FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI

STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2015

Aplikace Lévyho procesů ve finančním modelování

Jiří Panoš, MSc[1]

1 Úvod

Před více než čtyřmi dekádami, v roce 1973, Fisher Black a Myron Scholes představili přelomový model finančního trhu vhodného k oceňování finančních derivátů (opce, forwardy, etc.), který je dnes celosvětově znám jako Black-Scholesův model. Tento model je založen na Brownově pohybu a později, v roce 1997, za něj Myron Scholes obdržel Nobelovu cenu za ekonomii.

Brownův pohyb je spojitý náhodný proces se stacionárními a nezávislými přírůstky, který má v každém čase $t > 0$ normální rozdělení. To v důsledku znamená, že s Black-Scholesovým modelem je inherentně spjat předpoklad normality logaritmických výnosů podkladových finančních aktiv. Bezpočet empirických studií i léta praktického užívání ovšem ukázali, že normální rozdělení není pro modelování finančních aktiv příliš vhodné, jelikož rozdělení logaritmických výnosů má zpravidla zápornou šikmost a těžké konce. Užití Black-Scholesova modelu má pak za následek nesprávné ocenění finančních derivátů a to zejména těch, jejichž realizační cena je relativně vzdálená od aktuální (spotové) ceny podkladového aktiva. Více o finančních derivátech, jejich oceňování a Black-Scholesově modelu lze najít ve standardní literatuře.

Nicméně Brownův pohyb je pouze jedním z rodiny stochastických procesů se stacionárními a nezávislými přírůstky. Takové procesy jsou souhrnně známé jako Lévyho procesy. V posledních několika letech se tak začali objevovat modely založené na jiných, exotičtějších Lévyho procesech, které jsou pro modelování finančních trhů vhodnější než Brownův pohyb.

2 Lévyho procesy a nekonečně dělitelná rozdělení

Definice 1.1 (Lévyho proces) Stochastický proces $\{X_t : t \geq 0\}$ definovaný na pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazveme *Lévyho proces*, pokud splňuje následující:

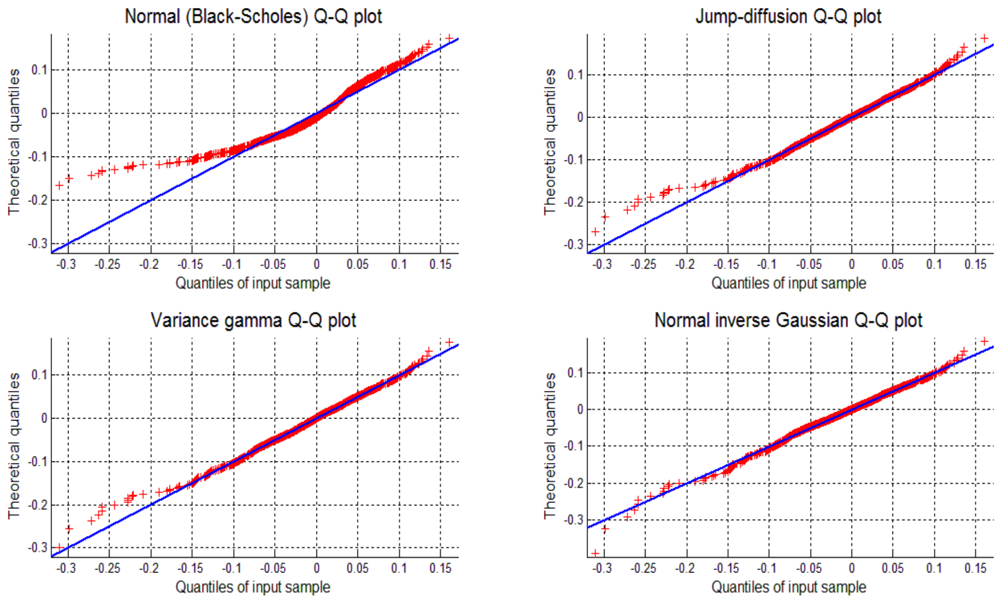
i. $X_{t+s} - X_t$ má stejné rozdělení jako X_s pro $s, t \geq 0$, *(stacionární přírůstky);*
ii. $X_t - X_s$ je nezávislé na $\{X_u : u \leq s\}$ pro $t \geq s \geq 0$, *(nezávislé přírůstky);*
iii. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$;
iv. Realizace náhodného procesu $\{X_t\}$ je zprava spojitá a má limitou zleva *(‘càdlàg‘ vlastnost).*

Z definice Lévyho procesu je ihned zřejmé, že pokud $\{X_t\}$ je Lévyho proces, pak X_t je nekonečně dělitelná náhodná veličina pro všechna $t > 0$. Velmi důležitý je ovšem fakt, že pro každé nekonečně dělitelné rozdělení na $\mathbb{R}$ existuje Lévyho proces, jehož přírůstky se řídí příslušným rozdělením, což nám dává jednoduchý návod, jak konstruovat nové Lévyho procesy. Více informací o Lévyho procesech a nekonečně dělitelných rozděleních lze nalézt v Panoš (2014).

[1] student navazujícího studijního programu Aplikované vědy a informatika, obor Finanční informatika a statistka, zaměření Aplikovaná statistika a finance, e-mail: jiri.panos@gmail.com

Pro porovnání jejich vhodnosti pro aplikace ve finančním modelování byly zvoleny čtyři různé Lévyho procesy (více informací o těchto procesech opět v Panoš (2014)):

i. Brownův pohyb $\{B_t : t \geq 0\}$; $B_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, kde N je normální rozdělení (odpovídá Black-Scholesově modelu, zvolen pro referenci);
ii. Proces skokové difuze $\{D_t : t \geq 0\}$; rozdělení D_t je směsí normálního rozdělení a složeného Poissonova rozdělení s normálně rozdělenými skoky;
iii. ‘Variance gamma‘ (VG) proces $\{V_t : t \geq 0\}$; $V_t \sim VG(\mu t, \theta t, \sigma\sqrt{t}, \upsilon/t)$, kde VG je rozšířené ‘variance gamma‘ rozdělení;
iv. ‘Normal inverse Gaussian‘ (NIG) proces $\{I_t : t \geq 0\}$; $I_t \sim NIG(\mu t, \gamma, \beta, \delta t)$, kde NIG je rozšířené ‘normal inverse Gaussian ‘ rozdělení.



Obrázek 1: FTSE 100 Index fit; Q–Q grafy (Panoš (2014))

Vybrané modely byly kalibrovány na měsíční logaritmické výnosy indexu FTSE 100 od 29. 8. 2004 do 28. 8. 2014. Na obr. 1 vidíme grafické porovnání kvality shody modelu s reálnými daty v podobě Q–Q grafů. Připomeňme, že v Q–Q grafu by data měla ideálně ležet na ose I. kvadrantu (modrá přímka). Je patrné, že modely ii., iii. a iv. významně lépe vystihují charakter vybraných dat, zejména pak chování v koncích rozdělení. Kvalita shody byla dále testována χ^2-testem dobré shody, jenž v ani jednom ze tří výše zmíněných modelů nezamítnul hypotézu o tom, že data pochází z daného rozdělení.

V druhé fázi jsme se pak zaměřili na oceňování opcí evropského typu v rámci vybraných modelů. Využili jsme techniku oceňování založenou na zpětné Fourierově transformaci charakteristických funkcí a odvodili jsme tak semianalytický vzorec pro cenu evropské call opce. To nám umožnilo kalibrovat modely v martingalové míře ze sady tržních cen evropských call opcí na FTSE 100 index ze 4. srpna 2014. Opět bylo potvrzeno významné zlepšení oproti Black-Scholesově modelu. Takovýmto způsobem v martingalové míře kalibrované modely je možné následně využít k oceňování exotických derivátů například metodami typu Monte Carlo.

Literatura

Panoš, J., 2014. *Lévy Processes with Applications in Finance*. Unpublished master’s dissertation. Brunel University London, London.