A_k = \begin{bmatrix} \frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k}{k}} & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\binom{k}{k-1}}{\binom{k+1}{k}} & \frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k+1}{k}} & 0 & \cdots \\ \frac{\binom{k+1}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & \frac{\binom{k}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & \frac{\binom{k-1}{k-1}}{\binom{k+2}{k}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Metoda Cesàrových průměrů řádu $k$ je tedy opět lineární sčítací metoda. Platí pro ní podobná věta jako pro Hölderovu sčítací metodu. Pokud Cesàrova sčítací metoda řádu $k$ sčítá řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ k součtu $s$, pak každá Cesàrova sčítací metoda řádu vyššího než $k$ jí také sčítá k součtu $s$. Z toho plyne i regularita Cesàrovy sčítací metody řádu $k$.

**Věta 2.2.6.** (Kompatibilita $\mathfrak{C}^k$ metod).
Nechť $l > k \geq 0$ a nechť $(\mathfrak{C}^k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \in \mathbb{R}$. Pak také $(\mathfrak{C}^l) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$.

**Důkaz:**
Zavedeme označení $S_n^0 = s_n, S_n^k = \sum_{i=0}^n S_i^{k-1}$. Při tomto označení lze matematickou indukcí dokázat platnost následující rovnosti:

$$S_n^k = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{k-1} s_{n-i} = \binom{i+k}{k} \sigma_n^k. \tag{2.43}$$

Nyní dokážeme větu pro $l = k + 1$

$$\sigma_n^{k+1} = \frac{S_n^{k+1}}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{\sum_{i=0}^n S_i^k}{\binom{n+k+1}{k+1}} = \frac{\sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k} \sigma_i^k}{\sum_{i=0}^n \binom{k+i}{k}}. \tag{2.44}$$

Využili jsme kombinatorickou identitu

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{i+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}, n \in \mathbb{N}_0. \tag{2.45}$$

která ukazuje, že metoda $\mathfrak{C}^k$ je speciální případ metody Rieszových průměrů $\mathfrak{R}_q$ s volbou posloupnosti $\{q_n\}_0^{\infty} = \{\binom{n+k}{n}\}_{n=0}^{\infty}$. Vzhledem k tomu, že $\lim_{n\to\infty} \binom{n+k}{n} = +\infty$, jsou splněny předpoklady věty 2.2.3. To znamená, že z $\mathfrak{C}^k$ sčitatelnosti řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ plyne i její $\mathfrak{C}^{k+1}$ sčitatelnost. Tím je věta dokázána pro $l = k + 1$.
V obecném případě $l = k + n$ využijeme toho, že z $\mathfrak{C}^k$ sčitatelnosti plyne $\mathfrak{C}^{k+1}$ sčitatelnost, z té zase $\mathfrak{C}^{k+2}$ sčitatelnost atd. Tím je věta dokázána.

Navíc volbou $k = 0$ dostáváme regularitu $\mathfrak{C}^k$ metody pro libovolné $k \in \mathbb{N}$.

Podobnost mezi $\mathcal{H}^k$ metodami a $\mathfrak{C}^k$ metodami není náhodná. V knize [7] lze najít důkaz následující věty.

**Věta 2.2.7.**
Nechť $k \in \mathbb{N}_0$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je sčitatelná $\mathfrak{C}^k$ metodou právě tehdy, když je sčitatelná $\mathcal{H}^k$ metodou. Pro její součet potom platí

$$(\mathcal{H}^k)\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathfrak{C}^k)\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.46}$$

**Důkaz:**
Viz [7].

## 2.3 Sčítací metody a násobení nekonečných řad

Na závěr kapitoly o nekonečných řadách jsme se stručně věnovali násobení nekonečných řad a pojmu Cauchyho součinu řad. Přitom jsme viděli některé problémy vznikající při násobení řad - Cauchyho součin konvergentních řad nemusí být konvergentní. Budeme se věnovat podobným otázkám pro $\mathfrak{C}^k$ sčitatelnost. Mnoho informací o využití sčítacích metod při násobení řad lze nalézt v knihách [4, 5, 7].

**Věta 2.3.1.**
Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergentní. Pak jejich Cauchyho součin je $\mathfrak{C}$ sčitatelný a platí

$$(\mathfrak{C})\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = st. \tag{2.47}$$

**Důkaz:**
Nejprve dokážeme pomocné tvrzení. Nechť $\{x_n\}_{n=1}^{\infty},\ \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti, $x_n \to x,\ y_n \to y$. Potom platí:

$$\frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} \to xy. \tag{2.48}$$

Označme $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n - x\}_{n=1}^{\infty}$. Potom $z_n \to 0$. Posloupnost $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omezená, takže $\exists K > 0 : |y_n| \leq K$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$. Dále platí:

$$|\frac{z_1 y_n + \cdots + z_n y_1}{n}| \leq K \cdot \frac{|z_1| + \cdots + |z_n|}{n} \to 0. \tag{2.49}$$

Podle důkazu věty 2.1.4. plyne z $s_n \to s$ i $\frac{\sum_{k=1}^{n} s_k}{n} \to s$. Využitím tohoto vztahu a (2.49) dostaneme:

$$\frac{x_1 y_n + \cdots + x_n y_1}{n} = x \cdot \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} + \frac{z_1 y_n + \cdots + z_n y_1}{n} \to xy. \tag{2.50}$$

Označíme-li posloupnosti částečných součtů řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jako $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, platí $s_n \to s$, $t_n \to t$. Pro posloupnost částečných součtů Cauchyho součinu platí:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} a_k b_{i-k+1} = s_1 t_n + s_2 t_{n-1} + \cdots + s_{n-1} t_2 + s_n t_1. \tag{2.51}$$

Detailní odvození rovnosti (2.51) lze nalézt v [5]. Vynásobením obou stran této rovnosti výrazem $\frac{1}{n}$ a použitím (2.48) dostáváme tvrzení věty.

Důsledkem věty 2.3.1. je následující věta.

**Věta 2.3.2.**
Nechť jsou řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$ konvergentní a nechť jejich Cauchyho součin konverguje. Pak platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = st. \tag{2.52}$$

**Důkaz:**
Z regularity Cesàrovy sčítací metody plyne, že součet Cauchyho součinu je shodný s jeho $\mathfrak{C}$ součtem a ten je podle předchozí věty roven $st$.

Ukazuje se, že věta 2.3.1. je důsledkem obecnější věty o součinu Cesàrovsky sčitatelných řad. Detaily lze najít v [7].

**Věta 2.3.3.**
Nechť $k, l \in \mathbb{N}_0$ a nechť $(\mathfrak{C}^k) \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $(\mathfrak{C}^l) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Pak Cauchyho součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je $\mathfrak{C}^{k+l+1}$ sčitatelný a platí:

$$(\mathfrak{C}^{k+l+1}) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = st. \tag{2.53}$$

**Důkaz:**
Viz [7].

Věta 1.4.1. nám říká, že Cauchyův součin absolutně konvergentních řad je absolutně konvergentní řada a v poznámce za větou 1.4.1. jsme odkazovali na větu, podle které je Cauchyův součin neabsolutně konvergentní a absolutně konvergentní řady konvergentní řada. Další zobecnění je obsahem následující věty.

**Věta 2.3.4.**
Nechť je řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ absolutně konvergentní a nechť $(\mathfrak{C}^k) \sum_{n=1}^{\infty} b_n = t$. Pak Cauchyho součin řad $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ je $\mathfrak{C}^k$ sčitatelný a platí:

$$(\mathfrak{C}^k) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = st. \tag{2.54}$$

**Důkaz:**
Důkaz lze opět nalézt v [7].

**Příklad 2.3.1.**
V příkladu 2.2.5. jsme sčítali řadu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ pomocí metody $\mathcal{H}^2$. Podle věty 2.2.7. dává stejný výsledek i $\mathfrak{C}^2$ metoda. K výsledku můžeme dojít i pomocí násobení řad. Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ je Cauchyho součinem dvou geometrických řad $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k(-1)^{n-k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n. \tag{2.55}$$

Podle příkladu 2.1.3. je $(\mathfrak{C}^1)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = \frac{1}{2}$ a podle věty 2.3.3. je

$$(\mathfrak{C}^3)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}. \tag{2.56}$$

Dostali jsme tak stejný součet řady, ale jen $\mathfrak{C}^3$ sčitatelnost, i když podle příkladu 2.2.4. víme, že řada je $\mathfrak{C}^2$ sčitatelná. Věta 2.3.3. totiž zaručuje $\mathfrak{C}^{k+l+1}$ sčitatelnost Cauchyho součinu, ale ten může být sčitatelný i metodou nižšího řádu.

# 3. Využití matematického softwaru při sčítání nekonečných řad

V této kapitole se budeme věnovat využití matematického softwaru při sčítání nekonečných řad pomocí sčítacích metod, které jsme definovali v předchozích kapitolách. Budeme používat program **Wolfram *Mathematica* 8** (dále jen *Mathematica*). Informace o tomto softwaru je možné nalézt na internetové adrese: http://www.wolfram.com/mathematica.

V *Mathematice* lze sčítat konečné součty pomocí příkazu `Sum`. Parametry tohoto příkazu jsou `f`,`i`,`min`,`max` a zadává se ve tvaru:

$$\texttt{Sum[f,\{i,min,max\}]}\,. \tag{3.1}$$

Parametr `f` je (konečná) posloupnost, kterou chceme sčítat. Parametry `i`, `min`, `max` označují sčítací index a meze sčítání. Vstup může vypadat například takto:

$$\texttt{In[1]:= Sum[i,\{i,1,n\}];} \tag{3.2}$$

Výstup potom vypadá takto:

$$\texttt{Out[1]= } \frac{1}{2}\texttt{n(1+n)}\,. \tag{3.3}$$

Příkaz `Sum` může mít jako parametr `f` i nekonečnou posloupnost, zadanou symbolicky a parameter `max` může mít zadánu hodnotu `Infinity`. Sčítání je potom chápáno jakou součet nekonečné řady. Pokud řada konverguje, vypadá výstup například takto:

$$\begin{aligned}&\texttt{In[1]:= Sum[(1/2)\^{}n,\{n,1,Infinity\}];}\\&\texttt{Out[1]= 1.}\end{aligned} \tag{3.4}$$

Pro divergentní řady dostaneme následující výstup:

$$\begin{aligned}&\texttt{In[1]:= Sum[1/n,\{n,1,Infinity\}];}\\&\texttt{Sum:: div: Sum does not converge.}\\&\texttt{Out[1]= } \sum_{\texttt{n}=1}^{\infty}\frac{\texttt{1}}{\texttt{n}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

*Mathematica* má implementovány tři sčítací metody - Cesàrovu, Abelovu a Borelovu. První z nich jsme definovali v předchozí kapitole, o zbývajících dvou se jen stručně zmíníme. Abelova metoda přiřazuje řadě součet předpisem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}. \tag{3.6}$$

Borelova metoda přiřazuje řadě součet předpisem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} (\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}) e^{-t} dt. \tag{3.7}$$

Obě metody jsou regulární. Abelova metoda je silnější než libovolná $\mathfrak{C}^k$ metoda. To znamená že z $\mathfrak{C}^k$ sčitatelnosti řady plyne i její sčitatelnost Abelovou metodou. Borelova metoda je silnější než Abelova metoda. Přesné definice a další vlastnosti obou metod lze najít v [7].

Pokud chceme v *Mathematice* sečíst nekonečnou řadu některou z výše uvedených metod, použijeme další parametr příkazu `Sum`. Parametr `Regularization` určuje, která ze sčítacích metod se má při sčítání řady použít. Vsup má tvar:

```
In[1]:= Sum[f,{i,1,n},Regularization->"metoda"].        (3.8)
```

Konkrétní metodu vybereme takto:

```
Regularization->"Cesaro".
Regularization->"Abel".                                  (3.9)
Regularization->"Borel".
```

Ukažme si, jak lze tímto způsobem sečíst například geometrickou řadu s kvocientem $q = -1$. Tuto řadu jsme již sčítali Cesàrovou sčítací metodu a víme, že výsledek je $\frac{1}{2}$.

```
In[1]:= Sum[(-1)^(n-1),{n,1,Infinity},Regularization->"Cesaro"].
Out[1]= 1/2.
                                                         (3.10)
```

*Mathematica* nemá implementovánu ani Cesàrovu, ani Hölderovu metodu řádu vyššího než jedna, ale uživatel si může poměrně snadno obě metody naprogramovat sám. Podle věty 2.2.7. dávají tyto metody stejný výsledek, stačí tedy naprogramovat jednu z nich. Ukážeme si, jak lze naprogramovat Hölderovu sčítací metodu řádu $k$:

```
a[n_]=POSL;
s[n_] = Sum[a[i],{i,1,n}];
H[k_,n_] = If[k == 0,s[n],Sum[H[k - 1, i],{i,1,n}]/n];   (3.11)
Limit[H[RAD,n],n->Infinity]
```

Kde za POSL dosadíme $n$-tý člen řady kterou chceme sečíst a za RAD dosadíme řád sčítací metody.

S využitím tohoto kódu znovu sečteme některé řady, kterými jsme se zabývali v předchozích kapitolách.

Geometrická řada s volbou $a = 1,\ q = \dfrac{1}{2}$ :

```
In[1]:= a[n_]=(1/2)^n;
s[n_] = Sum[a[i],{i,1,n}];
H[k_,n_] = If[k == 0,s[n],Sum[H[k - 1, i],{i,1,n}]/n];
Limit[H[0,n],n->Infinity]
Out[1]:= 1
```

(3.12)

Geometrická řada s volbou $a = 1,\ q = -1$ :

```
In[1]:= a[n_]=(-1)^(n-1);
s[n_] = Sum[a[i],{i,1,n}];
H[k_,n_] = If[k == 0,s[n],Sum[H[k - 1, i],{i,1,n}]/n];
Limit[H[1,n],n->Infinity]
Out[1]:= 1/2.
```

(3.13)

Řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n$ :

```
In[1]:= a[n_]=(-1)^(n-1)n;
s[n_] = Sum[a[i],{i,1,n}];
H[k_,n_] = If[k == 0,s[n],Sum[H[k - 1, i],{i,1,n}]/n];
Limit[H[2,n],n->Infinity]
Out[1]:= 1/4.
```

(3.14)

# Závěr

Cílem bakalářské práce bylo zavést sčítací metody pro nekonečné řady a prozkoumat jejich vlastnosti. Šlo nám přitom hlavně o metody, které zobecňují konvergenci řady. Proto definici sčítacích metod předcházelo studium konvergence a vlastností konvergentních řad a také Cauchyho součinu nekonečných řad.
Sčítací metody jsme definovali ve druhé kapitole, přičemž jsme se zaměřili na regulární lineární metody, které konvergenci vhodným způsobem zobecňují. Na příkladech jsme ukázali, že pomocí těchto metod lze sčítat i některé divergentní řady. Dále jsme definovali sčítací metody pomocí lineárních transformací posloupnosti částečných součtů řady a uvedli jsme nutné a postačující podmínky pro regularitu těchto metod. V poslední části druhé kapitoly jsme se opět věnovali Cauchyho součinu nekonečných řad. Jako příklad využití sčítacích metod jsme uvedli věty o Cauchyho součinu sčitatelných řad, které byly zobecněním vět o Cauchyho součinu konvergentních řad. Ještě důležitější místo mají sčítací metody v teorii Fourierových řad, což je ale mimo rámec této práce.
V poslední kapitole jsme ukázali jakým způsobem jsou sčítací metody implementovány do programu **Wolfram *Mathematica* 8** a sečetli jsme několik řad, které jsme v předchozích kapitolách sčítali analyticky.

# Seznam použité literatury

[1] Jahnke, Hans Niels. *Historie analýzy.* mathpublishing.eu, Pardubice, 2007.

[2] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet (I).* Academia, Praha, 1974.

[3] Jarník, Vojtěch. *Diferenciální počet (II).* Academia, Praha, 1976.

[4] Bromwich, T.J. *An introduction to the theory of infinite series.* Macmillan and Co. Ltd., London, 1908.

[5] Veselý, Jiří. *Základy matematické analýzy - Druhý díl.* Matfyzpress, Praha, 2009.

[6] Šalát, Tibor. *Nekonečné rady.* Academia, Praha, 1974.

[7] Hardy, G.H. *Divergent Series.* Clarendon Press, London, 1949.

[8] Štěpánek, František. *Teorie aproximací I. (Základy teorie limitovacích metod).* Univerzita Karlova, Praha, 1979.