Studentská Vědecká Konference 2010

LATTICE BOLTZMANNOVA METODA PRO SYSTÉM SAINT-VENNANTOVÝCH ROVNIC V APLIKACI NA MODELOVÁNÍ PROUDĚNÍ KAPALINY

Václav HEIDLER [1]

1 ÚVOD

V naší práci bychom chtěli představit modelování volné hladiny proudící tekutiny, která protéká kanálem s proměnným dnem pod vlivem gravitačního zrychlení. Problém popisuje Saint-Vennantův systém rovnic (v anglických publikacích často nazýván Shallow-water equations). Pro řešení použijeme Lattice Boltzmannovu metodu. Metoda je snadno programovatelná díky jednoduchým aritmetickým operacím. Jedinou neznámou, kterou je potřeba určit, je tzv. distribuční funkce f (její hodnota závisí pouze na předchozím stavu). Na rozdíl od klasických metod (např. metoda konečných diferencí, metoda konečných objemů) se zde řeší jedna mikroskopická rovnice. Metodu je možné použít na složité problémy jako jsou multifázové proudění, proudění skrz pórovitá média. Dále ji lze snadno aplikovat i na složité výpočetní oblasti.

2 MATEMATICKÝ MODEL

Při řešení vycházíme z lattice Boltzmannovy rovnice (LBE), která byla odvozena ze známého lattice Gas Automatu. Booleanovské proměnné zde byly nahrazeny distribučními funkcemi. Princip metody je založen na dvou základních krocích. Propagační a kolizní. Tyto dva kroky reprezentují konvekční a difůzní jevy proudění kapaliny. Následující rovnice představuje nejznámější tvar LBE. Je zapsána pro oba základní kroky.

$$f_\alpha(x + e_\alpha \Delta t, t + \Delta t) - f_\alpha(x,t) = -\frac{1}{\tau}\left(f_\alpha - f_\alpha^{eq}\right) + \frac{\Delta t}{N_\alpha e^2} e_{\alpha i} F_i, \tag{1}$$

kde f_α^{eq} je funkce rovnovážného rozdělení, e je mřížková konstanta a e_α jsou vektory mikroskopických rychlostí. V našem případě $\alpha = 1, 2..9$. Relaxační parametr τ určuje viskozitu dané tekutiny. V naší práci budeme uvažovat čtvercovou mřížku (obr.1).

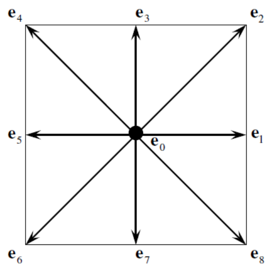
Makroskopické veličiny (rychlost, výška hladiny) jsou vyjádřeny ze základních zákonů zachování následovně

$$h(x,t) = \sum_\alpha f_\alpha(x,t), \quad u_i(x,t) = \frac{1}{h(x,t)} \sum_\alpha e_{\alpha i} f_\alpha(x,t) \tag{2}$$

Lze ukázat, že makroskopické veličiny z rovnic (2) jsou opravdu řešením systému Saint-Vennantových rovnic, který lze ve vektorovém tvaru zapsat jako

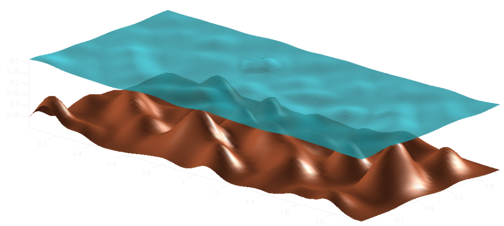
$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \tag{3}$$

[1] Bc. Václav Heidler, student magisterského studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Mechanika, specializace Aplikovaná mechanika, e-mail: vheidler@students.zcu.cz

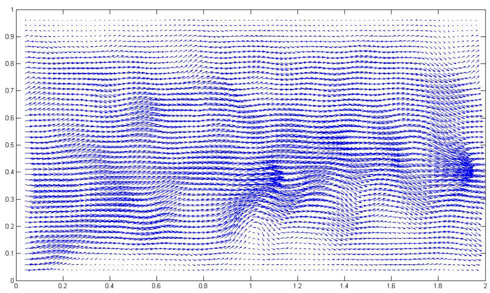


Obrázek 1: *Diskretizace pole rychlostí do 9 směrů*

kde jednotlivé vektory jsou proměnné u_i a h.
Příklad
Uvažujeme stacionární proudění symetrickým kanálem s proměnným dnem. Pro vstup a výstup výpočetní oblasti předepisujeme periodickou okrajovou podmínku. Výšku hladiny v počátečním stavu volíme konstantní $h = 0.3$. Kapalina proudí v důsledku působení síly ve směru x. Rychlost na vstupu v ustáleném stavu je $u = 0.03m/s$. Boční hrany kanálu považujeme za nepropustné stěny, kde respektujeme třecí síly od vazkosti kapaliny (Bounce-back schéma). Ustálený stav řešení je na (obr. 2). Na (obr. 3) je řešení znázorněno pomocí rychlostního pole.



Obrázek 2: *ustálený stav řešení*



Obrázek 3: *vektorové pole rychlostí*

3 ZÁVĚR

V naší práci jsme uvedli pouze jednu z mnoho užívaných metod pro modelování volné hladiny. LBM je v praxi velmi často používána pro její jednoduchou programovatelnost a výpočtovou nenáročnost. V praxi je Saint-Vennantových rovnic využíváno například pro modelování protržení hráze přehrady, rozlivy. Nebo pro atmosférické modely.

Poděkování: Tato práce vznikla za finanční podpory interního studentského grantu SGS-2010-046 na ZCU v Plzni.

REFERENCE

[1] Jian Guo Zhou, Lattice Boltzmann Methods for Shallow Water Flows

[2] Kevin Tubbs, 2010. Lattice Boltzmann modeling for shallow water equations using high performance computing

[3] Paul J. Dellar, 2001. Non-hydrodynamic modes and a priori construction of shallow water lattice Boltzmann equations, University of Cambridge