

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Náhodné procesy pro modelování finančních časových řad

Plzeň, 2016

Jiří Panoš, MSc

(Zde bude vloženo oficiální zadání.)

Prohlášení

Prohlašuji tímto, že jsem svoji diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne _____

podpis

Poděkování

Můj hluboký vděk patří RNDr. Blance Šedivé, Ph.D. za její odborné vedení a za veškerý čas, ochotu a trpělivost, které mi věnovala nejen během tvorby této práce, ale po celou dobu mého vysokoškolského studia. Dále bych rád vyjádřil vděčnost své rodině za jejich finanční i nefinanční podporu a především za jejich bezpodmínečnou lásku, nekonečnou trpělivost a rodinné zázemí. Dík patří také všem mým lektorům na Západočeské univerzitě a na Brunel University London, dále přátelům, spolužákům, kolegům a vůbec všem, kteří mi v životě jakkoli pomohli stát se lepším člověkem.

Abstrakt

Práce se zabývá náhodnými procesy v referenčním rámci moderní teorie pravděpodobnosti s aplikacemi v oblasti modelování finančních časových řad. Z teoretické stránky představuje nekonečně dělitelná rozdělení, Lévyho procesy a dále procesy s návratem ke střední hodnotě, jejichž dynamika je Lévyho procesy řízena. Konkrétně se jedná o negaussovské Ornstein-Uhlenbeckovy procesy, CIR proces a další odvozené procesy. Tyto procesy jsou následně využity pro konstrukci stochastických modelů vhodných k modelování charakteristických vlastností finančních časových řad. Zkonstruované modely jsou též vhodné k využití pro oceňování opcí s využitím techniky inverzní Fourierovi transformace. Většina představených modelů je následně podrobena empirickému testování na reálných datech.

Klíčová slova: náhodné procesy, finanční časové řady, stochastická volatilita, Lévyho procesy, negaussovské Ornstein-Uhlenbeckovy procesy, exponenciální Lévyho modely, oceňování inverzní Fourierovou transformací

Abstract

The thesis deals with stochastic processes within the modern probability theory framework with applications in the field of financial time series modelling. From the theoretical point of view, it approaches infinitely divisible distributions, Lévy processes and mean-reverting stochastic processing with dynamics governed by Lévy processes. Namely, non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes, CIR process and other associated processes are concerned. These processes are later used for construction of stochastic models suitable for modelling of highlighted characteristic features of financial time series. Constructed models are also suitable to be used within the inverse Fourier transform option pricing framework. The majority of introduced models subsequently undergoes empirical testing on the real market data.

Key words: Stochastic Processes, Financial Time Series, Stochastic Volatility, Lévy Processes, Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes, Exponential Lévy models, Inverse Fourier Transform Pricing

Obsah

Úvod a motivace.....	1
1 Z teorie míry, teorie pravděpodobnosti a teorie náhodných procesů	2
1.1 Množiny a množinové operace	2
1.1.1 Základní množinové operace	2
1.1.2 Limity posloupnosti množin a indikátorová funkce.....	4
1.2 Základy teorie míry a pravděpodobnosti	6
1.2.1 Měřitelné prostory a pravděpodobnostní míra	6
1.2.2 Měřitelné funkce a náhodné proměnné	10
1.2.3 Pravděpodobnostní rozdělení a distribuční funkce	11
1.2.4 Integrace vzhledem k míře	13
1.2.5 Momenty a charakteristická funkce	17
1.2.6 Nezávislost náhodných proměnných.....	20
1.2.7 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněná střední hodnota	21
1.3 Náhodné procesy a martingaly	22
1.3.1 Náhodné procesy a prostory s filtrací.....	22
1.3.2 Martingaly a čas zastavení	23
1.4 Poznámky ke stochastické integraci a SDR	24
2 Lévyho procesy	26
2.1 Obecná teorie Lévyho procesů	26
2.2 Vybrané příklady Lévyho procesů	30
2.2.1 Poissonův proces	30
2.2.2 Brownův pohyb	33
2.2.3 Proces skokové difuze	34
2.2.4 Variance gamma proces	35
2.2.5 Normální inverzní gaussovský proces.....	38
2.2.6 Meixnerův proces	40
2.2.7 Zobecněný hyperbolický proces.....	41
3 Další náhodné procesy ve finančním modelování.....	43
3.1 Ornstein-Uhlenbeckovy procesy	43
3.1.1 Gamma-OU proces.....	45
3.1.2 IG-OU proces	46
3.1.3 Další příklady OU procesů	47
3.2 CIR proces	49
4 Finanční časové řady.....	50
5 Matematické modelování finančních časových řad	54
5.1 Exponenciální Lévyho modely.....	54

5.1.1	Poznámky ke statistické inferenci	55
5.1.2	Data a výsledky	56
5.1.3	Oceňování opcí v exponenciálních Lévyho modelech.....	61
5.2	Exponenciální Lévyho modely se stochastickou volatilitou	65
5.2.1	Hestonův a Batesův model.....	65
5.2.2	Barndorff-Nielsen-Shephardovy modely	66
5.2.3	Modely se stochastickým časem	67
5.2.4	Výsledky kalibrace	68
5.2.5	Další možné modifikace	69
5.3	Přehled představených modelů	71
	Závěrečné shrnutí	73
	Literatura	76
	Poznámky k elektronické příloze	81

Seznam obrázků

Obrázek 1: Sjednocení množin	3
Obrázek 2: Průnik a rozdíl množin	3
Obrázek 3: Symetrická diference množin	4
Obrázek 4: Reálná množinová funkce	8
Obrázek 5: Poissonovo rozdělení a Poissonův proces	31
Obrázek 6: Normální rozdělení a Brownův pohyb	33
Obrázek 7: Rozdělení skokové difuze a proces skokové difuze	35
Obrázek 8: Variance gamma rozdělení a variance gamma proces.....	37
Obrázek 9: NIG rozdělení a NIG proces	39
Obrázek 10: Meixnerovo rozdělení a Meixnerův proces	41
Obrázek 11: GH rozdělení a GH proces.....	42
Obrázek 12: Gamma-OU proces a asociované procesy	45
Obrázek 13: IG-OU proces a asociované procesy	47
Obrázek 14: IG-SupOU proces a asociované IG-OU procesy	48
Obrázek 15: CIR proces a integrovaný CIR proces	49
Obrázek 16: Vývoj indexu PX, log-výnosy a volatilita	51
Obrázek 17: Výběrové autokorelační funkce, pákový efekt a normalizovaný histogram	52
Obrázek 18: Grafické porovnání kvality shody (S&P 500, $\Delta t = 5$, MLE)	59
Obrázek 19: Q-Q grafy (S&P 500, $\Delta t = 5$, MLE).....	60
Obrázek 20: Nedostatky exponenciálních Lévyho modelů.....	60
Obrázek 21: Kalibrace na opce na Index FTSE 100 – normální model.....	64
Obrázek 22: Kalibrace na opce na Index FTSE 100 – JD model.....	64
Obrázek 23: Porovnání výběrové a teoretických ACF – Index FTSE 100	70

Seznam tabulek

Tabulka 1: Vlastnosti Poissonova procesu	31
Tabulka 2: Vlastnosti složeného Poissonova procesu	32
Tabulka 3: Vlastnosti Brownova pohybu	34
Tabulka 4: Vlastnosti procesu skokové difuze	34
Tabulka 5: Vlastnosti variance gamma procesu	38
Tabulka 6: Vlastnosti NIG procesu	40
Tabulka 7: Vlastnosti Meixnerova procesu	41
Tabulka 8: Vlastnosti GH procesu	42
Tabulka 9: Výběrové statistiky log-výnosů Indexu PX	52
Tabulka 10: Porovnání výběrových a teoretických momentových statistik	57
Tabulka 11: Statistiky dobré shody (Index PX)	58
Tabulka 12: Statistiky dobré shody (Index S&P 500)	58
Tabulka 13: Statistiky dobré shody (FTSE 100)	59
Tabulka 14: Kritéria kvality kalibrace – exponenciální Lévyho modely	63
Tabulka 15: Kritéria kvality kalibrace – modely se stochastickou volatilitou 1	68
Tabulka 16: Kritéria kvality kalibrace – modely se stochastickou volatilitou 2	68
Tabulka 17: Kritéria kvality kalibrace – Lévy-IntOULev modely	69
Tabulka 18: Přehled představených modelů a jejich vlastností	71

Úvod a motivace

Na finanční data a informace o finančních trzích jsme dennodenně upozorňováni z internetu, televize či rozhlasového vysílání. Dozvídáme se například o aktuálních cenách akcií, hodnotách burzovních indexů či cenách nerostných surovin. Tyto hodnoty v čase stoupají a klesají, někdy velmi málo, jindy zase velmi znatelně. Pozorování těchto údajů v určitých časových intervalech potom tvoří takzvanou (*finanční*) *časovou řadu*. Cílem analýzy finančních časových řad je alespoň částečně porozumět vývoji finančních aktiv a získaných poznatků využít k předpovídání budoucího vývoje, oceňování cenných papírů či zajišťování se proti riziku (Tsay 2010).

Analýza finančních časových řad je velmi rozsáhlá a komplexní disciplína snoubící řadu teoretických poznatků s praxí finančních trhů, a je prakticky nemožné obsáhnout ji v jedné diplomové práci. Zaměříme se zde tedy pouze na jedno z odvětví analýzy využívající specifické množiny náhodných procesů, zvaných Lévyho procesy, a dalších asociovaných procesů, s důrazem na modelování některých typických charakteristik vlastních finančním časovým řadám a na možné aplikace například v oceňování finančních derivátů.

Náhodné procesy jsou bezesporu důležitou součástí moderní teorie pravděpodobnosti. Jedná se o matematicky velice bohaté objekty s širokou škálou aplikací ve fyzice, ekonomii, financích a celé řadě dalších odvětví. Lévyho procesy, jež nesou jméno francouzského matematika, univerzitního profesora a člena Francouzské akademie věd Paula Lévyho (1886-1971), představují jednu konkrétní skupinu náhodných procesů vyznačující se některými specifickými vlastnostmi, které si představíme v průběhu této práce. Tato skupina procesů má řadu důležitých zástupců, mezi něž patří například *Poissonův proces* a *Brownův pohyb* (Swishchuk 2009).

Idea využít náhodných procesů k modelování finančních časových řad se datuje již k počátku 20. století a je spojena s dalším francouzským matematikem Louistem Bachelierem (1870-1946), jež jako první navrhl modelovat cenu finančních aktiv pomocí Brownova pohybu. Později, v druhé polovině 20. století, se objevily modely založené na exponenciální funkci Brownova pohybu (takzvaný *geometrický Brownův pohyb*), jež překonali některé z hlavních nedostatků původního modelu (zejména zajistili, že cena aktiva nemůže být záporná). A konečně ke konci 20. a na počátku 21. století bylo za účelem dalšího přiblížení se k realitě pozorované na finančních trzích představeno množství alternativních modelů využívajících matematicky bohatších Lévyho procesů, než je Brownův pohyb (Swishchuk 2009).

Tato práce si klade za cíl prezentovat Lévyho procesy, a některé další procesy využívající ve své dynamice Lévyho procesů (jako jsou například Ornstein-Uhlenbeckovy procesy) ve světle moderní teorie pravděpodobnosti, která stojí na pevných základech teorie míry a konceptu Lebesgueovské integrace. Dále je cílem seznámit čtenáře s některými důležitými vlastnostmi finančních časových řad, vybudovat modely využívajících dříve představených procesů k zachycení těchto typických vlastností a prozkoumat teoretickou aplikovatelnost vybraných modelů v oblasti modelování cen rizikových aktiv a asociovaného oceňování finančních derivátů.

1 Z teorie míry, teorie pravděpodobnosti a teorie náhodných procesů

V této kapitole se budeme zabývat nezbytnými elementy moderní teorie pravděpodobnosti a náhodných procesů, jež dnes pevně stojí na teorii míry a Lebesguově integrálu. Nebudeme zde zabíhat do přílišných detailů, které čtenář vždy může dohledat v příslušné literatuře, ale uvedeme všechny náležitosti potřebné k základnímu pochopení teorie a k její úspěšné aplikaci ve světě finančního modelování.

1.1 Množiny a množinové operace

Uvažujme nějaké, zatím blíže nespecifikované *prvky* (mohou to být například body v Euklidovském prostoru, posloupnosti čísel, funkce, jevy v náhodném pokusu, atd.). Pro označení prvků budeme používat malá písmena a, b, c, \dots . *Množiny* jsou potom soubory takovýchto prvků a pro jejich označení budeme používat velká písmena A, B, C, \dots

Množiny obvykle definujeme nějakou vlastností a zapisujeme $\{x : P(x)\}$, kde $P(x)$ je dané kritérium definující požadovanou vlastnost. Tedy pokud máme daný nějaký prvek x , tak na základě znalosti kritéria $P(x)$ jsme schopni rozhodnout, zda prvek do množiny patří či nikoliv. Zápis $x \in A$ označuje, že x je prvkem množiny A a naopak symbolem \notin značíme, že prvek do množiny nepatří. Poznamenejme, že vždy uvažujeme existenci nějakého fixního *prostoru elementárních prvků* X , do kterého tedy patří *všechny* uvažované prvky. Připouštíme také existenci prázdné množiny, která neobsahuje žádné prvky a kterou budeme dle zvyklostí značit symbolem \emptyset . Dále zápisem $A \subset B$ značíme, že množina A je podmnožinou množiny B , což znamená, že pro všechna $x \in A$, platí také $x \in B$. Zápis $A = B$ poté značí rovnost dvou množin, kdy A i B obsahují identické prvky, a tedy $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge A \supset B$.

Třídy množin jsou definovány jako soubory, jejichž prvky jsou samotné množiny a jsou tedy samy o sobě také množinami. Pro jejich značení využijeme velkých psacích písmen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. Analogicky k předchozímu $A \in \mathcal{C}$ značí, že množina A náleží do třídy \mathcal{C} , zápis $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ znamená, že třída \mathcal{C} je podtřídou třídy \mathcal{D} , $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ představuje rovnost tříd množin, atd. (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014).

1.1.1 Základní množinové operace

Sjednocení dvou množin $A \cup B$ je množina všech prvků takových, že leží buď v A nebo v B a nebo v obou množinách. Zapsáno matematicky

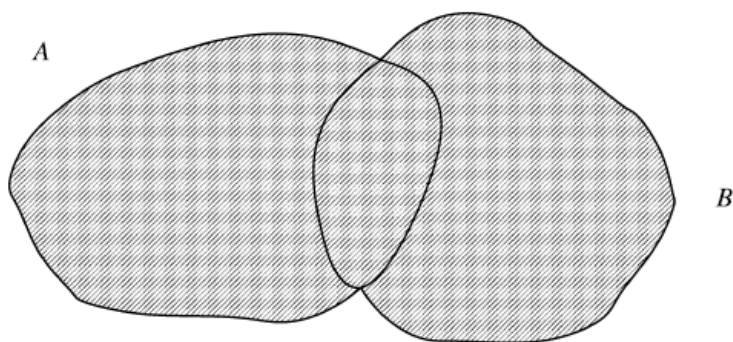
$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad (1.1)$$

a graficky je situace znázorněna na *Obrázku 1.1*.

Průnik dvou množin $A \cap B$ je množina všech prvků takových, že leží v A i B zároveň. Tuto situace lze formálně popsat jako

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}. \quad (1.2)$$

Dvě množiny A, B , pro něž platí $A \cap B = \emptyset$ nazýváme *disjunktní*. Třídy množin nazýváme disjunktní, pokud je každá dvojice jejich prvků (tedy množin) disjunktní.



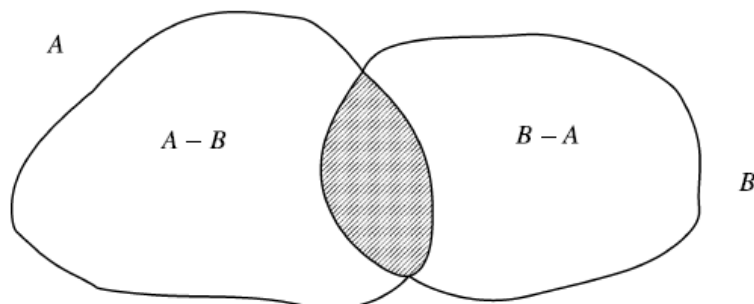
$A \cup B$ je celá šedá oblast

Obrázek 1: Sjednocení množin

Rozdíl dvou množin $A - B$ je množina všech prvků takových, že leží v A , ale nikoliv v B , což zapisujeme

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}. \quad (1.3)$$

Situace pro průnik a rozdíl je graficky zachycena na *Obrázku 2*.



$A \cap B$ je šedá oblast, množinové rozdíly jsou popsány

Obrázek 2: Průnik a rozdíl množin

Další z množinových operací je symetrická diference $A \Delta B$, která označuje všechny prvky takové, které jsou buď pouze v A nebo pouze v B . Tedy

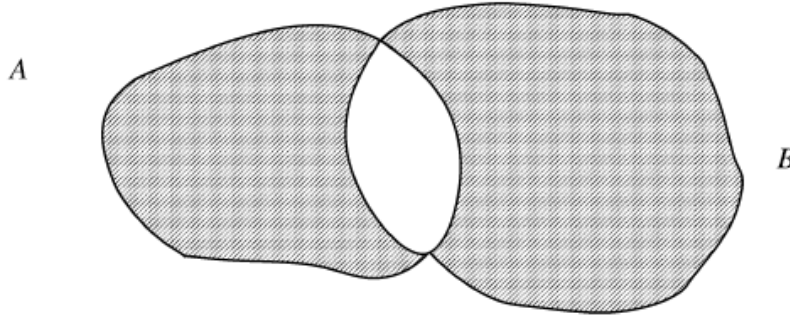
$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A). \quad (1.4)$$

Symetrickou diferencí zobrazuje *Obrázek 3*.

Komplementem A^c množiny A nazveme takové prvky z prostoru X , které nejsou v A , tedy $A^c = X - A$.

Často také budeme pracovat se sjednocením a průnikem libovolného počtu množin. Necht' A_γ je množina pro libovolné γ z nějaké množiny indexů Γ . Potom

$$\begin{aligned} \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma &= \{x : x \in A_\gamma \text{ pro nějaké } \gamma \in \Gamma\}, \\ \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma &= \{x : x \in A_\gamma \text{ pro všechna } \gamma \in \Gamma\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$



$A \Delta B$ je šedá oblast

Obrázek 3: Symetrická diference množin

Tvrzení 1.1 (Množinové rovnosti) (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Necht' X je prostor elementárních prvků, \emptyset prázdná množina a A, B, C libovolné množiny s prvky z X . Uved'me některé důležité příklady množinových rovností:

- (i) $A \cup B = B \cup A$ a $A \cap B = B \cap A$ (komutativní zákony);
- (ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ a $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (asociativní zákony);
- (iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivní zákon);
- (iv) $A \cup \emptyset = A$ a $A \cap \emptyset = \emptyset$;
- (v) $A \cup X = X$ a $A \cap X = A$;
- (vi) Je-li $A \subset B$, potom $A \cap B = A$ a naopak;
- (vii) $A - B = A \cap B^c$;
- (viii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ a $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ (De Morganovy zákony);
- (ix) $(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^c = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$ a $(\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^c = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^c$ (De Morganovy zákony).

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.1* je k nalezení například v (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) ■

1.1.2 Limity posloupnosti množin a indikátorová funkce

Necht' $\{A_n : n = 1, 2, \dots\}$ je posloupností podmnožin prostoru elementárních prvků X . Výraz

$$\limsup A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m, \tag{1.6}$$

budeme nazývat *horní limita* z $\{A_n\}$. Horní limita z $\{A_n\}$ je tedy množina všech x takových, že $x \in A_n$ pro nekonečně mnoho hodnot n (nicméně zároveň také může platit, že $x \notin A_n$ pro nekonečně mnoho n). Jinak řečeno, pro libovolné m lze nalézt $n \geq m$, pro které $x \in A_n$.

Dolní limita z $\{A_n\}$ je potom dána výrazem

$$\liminf A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \tag{1.7}$$

Jedná se tedy o množinu všech x , které se vyskytují ve všech kromě konečně mnoha A_n . Tedy $x \in A_n$ pro všechna $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definice 1.1 (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Posloupnost $\{A_n\}$ nazveme *konvergentní*, pokud $\liminf A_n = \limsup A_n$, a pro tuto množinu pak používáme zápisu $\lim A_n$. Jelikož zřejmě $\liminf A_n \subset \limsup A_n$, pro důkaz, že řada konverguje, stačí ukázat, že také $\liminf A_n \supset \limsup A_n$.

Definice 1.2 (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Posloupnost $\{A_n\}$ nazveme *monotónně rostoucí (klesající)*, pokud platí $A_n \subset A_{n+1}$ ($A_n \supset A_{n+1}$) pro všechna n . Takovouto množinu budeme značit $A_n \uparrow$ ($A_n \downarrow$).

Tvrzení 1.2 (Monotónní konvergence množin) (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Monotónně rostoucí (klesající) posloupnost $\{A_n\}$ je konvergentní a $\lim A_n = A$, kde $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ($\lim A_n = A$, kde $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$). Značíme $A_n \uparrow A$ ($A_n \downarrow A$).

Důkaz: Tvrzení dokážeme pouze pro případ $A_n \uparrow$ (pro případ $A_n \downarrow$ lze důkaz provést analogicky). Nechť tedy A_n je monotónně rostoucí posloupnost množin. Potom $\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$ a tudíž

$$\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m.$$

Z monotonie dále plyne, že $\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = A_n$ a tedy také

$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Zřejmě tedy platí $\liminf A_n = \limsup A_n$ a $\lim A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. ■

Definice 1.3 (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Nechť A je množina. Její *indikátorová funkce* $\mathbf{1}_A(x)$ je definována následovně:

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in A \\ 0 & \text{pro } x \notin A \end{cases}.$$

Tato funkce plně určuje množinu A , jelikož je to množina takových prvků x , že $A = \{x : \mathbf{1}_A(x) = 1\}$.

Tvrzení 1.3 (Vlastnosti indikátorové funkce) (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Nechť X je prostor elementárních prvků, \emptyset prázdná množina a A, B libovolné množiny s prvky z X . Uveďme vybrané vlastnosti indikátorové funkce:

- (i) $\mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x), \forall x \Leftrightarrow A \subset B$;
- (ii) $\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_B(x), \forall x \Leftrightarrow A = B$;
- (iii) $\mathbf{1}_{\emptyset}(x) \equiv 0$ a $\mathbf{1}_X(x) \equiv 1$;
- (iv) $\mathbf{1}_{A^c}(x) = 1 - \mathbf{1}_A(x), \forall x$;

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.3* je k nalezení například v (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014). ■

1.2 Základy teorie míry a pravděpodobnosti

1.2.1 Měřitelné prostory a pravděpodobnostní míra

Uvažujme nyní, že prostor elementárních prvků je tvořen všemi možnými výsledky vybraného *náhodného pokusu*. Takovýto prostor nazýváme *prostorem elementárních jevů* Ω a jeho prvky ω nazýváme *elementárními jevy*. Řekneme, že prostor elementárních jevů je *diskrétní*, pokud je prostor Ω konečný nebo spočetný. Pokud je prostor Ω nespočetný, pak prostor elementárních jevů nazýváme *spojitý*. V této podkapitole se budeme zabývat některými matematickými strukturami a speciálními množinovými funkcemi, které lze na prostoru Ω zkonstruovat a které se ukáží jako velmi výhodné pro další budování teorie pravděpodobnosti.

Definice 1.4 (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Necht' Ω je neprázdný prostor elementárních jevů. Označme 2^Ω všechny možné podmnožiny prostoru Ω včetně prázdné množiny \emptyset . Dále uvažujme třídu podmnožin $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ a následující vlastnosti:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$ a $\Omega \in \mathcal{F}$;
- (ii) Pokud $A \in \mathcal{F}$, potom také $A^c \in \mathcal{F}$ (*uzavřenost vůči doplňkům*);
- (iii) Pokud $A, B \in \mathcal{F}$, potom také $A \cup B \in \mathcal{F}$ (*uzavřenost vůči sjednocením*);
- (iv) Pokud $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ je spočetná posloupnost jevů, potom $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$ (*uzavřenost vůči spočetným sjednocením*).

Třidu \mathcal{F} nazveme *algebrou* na Ω , splňuje-li podmínky (i), (ii) a (iii). Třidu \mathcal{F} nazveme *σ -algebrou* na Ω , pokud je algebrou splňující také podmínku (iv).

Poznámka: (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Z *Definice 1.4* je patrné, že je-li \mathcal{F} σ -algebrou, pak je také algebrou. Opačná implikace ale neplatí. Z De Morganových zákonů (viz. *Kapitola 1.1.1*) dále plyne, že pokud \mathcal{F} je σ -algebra na Ω a $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ je spočetná posloupnost jevů, potom $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = (\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c)^c \in \mathcal{F}$ (tedy σ -algebra je také *uzavřená vůči spočetným průnikům*).

Definice 1.5 (Williams 1991) Necht' Ω je neprázdný prostor elementárních jevů a \mathcal{F} je σ -algebra na prostoru Ω . Dvojice (Ω, \mathcal{F}) se potom nazývá *měřitelný prostor* a prvky \mathcal{F} se nazývají \mathcal{F} -měřitelné podmnožiny prostoru Ω .

Definice 1.6 (Williams 1991) Necht' \mathcal{C} je třída podmnožin prostoru Ω . Nejmenší σ -algebra \mathcal{F} na Ω takovou, že $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$, nazýváme *σ -algebra generovaná \mathcal{C}* a značíme ji $\sigma(\mathcal{C})$.

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006, Williams 1991) Lze ukázat, že σ -algebra generovaná třídou \mathcal{C} je určena jednoznačně a jedná se o průnik všech σ -algeber \mathcal{F} , jež obsahují \mathcal{C} . Matematicky zapsáno

$$\sigma(\mathcal{C}) = \bigcap_{\mathcal{F} \in \mathcal{J}(\mathcal{C})} \mathcal{F}, \quad (1.8)$$

kde $\mathcal{J}(\mathcal{C}) := \{\mathcal{F} : \mathcal{C} \subset \mathcal{F} \text{ a } \mathcal{F} \text{ je } \sigma\text{-algebra na } \Omega\}$.

Definice 1.7 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' S je libovolná neprázdná množina. Třída množin $\mathcal{C} \subset S$ se nazývá *π -systém*, pokud pro libovolné $A, B \in \mathcal{C}$ platí $A \cap B \in \mathcal{C}$.

Poznámka: (Williams 1991) π -systém je tedy množinová struktura uzavřená vůči sjednocení. Je tak zřejmé, že každá σ -algebra (a dokonce i každá algebra) je π -systém. Dále není obtížné ukázat, že třída množin $\pi(\mathbb{R}) := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ tvoří π -systém na $S = \mathbb{R}$.

Definice 1.8 (Klenke 2008) Necht' S je libovolná neprázdná množina. Třída množin $\mathcal{T} \subset S$ se nazývá *topologie na S* , pokud splňuje následující:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{T}$ a $S \in \mathcal{T}$;
- (ii) Pokud $A, B \in \mathcal{T}$, potom také $A \cap B \in \mathcal{T}$;
- (iii) $\bigcup_{A \in \tau} A \in \mathcal{T}$ pro libovolnou $\tau \subset \mathcal{T}$.

Dvojici (S, \mathcal{T}) nazýváme *topologický prostor*. Množiny $A \in \mathcal{T}$ nazýváme *otevřené* a množiny $A \subset S$ takové, že $A^c \in \mathcal{T}$ nazýváme *uzavřené*.

Poznámka: (Klenke 2008) Na rozdíl od σ -algeber, topologie jsou uzavřené pouze pod konečnými průniky, ale zato jsou uzavřené pod libovolným sjednocením. Navíc u topologie nepožadujeme uzavřenost vůči doplňkům.

Definice 1.9 (Athreya a Lahiri 2006, Klenke 2008) Necht' (Ω, \mathcal{T}) je topologický prostor. *Borelovská σ -algebra $\mathcal{B}(\Omega)$ na Ω* je σ -algebra generovaná třídou *otevřených* množin na Ω . Tedy $\mathcal{B}(\Omega) := \sigma(\mathcal{T})$ a prvky $\mathcal{B}(\Omega)$ se nazývají *borelovsky měřitelné*.

Poznámka: V mnoha případech nás bude nejvíce zajímat borelovská σ -algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generovaná všemi otevřenými intervaly na \mathbb{R} .

Tvrzení 1.4 (Generování borelovské σ -algebry na \mathbb{R}) (Williams 1991) Necht' $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je borelovská σ -algebra na \mathbb{R} a $\pi(\mathbb{R}) := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$ je π -systém na \mathbb{R} . Potom platí $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\pi(\mathbb{R}))$.

Důkaz: Jedná se o rovnost množin a je tedy třeba ukázat, že $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \sigma(\pi(\mathbb{R}))$ a zároveň $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \supset \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. Druhá relace je jednoduchá, jelikož pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$(-\infty, x] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(-\infty, x + \frac{1}{n}\right).$$

Zřejmě se tedy jedná o spočetný průnik otevřených intervalů a tudíž $(-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Nyní je třeba ukázat, že pro všechna $a, b \in \mathbb{R}$ otevřený interval $(a, b) \in \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. Pro každé $c > a$ ale platí

$$(a, c] = (-\infty, c] \cap (-\infty, a]^c,$$

a tedy $(a, c] \in \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. Dále pro $\varepsilon = \frac{1}{2}(b - a)$

$$(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(a, b - \frac{\varepsilon}{n}\right],$$

a zřejmě tedy $(a, b) \in \sigma(\pi(\mathbb{R}))$. ■

Dále se budeme zabývat *množinovými funkcemi a mírami*. Množinová funkce s je funkce definovaná na nějaké třídě množin, která každé množině v dané třídě přiřazuje funkční hodnotu. Řekneme, že množinová funkce je *reálná*, pokud funkční hodnoty náleží oboru reálných čísel (viz. *Obrázek 4*).

Definice 1.10 (Athreya a Lahiri 2006, Jacod a Protter 2003) Necht' (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor. Potom množinovou funkci $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$ nazýváme *míra* na (Ω, \mathcal{F}) , pokud splňuje následující:

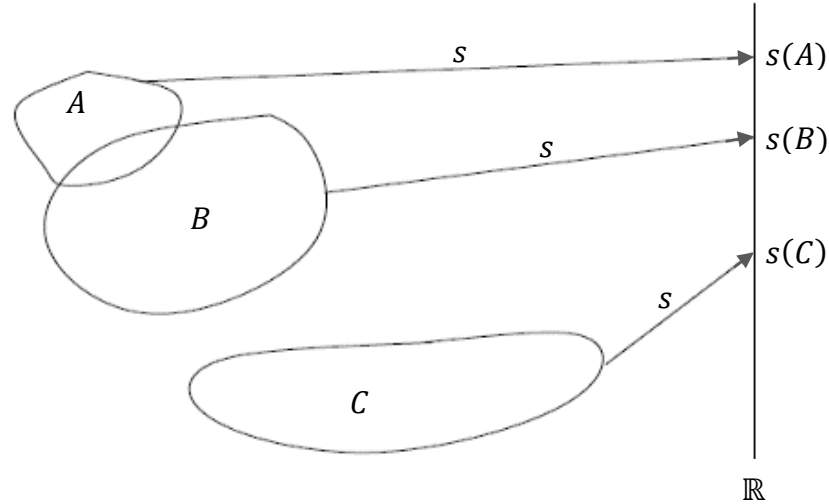
- (i) $\mu(A) \in [0, \infty]$ pro všechna $A \in \mathcal{F}$;
- (ii) $\mu(\emptyset) = 0$;

(iii) Pro jakoukoliv spočetnou posloupnost po dvou disjunktních množin $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ platí

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Trojici $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ dále nazýváme *prostor s mírou*.

Poznámka: (Williams 1991) Vlastnost (iii) výše nazýváme *spočetná aditivita míry*.



Obrázek 4: Reálná množinová funkce

Definice 1.11 (Athreya a Lahiri 2006, Malý 2014, Williams 1991) Necht' $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že vlastnost prostoru s mírou platí *skoro všude*, pokud je splněna všude až na množinu míry nula. Míru μ nazveme *diskrétní*, pokud existuje spočetná množina $A \in \mathcal{F}$ taková, že $\mu(A^c) = 0$, a *spojitou*, pokud $\mu(\{\omega\}) = 0, \forall \omega \in \Omega$. Míru μ nazveme *konečnou* nebo *nekonečnou* podle toho, zda $\mu(\Omega) < \infty$ nebo $\mu(\Omega) = \infty$. Konečnou míru $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$, pro kterou platí $\mu(\Omega) = 1$ budeme nazývat *pravděpodobnostní míra* a budeme ji značit P . Trojici (Ω, \mathcal{F}, P) potom budeme nazývat *pravděpodobnostní prostor*. Řekneme, že pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) je *úplný*, pokud pro každou $A \in \mathcal{F}$, kde $P(A) = 0$, platí, že pokud $B \subset A$, pak $B \in \mathcal{F}$.

Poznámka: (Brzezniak a Zastawniak 2002, Jacod a Protter 2003) Každá konečná (a tedy i pravděpodobnostní) míra μ na (Ω, \mathcal{F}) je také σ -konečná, což znamená, že existuje posloupnost $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ taková, že

$$\mu(A_n) < \infty, \forall n \in \mathbb{N} \text{ a } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \Omega. \quad (1.9)$$

Matematický model náhodného pokusu má tedy podobu pravděpodobnostního prostoru tvořeného trojicí (Ω, \mathcal{F}, P) . Ω zde představuje neprázdný prostor tvořený elementárními jevy ω a σ -algebra \mathcal{F} představuje množinový systém, který uchovává všechny možné jevy v daném experimentu. Tudíž každý možný jev A je prvkem σ -algebry \mathcal{F} a jedná se tedy o \mathcal{F} -měřitelnou podmnožinu Ω . Pravděpodobnostní míra P potom každému jevu $A \in \mathcal{F}$ přiřazuje číslo $P(A)$ mezi 0 a 1, které nazýváme *pravděpodobnost jevu A*. Pro pravděpodobnost *doplňkového jevu* A^c pak zřejmě platí $P(A^c) = 1 - P(A)$. Navíc o jevu A řekneme, že nastává *skoro jistě* (často zkracováno s. j.), pokud $P(A) = 1$.

Věta 1.1 (Carathéodoryova věta o rozšíření) (Williams 1991) Necht' Ω je neprázdný prostor elementárních jevů, \mathcal{F}_0 je algebra na Ω a označme $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{F}_0)$. Pokud existuje množinová funkce P_0 na \mathcal{F}_0 taková, že splňuje podmínky pravděpodobnostní míry na \mathcal{F}_0 , pak existuje jedinečná pravděpodobnostní míra P na (Ω, \mathcal{F}) rozšiřující P_0 taková, že $P_0(A) = P(A)$, pro všechna $A \in \mathcal{F}_0$.

Důkaz: Důkaz *Věty 1.1* překračuje rozsah této práce a je k nahlédnutí například v (Klenke 2008). ■

Poznámka: (Williams 1991) Dále lze ukázat, že jsou-li dvě pravděpodobnostní míry P a Q na měřitelném prostoru $(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$ shodné na π -systému \mathcal{C} , pak se také shodují na σ -algebře $\sigma(\mathcal{C})$ generované tímto π -systémem.

Tvrzení 1.5 (Vlastnosti pravděpodobnostní míry) (Athreya a Lahiri 2006, Williams 1991) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a jevy $A, B, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Uved'me některé důležité vlastnosti, které platí pro pravděpodobnostní míru P :

- (i) Pro $A \subset B$ platí $P(A) \leq P(B)$ (*monotonie*);
- (ii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$ (*konečná subaditivita*);
- (iii) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i \leq n} P(A_i) - \sum_{i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k \leq n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$ (*inkluzně-exkluzní vzorec*).

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.5* je k nalezení například v (Athreya a Lahiri 2006). ■

Poznámka: Speciálně pro dva jevy $A, B \in \mathcal{F}$ tedy podle vlastnosti (iii) výše platí $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Tvrzení 1.6 (Monotónní konvergence míry) (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $\{A_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}$ je spočetná posloupnost jevů. Potom:

- (i) Pokud $A_n \uparrow A$, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, potom $P(A_n) \uparrow P(A)$ (*spojitost zdola*);
- (ii) Pokud $A_n \downarrow A$, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, potom $P(A_n) \downarrow P(A)$ (*spojitost shora*).

Důkaz: Pro důkaz tohoto tvrzení využijeme takzvaného zdisjunktnění. V případě (i) pro $\{A_n\}$ platí $A_n \subset A_{n+1}$. Definujme novou posloupnost množin $\{E_n\}$ tak, že $E_1 := A_1$ a $E_n := A_n - A_{n-1}$ pro $n > 1$. Množiny E_n jsou tak zřejmě vzájemně disjunktní a platí $A_n = E_1 \cup \dots \cup E_n$. Tedy

$$P(A_n) = P(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i) \uparrow \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) = P(A).$$

V případě (ii) použijeme případ (i) na posloupnost $\{(A_1 - A_n) : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Poznámka: (Jacod a Protter 2003) Speciálně pokud $A_n \uparrow A$, $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, dostáváme $P(A_n) \uparrow 1$, a pokud $A_n \downarrow A$, $A := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, dostáváme $P(A_n) \downarrow 0$.

Věta 1.2 (Borel-Cantelliho lemmata) (Athreya a Lahiri 2006) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $\{A_n\} \in \mathcal{F}$ je spočetná posloupnost jevů. Potom:

- (i) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, potom $P(\limsup A_n) = 0$ (*První Borel-Cantelliho lemma*);
- (ii) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ a prvky posloupnosti $\{A_n\}$ jsou po dvou nezávislé, potom $P(\limsup A_n) = 1$ (*Druhé Borel-Cantelliho lemma*).

Důkaz: Důkaz *Věty 1.2* je k nalezení například v (Athreya a Lahiri 2006). ■

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Tento výsledek je také někdy nazýván jako *0-1 zákon*, jelikož tvrdí, že pro spočetnou posloupnost po dvou nezávislých jevů $\{A_n\}$ je pravděpodobnost, že nějaký jev patřící do posloupnosti nastane nekonečně mnohokrát, rovna buď 0, nebo 1, a to podle toho, zda $\sum_{n=1}^{\infty} A_n < \infty$ nebo $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \infty$.

Ve velké většině případů nás v této práci bude zajímat pravděpodobnostní míra zavedená v *Definici 1.11*. Nyní si ale uveďme příklady některých dalších důležitých měr, se kterými se v průběhu práce setkáme.

Lebesgueova míra: (Klenke 2008, Williams 1991) Budeme se zabývat pouze speciálním případem Lebesgueovy míry λ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, která odpovídá konceptu délky intervalu. Tedy pro všechny polouzavřené (nebo otevřené, nebo uzavřené) intervaly $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, na \mathbb{R} je *Lebesgueova míra* λ definována jako $\lambda((a, b]) := b - a$. Lze ukázat, že Lebesgueova míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ je σ -konečná.

Lebesgue-Stieltjesova míra: (Klenke 2008) Tato míra je určitým zobecněním Lebesgueovy míry popsané výše. Necht' funkce $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je neklesající a zprava spojitá. Potom míru μ_F na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, definovanou pro všechny polouzavřené (nebo otevřené, nebo uzavřené) intervaly $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, jako $\mu_F((a, b]) := F(b) - F(a)$, nazýváme *Lebesgue-Stieltjesova míra generovaná F* . Povšimněme si, že speciálně pro $F(x) = x$ dostáváme Lebesgueovu míru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Čítací míra: (Athreya a Lahiri 2006) *Čítací míra* μ na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{F}) je velmi intuitivní měrou uchopující pojem velikosti množiny ve smyslu počtu jejích prvků. Pro libovolnou $A \in \mathcal{F}$ definujeme čítací míru $\mu(A) := |A|$, kde $|A|$ značí kardinalitu množiny A . Lze ukázat, že pokud je prostor Ω spočetný, pak je μ σ -konečná.

Diracova míra: (Klenke 2008) *Diracova míra* δ_ω na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{F}) je úzce spojena s indikátorovou funkcí z *Definice 1.3*, jelikož přiřazuje množině její míru pouze na základě toho, zda množina obsahuje daný prvek $\omega \in \Omega$ či nikoliv. Pro libovolnou $A \in \mathcal{F}$ tedy $\delta_\omega(A) := \mathbf{1}_A(\omega)$.

Rovnoměrně rozdělená míra: (Klenke 2008) Necht' (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor s konečnou množinou Ω . Míru u definovanou jako $u(A) := |A|/|\Omega|$ pro $A \in \mathcal{F}$ nazveme *rovnoměrně rozdělená*. Lze snadno ověřit, že takto definovaná míra bude splňovat podmínky pravděpodobnostní míry na (Ω, \mathcal{F}) .

1.2.2 Měřitelné funkce a náhodné proměnné

V této kapitole se zaměříme na *měřitelné funkce* a *reálné náhodné proměnné*. Měřitelné funkce jsou strukturu zachovávající funkce mezi měřitelnými prostory a představují analogii ke *spojitým funkcím* mezi topologickými prostory. Náhodné proměnné jsou potom speciálním případem měřitelných funkcí, které zobrazují z pravděpodobnostního do jiného měřitelného prostoru. V případě reálných náhodných proměnných se jedná konkrétně o zobrazení z pravděpodobnostního prostoru do měřitelného prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, kde \mathbb{R} je množina všech reálných čísel a $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ je borelovská σ -algebra na \mathbb{R} .

Definice 1.12 (Athreya a Lahiri 2006, Klenke 2008) Necht' (S, \mathcal{A}) a (T, \mathcal{B}) jsou měřitelné prostory a necht' $\xi : S \rightarrow T$ je funkce na S . Řekneme, že funkce ξ je $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ -*měřitelná*, pokud pro všechna $B \in \mathcal{B}$ platí

$$\xi^{-1}(B) := \{s \in S : \xi(s) \in B\} \in \mathcal{A},$$

a zapisujeme $\xi : (S, \mathcal{A}) \rightarrow (T, \mathcal{B})$. Pro $(T, \mathcal{B}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ označíme funkci jako \mathcal{A} -měřitelnou, či pouze měřitelnou, pokud je zřejmé, o jakou σ -algebru se jedná. Dále necht' (Ω, \mathcal{F}, P) a (Γ, \mathcal{G}, Q) jsou pravděpodobnostní prostory a necht' $X : \Omega \rightarrow \Gamma$ je funkce na Ω . Funkci X nazveme *náhodnou proměnnou* nebo *náhodnou veličinou*, pokud pro všechna $G \in \mathcal{G}$ platí

$$X^{-1}(G) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in G\} \in \mathcal{F},$$

a zapisujeme $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Gamma, \mathcal{G})$. Pro $(\Gamma, \mathcal{G}) := (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (či pro libovolné konečné, spočetné i nespočetné podmnožiny \mathbb{R} a příslušné σ -algebry) budeme používat označení *reálná náhodná proměnná*.

Věta 1.3 (Operace s náhodnými proměnnými) (Athreya a Lahiri 2006, Malý 2014) Necht' X je náhodná proměnná a $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost náhodných proměnných na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom platí následující:

- (i) Funkce $|X|$, X^2 a $1/X$ jsou náhodné proměnné kdekoli uvedené operace dávají smysl;
- (ii) Funkce $X_1 + X_2$, $X_1 - X_2$, $X_1 X_2$, X_1/X_2 jsou náhodné proměnné tam, kde uvedená operace dává smysl;
- (iii) Funkce $\sup_n X_n$, $\inf_n X_n$, $\limsup X_n$, $\liminf X_n$ a $h(X)$ pro borelovskou funkci h , jsou náhodné proměnné.

Důkaz: Důkaz Věty 1.3 je k nalezení například v (Malý 2014). ■

Věta 1.4 (Skládání náhodných proměnných) (Jacod a Protter 2003) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) a (Γ, \mathcal{G}, Q) jsou pravděpodobnostní prostory a X, Y jsou náhodné proměnné takové, že $X : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Gamma, \mathcal{G})$ a $Y : (\Gamma, \mathcal{G}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Potom funkce $Y(X) : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Důkaz: Necht' $G \in \mathcal{G}$. Potom $(Y(X(G)))^{-1} = X^{-1}(Y^{-1}(G))$. Jelikož Y je měřitelná funkce, tak platí $F := Y^{-1}(G) \in \mathcal{F}$, a jelikož X je také měřitelná funkce, dostáváme $X^{-1}(F) \in \mathcal{F}$. ■

Definice 1.13 (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Necht' (S, \mathcal{T}) a (U, \mathcal{V}) jsou topologické prostory a necht' $\mathcal{B}(S)$ a $\mathcal{B}(U)$ jsou borelovské σ -algebry na S a U respektive. Měřitelnou funkci $f : (S, \mathcal{B}(S)) \rightarrow (U, \mathcal{B}(U))$ pak nazýváme *borelovská funkce*.

Poznámka: (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Lze ukázat, že libovolná spojitá funkce $f : S \rightarrow U$ je funkce borelovská a tudíž $\langle \mathcal{B}(S), \mathcal{B}(U) \rangle$ -měřitelná. V dalším průběhu práce budeme vždy uvažovat borelovské funkce, kde $S = U := \mathbb{R}$, nebude-li uvedeno jinak.

Definice 1.14 (Brzezniak a Zastawniak 2002) Necht' X je reálná náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Následně definujme $\sigma(X) := \sigma(X^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a $\sigma(X)$ pak budeme nazývat *σ -algebra generovaná náhodnou proměnnou X* .

Poznámka: (Brzezniak a Zastawniak 2002, Williams 1991) Je zřejmé, že pro náhodnou proměnnou X na (Ω, \mathcal{F}, P) platí $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$. Dále pro nějakou posloupnost reálných náhodných proměnných $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ je $\sigma(X_n : n \in \mathbb{N})$ definována jako nejmenší σ -algebra, která obsahuje všechny události typu $X_n^{-1}(B)$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$.

1.2.3 Pravděpodobnostní rozdělení a distribuční funkce

Předpokládejme, že se nacházíme na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , který je vybaven reálnou náhodnou proměnnou X . Upozorníme zde čtenáře, že všechny náhodné

proměnné budeme v dalším průběhu kapitoly pro jednoduchost chápat jako reálné náhodné proměnné, nebude-li uvedeno jinak. Zobecnění pro libovolné měřitelné prostory je potom přímočaré.

Z předchozích dvou kapitol plynou následující vztahy:

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{X} & \mathbb{R} \\ [0,1] & \xleftarrow{P} & \mathcal{F} \xleftarrow{X^{-1}} \mathcal{B}(\mathbb{R}) \end{array} \quad (1.10)$$

nebo také $[0,1] \xleftarrow{P} \sigma(X) \xleftarrow{X^{-1}} \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Výše uvedené nám potom umožňují definovat *pravděpodobnostní rozdělení* náhodné veličiny X a poté zkonstruovat takzvanou *distribuční funkci* tohoto rozdělení.

Definice 1.15 (Athreya a Lahiri 2006, Williams 1991) Necht' X je náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . *Pravděpodobnostní rozdělení* (nebo často jen *rozdělení*) $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0,1]$ náhodné veličiny X je potom definováno jako následující kompozice:

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Není obtížné ukázat, že P_X splňuje podmínky uvedené v *Definici 1.10* a *Definici 1.11* a jedná se tak o pravděpodobnostní míru na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Definici 1.15* lze dále zobecnit pro libovolné dva měřitelné prostory (S, \mathcal{A}) a (T, \mathcal{B}) a nějakou $\langle \mathcal{A}, \mathcal{B} \rangle$ -měřitelnou funkci ξ , kdy potom pro zvolenou míru μ na (S, \mathcal{A}) množinová funkce $\mu(\xi^{-1}(B)), B \in \mathcal{B}$, představuje míru na (T, \mathcal{B}) . Takovou míru nazýváme ξ -*indukovaná míra* na (T, \mathcal{B}) . Dle výše uvedené terminologie je tedy pravděpodobnostní rozdělení P_X vlastně X -*indukovaná* (pravděpodobnostní) míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Obvykle tedy máme k dispozici měřitelný prostor (Ω, \mathcal{F}) tvořený fixním prostorem elementárních jevů Ω a σ -algebrou všech možných jevů \mathcal{F} na Ω , na kterém je předepsána náhodná proměnná X , která zobrazuje elementární jevy z Ω na reálnou osu. Poté představíme zvolenou pravděpodobnostní míru P na (Ω, \mathcal{F}) , což vede k jednoznačnému určení pravděpodobnostního rozdělení P_X náhodné veličiny X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Takto můžeme zkoumat rozličné chování rozdělení P_X náhodné proměnné X pro různé volby míry P .

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Reálnou náhodnou proměnnou X označíme jako *diskrétní*, pokud je její pravděpodobnostní rozdělení P_X diskrétní pravděpodobnostní míra, tedy existuje spočetná množina $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ taková, že $P_X(B) = 1$. Naopak pokud $P_X(\{x\}) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (tedy P_X je spojitá pravděpodobnostní míra), nazveme náhodnou proměnnou X *spojitá*. V ostatních případech označíme X jako *smíšenou* náhodnou proměnnou.

Řekneme, že rozdělení náhodné veličiny X je *symetrické*, pokud $P_X(B) = P_X(-B)$ pro všechna $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Dále řekneme, že dvě náhodné veličiny jsou *stejně rozdělené* (zapisujeme $X \stackrel{d}{=} Y$, kde operátor $\stackrel{d}{=}$ představuje rovnost v distribuci), pokud jejich rozdělení P_X a P_Y jsou identická (tedy pokud $P_X(B) = P_Y(B), \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$). Pravděpodobnostní rozdělení $P_{X,Y}$ vektoru dvou náhodných proměnných (X, Y) nazýváme *sdrúžené rozdělení* (X, Y) a rozdělení P_X a P_Y potom v tomto případě nazýváme *marginální rozdělení* (X, Y) (Applebaum 2009).

Definice 1.16 (Williams 1991) Necht' X je náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) a P_X je její pravděpodobnostní rozdělení. Dále pro $x \in \mathbb{R}$ označme $P(X \leq x) := P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$. Potom funkci $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, definovanou jako

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R},$$

nazýváme (*kumulativní distribuční funkce* X). Pro každý polouzavřený (nebo otevřený, nebo uzavřený) interval $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, pak zřejmě platí $P_X((a, b]) = F_X(b) - F_X(a)$.

Tvrzení 1.7 (Vlastnosti distribuční funkce) (Athreya a Lahiri 2006, Williams 1991) Nechť X je reálná náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) a F_X je její distribuční funkce. Potom pro F_X platí:

- (i) Pro $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, platí $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$ (*neklesající funkce*);
- (ii) Pro $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{y \downarrow x} F(y) = F(x)$ (*spojitost zprava*);
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ a $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.

Důkaz: V případě (i) pro $x_1 < x_2$ dostáváme $(-\infty, x_1] \subset (-\infty, x_2]$. Jelikož P_X je míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, tak z monotonie dostáváme

$$F_X(x_1) = P_X((-\infty, x_1]) \leq P_X((-\infty, x_2]) = F_X(x_2).$$

Pro dokázání části (ii) využijeme spojitosti shora míry P_X . Nechť tedy $x_n \downarrow x$, potom množiny $(-\infty, x_n] \downarrow (-\infty, x]$ a tedy

$$F_X(x_n) = P_X((-\infty, x_n]) \downarrow P_X((-\infty, x]) = F_X(x).$$

Dále pokud $x_n \downarrow -\infty$ a $y_n \uparrow +\infty$, potom $(-\infty, x_n] \downarrow \emptyset$ a $(-\infty, y_n] \uparrow (-\infty, +\infty)$. Z vlastností pravděpodobnostní míry a ze spojitosti shora a zdola, respektive, pak dostáváme (iii). ■

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Z výše uvedeného je zřejmé, že distribuční funkce F_X vždy existuje a její znalost je ekvivalentní ke znalosti pravděpodobnostního rozdělení P_X , které lze z F_X zpětně zkonstruovat (rozdělení P_X nebude nic jiného než Lebesgue-Stieltjesova míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ generovaná funkcí F_X ; viz. příklady měř v *Kapitole 1.2.1*). Z *Tvrzení 1.4* a poznámky pod *Větou 1.1* dále plyne, že pokud se dvě pravděpodobnostní rozdělení P_X a P_Y náhodných veličin X a Y shodují na $\pi(\mathbb{R}) = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$, potom se také shodují na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Tedy pokud $F_X(x) = F_Y(x)$, $\forall x$, potom $X \stackrel{d}{=} Y$.

1.2.4 Integrace vzhledem k míře

Nechť $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor s mírou a $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je měřitelná funkce, o které vždy v této kapitole předpokládáme, že se nachází na prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, pokud není řečeno jinak. Cílem této kapitoly je definovat *integrál* měřitelné funkce f vzhledem k libovolné míře μ . V následující kapitole potom aplikujeme poznatky z této kapitoly na pravděpodobnostní prostory a náhodné veličiny.

Definice 1.17 (Jacod a Protter 2003, Malý 2014) Funkci $f^S : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme *jednoduchou*, pokud ji lze vyjádřit jako

$$f^S(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}(\omega),$$

kde $a_i \in \mathbb{R}$ a $A_i \in \mathcal{F}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$. Jednoduchou funkci lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci indikátorových funkcí množin z \mathcal{F} .

Poznámka: (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Je zřejmé, že takto definovaná jednoduchá funkce f^S je měřitelná. Dále lze ukázat, že pro každou nezápornou měřitelnou funkci f existuje rostoucí posloupnost jednoduchých funkcí $\{f_n^S\}$ taková, že $f_n^S \uparrow f$.

Definice 1.18 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' f^S je nezáporná jednoduchá funkce. *Integrál* jednoduché funkce f^S vzhledem k míře μ definujeme jako

$$\int f^S d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i),$$

a jako konvenci přijmeme vztah $0 \times \infty = 0$.

Poznámka: (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Lze ukázat, že hodnota výše definovaného integrálu je nezávislá na konkrétní reprezentaci jednoduché funkce, tedy pokud f^S může být vyjádřena také jako $f^S = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j}$, potom musí platit $\sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j)$.

Definice 1.19 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' f je nezáporná měřitelná funkce a $\{f_n^S\}$ je libovolná rostoucí posloupnost jednoduchých funkcí na $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ taková, že $f_n^S \uparrow f$. Potom integrál funkce f vzhledem k míře μ je definován jako

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n^S d\mu.$$

Definice 1.20 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' f je libovolná měřitelná funkce. Dále necht' $f^- := -f \mathbf{1}_{\{f < 0\}}$ a $f^+ := f \mathbf{1}_{\{f \geq 0\}}$. Integrál funkce f vzhledem k míře μ je potom dán výrazem

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu,$$

za předpokladu, že alespoň jeden z integrálů na pravé straně je konečný.

Poznámka: Povšimněme si, že funkce f^+ a f^- jsou nezáporné měřitelné funkce a $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$. Tudíž oba integrály na pravé straně jsou definovány *Definicí 1.18* a *Definicí 1.19*.

O měřitelné funkci f řekneme, že je integrovatelná vzhledem k μ pokud $\int f d\mu < \infty$, což platí právě tehdy, když $\int f^+ d\mu < \infty$ a $\int f^- d\mu < \infty$. Výraz $\int f d\mu$ také někdy rozepisujeme detailněji jako $\int_{\Omega} f(\omega) \mu(d\omega)$ nebo $\int_{\Omega} f(\omega) d\mu(\omega)$. Pro integrál podle Lebesgueovy míry v \mathbb{R} obvykle používáme značení $\int f(x) dx$ a označujeme ho jako *Lebesgueův integrál* funkce f (Athreya a Lahiri 2006, Malý 2014).

Poznámka: Existuje řada vztahů mezi Lebesgueovým, Newtonovým a Riemannovým integrálem. Touto problematikou se podrobněji zabývá (Athreya a Lahiri 2006), (Klenke 2008), (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) i (Malý 2004). My zde pouze poznamenejme, že množina riemannovsky integrovatelných funkcí je podmnožinou množiny lebesgueovsky integrovatelných funkcí. Naopak lebesgueovsky a newtonovsky integrovatelné funkce mají pouze společný průnik. Pokud ale v obou výše uvedených případech oba integrály existují, pak mají stejnou hodnotu.

Definice 1.21 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' f je měřitelná funkce a $A \in \mathcal{F}$. Potom integrál z funkce f přes množinu A vzhledem k míře μ je definován jako

$$\int_A f d\mu := \int f \mathbf{1}_A d\mu,$$

za předpokladu, že pravá strana je definována. Speciálně potom

$$\int_A d\mu = \int \mathbf{1}_A d\mu := \mu(A).$$

Definice 1.22 (Athreya a Lahiri 2006) Necht' $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ je prostor s mírou a $p > 0$. Potom prostor $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ definujeme jako

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu) := \left\{ f : \int |f|^p d\mu < \infty \right\}.$$

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Zřejmě tedy všechny integrovatelné funkce f patří do prostoru $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

Tvrzení 1.8 (Vlastnosti integrálu) (Athreya a Lahiri 2006, Klenke 2008) Necht' $f, g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Potom platí:

- (i) $\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu$ pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (*linearita*);
- (ii) Pokud $f \leq g$ skoro všude, potom $\int f d\mu \leq \int g d\mu$, speciálně pokud $f = g$ skoro všude, potom $\int f d\mu = \int g d\mu$ (*monotonie*);
- (iii) $|\int f d\mu| \leq \int |f| d\mu$ (*trojúhelníková nerovnost*);
- (iv) Pokud $f \geq 0$, potom $\int f d\mu \geq 0$ a $\int f d\mu = 0$ právě tehdy, když $f = 0$ skoro všude (*nezápornost*).

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.8* je k nalezení v (Klenke 2008) a (Athreya a Lahiri 2006). ■

Tvrzení 1.9 (Integrovatelná majoranta) (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014, Malý 2014) Necht' $g \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a f je měřitelná funkce taková, že $|f| \leq g$ skoro všude. Potom také $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ a funkci g nazýváme *integrovatelná majoranta*.

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.9* plyne z vlastností integrálu v *Tvrzení 1.8*. ■

Věta 1.5 (Čebyševova nerovnost) (Athreya a Lahiri 2006, Malý 2014) Necht' f je měřitelná funkce a $a, p > 0$. Potom

$$\mu(\{|f| \geq a\}) \leq \frac{\int |f|^p d\mu}{a^p}.$$

Důkaz: Jelikož $|f|$ je nezáporná funkce, platí $\int |f| d\mu \geq \int_{\{|f| \geq a\}} |f| d\mu \geq a\mu(\{|f| \geq a\})$. Dále ze zřejmě platné rovnosti $\{|f| \geq a\} = \{|f|^p \geq a^p\}$, $a, p > 0$, již snadno dostáváme Čebyševovu nerovnost. ■

V následující části této kapitoly se budeme zabývat takzvanou *Radon-Nikodýmovo derivací*, jež se hojně využívá při technice zvané *změna míry v integrálu*.

Definice 1.23 (Athreya a Lahiri 2006, Klenke 2008) Necht' (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor a necht' μ a ν jsou míry na (Ω, \mathcal{F}) . Řekneme, že μ je *absolutně spojitá* vzhledem k ν , značeno $\mu \ll \nu$, jestliže

$$\nu(A) = 0 \implies \mu(A) = 0, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Dále řekneme, že míry μ a ν na (Ω, \mathcal{F}) jsou *ekvivalentní*, značeno $\mu \approx \nu$, pokud $\mu \ll \nu$ a zároveň $\nu \ll \mu$.

Definice 1.24 (Athreya a Lahiri 2006, Malý 2014) Necht' μ a ν jsou míry na měřitelném prostoru (Ω, \mathcal{F}) a necht' $h : \Omega \rightarrow [0; \infty)$ je nezáporná měřitelná funkce taková, že

$$\mu(A) = \int_A h \, d\nu, \quad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Potom h nazýváme *Radon-Nikodýmova derivace* míry μ vzhledem k míře ν a zapisujeme ji jako $h = \frac{d\mu}{d\nu}$.

Věta 1.6 (Radon-Nikodýmova věta) (Malý 2014) Necht' (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor a μ a ν jsou dvě σ -konečné míry na \mathcal{F} a necht' $\mu \ll \nu$. Potom existuje právě jedna (ve smyslu skoro všude, tedy až na modifikace na množinách ν -míry nula) Radon-Nikodýmova derivace $\frac{d\mu}{d\nu}$ míry μ vzhledem k míře ν .

Důkaz: Důkaz *Věty 1.8* překračuje rozsah této práce a je k nalezení například v (Malý 2014). ■

Věta 1.7 (Změna míry v integrálu) (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014, Malý 2014) Necht' (Ω, \mathcal{F}) je měřitelný prostor a μ a ν jsou dvě σ -konečné míry na \mathcal{F} a necht' $\mu \ll \nu$. Potom pro každou měřitelnou funkci f na (Ω, \mathcal{F}) platí

$$\int f \, d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\nu} \, d\nu,$$

kde $\frac{d\mu}{d\nu}$ je Radon-Nikodýmova derivace míry μ vzhledem k míře ν .

Důkaz: Důkaz *Věty 1.9* je k nalezení například v (Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014). ■

Definice 1.25 (Athreya a Lahiri 2006, Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor vybavený diskretní reálnou náhodnou veličinou X s pravděpodobnostním rozdělením P_X na $(\mathbb{Z}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_0^+))$ a μ je čítací míra na $(\mathbb{Z}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_0^+))$, kde $\mathbb{Z}_0^+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ a jedná se tedy o spočetný měřitelný prostor. Dále necht' $p_X = \frac{dP_X}{d\mu}$ je Radon-Nikodýmova derivace P_X vzhledem k μ . Potom pro spočetnou množinu $C = \{x_1, x_2, \dots\}$ takovou, že $P_X(C) = 1$ a libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{Z}_0^+)$ dostáváme

$$P_X(B) = P_X(B \cap C) = \int_{\{x_i \in B\}} dP_X = \int_{\{x_i \in B\}} p_X \, d\mu = \sum_{\{x_i \in B\}} p_X(x_i).$$

Funkci p_X nazýváme *pravděpodobnostní funkce* diskretní náhodné veličiny X a pro distribuční funkci F_X platí

$$F_X(x) = \sum_{\{x_i \leq x\}} p_X(x_i),$$

a jedná se o skokovou funkci se skoky $p(x_i)$ s nejvíce spočetným počtem bodů nespojitosti.

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006, Brzezniak a Zastawniak 2002, Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Obě míry P_X a μ jsou na $(\mathbb{Z}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_0^+))$ σ -konečné, a jelikož P_X je diskretní, tak $\mu(B) = 0 \implies B = \emptyset \implies P_X(B) = 0$, tedy $P_X \ll \mu$ a existence pravděpodobnostní funkce p_X tudíž plyne z Radon-Nikodýmovy věty. Vztah $\int_A h \, d\mu = \sum_{\{x_i \in A\}} h(x_i)$, kde μ je čítací míra, lze odvodit z definice integrálu. Je zřejmé, že znalost pravděpodobnostní funkce (za předpokladu, že existuje) je ekvivalentní znalosti pravděpodobnostního rozdělení příslušné náhodné veličiny a musí platit $\sum_{\{x_i \in C\}} p_X(x_i) = 1$. *Definici 1.25* lze snadno zobecnit pro libovolný konečný nebo spočetný měřitelný prostor s čítací mírou μ .

Definice 1.26 (Athreya a Lahiri 2006, Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor vybavený spojitou reálnou náhodnou veličinou X s

pravděpodobnostním rozdělením P_X na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, λ je Lebesgueova míra na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ a $P_X \ll \lambda$. Dále necht' $f_X = \frac{dP_X}{d\lambda}$ je Radon-Nikodýmova derivace P_X vzhledem k λ . Pro libovolnou množinu $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tak dostáváme

$$P_X(B) = \int_B dP_X = \int_B f_X(x) dx.$$

Funkci f_X nazýváme *hustota pravděpodobnosti* spojité náhodné veličiny X a pro distribuční funkci F_X platí

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du,$$

a jedná se o absolutně spojitou funkci.

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006, Brzezniak a Zastawniak 2002, Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Obě míry P_X a λ jsou na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ σ -konečné, a jelikož $P_X \ll \lambda$, existence hustoty f_X plyne z Radon-Nikodýmovy věty. V praxi je též velmi užitečné, že hustotu f_X lze alternativně vyjádřit jako $\frac{dF_X}{d\lambda}$ (či ve standardnější notaci jako $\frac{dF_X}{dx}$). Náhodné veličiny s hustotou nazýváme *absolutně spojitě náhodné veličiny*, abychom je odlišili od spojitých náhodných veličin, jejichž pravděpodobnostní rozdělení nejsou absolutně spojitá vzhledem k Lebesgueově míře a jež obecně nemusejí mít hustotu. Je zřejmé, že znalost hustoty pravděpodobnosti (za předpokladu, že existuje) je ekvivalentní znalosti pravděpodobnostního rozdělení příslušné náhodné veličiny a musí platit $\int_{\mathbb{R}} f_X(x) dx = 1$. *Definici 1.26* lze snadno zobecnit pro libovolný nespočetný měřitelný prostor, kde λ nahradíme vybranou σ -konečnou referenční mírou ν takovou, že $P_X \ll \nu$.

1.2.5 Momenty a charakteristická funkce

Nyní za pomoci integrálu vzhledem k míře, který jsme zavedli v předchozí části, definujeme *momenty* náhodné veličiny a její *charakteristickou a momentovou vytvořující funkci*.

Definice 1.27 (Klenke 2008, Reif 2004, Williams 1991) Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) vybavený náhodnými proměnnými X a Y :

- (i) Pokud $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak operátor

$$E[X] := \int_{\Omega} X dP$$

nazýváme *střední hodnota* náhodné veličiny X . Pokud $E[X] = 0$, řekneme, že náhodná veličina X je *centrovaná*.

- (ii) Pokud $X \in L^n(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$, pak operátor

$$m_k[X] := E[X^k], \quad k = 1, \dots, n,$$

nazýváme *k-tý moment* náhodné veličiny X .

- (iii) Pokud $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak operátor

$$\text{Var}[X] := E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

nazýváme *rozptyl* náhodné veličiny X . Číslo $\text{Std}[X] := \sqrt{\text{Var}[X]}$ pak nazveme *směrodatná odchylka* X . Centrovanou náhodnou veličinou X s $\text{Std}[X] = 1$ nazveme *standardizovanou* náhodnou veličinou.

(iv) Pokud $X \in L^n(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$, pak operátor

$$m'_k[X] := E[(X - E[X])^k], \quad k = 1, \dots, n,$$

nazýváme *k-tý centrální moment* náhodné veličiny X .

(v) Pokud $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak operátor

$$\text{Cov}[X, Y] := E[(X - E[X])(Y - E[Y])] = E[XY] - E[X]E[Y]$$

nazýváme *kovariance* mezi X a Y . Číslo

$$\text{Corr}[X, Y] := \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\text{Std}[X] \text{Std}[Y]} \in [-1, 1]$$

pak nazveme *korelací* mezi X a Y . Kovariance i korelace jsou měrou lineární závislosti mezi náhodnými proměnnými X a Y .

(vi) Pokud $X \in L^3(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak číslo

$$\text{Skew}[X] := \frac{m'_3[X]}{(m'_2[X])^{3/2}} = \frac{m'_3[X]}{\text{Std}[X]^3}$$

nazýváme *koeficient šikmosti* náhodné veličiny X a jedná se o míru asymetrie rozdělení náhodné veličiny X (tedy $\text{Skew}[X] = 0$ značí rozdělení symetrické okolo střední hodnoty).

(vii) Pokud $X \in L^4(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pak číslo

$$\text{Kurt}[X] := \frac{m'_4[X]}{(m'_2[X])^2} = \frac{m'_4[X]}{\text{Std}[X]^4}$$

nazýváme *koeficient špičatosti* náhodné veličiny X a jedná se o jistou míru tvaru rozdělení náhodné veličiny X (konkrétně se jedná o míru „těžkosti konců“ pravděpodobnostního rozdělení).

Poznámka: Pro Čebyševovu nerovnost (viz. *Věta 1.7*) s využitím značení zavedeného výše a pro $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dostáváme

$$P(\{|X - E[X]| \geq k \text{Std}[X]\}) \leq \frac{1}{k^2}, \quad (1.11)$$

kdy jsme dosadili $f = X - E[X]$, $a = k \text{Std}[X]$ a $p = 2$. Tedy pravděpodobnost toho, že náhodná veličina s konečnou střední hodnotou a rozptylem nabyde hodnoty vzdálenější než k směrodatných odchylek od střední hodnoty je shora omezena číslem $1/k^2$.

Tvrzení 1.10 (Vlastnosti střední hodnoty) (Cinlar 2011, Klenke 2008) Necht' $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty. Potom platí:

- (i) $E[a] = a$ (*střední hodnota konstanty*);
- (ii) Pokud $X \leq Y$ skoro jistě, potom $E[X] \leq E[Y]$, speciálně pokud $X = Y$ skoro jistě, potom $E[X] = E[Y]$ (*monotonie*);
- (iii) Pokud $X \geq 0$, potom $E[X] \geq 0$, a $E[X] = 0$ právě tehdy, když $X = 0$ skoro jistě (*nezápornost*);
- (iv) $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$ (*linearita*);
- (v) $|E[X]| \leq E[|X|]$ (*trojúhelníková nerovnost*);
- (vi) Pokud Z je náhodná veličina na (Ω, \mathcal{F}, P) taková, že $|Z| \leq Y$ skoro jistě, potom také $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a tedy $E[Z] < \infty$ (*integrovatelná majoranta*);

Důkaz: Vlastností střední hodnoty přímo plynou z definice a vlastností integrálu a z *Tvrzení 1.9*. ■

Pokud X je reálná náhodná proměnná na (Ω, \mathcal{F}, P) s pravděpodobnostním rozdělením P_X a h je borelovská funkce taková, že $h(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Potom

$$E[h(X)] = \int_{\Omega} h(X) dP = \int_{\mathbb{R}} h(x) dP_X. \quad (1.12)$$

Speciálně pro diskrétní náhodnou proměnnou s pravděpodobnostní funkcí p_X dostáváme

$$E[h(X)] = \sum_i h(x_i) p_X(x_i), \quad (1.13)$$

a pro absolutně spojitou náhodnou proměnnou s hustotou pravděpodobnosti f_X pak

$$E[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx. \quad (1.14)$$

Velmi důležitý speciální případ nastává, když $h(X) = X$. Potom lze výše uvedené vzorce přímo využít k výpočtu střední hodnoty $E[X]$ (Brzezniak a Zastawniak 2002).

Definice 1.28 (Williams 1991) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor s náhodnou proměnnou X . *Charakteristická funkce* $\varphi_X(\theta)$ náhodné veličiny X je definovaná jako

$$\varphi_X(\theta) := E[e^{i\theta X}],$$

kde i je imaginární jednotka. Pokud je X navíc absolutně spojitá reálná náhodná proměnná s hustotou f_X , potom

$$\varphi_X(\theta) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} f_X(x) dx,$$

a jedná se tedy o Fourierovu transformaci funkce hustoty.

Poznámka: (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Je zřejmé, že charakteristická funkce reálné náhodné veličiny vždy existuje. Dále také platí, že pokud je dána charakteristická funkce φ_X absolutně spojitě náhodné veličiny, lze zrekonstruovat f_X (a tedy i F_X) pomocí inverzní Fourierovi transformace

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\theta x} \varphi_X(\theta) d\theta. \quad (1.15)$$

Pravděpodobnostní rozdělení P_X náhodné veličiny X může být tedy jednoznačně charakterizováno její charakteristickou funkcí φ_X .

Tvrzení 1.11 (Vlastnosti charakteristické funkce) (Applebaum 2009) Necht' X je náhodná proměnná na (Ω, \mathcal{F}, P) s charakteristickou funkcí φ_X . Potom platí:

- (i) $|\varphi_X(\theta)| \leq 1$;
- (ii) φ_X je reálná funkce právě tehdy, když X je symetrická;
- (iii) $\varphi_X(0) = 1$;
- (iv) $\varphi_X(\theta)$ je spojitá v $\theta = 0$.

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.11* je k nalezení například v (Applebaum 2009). ■

Pokud $X \in L^n(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$, lze φ_X n -krát derivovat a dostáváme

$$\varphi_X^{(n)}(\theta) = \frac{d^n}{d\theta^n} \varphi_X(\theta) = \frac{d^n}{d\theta^n} E[e^{i\theta X}] = E[(iX)^n e^{i\theta X}]. \quad (1.16)$$

Konkrétně pak $\varphi_X^{(n)}(0) = i^n E[X^n]$ a tedy

$$E[X^n] = \frac{1}{i^n} \varphi_X^{(n)}(\theta) \Big|_{\theta=0}. \quad (1.17)$$

Definice 1.29 (Shreve 2004) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor s náhodnou proměnnou X . *Momentová vytvořující funkce* $\phi_X(\alpha)$ náhodné veličiny X je definovaná jako

$$\phi_X(\alpha) := E[e^{\alpha X}].$$

Pokud je X navíc absolutně spojitá reálná náhodná proměnná s hustotou f_X , potom

$$\phi_X(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} f_X(x) dx,$$

a odpovídá tedy oboustranné Laplaceově transformaci funkce hustoty.

Poznámka: (Athreya a Lahiri 2006) Na rozdíl od charakteristické funkce, momentová vytvořující funkce obecně nemusí existovat. Pokud existuje, pak platí $\phi_X(0) = 1$ a stejným způsobem jako v (1.16) lze pro momenty náhodné veličiny $X \in L^n(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $n \in \mathbb{N}$ odvodit

$$E[X^n] = \phi_X^{(n)}(\alpha) \Big|_{\alpha=0}, \quad (1.18)$$

a platí

$$\varphi_X(\theta) = \phi_X(i\theta). \quad (1.19)$$

1.2.6 Nezávislost náhodných proměnných

V této části zavedeme v teorii pravděpodobnosti velmi důležitý koncept *nezávislosti*.

Definice 1.30 (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) a necht' $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots$ jsou σ -algebry obsažené v \mathcal{F} . Tyto σ -algebry nazveme *nezávislé*, pokud pro libovolnou podmnožinu indexů J a $\forall G_j \in \mathcal{G}_j$ platí

$$P\left(\bigcap_{j \in J} G_j\right) = \prod_{j \in J} P(G_j).$$

Definice 1.31 (Williams 1991) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor. Jevy $A, B \in \mathcal{F}$ nazveme *nezávislé*, pokud $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ a tedy náleží *nezávislým* σ -algebřám \mathcal{G}_A a \mathcal{G}_B obsaženým v \mathcal{F} . Náhodné proměnné X a Y na (Ω, \mathcal{F}, P) nazveme *nezávislé*, pokud příslušné generované σ -algebry $\sigma(X)$ a $\sigma(Y)$ jsou *nezávislé*.

Tvrzení 1.12 (0 nezávislých náhodných proměnných) (Klenke 2008, Leadbetter, Cambanis a Pipiras 2014) Necht' náhodné proměnné $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Poté X a Y jsou *nezávislé* právě tehdy, když platí jakákoliv z následujících podmínek:

- (i) $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$ pro libovolnou dvojici omezených borelovských funkcí g, h ;
- (ii) Sdružené rozdělení náhodného vektoru (X, Y) je součinem marginálních rozdělení, tedy $P_{X,Y} = P_X P_Y$;
- (iii) Sdružená distribuční funkce $F_{X,Y}(x, y) := P(X \leq x, Y < y)$ se rovná součinu marginálních distribučních funkcí, tedy $F_{X,Y}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$;

- (iv) Sdružená funkce hustoty $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$ se rovná součinu marginálních hustot, tedy platí $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ za předpokladu, že příslušné hustoty existují.

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.12* je k nalezení například v (Klenke 2008). ■

Poznámka: Výše uvedené tvrzení lze snadno zobecnit pro n náhodných proměnných.

Pro nezávislé náhodné proměnné $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a $a, b \in \mathbb{R}$ lze dále za pomoci *Tvrzení 1.12* snadno ukázat, že platí

$$\text{Cov}[aX, bY] = 0, \text{Corr}[aX, bY] = 0 \text{ a } \text{Var}[aX + bY] = a^2 \text{Var}[X] + b^2 \text{Var}[Y], \quad (1.20)$$

a dále pro charakteristické a momentové vytvořující funkce platí

$$\varphi_{aX+bY}(\theta) = \varphi_X(a\theta) \varphi_Y(b\theta) \text{ a } \phi_{aX+bY}(\alpha) = \phi_X(a\alpha) \phi_Y(b\alpha). \quad (1.21)$$

Výše uvedené vztahy platí i obecně pro součet n nezávislých náhodných proměnných (Williams 1991).

Definice 1.32 (Williams 1991) Řekneme, že náhodné proměnné v posloupnosti $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) jsou *nezávislé a stejně rozdělené* (značeno *i.i.d.*), pokud jsou prvky X_n nezávislé a pokud $P(X_n^{-1}) = P_X, \forall n \in \mathbb{N}$.

1.2.7 Podmíněná pravděpodobnost a podmíněná střední hodnota

Tato kapitola zavede *podmíněnou pravděpodobnost* a dále se zabývá *podmíněnou střední hodnotou*, jež je jedním z kritických nástrojů při studiu náhodných procesů.

Definice 1.33 (Brzezniak a Zastawniak 2002) Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a $A, B \in \mathcal{F}$. Pro $P(B) \neq 0$ definujeme *podmíněnou pravděpodobnost* jevu A při daném B jako

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Poznámka: Z *Definice 1.31* plyne, že pro nezávislé jevy platí $P(A|B) = P(A)$ a $P(B|A) = P(B)$.

Definice 1.34 (Brzezniak a Zastawniak 2002, Klenke 2008) Nechť náhodná proměnná $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a nechť $B \in \mathcal{F}$. Pro $P(B) \neq 0$ definujeme *podmíněnou střední hodnotu* náhodné veličiny X při daném B jako

$$E[X|B] := \frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{E[X \mathbf{1}_B]}{P(B)}.$$

Poznámka: Triviálně platí rovnost $E[X|\Omega] = E[X]$.

Definice 1.35 (Brzezniak a Zastawniak 2002, Klenke 2008) Nechť náhodná proměnná $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a \mathcal{G} je σ -algebra obsažená v \mathcal{F} . Náhodnou veličinu $E[X|\mathcal{G}]$ nazveme *podmíněná střední hodnota* náhodné proměnné X při dané σ -algebře \mathcal{G} , pokud splňuje:

- (i) $E[X|\mathcal{G}]$ je \mathcal{G} -měřitelná;
- (ii) Pro libovolný jev $G \in \mathcal{G}$ platí

$$\int_G E[X|\mathcal{G}] dP = \int_G X dP.$$

Pro $A \in \mathcal{F}$ definujeme podmíněnou pravděpodobnost jevu A při dané σ -algebře \mathcal{G} jako $P(A|\mathcal{G}) := E[\mathbf{1}_A|\mathcal{G}]$.

Poznámka: (Brzezniak a Zastawniak 2002, Klenke 2008) Lze ukázat, že $E[X|\mathcal{G}]$ existuje a je dána jednoznačně ve smyslu skoro jistě. Dalším pozoruhodným faktem je, že v případě podmiňování X jinou náhodnou proměnnou Y , hodnoty $E[X|Y]$ závisí pouze na generované σ -algebře $\sigma(Y)$ a ne na skutečných hodnotách náhodné proměnné Y . Situace tudíž v tomto případě opět spadá pod *Definici 1.35*, protože zápis $E[X|Y]$ je ekvivalentní zápisu $E[X|\sigma(Y)]$.

Tvrzení 1.13 (Vlastnosti podmíněné střední hodnoty) (Brzezniak a Zastawniak 2002, Klenke 2008) Necht' náhodné proměnné $X, Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a konstanty $a, b \in \mathbb{R}$ a necht' $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ jsou σ -algebry. Potom platí:

- (i) Pokud $X \leq Y$ skoro jistě, potom $E[X|\mathcal{G}] \leq E[Y|\mathcal{G}]$ (*monotonie*);
- (ii) Pokud $X \geq 0$ skoro jistě, potom $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ (*nezápornost*);
- (iii) $E[aX + bY|\mathcal{G}] = aE[X|\mathcal{G}] + bE[Y|\mathcal{G}]$ (*linearita*);
- (iv) $E[E[X|\mathcal{G}]] = E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$ (*iterované očekávání*);
- (v) $E[E[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = E[E[X|\mathcal{H}]|\mathcal{G}] = E[X|\mathcal{H}]$ (*věžové pravidlo*);
- (vi) Pokud $XY \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ a Y je \mathcal{G} -měřitelná, potom $E[XY|\mathcal{G}] = YE[X|\mathcal{G}]$ (*vytknutí toho, co je známo*);
- (vii) Pokud $\sigma(X)$ a \mathcal{G} jsou nezávislé, potom $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$ (*vliv nezávislosti*);
- (viii) $|E[X|\mathcal{G}]| \leq E[|X|\mathcal{G}]$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Důkaz: Důkaz *Tvrzení 1.13* je k nalezení například v (Klenke 2008). ■

V případě absolutně spojitých náhodných proměnných X, Y na (Ω, \mathcal{F}, P) se sdruženou hustotou pravděpodobnosti $f_{X,Y}(x, y)$ a marginálními hustotami $f_X(x)$ a $f_Y(y)$ lze definovat *podmíněnou hustotu pravděpodobnosti* $f_{X|Y}(x|y)$ jako

$$f_{X|Y}(x|y) := \begin{cases} f_{X,Y}(x, y)/f_Y(y) & \text{pro } f_Y(y) \neq 0; \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.22)$$

Potom pro borelovskou funkci h takovou, že $h(X) \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ platí

$$E[h(X)|Y] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_{X|Y}(x|y) dx. \quad (1.23)$$

Analogicky lze postupovat i v případě diskrétních náhodných veličin a jejich pravděpodobnostních funkcí. Stejně jako v nepodmíněném případě pak příslušné funkce $f_{X|Y}$ a $p_{X|Y}$ plně charakterizují podmíněné pravděpodobnostní rozdělení $P_{X|Y}$ náhodné veličiny X při dané Y (Klenke 2008, Williams 1991, Šedivá 2015).

1.3 Náhodné procesy a martingaly

V této kapitole definujeme pojem náhodný proces a dotkneme se teorie martingalů. Pojem martingal má své kořeny v hazardních hrách, kde popisuje spravedlivou hru v šanci, nicméně martingaly v pojetí moderní teorie pravděpodobnosti popisují velmi důležitý koncept často využívaný ve světě stochastického modelování finančních aktiv.

1.3.1 Náhodné procesy a prostory s filtrací

Definice 1.36 (Klenke 2008) Necht' $T \subset \mathbb{R}$ a necht' X_t je reálná náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) pro všechna $t \in T$. Potom kolekce náhodných veličin $\{X_t : t \in T\}$ (dále jen $\{X_t\}$, není-li třeba zdůraznit charakter množiny T) nazýváme (*reálný*) *náhodný proces* na (Ω, \mathcal{F}, P) .

Poznámka: (Brzezniak a Zastawniak 2002, Klenke 2008, Tsay 2010) Jednu konkrétní realizaci (tedy pro konkrétní hodnoty $\omega \in \Omega$) náhodného procesu $\{X_t\}$ nazveme *trajektorie* procesu. Pokud je T konečná nebo spočetná, hovoříme o náhodném procesu v *diskrétním čase* či o *diskrétním náhodném procesu*. Je-li T nespočetná, hovoříme o náhodném procesu ve *spojitém čase* či o *spojitém náhodném procesu*. Časté volby jsou $T = \mathbb{Z}_0^+$ pro diskrétní a $T = [0, +\infty)$ pro spojité náhodné procesy. Pro T , jež je uzavřená vůči sčítání, náhodný proces nazveme *stacionární*, pokud $X_t \stackrel{d}{=} X_{t+s}$ pro všechna $s, t \in T$, a *slabě stacionární*, pokud střední hodnota $E[X_t]$ i kovariance $\text{Cov}[X_{t+s}, X_t]$ jsou časově invariantní. Dále řekneme, že náhodný proces je *integrovatelný*, pokud $X_t \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pro všechna $t \in T$.

Definice 1.37 (Brzezniak a Zastawniak 2002, Williams 1991) Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a nechť $T \subset \mathbb{R}$. Potom posloupnost σ -algeber $\{\mathcal{F}_t : t \in T\}$ (dále jen $\{\mathcal{F}_t\}$, není-li třeba zdůraznit charakter množiny T) nazýváme *filtraci*, pokud

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F},$$

pro všechna $s, t \in T$ taková, že $s < t$. Pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) vybavený filtrací $\{\mathcal{F}_t\}$ nazýváme *prostor s filtrací* a zapisujeme $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$.

Poznámka: Intuitivně lze filtraci interpretovat jako veškerou dostupnou informaci o $\omega \in \Omega$ akumulovanou až do času t (Williams 1991).

Definice 1.37 (Applebaum 2009, Cinlar 2011) Nechť $\{X_t\}$ je náhodný proces na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) a nechť

$$\mathcal{F}_t := \sigma(X_s : s \leq t), \forall t \in T.$$

Takovouto filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$ potom nazýváme *přirozená filtraci* náhodného procesu $\{X_t\}$.

Definice 1.38 (Applebaum 2009, Klenke 2008) Nechť $\{X_t\}$ je náhodný proces na prostoru s filtrací $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Řekneme, že proces $\{X_t\}$ je *adaptovaný filtraci* $\{\mathcal{F}_t\}$ (nebo \mathcal{F}_t -*adaptovaný* nebo pouze *adaptovaný*, pokud je zřejmé, o jakou filtraci se jedná) pokud X_t je \mathcal{F}_t -měřitelná pro všechna $t \in T$.

Poznámka: (Applebaum 2009) Každý náhodný proces je adaptovaný své vlastní přirozené filtraci. Dále z *Tvrzení 1.13* plyne, že pro \mathcal{F}_t -adaptovaný proces $\{X_t\}$ platí $E[X|\mathcal{F}_t] = X$. V dalším průběhu práce budeme využívat kompaktnější notace $E_s[*] := E[*|\mathcal{F}_s]$.

Tvrzení 1.14 (Adaptované procesy) (Applebaum 2009) Nechť $a, b \in \mathbb{R}$ jsou libovolné konstanty a nechť $\{X_t\}$ a $\{Y_t\}$ jsou adaptované procesy na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Potom následující procesy jsou také adaptované:

- (i) $\{aX_t + bY_t\}$;
- (ii) $\{X_t Y_t\}$;
- (iii) $\{h(X_t)\}$, kde h je borelovská funkce;

Důkaz: *Tvrzení 1.14* je důsledkem měřitelnosti procesů (i), (ii) a (iii), jež plyne z *Věty 1.3*. ■

1.3.2 Martingaly a čas zastavení

Definice 1.39 (Klenke 2008) Nechť $\{X_t\}$ je integrovatelný adaptovaný náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Potom proces nazveme (vzhledem k filtraci $\{\mathcal{F}_t\}$):

- (i) *Martingal*, pokud $E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s, \forall s, t \in T$ taková, že $s < t$;
- (ii) *Submartingal*, pokud $E[X_t|\mathcal{F}_s] \geq X_s, \forall s, t \in T$ taková, že $s < t$;

(iii) *Supermartingal*, pokud $E[X_t|\mathcal{F}_s] \leq X_s, \forall s, t \in T$ taková, že $s < t$.

Poznámka: (Williams 1991) Platí, že náhodný proces $\{X_t\}$ je supermartingal právě tehdy, když $\{-X_t\}$ je submartingal, a že náhodný proces $\{X_t\}$ je martingal právě tehdy, když je sub- i supermartingal zároveň.

Tvrzení 1.15 (Střední hodnota martingalu) (Jacod a Protter 2003) Necht' náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ je martingal na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Potom funkce $t \rightarrow E[X_t]$ je konstantní a tedy $E[X_t] = E[X_0]$ pro všechna $t \in T = [0, +\infty)$.

Důkaz: S využitím vlastností martingalů a podmíněné střední hodnoty dostáváme $E[X_t] = E[E[X_t|\mathcal{F}_s]] = E[X_s]$ pro všechna $s, t \in T, s < t$. ■

Poznámka: (Williams 1991) Obdobně lze ukázat, že $t \rightarrow E[X_t]$ je rostoucí funkce u submartingalu a klesající funkce u supermartingalu.

Věta 1.8 (Konvergence martingalů) (Jacod a Protter 2003, Williams 1991) Necht' náhodný proces $\{X_t\}$ je supermartingal na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, jež splňuje $\sup_t E[|X_t|] < +\infty$. Potom skoro jistě existuje limita $X := \lim_{t \rightarrow +\infty} X_t$ a platí, že $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ skoro jistě.

Důkaz: Důkaz *Věty 1.8* je k nalezení například v (Jacod a Protter 2003). ■

Poznámka: *Věta 1.8* platí zřejmě i pro martingaly $\{X_t\}$ takové, že $\sup_t E[|X_t|] < +\infty$, jelikož každý martingal je zároveň i supermartingal.

Definice 1.40 (Applebaum 2009) Náhodná proměnná $\tau : \Omega \rightarrow T \cup \{+\infty\}$ na prostoru s filtrací $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ se nazývá *čas zastavení*, pokud každá událost $\{\tau \leq t\} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \in T \cup \{+\infty\}$.

Poznámka: (Klenke 2008) Jak již bylo zmíněno dříve, σ -algebra \mathcal{F}_t reflektuje akumulovanou znalost procesu do času t . Tedy pro čas zastavení τ je možné rozhodnout, zda událost $\{\tau \leq t\}$ nastala či ne na základě informace dostupné v čase t . Pro spočetnou množinu T je τ čas zastavení právě tehdy, když $\{\tau = t\} \in \mathcal{F}_t$ pro všechna $t \in T \cup \{+\infty\}$.

Definice 1.41 (Applebaum 2009, Shreve 2004) Necht' $m \in \mathbb{R}$ je reálná konstanta a $\{X_t : t \geq 0\}$ je náhodný proces na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$. Potom náhodnou proměnnou $\tau_m : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$

$$\tau_m := \inf_t \{X_t \geq m\}$$

nazveme *čas prvního vstupu do úrovně m* náhodného procesu $\{X_t\}$.

Poznámka: (Applebaum 2009, Shreve 2004) Jedná se tedy zřejmě o čas, kdy náhodný proces $\{X_t\}$ poprvé dosáhne pevně dané konstantní úrovně m . Není těžké ukázat, že náhodná veličina τ_m je časem zastavení ve smyslu *Definice 1.40*.

1.4 Poznámky ke stochastické integraci a SDR

Jelikož na podrobné seznámení se s vlastnostmi *stochastického integrálu* a *stochastických diferenciálních rovnic (SDR)* není v této práci prostor, omezíme se na stručné nastínění obou výše uvedených pojmů bez formálních definic. Další informace a detaily lze nalézt například v (Protter 1990), (Applebaum 2009), (Øksendal 2003), (Shreve 2004) a mnoha dalších.

Stochastický integrál byl představen roku 1941 japonským fyzikem Kiyoshi Itôem a dává formální smysl výrazu

$$\int_0^t X_u dY_u \quad (1.24)$$

pro vhodné náhodné procesy $\{X_t : t \geq 0\}$ a $\{Y_t : t \geq 0\}$ zvané *integrand* a *integrátor*, respektive.

Podobně jako u obyčejných a parciálních diferenciálních rovnic (ODR a PDR), dva hlavní problémy u stochastických diferenciálních rovnic (SDR) spočívají v určení existence a jednoznačnosti hledaného řešení. Abychom zajistili existenci a jednoznačnost, je často nutné klást dodatečné omezení na koeficienty vyskytující se v rovnici. Stochastické diferenciální rovnice, se kterými se setkáme v této práci, nabývají tvaru

$$dX_t = a(t, X_t) dt + b(t, X_t) dY_t, \quad X_0 = x_0, \quad (1.25)$$

kde $X_0 = x_0$ je okrajová podmínka, a vždy mají jednoznačné řešení, kterým je náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$, který splňuje

$$X_t = \int_0^t a(u, X_u) du + \int_0^t b(u, X_u) dY_u, \quad X_0 = x_0. \quad (1.26)$$

2 Lévyho procesy

Lévyho procesy reprezentují jednu konkrétní skupinu náhodných procesů. Nesou jméno po Paulu Lévy, francouzském matematikovi, univerzitním profesorovi a členovi Francouzské akademie věd, jež byl jeden z otců zakladatelů moderní teorie náhodných procesů. Byl prvním, kdo přispěl k této oblasti stochastických procesů svým článkem z roku 1934 *Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires*, volně přeloženo jako *O integrálech, jejichž prvky jsou nezávislé náhodné proměnné*. V posledních letech, především s rozvojem počítačové technologie, se Lévyho procesy začaly hojně využívat v oblasti finančního modelování (Lévy 1934, Swishchuk 2009).

2.1 Obecná teorie Lévyho procesů

V této kapitole definujeme Lévyho procesy a *nekonečně dělitelná rozdělení* a budeme se zabývat jejich vzájemným vztahem a vybranými teoretickými poznatky.

Definice 2.1 (Kyprianou 2006, Winkel 2010) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor. Reálný náhodný proces $\{X_t : t \geq 0\}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) takový, že $P(X_0 = 0) = 1$, nazveme *Lévyho proces*, splňuje-li následující:

- (i) $X_{t+s} - X_t \stackrel{d}{=} X_s$ pro všechna $s, t \geq 0$ (*stacionární přírůstky*);
- (ii) $X_t - X_s$ je nezávislá s $\{X_u : u \leq s\}$ pro všechna $0 \leq s \leq t$ (*nezávislé přírůstky*);
- (iii) Trajektorie $\{X_t\}$ jsou zprava spojité s limitou zleva skoro jistě (*càdlàg vlastnost*).

Càdlàg vlastnost můžeme chápat jako zeslabení požadavku spojitosti procesu. Dovolíme Lévyho procesům mít skoky, ale jejich trajektorie musí být zprava spojité tak, že

$$\lim_{s \downarrow t} X_s = X_t, \quad (2.1)$$

a limita zleva musí existovat, tedy

$$X_{t-} := \lim_{s \uparrow t} X_s. \quad (2.2)$$

Potom skok procesu v čase t označíme $\Delta X_t := X_t - X_{t-}$ a proces označíme jako *càdlàg*. Akronym *càdlàg* pochází z francouzského *continue à droite et limites à gauche*, což přeloženo do angličtiny znamená *right-continuous with left limits* a proto je pro *càdlàg* procesy někdy používána zkratka *RCLL* procesy. Je zřejmé, že každý proces, jehož trajektorie jsou spojité, je také *càdlàg* (Barndorff-Nielsen a Shephard 2012).

Poznámka: (Barndorff-Nielsen a Shephard 2012) Je velmi běžné setkat se s procesy, jež obsahují takovéto skoky ve finančním modelování. Skoky mohou být způsobeny například výplatou dividend, zveřejněním finančních reportů, mikroselháním trhu z důvodů nedostatečné likvidity, makroekonomickými vyhlídkami a podobně.

Definice 2.2 (Kyprianou 2006, Winkel 2010) Necht' Y je náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Řekneme, že Y je *nekonečně dělitelná* (nebo že má *nekonečně dělitelné rozdělení*), pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ existuje posloupnost i.i.d. náhodných proměnných $Y_1^{(n)}, \dots, Y_n^{(n)}$ taková, že

$$Y \stackrel{d}{=} Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)}.$$

Tvrzení 2.1 (Lévyho procesy a nekonečně dělitelná rozdělení) (Applebaum 2009, Winkel 2010) Necht' $\{X_t\}$ je Lévyho proces na (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom X_t je nekonečně dělitelná reálná náhodná veličina pro všechna $t \geq 0$.

Důkaz: Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ můžeme psát

$$X_t = Y_1^{(n)} + \dots + Y_n^{(n)},$$

kde každé $Y_i^{(n)}$ můžeme dále rozepsat

$$Y_i^{(n)} = X_{it/n} - X_{(i-1)t/n}.$$

Potom z (i) a (ii) v *Definici 2.1* plyne, že $Y_i^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$ jsou i.i.d. náhodné veličiny. ■

Věta 2.1 (Lévy-Khintchinův vzorec) (Kyprianou 2006, Winkel 2010) Necht' Y je reálná náhodná proměnná na (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom Y je nekonečně dělitelná s *charakteristickým exponentem* $\Psi_Y(\theta)$,

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y}] = e^{\Psi_Y(\theta)},$$

právě tehdy, když existuje *Lévyho triplet* $[\mu_Y, \sigma_Y, d\nu_Y(x)]$, kde $\mu_Y \in \mathbb{R}$, $\sigma_Y \geq 0$ a ν_Y je míra koncentrovaná na $\mathbb{R} - \{0\}$ splňující $\int_{\mathbb{R}} \inf\{1, x^2\} d\nu(x) < +\infty$, tak, že

$$\Psi_Y(\theta) = i\mu_Y\theta - \frac{1}{2}\sigma_Y^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta x \mathbf{1}_{\{|x|<1\}}(x) \right) d\nu_Y(x), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Důkaz: Důkaz *Věty 2.1* překračuje rozsah této práce a je k nahlédnutí například v (Sato 1999). ■

Poznámka: (Winkel 2010) Vidíme tedy, že charakteristická funkce nekonečně dělitelných rozdělání má specifickou strukturu. Parametr μ_Y nazýváme *koeficient driftu*, σ_Y *Brownův koeficient* a ν_Y *Lévyho míra*. Indikátorová funkce $\mathbf{1}_{\{|x|<1\}}$ zřejmě vrací hodnotu 1 pro $x < 1$ a hodnotu 0 jinak. Spolu s předpoklady kladenými na Lévyho míru tak zajišťuje konvergenci integrálu na pravé straně. V mnoha případech lze také využít absolutní spojitosti Lévyho míry ν_Y vůči Lebesgueově míře λ a podle Radon-Nikodýmovy věty označit $g_Y(x) := \frac{d\nu_Y(x)}{dx}$. Hustotu g_Y potom nazýváme *Lévyho hustota* nebo *hustota skoků*.

Nyní se dále zaměříme na vztah mezi nekonečně dělitelnými náhodnými veličinami a Lévyho procesy. Z *Tvrzení 2.1* je zřejmé, že pro každý Lévyho proces $\{X_t\}$ je náhodná veličina X_t nekonečně dělitelná pro všechna $t \geq 0$. S využitím techniky z důkazu *Tvrzení 2.1* lze odvodit, že pro každý Lévyho proces platí

$$\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}] = e^{t\Psi_X(\theta)}, \quad \forall t \geq 0, \tag{2.3}$$

kde $\Psi_X(\theta)$ nabývá tvaru dle *Věty 2.1*. Výraz $\Psi_X(\theta)$ budeme v tomto případě nazývat *charakteristický exponent Lévyho procesu* $\{X_t\}$ (Kyprianou 2006).

Tedy platí, že každý Lévyho proces $\{X_t\}$ může být plně charakterizován svým Lévyho tripletem $[\mu_X, \sigma_X, d\nu_X(x)]$. Naopak pro každý Lévyho triplet, jež splňuje podmínky dané *Větou 2.1*, existuje pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{F}, P) , na kterém se nachází Lévyho proces $\{X_t\}$ definovaný charakteristickým exponentem $\Psi_X(\theta)$ (Barndorff-Nielsen a Shephard 2012, Kyprianou 2006).

Je důležité zdůraznit, že z výše uvedených vět, tvrzení a vztahů plyne, že pro každé nekonečně dělitelné rozdělání existuje Lévyho proces $\{X_t\}$, jehož přírůstky se řídí příslušným nekonečně dělitelným rozděláním (Matsuda 2005, Sato 1999).

Předpokládejme nyní, že pro Lévyho proces $\{X_t\}$ platí $E[e^{\alpha X_t}] < +\infty$ (tedy že existuje momentová vytvořující funkce) pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ a pro všechna $t \geq 0$. Potom lze obdobným způsobem jako pro (2.3) ukázat, že

$$E[e^{\alpha X_t}] = e^{t\psi_X(\alpha)}, \quad \forall t \geq 0, \quad (2.4)$$

kde

$$\psi_X(\alpha) = \mu_X \alpha - \frac{1}{2} \sigma_X^2 \alpha^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{\alpha x} - 1 - \alpha x \mathbf{1}_{\{|x| < 1\}}(x) \right) d\nu_X(x). \quad (2.5)$$

V literatuře je $\psi_X(\alpha)$ též běžně označován jako charakteristický exponent daného Lévyho procesu (za předpokladu, že existuje). V průběhu této kapitoly budeme uvádět charakteristické exponenty Lévyho procesů ve tvaru (2.5), pokud má uvedený výraz smysl. V těchto případech můžeme s využitím vztahu (1.19) obdržet charakteristický exponent ve tvaru dle *Věty 2.1* vztahem $\Psi_X(\theta) = \psi_X(i\theta)$ (Winkel 2010).

Bližším zkoumáním Lévy-Khintchinova vzorce lze objevit zajímavé strukturální vlastnosti Lévyho procesů. Uvažujme Lévyho triplet $[\mu_X, \sigma_X, d\nu_X(x)]$ splňující podmínky dané *Větou 2.1*. Potom existuje Lévyho proces $\{X_t\}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) charakterizovaný tímto tripletem, jež lze rozložit na tři nezávislé Lévyho procesy a *lineární drift* $\mu_X t$ tak, že

$$X_t = \mu_X t + \sigma_X X_t^{(1)} + X_t^{(2)} + X_t^{(3)}, \quad (2.6)$$

kde $\{X_t^{(1)} : t \geq 0\}$ je *standardní Brownův pohyb*, $\{X_t^{(2)} : t \geq 0\}$ je *složený Poissonův proces* s intenzitou skoků určenou Lévyho mírou ν_X a $\{X_t^{(3)} : t \geq 0\}$ je martingal náležící $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pro všechna $t \geq 0$ se skoro jistě spočetným počtem skoků s méně než jednotkovou velikostí na každém konečném intervalu, jejichž chování je taktéž řízeno charakterem Lévyho míry ν_X . V podstatě lze říci, že komponenta $\{X_t^{(1)}\}$ představuje spojitou složku Lévyho procesu, komponenta $\{X_t^{(2)}\}$ je zodpovědná za chování *velkých skoků* (tedy skoků pro $|x| \geq 1$) a komponenta $\{X_t^{(3)}\}$ je zodpovědná za chování *malých skoků* (tedy skoků pro $|x| < 1$). Výsledek (2.6) se formálně nazývá *Lévy-Itôova dekompozice* a rigorózní formulace tohoto teorému včetně důkazu a definic výše uvedených procesů lze nalézt například v (Kyprianou 2006). Dále poznamenejme, že obecně platí, že suma nezávislých Lévyho procesů je opět Lévyho proces (Applebaum 2009, Kyprianou 2006, Schoutens 2003, Winkel 2010).

Lévy-Itôova dekompozice nám umožňuje lépe pochopit vlastnosti jednotlivých koeficientů Lévyho tripletu $[\mu_X, \sigma_X, d\nu_X(x)]$ procesu $\{X_t\}$. Koeficient driftu reprezentuje deterministický lineární drift procesu, zatímco Brownův koeficient představuje škálování standardního Brownova procesu. Velmi důležitá je potom Lévyho míra ν_X , jež určuje, jakým způsobem a v jaké magnitudě se objevují skoky Lévyho procesu. Obecně lze Lévyho procesy na základě vlastností míry ν_X klasifikovat do následujících třech kategorií:

- (i) *Lévyho procesy s nulovou Lévyho mírou* – procesy s $\nu_X \equiv 0$, což znamená, že daný proces nemá malé ani velké skoky a jeho trajektorie jsou tak skoro jistě spojité;
- (ii) *Lévyho procesy s konečnou aktivitou* – procesy s $\int_{\mathbb{R}} \nu_X dx < +\infty$, což znamená, že daný proces má konečný očekávaný počet malých i velkých skoků na konečném intervalu;
- (iii) *Lévyho procesy s nekonečnou aktivitou* – procesy s $\int_{\mathbb{R}} \nu_X dx = +\infty$, což znamená, že daný proces má na konečném intervalu konečný očekávaný počet velkých skoků, ale očekávaný počet malých skoků je nekonečný.

Lévyho proces dále nazveme *čistě skokový*, pokud ν_X je netriviální a přitom Brownův koeficient $\sigma_X = 0$ (Barndorff-Nielsen a Shephard 2012, Matsuda 2005, Schoutens 2003).

V *Kapitole 1.3.2* jsme zavedli pojem martingal. Existuje několik typů martingalů, jež lze zkonstruovat z libovolného integrovatelného Lévyho procesu. Některé takové martingaly shrnuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.2 (Lévyho procesy a martingaly) (Brody, Hughston a Mackie 2012, Cont a Tankov 2004) Necht' $\{X_t\}$ je integrovatelný Lévyho proces na prostoru s filtrací $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$, kde $\{\mathcal{F}_t\}$ je přirozená filtrace procesu $\{X_t\}$. Potom následující procesy jsou martingaly na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$:

- (i) $\left\{ \frac{e^{i\theta X_t}}{\mathbb{E}[e^{i\theta X_t}]} = e^{i\theta X_t - t\Psi_X(\theta)} : t \geq 0 \right\}$;
- (ii) $\left\{ \frac{e^{\alpha X_t}}{\mathbb{E}[e^{\alpha X_t}]} = e^{\alpha X_t - t\psi_X(\alpha)} : t \geq 0 \right\}$, pokud $\mathbb{E}[e^{\alpha X_t}] < +\infty$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$ a pro všechna $t \geq 0$;
- (iii) $\{M_t := X_t - \mathbb{E}[X_t] : t \geq 0\}$;
- (iv) $\{\mathcal{M}_t := M_t^2 - \mathbb{E}[M_t^2] : t \geq 0\}$, kde $\{M_t\}$ je definován v (iii) a za podmínky, že $X_t \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pro všechna $t \geq 0$.

Důkaz: Je třeba ukázat, že je splněna vlastnost (i) z *Definice 1.39*. Předpokládejme $0 \leq s \leq t$. Pro (ii) dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s[e^{\alpha X_t - t\psi_X(\alpha)}] &= \mathbb{E}_s[e^{\alpha(X_t - X_s)} e^{\alpha X_s}] e^{-t\psi_X(\alpha)} \\ &= \mathbb{E}[e^{\alpha X_{t-s}}] \mathbb{E}_s[e^{\alpha X_s}] e^{-t\psi_X(\alpha)} \\ &= e^{(t-s)\psi_X(\alpha)} e^{\alpha X_s} e^{-t\psi_X(\alpha)} \\ &= e^{\alpha X_s - s\psi_X(\alpha)}, \end{aligned}$$

a pro (iii) dostáváme:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_s[X_t - \mathbb{E}[X_t]] &= \mathbb{E}_s[(X_t - X_s) + X_s] - \mathbb{E}[X_t] \\ &= \mathbb{E}[X_t - X_s] + \mathbb{E}_s[X_s] - \mathbb{E}[X_t] \\ &= \mathbb{E}[X_t] - \mathbb{E}[X_s] + X_s - \mathbb{E}[X_t] \\ &= X_s - \mathbb{E}[X_s]. \end{aligned}$$

Při výpočtech jsme využili vlastností Lévyho procesů z *Definice 2.1* a vlastnosti nepodmíněné i podmíněné střední hodnoty z *Tvrzení 1.10* a *Tvrzení 1.13*. Důkazy částí (i) a (iv) zde vynecháme, jelikož se při nich využívá stejných technik, jaké jsou použity výše. ■

Věta 2.2 (Subordinace Lévyho procesu) (Cont a Tankov 2004) Necht' (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor a necht' $\{X_t : t \geq 0\}$ je Lévyho proces s charakteristickým exponentem $\Psi_X(\theta)$ (případně $\psi_X(\alpha)$) a necht' $\{S_t : t \geq 0\}$ je jiný čistě skokový Lévyho proces se skoro jistě neklesajícími trajektoriemi (takzvaný *subordinátor*) s charakteristickým exponentem $\Psi_S(\theta)$ (případně $\psi_S(\alpha)$). Potom náhodný proces $\{Z_t := X_{S_t} : t \geq 0\}$ je taktéž Lévyho proces a platí

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Z_t}] = e^{t\Psi_X(\Psi_S(\theta))}, \quad \forall t \geq 0,$$

případně

$$\mathbb{E}[e^{\alpha Z_t}] = e^{t\psi_X(\psi_S(\alpha))}, \quad \forall t \geq 0.$$

Důkaz: Důkaz Věty 2.2 překračuje rozsah této práce a je k nahlédnutí například v (Cont a Tankov 2004). ■

Poznámka: Věta 2.2 je obzvláště užitečná, jelikož nám umožňuje konstruovat nové Lévyho procesy z již známých. Navíc nám dává snadný způsob jak nalézt charakteristický exponent těchto nových procesů, jelikož se jedná o prostou kompozici charakteristického exponentu původního procesu a charakteristického exponentu použitého subordinátoru. Techniku subordinace si lze představit jako zavedení stochastického času, které může mít praktickou interpretaci jako takzvaný *business time*, jež představuje náhodný přítok informací na finanční trhy. Více o této interpretaci lze nalézt v (Geman, Madan a Yor 1998).

Dalším způsobem jak modifikovat již známé Lévyho procesy je přidáním *lineárního driftu* a *škálováním*. Předpokládejme, že $\{X_t\}$ je Lévyho proces s charakteristickým exponentem $\Psi_X(\theta)$. Potom můžeme definovat *rozšířený proces* $\tilde{X}_t := s(X_t + mt)$, kde $m \in \mathbb{R}$ je parametr lineárního driftu a $s > 0$ je škálovací parametr. Charakteristický exponent rozšířeného procesu pak můžeme vyjádřit jako

$$\Psi_{\tilde{X}}(\theta) = sm\alpha + \Psi_X(s\theta). \quad (2.7)$$

Analogický vztah také v případě jejich existence platí mezi $\psi_{\tilde{X}}(\alpha)$ a $\psi_X(\alpha)$. Dále lze ukázat, že pro distribuční funkci a hustotu (pokud existuje) přírůstků platí následující:

$$F_{\tilde{X}}(x) = \left(\frac{x-m}{s}\right) \quad a \quad f_{\tilde{X}}(x) = f_X\left(\frac{x-m}{s}\right)/s \quad (2.8)$$

A pro střední hodnotu a rozptyl potom dostáváme

$$E[\tilde{X}_t] = s(E[X_t] + mt) \quad a \quad \text{Var}[\tilde{X}_t] = s^2 \text{Var}[X_t]. \quad (2.9)$$

Poznamenejme, že vyšší momenty zůstávají beze změn (Hátle a Likeš 1972, Schoutens 2003).

2.2 Vybrané příklady Lévyho procesů

V této kapitole uvedeme některé konkrétní případy nekonečně dělitelných rozdělání a s nimi asociovaných Lévyho procesů, jež mají potencionální využití ve finančním modelování. Symbolem \sim budeme značit, že se daná náhodná proměnná řídí určitým pravděpodobnostním rozděláním.

2.2.1 Poissonův proces

Definice 2.3 (Kyprianou 2006) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělání na $(\mathbb{Z}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{Z}_0^+))$ s pravděpodobnostní funkcí

$$p_{\text{Po}}(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \lambda > 0,$$

nazýváme *Poissonovo rozdělání* $\text{Po}(\lambda)$. Lévyho proces $\{N_t : t \geq 0\}$ nazveme *Poissonův proces s intenzitou* λ , pokud $N_t \sim \text{Po}(\lambda t)$ pro všechna $t > 0$.

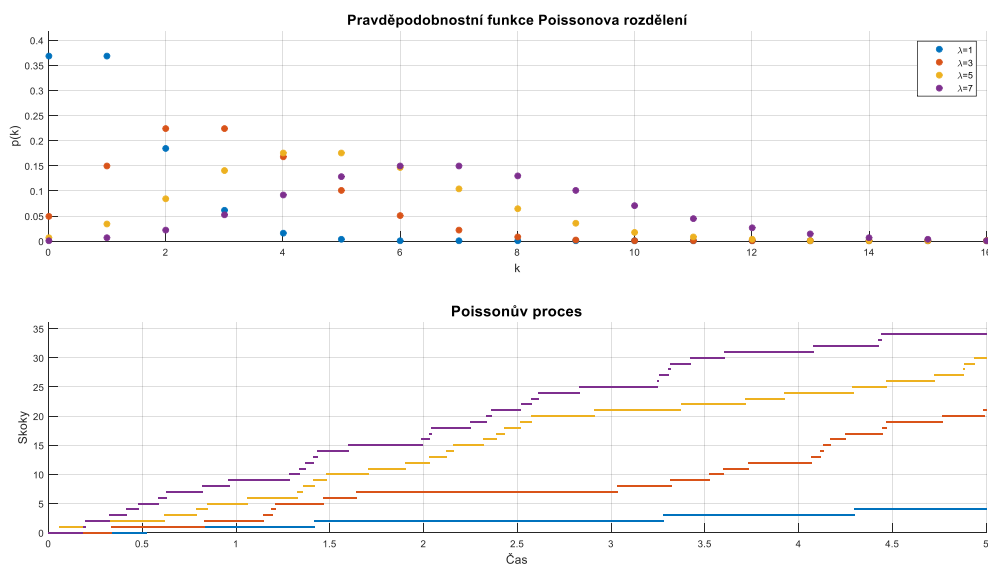
Poznámka: (Schoutens 2003) Poissonův proces je příkladem subordinátoru s konečnou aktivitou se skoky o jednotkové velikosti. Počet skoků na intervalu $(t, t + s)$, $s, t > 0$ se pak zřejmě řídí $\text{Po}(\lambda s)$ rozděláním.

Pro charakteristický exponent dostáváme:

$$E[e^{\alpha N_t}] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{\alpha k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(e^{\alpha} \lambda t)^k}{k!} \\
&= e^{\lambda t(e^{\alpha}-1)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

kde jsme využili známého vzorce pro rozvoj exponenciální funkce do nekonečné mocninné řady (viz. například (Zwillinger 2012)).



Obrázek 5: Poissonovo rozdělení a Poissonův proces

Z (2.10) již snadno získáme charakteristický exponent ve tvaru (2.5) a asociovaný Lévyho triplet, jež jsou spolu s důležitými momenty pravděpodobnostního rozdělení Poissonova procesu, které můžeme získat například s využitím vlastnosti (1.18), uvedeny v *Tabulce 1*, kde δ_1 je Diracova míra (viz. *Kapitola 1.2.1*). Různé pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení spolu s trajektoriemi příslušných Lévyho procesů jsou k vidění na *Obrázku 5*.

Parametry	$\lambda > 0$
Charakt. exponent	$\psi_N(\alpha) = \lambda(e^{\alpha} - 1), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Lévyho triplet	$[0, 0, \lambda\delta_1]$
Střední hodnota	$\lambda t, \quad \forall t > 0$
Rozptyl	$\lambda t, \quad \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$(\lambda t)^{-1/2}, \quad \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3 + (\lambda t)^{-1}, \quad \forall t > 0$

Tabulka 1: Vlastnosti Poissonova procesu (Kyprianou 2006, Schoutens 2003)

Poznámka: Je dobré si uvědomit, že nalezením Lévyho tripletu jsme také díky *Větě 2.1* v podstatě dokázali nekonečnou dělitelnost Poissonova rozdělení. Obdobně bez dalšího zdůrazňování ukážeme nekonečnou dělitelnost také ostatních rozdělení v této kapitole.

S využitím Poissonova procesu můžeme nyní definovat obecnější čistě skokový proces s konečnou aktivitou, kde již skoky nemusí mít deterministicky jednotkovou velikost.

Definice 2.4 (Schoutens 2003, Winkel 2010) Nechť $\{N_t\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ nechť $Y_k, k = 1, 2, \dots$ je posloupnost i.i.d. náhodných veličin vzájemně nezávislých s

$\{N_t\}$ a řídící se nějakým známým pravděpodobnostním rozdělením P_Y . Potom proces $\{C_t : t \geq 0\}$ definovaný jako

$$C_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

nazýváme *složený Poissonův proces*.

Poznámka: (Kyprianou 2006, Schoutens 2003) V případě, že $Y_k = 1$ pro všechna $k = 1, 2, \dots$, dostáváme běžný Poissonův proces. Dále dodržujeme běžnou konvenci, že prázdná suma je rovna 0 (tedy $C_t := 0$ pro $N_t = 0$).

Pro charakteristický exponent dostáváme:

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha C_t}] &= \sum_{n=0}^{+\infty} E[e^{\alpha \sum_{k=1}^n Y_k}] P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} E[e^{\alpha Y}]^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \\ &= e^{\lambda t (E[e^{\alpha Y}] - 1)}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde jsme využili, že veličiny Y_k jsou nezávislé a stejně rozdělené a pro přehlednost jsme vypustili dolní index k .

Dále předpokládáme, že existuje momentová vytvořující funkce $\phi_Y(\alpha)$ veličiny Y . Potom

$$E[e^{\alpha Y}] = \phi_Y(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} dP_Y(x), \quad (2.12)$$

a pro charakteristický exponent můžeme psát

$$\psi_C(\alpha) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (e^{\alpha x} - 1) dP_Y(x) = \lambda(\phi(\alpha) - 1). \quad (2.13)$$

Vybrané charakteristiky složeného Poissonova procesu shrnuje následující tabulka:

Parametry	$\lambda > 0$ a parametry rozdělení náhodné veličiny Y
Charakt. exponent	$\psi_C(\alpha) = \lambda(\phi(\alpha) - 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Lévyho triplet	$\left[\lambda \int_{ x <1} x dP_Y(x), 0, \lambda dP_Y(x) \right]$
Střední hodnota	$\lambda t E[Y], \forall t > 0$
Rozptyl	$\lambda t E[Y^2], \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$E[Y^3](\lambda t)^{-1/2} (E[Y^2])^{-3/2}, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3 + E[Y^4](\lambda t)^{-1} (E[Y^2])^{-2}, \forall t > 0$

Tabulka 2: Vlastnosti složeného Poissonova procesu (Kyprianou 2006, Schoutens 2003)

Vlastnosti složeného Poissonova procesu tedy velmi úzce souvisí s povahou rozdělení náhodných veličin Y , které spolu s intenzitou λ určují chování skoků procesu. Program, který generuje trajektorie složeného Poissonova procesu s normálně rozdělenými skoky (viz. *Kapitola 2.2.2*) je k nalezení v elektronické příloze této práce.

2.2.2 Brownův pohyb

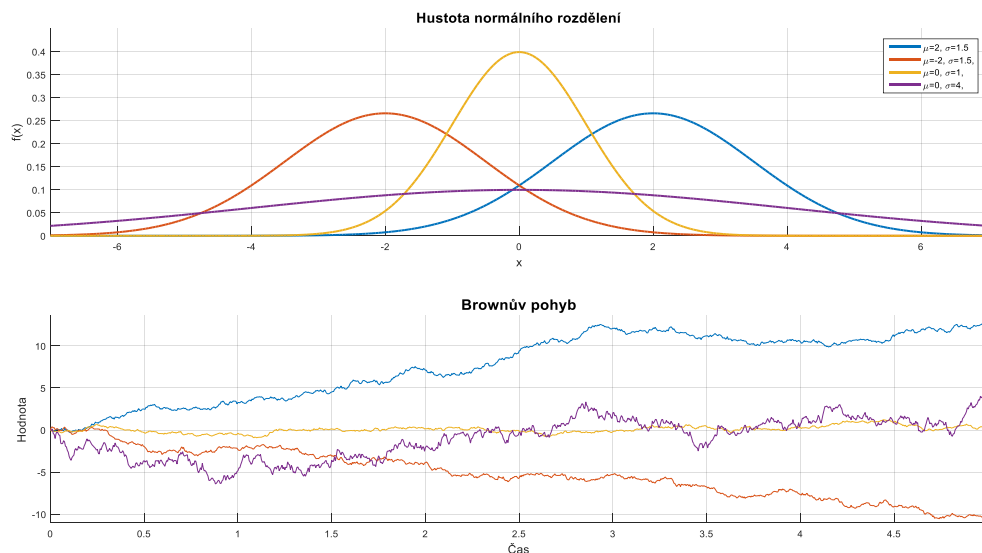
Historie Brownova pohybu sahá až do 19. století ke skotskému botanikovi Robertu Brownovi, který v roce 1828 pozoroval částičky pylu pod mikroskopem a popsal jejich fluktuující pohyb. Nicméně byl to až ve 20. století americký matematik Norbert Wiener, který definoval a popsal Brownův pohyb matematiky rigorózním způsobem. Na jeho počest tedy Brownův pohyb někdy nazýváme *Wienerův proces* (Schoutens 2003).

Definice 2.5 (Applebaum 2009, Hátle a Likeš 1972, Kyprianou 2006) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělení na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0,$$

nazýváme *normální rozdělení (Gaussovo rozdělení)* $N(\mu, \sigma^2)$ se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Lévyho proces $\{W_t : t \geq 0\}$ nazveme *Brownův pohyb (Wienerův proces)*, pokud jeho trajektorie jsou skoro jistě spojité a $W_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ pro všechna $t > 0$.

Poznámka: (Kyprianou 2006) Rozdělení $N(0,1)$ se nazývá *standardní normální rozdělení* a asociovaný Lévyho proces potom *standardní Brownův pohyb*.



Obrázek 6: Normální rozdělení a Brownův pohyb

Nyní určíme charakteristický exponent:

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha W_t}] &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} e^{-\frac{(x-\mu t)^2}{2\sigma^2 t}} dx \\ &= e^{\mu t \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 t \alpha^2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t(\mu+\sigma^2\alpha))^2}{2\sigma^2 t}} dx \\ &= e^{\mu t \alpha + \frac{1}{2}\sigma^2 t \alpha^2}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

kde jsme doplnili na čtverec a využili toho, že integrál přes celý nosič z hustoty libovolného pravděpodobnostního rozdělení je roven 1. Z výrazu (2.14) již okamžitě plyne tvar Lévyho tripletu a je zřejmé, že Brownův pohyb je proces s nulovou Lévyho mírou. Další zajímavé vlastnosti tohoto procesu jsou k nahlédnutí v *Tabulce 3* a na *Obrázku 6* jsou potom k vidění vybrané hustoty normálního rozdělení a příslušné trajektorie Brownova pohybu.

Parametry	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$
Charakt. exponent	$\psi_W(\alpha) = \mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2, \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Lévyho triplet	$[\mu, \sigma, 0]$
Střední hodnota	$\mu t, \forall t > 0$
Rozptyl	$\sigma^2 t, \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$0, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3, \forall t > 0$

Tabulka 3: Vlastnosti Brownova pohybu (Kyprianou 2006, Winkel 2010)

2.2.3 Proces skokové difuze

Uvažujme nyní proces, jež občas skáče, ale mezi skoky jsou jeho trajektorie spojitě. Takovýto proces můžeme získat kombinací Brownova pohybu a složeného Poissonova procesu. Existuje celá rodina takovýchto procesů v závislosti na volbě rozdělení skoků. My se zde budeme zabývat pouze speciálním případem, kdy jsou skoky složeného Poissonova procesu normálně rozdělené (Cont a Tankov 2004, Tankov a Voltchkova 2009).

Definice 2.6 (Tankov a Voltchkova 2009) Nechť $\{W_t\}$ je Brownův pohyb s parametry $\mu \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$, $\{N_t\}$ je Poissonův proces s intenzitou $\lambda > 0$ a $Y_k, k = 1, 2, \dots$ je posloupnost i.i.d. náhodných proměnných s rozdělením $N(m, s^2)$ a necht' jsou všechny uvedené komponenty navzájem nezávislé. Potom Lévyho proces $\{D_t : t \geq 0\}$ definovaný jako

$$D_t := W_t + \sum_{k=1}^{N_t} Y_k,$$

nazýváme *proces skokové difuze (JD proces)*.

Vzhledem k nezávislosti komponent můžeme využít vlastnosti (1.20) spolu s již provedenými kalkulacemi (2.11) a (2.14) a snadno tak získat charakteristický exponent, Lévyho triplet a momenty procesu skokové difuze. Výše zmiňované atributy jsou shrnuty v *Tabulce 4*, kde $E[Y] = m$, $E[Y^2] = m^2 + s^2$, $E[Y^3] = m^3 + 3ms^2$ a $E[Y^4] = m^4 + 6m^2s^2 + 3s^4$ a

$$dP_Y(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} dx.$$

Parametry	$\mu \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{R}, \sigma > 0, s > 0, \lambda > 0$
Charakt. exponent	$\psi_D(\alpha) = \mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \lambda(e^{m\alpha + \frac{1}{2}s^2\alpha^2} - 1), \forall \alpha \in \mathbb{R}$
Lévyho triplet	$\left[\mu + \lambda \int_{ x <1} x dP_Y(x), \sigma, \lambda dP_Y(x) \right]$
Střední hodnota	$t(\mu + \lambda E[Y]), \forall t > 0$
Rozptyl	$t(\sigma^2 + \lambda E[Y^2]), \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$\lambda t E[Y^3] (\sigma^2 t + \lambda t E[Y^2])^{-3/2}, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3 + \lambda t E[Y^4] (\sigma^2 t + \lambda t E[Y^2])^{-2}, \forall t > 0$

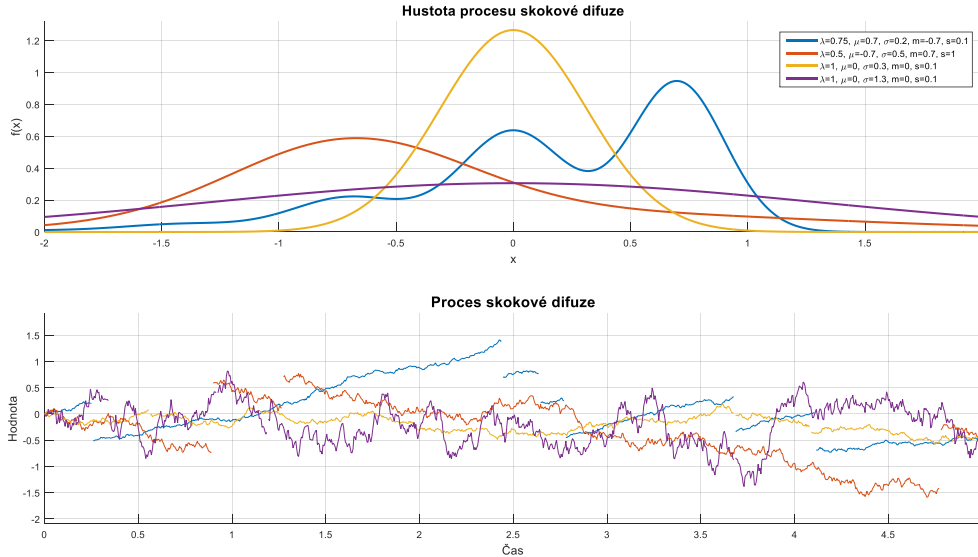
Tabulka 4: Vlastnosti procesu skokové difuze (Cont a Tankov 2004, Matsuda 2004, Tankov a Voltchkova 2009)

Asociované nekonečně dělitelné rozdělení na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ potom nazýváme *rozdělení skokové difuze* $JD(\mu, \sigma^2, m, s^2, \lambda)$ a jeho hustotu můžeme vyjádřit jako

$$f_{JD}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 + s^2k)}} e^{-\frac{(x-\mu-mk)^2}{2(\sigma^2+s^2k)}} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (2.15)$$

$$x \in \mathbb{R}, \lambda, \sigma, s > 0, \mu, m \in \mathbb{R},$$

přičemž platí $D_t \sim JD(\mu t, \sigma^2 t, m, s^2, \lambda t)$ pro všechna $t > 0$. Grafy hustoty (2.15) a trajektorie procesu skokové difuze pro různé kombinace parametrů můžeme pozorovat na *Obrázku 7* (Brody, Hughston a Mackie 2012, Cont a Tankov 2004).



Obrázek 7: Rozdělení skokové difuze a proces skokové difuze

2.2.4 Variance gamma proces

Definice 2.7 (Hátle a Likeš 1972, Schoutens 2003) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělení na $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+))$, kde $\mathbb{R}_0^+ := [0, +\infty)$, s hustotou pravděpodobnosti

$$f_{\text{Gamma}}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}, \quad x \geq 0, a, b > 0,$$

kde Γ je standardní gamma funkce (viz. například (Zwillinger 2012)), nazýváme *gamma rozdělení* $\text{Gamma}(a, b)$. Lévyho proces $\{G_t : t \geq 0\}$ nazveme *gamma proces*, pokud $G_t \sim \text{Gamma}(at, b)$ pro všechna $t > 0$.

Poznámka: (Kyprianou 2006) Rozdělení $\text{Gamma}(1, b)$ nazýváme *exponenciální rozdělení* $\text{Exp}(b)$, jehož hustota f_{Exp} má výrazně jednodušší tvar, jelikož $\Gamma(1) = 1$.

Gamma proces je příkladem subordinátoru s nekonečnou aktivitou. Kalkulace charakteristického exponentu probíhá následovně:

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha G_t}] &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \frac{b^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-bx} dx \\ &= \frac{1}{(1 - \alpha/b)^{at}} \int_0^{+\infty} \frac{(b(1 - \alpha/b))^{at}}{\Gamma(at)} x^{at-1} e^{-xb(1 - \alpha/b)} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 - \alpha/b)^{at}}, \quad \forall \alpha < b, \quad (2.16)$$

kde jsme využili toho, že integrál přes celý nosič z hustoty libovolného pravděpodobnostního rozdělení je roven 1. Nicméně forma Lévyho tripletu není z (2.16) zřejmá. Abychom (2.16) převedli do vhodného tvaru, využijeme takzvaného *Frullaniho integrálu* (viz. například (Kyprianou 2006)), kdy lze ukázat, že pro libovolné $a, b > 0$ a $c \in \mathbb{R}$ platí

$$\frac{1}{(1 - c/b)^a} = e^{\int_0^{+\infty} (e^{cx} - 1)ax^{-1}e^{-bx} dx}. \quad (2.17)$$

Charakteristický exponent má tedy s využitím (2.17) tvar

$$\psi_G(\alpha) = -a \ln \left(1 - \frac{\alpha}{b}\right) = \int_0^{+\infty} (e^{ax} - 1) \frac{a}{x} e^{-bx} dx, \quad \forall \alpha < b, \quad (2.18)$$

ze kterého lze již snadno určit podobu Lévyho míru a jednoduchou integrací nalezneme hodnotu koeficientu driftu tak, aby kompenzoval poslední část integrálu ve výrazu (2.5). Lévyho triplet gamma procesu je tak

$$\left[\frac{a(1 - e^{-b})}{b}, 0, \frac{a}{x} e^{-bx} \mathbf{1}_{\{x>0\}}(x) dx \right]. \quad (2.19)$$

Střední hodnota gamma procesu $E[G_t] = at/b, \forall t > 0$ a rozptyl $\text{Var}[G_t] = at/b^2, \forall t > 0$. Program vykreslující hustoty gamma rozdělení a generující trajektorie gamma procesu je k nalezení v elektronické příloze této práce (Kyprianou 2006, Schoutens 2003).

Nyní si představíme zástupce čistě skokových procesů s nekonečnou aktivitou se skoky v oboru reálných čísel, který vznikne technikou subordinace představené ve *Větě 2.2*.

Definice 2.8 (Madan, Carr a Chang 1998) Necht' $\{W_t\}$ je Brownův pohyb s parametry $\vartheta \in \mathbb{R}$ a $\sigma > 0$ a necht' $\{G_t\}$ je gamma proces s parametry $a = 1/v$ a $b = 1/v$ pro $v > 0$. Potom Lévyho proces $\{V_t : t \geq 0\}$, definovaný jako $V_t := W_{G_t}$, nazveme *variance gamma proces (VG) proces*.

Poznámka: Jelikož zřejmě $E[G_t] = t, \forall t \geq 0$, variance gamma proces si můžeme představit jako Brownův pohyb pozorovaný na nové stochastické časové škále, která je dána subordinujícím gamma procesem (viz. také poznámka pod *Větou 2.2*).

Variance gamma proces se řídí *variance gamma rozdělením* $\text{VG}(\vartheta t, \sigma\sqrt{t}, v/t)$ (někde také nazývané *zobecněné Laplaceovo rozdělení*) na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pro všechna $t > 0$. Hustota rozdělení $\text{VG}(\vartheta, \sigma, v)$ je dána funkcí

$$f_{\text{VG}}(x) = \frac{\sqrt{2}e^{\vartheta x/\sigma^2}}{v^{1/v}\sigma\sqrt{\pi}\Gamma(1/v)} \left(\frac{x^2}{2\sigma^2/v + \vartheta^2}\right)^{\frac{1}{2v}-\frac{1}{4}} K_{\frac{1}{v}-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt{x^2(2\sigma^2/v + \vartheta^2)}}{\sigma^2}\right), \quad (2.20)$$

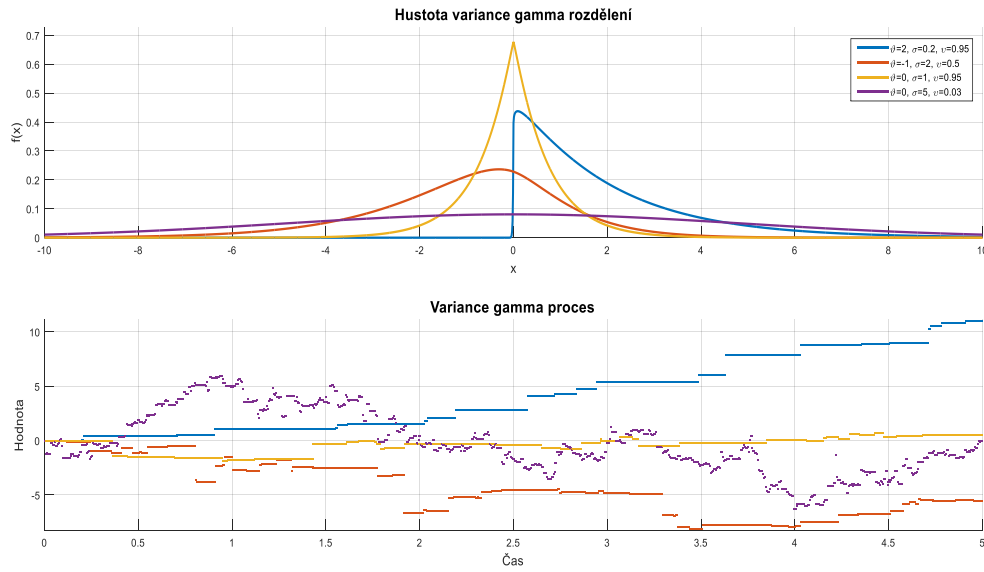
$$x \in \mathbb{R}, \vartheta \in \mathbb{R}, \sigma, v > 0,$$

kde K_a je modifikovaná Besselova funkce druhého druhu s indexem a (dle řazení Besselovských funkcí v programu MathWorks MATLAB, viz. (MathWorks 2016)) (Madan, Carr a Chang 1998).

S využitím *Věty 2.2* a již vypočtených charakteristických exponentů Brownova pohybu a gamma procesu můžeme nalézt charakteristický exponent variance gamma procesu

$$\begin{aligned}
\psi_V(\alpha) &= \psi_G(\psi_W(\alpha)) \\
&= -\frac{1}{v} \ln \left(1 - \vartheta v \alpha - \frac{\sigma^2 v}{2} \alpha^2 \right), \quad \forall \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2), \\
\alpha_{1,2} &= \left(-\vartheta v \pm \sqrt{\vartheta^2 v^2 + 2\sigma^2 v} \right) / \sigma^2 v.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Poznámka: (Schoutens 2003) Variance gamma proces $\{V_t\}$ lze také vyjádřit jako rozdíl $V_t = G_t^{(+)} - G_t^{(-)}$ dvou nezávislých gamma procesů $\{G_t^{(+)} : t \geq 0\}$ s parametry $a, b^{(+)} > 0$, a $\{G_t^{(-)} : t \geq 0\}$ s parametry $a, b^{(-)} > 0$, kde $a := 1/v$, $b^{(+)} := 1/\left(v/2\left(\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/v} + \theta\right)\right)$ a $b^{(-)} := 1/\left(v/2\left(\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/v} - \theta\right)\right)$.



Obrázek 8: Variance gamma rozdělení a variance gamma proces

S využitím výrazu (2.21) a zapojením Frullaniho integrálu či s využitím reprezentace variance gamma procesu jako rozdílu dvou nezávislých gamma procesů, jak je popsáno výše, můžeme určit, že $\sigma_V = 0$, a dále

$$d\nu_V(x) = \frac{e^{\vartheta x/\sigma^2}}{v|x|} e^{-\frac{\sqrt{2/v+\vartheta^2/\sigma^2}}{\sigma}|x|} dx \tag{2.22}$$

a kvůli kompenzaci poslední části integrálu ve výrazu (2.5)

$$\mu_V = \int_{-1}^1 x d\nu_V(x). \tag{2.23}$$

Vlastnosti variance gamma procesu shrneme v *Tabulce 5* a hustoty variance gamma rozdělení spolu s trajektoriemi procesu jsou vyobrazeny na *Obrázku 8*.

Parametry	$\vartheta \in \mathbb{R}, \sigma > 0, v > 0$
Charakt. exponent	$\psi_V(\alpha) = -\frac{1}{v} \ln \left(1 - \vartheta v \alpha - \frac{\sigma^2 v}{2} \alpha^2 \right), \quad \forall \alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$ $\alpha_{1,2} = \left(-\vartheta v \pm \sqrt{\vartheta^2 v^2 + 2\sigma^2 v} \right) / \sigma^2 v$

Lévyho triplet	$[\mu_V, 0, dv_V(x)]$
Střední hodnota	$\vartheta t, \forall t > 0$
Rozptyl	$t(\vartheta^2 v + \sigma^2), \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$(2\vartheta^3 v^2 + 3\sigma^2 \vartheta v)t^{-1/2}(\vartheta^2 v + \sigma^2)^{-3/2}, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3t^{-1}(t + 2v - \sigma^4 v(\vartheta^2 v + \sigma^2)^{-2}), \forall t > 0$

Tabulka 5: Vlastnosti variance gamma procesu (Madan, Carr a Chang 1998, Schoutens 2003)

2.2.5 Normální inverzní gaussovský proces

Definice 2.9 (Kyprianou 2006, Rachev *et al.* 2011, Schoutens 2003) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělení na $(\mathbb{R}_0^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_0^+))$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f_{IG}(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} e^{-\frac{(c-\zeta x)^2}{2x}}, \quad x \geq 0, \quad c, \zeta > 0,$$

nazýváme *inverzní gaussovské (IG) rozdělení* $IG(c, \zeta)$. Lévyho proces $\{I_t : t \geq 0\}$ nazveme *inverzní gaussovský proces*, pokud $I_t \sim IG(ct, \zeta)$ pro všechna $t > 0$.

Poznámka: (Kyprianou 2006) Inverzní gaussovské rozdělení je rozdělení náhodné veličiny τ_c , která představuje čas prvního vstupu Brownova pohybu s parametry $\zeta > 0$ a $\sigma = 1$ do úrovně $c > 0$ (viz. *Definice 1.41*).

Inverzní gaussovský proces je po gamma procesu dalším příkladem subordinátoru s nekonečnou aktivitou. Kalkulace charakteristického exponentu probíhá následovně:

$$\begin{aligned} E[e^{\alpha I_t}] &= \int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \frac{ct}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} e^{-\frac{(ct-\zeta x)^2}{2x}} dx \\ &= e^{-ct(\sqrt{\zeta^2-2\alpha}-\zeta)} \int_0^{+\infty} \frac{ct}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} e^{-\frac{(ct-x\sqrt{\zeta^2-2\alpha})^2}{2x}} dx \\ &= e^{-ct(\sqrt{\zeta^2-2\alpha}-\zeta)}, \quad \forall \alpha \leq \zeta^2/2, \end{aligned} \quad (2.24)$$

kde jsme opět využili toho, že integrál přes celý nosič z hustoty libovolného pravděpodobnostního rozdělení je roven 1. Charakteristický exponent má tedy formu

$$\psi_I(\alpha) = -c(\sqrt{\zeta^2-2\alpha}-\zeta), \quad \forall \alpha \leq \zeta^2/2. \quad (2.25)$$

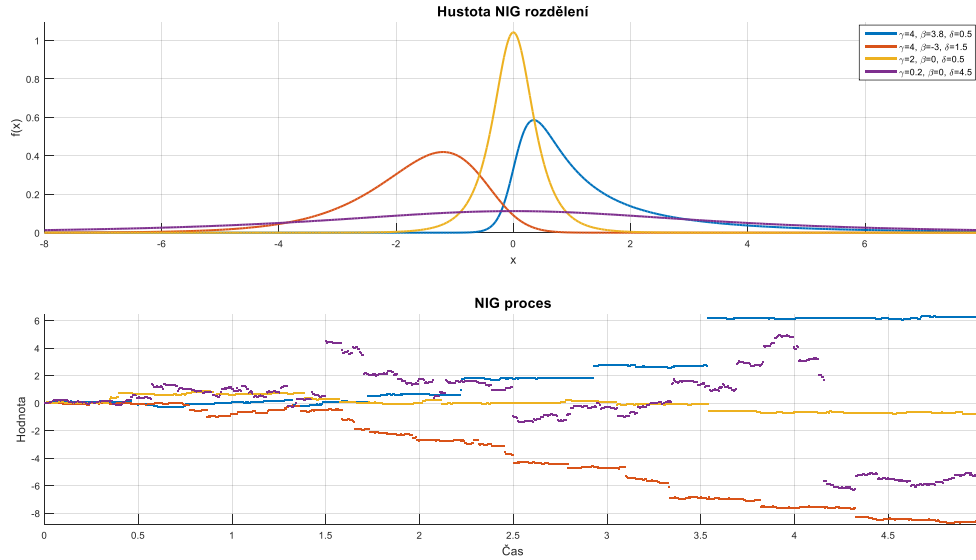
a Lévyho triplet nabývá tvaru

$$\left[\frac{2c}{\zeta} \int_0^\zeta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy, 0, \frac{c}{\sqrt{2\pi}x^{3/2}} e^{-\frac{\zeta^2 x}{2}} \mathbf{1}_{(x>0)} dx \right]. \quad (2.26)$$

Určení Lévyho tripletu z výrazu (2.24) není triviální a detaily lze nalézt například v (Kyprianou 2006). Střední hodnota IG procesu $E[I_t] = ct/\zeta, \forall t > 0$ a rozptyl $\text{Var}[I_t] = ct/\zeta^3, \forall t > 0$. Program vykreslující hustoty inverzního gaussovského rozdělení a generující trajektorie příslušného Lévyho procesu je k nalezení v elektronické příloze této práce (Brockwell a Lindner 2012, Schoutens 2003).

Obdobně jako v kapitole předchozí nyní využijeme techniku subordinace a představíme si dalšího zástupce čistě skokových procesů s nekonečnou aktivitou a se skoky v oboru reálných čísel.

Definice 2.10 (Barndorff-Nielsen 1997) Necht' $\{W_t\}$ je Brownův pohyb s parametry $\beta \in \mathbb{R}$ a $\sigma = 1$ a necht' $\{I_t\}$ je inverzní gaussovský proces s parametry $\delta > 0$ a $\zeta = \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}$ pro $\gamma > 0$ a $\beta \in (-\gamma, \gamma)$. Potom Lévyho proces $\{R_t : t \geq 0\}$, definovaný jako $R_t := W_{I_t}$, nazveme *normální inverzní gaussovský proces (NIG) proces*.



Obrázek 9: NIG rozdělení a NIG proces

NIG proces se řídí *normálním inverzním gaussovským rozdělením* $\text{NIG}(\gamma, \beta, \delta t)$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ pro všechna $t > 0$. Hustota rozdělení $\text{NIG}(\gamma, \beta, \delta)$ je dána funkcí

$$f_{\text{NIG}}(x) = \frac{\gamma\delta}{\pi} e^{\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2} + \beta x} \frac{K_1(\gamma\sqrt{\delta^2 + x^2})}{\sqrt{\delta^2 + x^2}}, \quad (2.27)$$

$$x \in \mathbb{R}, \gamma, \delta > 0, \beta \in (-\gamma, \gamma),$$

kde K_1 je modifikovaná Besselova funkce druhého druhu s indexem 1 (dle řazení Besselovských funkcí v programu MathWorks MATLAB, viz. (MathWorks 2016)) (Rydborg 1997).

S využitím *Věty 2.2* a již vypočtených charakteristických exponentů Brownova pohybu a inverzního gaussovského procesu můžeme opět nalézt charakteristický exponent NIG procesu

$$\begin{aligned} \psi_R(\alpha) &= \psi_I(\psi_W(\alpha)) \\ &= -\delta \left(\sqrt{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \right), \quad \forall \alpha \in [-\beta - \gamma, -\beta + \gamma], \end{aligned} \quad (2.28)$$

Určení podoby Lévyho tripletu z výrazu (2.28) je netriviální záležitostí, jež je diskutována například v (Barndorff-Nielsen 1997). Pro Brownův koeficient dostáváme $\sigma_R = 0$, pro Lévyho míru platí

$$d\nu_R(x) = \frac{\gamma\delta K_1(\gamma|x|)}{\pi|x|} e^{\beta x} dx \quad (2.29)$$

a pro koeficient driftu pak

$$\mu_R = \frac{2\gamma\delta}{\pi} \int_0^1 \sinh(\beta x) K_1(\gamma x) dx. \quad (2.30)$$

Vlastnosti NIG procesu nalezneme shrnuté v *Tabulce 6* a hustoty NIG rozdělení spolu s trajektoriemi procesu jsou vyobrazeny na *Obrázku 9*.

Parametry	$\gamma > 0, \delta > 0, \beta \in (-\gamma, \gamma)$
Charakt. exponent	$\psi_R(\alpha) = -\delta \left(\sqrt{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2} \right), \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $\alpha_{1,2} = -\beta \pm \gamma$
Lévyho triplet	$[\mu_R, 0, d\nu_R(x)]$
Střední hodnota	$\beta\delta t / \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}, \forall t > 0$
Rozptyl	$\gamma^2\delta t / (\gamma^2 - \beta^2)^{3/2}, \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$3\beta\gamma^{-1}(\delta t)^{-1/2}(\gamma^2 - \beta^2)^{-1/4}, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3 \left(1 + (\gamma^2 + 4\beta^2) (\gamma^2\delta t \sqrt{\gamma^2 - \beta^2})^{-1} \right), \forall t > 0$

Tabulka 6: Vlastnosti NIG procesu (Barndorff-Nielsen 1997, Rydberg 1997)

2.2.6 Meixnerův proces

Definice 2.11 (Schoutens 2002) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělení na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f_{\text{Meixner}}(x) = \frac{(2 \cos(b/2))^{2\delta}}{2a\pi \Gamma(2\delta)} e^{\frac{bx}{a}} \left| \Gamma\left(\delta + \frac{ix}{a}\right) \right|^2,$$

$$x \in \mathbb{R}, a, \delta > 0, b \in (-\pi, \pi),$$

kde i je imaginární jednotka a Γ je standardní gamma funkce, nazýváme *Meixnerovo rozdělení* $\text{Meixner}(a, b, \delta)$. Lévyho proces $\{E_t : t \geq 0\}$ nazveme *Meixnerův proces* pokud $E_t \sim \text{Meixner}(a, b, \delta t)$ pro všechna $t > 0$.

Lze ukázat (viz. například (Grigelionis 1999) a (Olschowka 2007)), že

$$E[e^{\alpha E_t}] = \left(\frac{\cos(b/2)}{\cos((a\alpha + b)/2)} \right)^{2\delta}, \quad \alpha \in \left(\frac{-\pi - b}{a}, \frac{\pi - b}{a} \right), \quad (2.31)$$

a pro prvky Lévyho tripletu dostáváme $\sigma_E = 0$, dále

$$d\nu_E(x) = \delta \frac{e^{bx/a}}{x \sinh(\pi x/a)} dx, \quad (2.32)$$

a

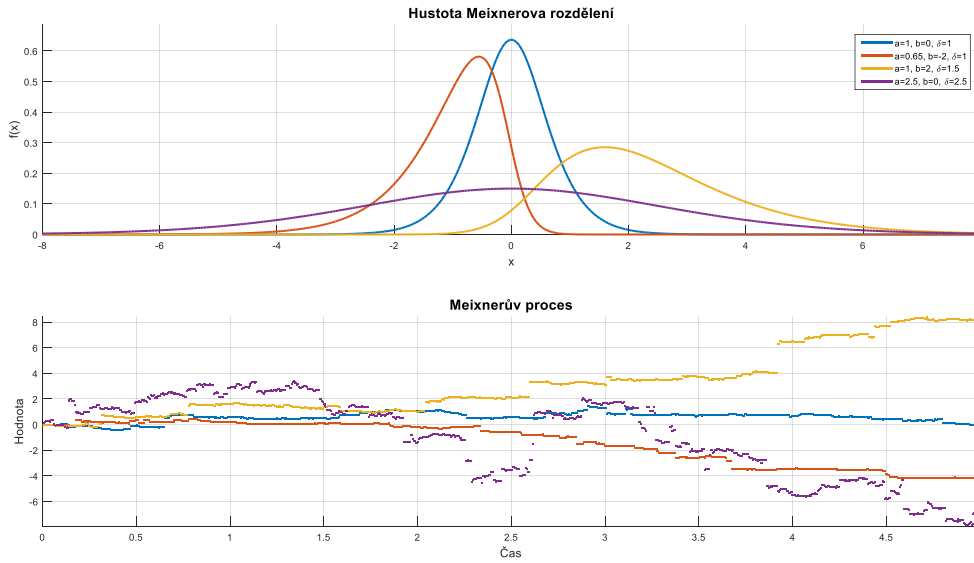
$$\mu_E = a\delta \tan\left(\frac{b}{2}\right) - 2\delta \int_1^{+\infty} \frac{\cosh(bx/a)}{\sinh(\pi x/a)}. \quad (2.33)$$

Podobně jako v předchozích případech se tedy jedná o čistě skokový proces s nekonečnou aktivitou a se skoky v oboru reálných čísel. Vlastnosti procesu jsou shrnuty v *Tabulce 7* a hustoty Meixnerova rozdělení pro různé parametry spolu s asociovanými trajektoriemi náhodného procesu nalezneme na *Obrázku 10* (Olschowka 2007).

Parametry	$a > 0, b \in (-\pi, \pi), \delta > 0$
-----------	--

Charakt. exponent	$\psi_E(\alpha) = 2\delta \ln\left(\frac{\cos(b/2)}{\cos((\alpha + b)/2)}\right), \forall \alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$ $\alpha_{1,2} = (\pm\pi - b)/a$
Lévyho triplet	$[\mu_E, 0, dv_E(x)]$
Střední hodnota	$a\delta t \tan(b/2), \forall t > 0$
Rozptyl	$a^2\delta t/(2 \cos^2(b/2)), \forall t > 0$
Koef. šikmosti	$\sin(b/2)\sqrt{2/(\delta t)}, \forall t > 0$
Koef. špičatosti	$3 + (2 - \cos(b))/(\delta t), \forall t > 0$

Tabulka 7: Vlastnosti Meixnerova procesu (Grigelionis 1999, Olschowka 2007)



Obrázek 10: Meixnerovo rozdělení a Meixnerův proces

2.2.7 Zobecněný hyperbolický proces

Definice 2.12 (Aas a Haff 2006) Nekonečně dělitelné pravděpodobnostní rozdělení na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ s hustotou pravděpodobnosti

$$f_{GH}(x) = \frac{(\gamma^2 - \beta^2)^{\lambda/2} K_{\lambda-1/2}(\gamma\sqrt{\delta^2 + x^2})}{\sqrt{2\pi} \gamma^{\lambda-1/2} \delta^\lambda K_\lambda(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}) (\sqrt{\delta^2 + x^2})^{1/2-\lambda}} e^{\beta x},$$

$$\gamma > 0, \delta \geq 0, |\beta| < \gamma, \text{ pro } \lambda > 0$$

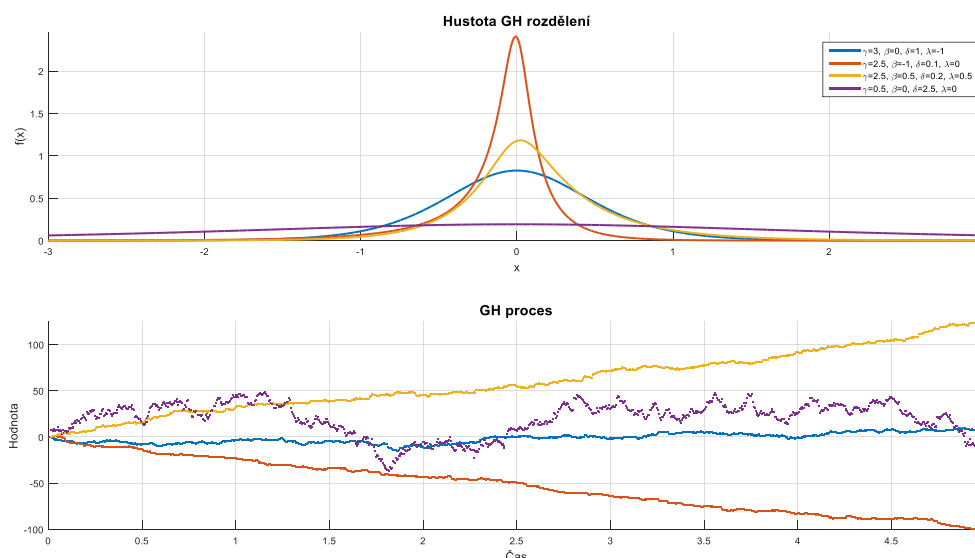
$$x \in \mathbb{R}, \gamma > 0, \delta > 0, |\beta| < \gamma, \text{ pro } \lambda = 0,$$

$$\gamma > 0, \delta > 0, |\beta| \leq \gamma, \text{ pro } \lambda < 0$$

kde K_a je modifikovaná Besselova funkce druhého druhu s indexem a (dle řazení Besselovských funkcí v programu MathWorks MATLAB, viz. (MathWorks 2016)), nazýváme *zobecněné hyperbolické rozdělení (GH rozdělení)* $GH(\gamma, \beta, \delta, \lambda)$. Lévyho proces $\{H_t : t \geq 0\}$ pak nazveme *zobecněný hyperbolický proces (GH proces)* pokud $H_1 \sim GH(\gamma, \beta, \delta, \lambda)$.

Poznámka: (Cont a Tankov 2004, Eberlein 2001) Mějme GH rozdělení s hustotou f_{GH} a charakteristickou funkcí φ_{GH} . Přestože GH rozdělení je nekonečně dělitelné a má řadu zajímavých statistických vlastností, Lévyho GH procesu má tu nevýhodu, že sice všechny

přírůstky délky 1 mají příslušné GH rozdělení, ale přírůstky libovolné délky t se řídí rozdělením daným charakteristickou funkcí $(\varphi_{GH})^t$. To činí užití tohoto rozdělení obtížným v případech, kdy je třeba pracovat s daty sbíranými v různých časových intervalech či finančními instrumenty s různou dobou do splatnosti.



Obrázek 11: GH rozdělení a GH proces

S využitím momentové vytvořující funkce GH rozdělení, která je uvedena v (Eberlein 2001), dostáváme

$$E[e^{\alpha H_1}] = \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2} \right)^{\lambda/2} \frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}, \quad |\beta + \alpha| < \gamma. \quad (2.34)$$

Jedná se opět o čistě skokový proces s nekonečnou aktivitou se skoky v oboru v reálných číslech. Platí tedy $\sigma_H = 0$; další prvky Lévyho tripletu pro jejich komplikovanost nebudeme uvádět (Lévyho míru GH procesu nalézt například v (Eberlein 2001)) (Cont a Tankov 2004).

Některé vlastnosti GH procesu jsou k nalezení v *Tabulce 8*. Vybrané hustoty GH rozdělení a trajektorie příslušných Lévyho procesů jsou k nahlédnutí na *Obrázku 11*.

Parametry	$\gamma > 0, \delta \geq 0, \beta < \gamma, \text{ pro } \lambda > 0$ $\gamma > 0, \delta > 0, \beta < \gamma, \text{ pro } \lambda = 0$ $\gamma > 0, \delta > 0, \beta \leq \gamma, \text{ pro } \lambda < 0$
Charakt. exponent	$\frac{\lambda}{2} \ln \left(\frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2} \right) + \ln \left(\frac{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - (\beta + \alpha)^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})} \right),$ $\forall \alpha \text{ tak, že } \beta + \alpha < \gamma$
Lévy triplet	$[\mu_H, 0, dv_H(x)]$
Střední hodnota	$\frac{\beta\delta}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \frac{K_{\lambda+1}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}, \text{ pro } t = 1$
Rozptyl	$\frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2 - \beta^2}} \frac{K_{\lambda+1}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})} + \frac{\beta^2\delta^2}{\gamma^2 - \beta^2} \left(\frac{K_{\lambda+2}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}{K_{\lambda}(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})} - \frac{K_{\lambda+1}^2(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}{K_{\lambda}^2(\delta\sqrt{\gamma^2 - \beta^2})} \right),$ $\text{pro } t = 1$

Tabulka 8: Vlastnosti GH procesu (Eberlein 2001, Schoutens 2003)

3 Další náhodné procesy ve finančním modelování

V této části práce uvedeme vybrané příklady náhodných procesů, jejichž přírůstky již obecně nejsou nezávislé, a tedy nepatří do skupiny Lévyho procesů. Nicméně jejich dynamika z Lévyho procesů vychází a podobně jako oni mohou být velmi užitečné ve světě finančního modelování.

3.1 Ornstein-Uhlenbeckovy procesy

S využitím Lévyho procesů představených v minulé kapitole lze zkonstruovat širokou škálu procesů s návratem ke střední hodnotě, jejichž vlastnosti trajektorií se odvíjejí od zvoleného řídicího Lévyho procesu. Tento typ procesů, které obecně nazveme *Ornstein-Uhlenbeckovy procesy (OU procesy)*, byl poprvé představen v (Uhlenbeck a Ornstein 1930), kde byl jako řídicí Lévyho proces použit Brownův pohyb. Obecné OU procesy, jejichž dynamika vychází z libovolného Lévyho procesu, jsou jedním z populárních témat současného výzkumu.

Definice 3.1 (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001) Náhodný proces $\{Y_t : t \geq 0\}$ na (Ω, \mathcal{F}, P) , jež řeší SDR (viz. Kapitola 1.4)

$$dY_t = -\lambda Y_t dt + dX_{\lambda t}, \quad Y_0 := y_0,$$

kde $\lambda > 0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ a $\{X_t\}$ je zvolený řídicí Lévyho proces, nazveme *Ornstein-Uhlenbeckův proces (OU proces)*.

Poznámka: (Schoutens 2003, Winkel 2010) Ačkoliv řídicí proces může být obecně libovolný Lévyho proces, v této práci nás budou speciálně zajímat případy, kdy $\{X_t\}$ je subordinátor (bez lineárního driftu) a $y_0 > 0$. V těchto případech je zřejmé, že příslušný OU proces bude nezáporný a navíc zdola omezený funkcí $y_0 e^{-\lambda t}$. Dále poznamenejme, že charakteristický exponent subordinátoru lze obecně vyjádřit ve tvaru

$$\Psi_X(\theta) = \int_0^{+\infty} (e^{i\theta x} - 1) d\nu_X(x), \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (3.1)$$

kde ν_X je Lévyho míra koncentrovaná na $(0, +\infty)$, jež v tomto případě evidentně plně charakterizuje řídicí Lévyho proces $\{X_t\}$.

Definice 3.2 (Applebaum 2009, Bingham 2006) Nechť D je náhodná proměnná na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Řekneme, že D je *samo-rozložitelná* (nebo že se řídí *samo-rozložitelným rozdělením*), pokud pro všechna $c \in (0,1)$ existuje náhodná proměnná $D^{(c)}$ nezávislá s D taková, že

$$D \stackrel{d}{=} cD + D^{(c)} \iff \varphi_D(\theta) = \varphi_D(c\theta)\varphi_{D^{(c)}}(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

a vytváří tak *autoregresivní schéma 1. řádu*.

Poznámka: (Carr *et al.* 2007) Jinými slovy, náhodná proměnná D je samorozložitelná, pokud má stejné rozdělení jako součet škálované verze sebe sama cD a nezávislé reziduální náhodné proměnné $D^{(c)}$ odpovídající zvolené škálovací konstantě $c \in (0,1)$.

Samo-rozložitelná rozdělení jsou důležitou podtřídou třídy nekonečně dělitelných rozdělení z *Kapitoly 2.1*. Lze ukázat, že nekonečně dělitelné rozdělení je samo-rozložitelné právě tehdy, když jeho Lévyho míra připouští Lévyho hustotu $g_D(x)$ ve speciálním tvaru

$$g_D(x) = \frac{h_D(x)}{|x|}, \quad (3.2)$$

kde $h_D(x) > 0$ je neklesající pro $x < 0$ a nerostoucí pro $x > 0$. Funkci $h_D(x)$ potom nazýváme *charakteristika samo-rozložitelnosti* rozdělení náhodné proměnné D (Carr *et al.* 2007).

Věta 3.1 (OU procesy a samo-rozložitelná rozdělení) (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001) Necht' D je náhodná proměnná na (Ω, \mathcal{F}, P) s pravděpodobnostním rozdělením P_D . Potom existuje stacionární Ornstein-Uhlenbeckův proces $\{Y_t : t \geq 0\}$ dle *Definice 3.1*, ve tvaru

$$Y_t = y_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dX_{\lambda s},$$

jež se řídí pravděpodobnostním rozdělením P_D , právě tehdy, když D je samo-rozložitelná náhodná veličina. Náhodný proces $\{Y_t\}$ v tomto případě nazýváme P_D -OU proces a P_D *marginální rozdělení procesu*.

Důkaz: Důkaz *Věty 3.1* je značně netriviální a odkazy na literaturu, ve které lze dohledat, jsou k nalezení v (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001). ■

Ornstein-Uhlenbeckovi procesy lze tedy konstruovat dvěma způsoby. Prvním je zvolit konkrétní parametrickou formu pravděpodobnostního rozdělení náhodné veličiny D . Potom dle *Věty 3.1* bude existovat P_D -OU proces $\{Y_t\}$ takový, že $Y_t \sim P_D, \forall t > 0$. Budeme obecně předpokládat existenci Lévyho hustoty g_X řídicího Lévyho procesu $\{X_t\}$ a také existenci diferencovatelné Lévyho hustoty g_D marginálního rozdělení P_D -OU procesu $\{Y_t\}$. Vztah mezi těmito hustotami je dán výrazem

$$g_X(x) = -g_D(x) - xg_D'(x), \quad (3.3)$$

jenž nám umožňuje analyzovat charakter řídicího Lévyho procesu. Druhou možností je potom konstrukce OU procesu přímo pomocí řídicího Lévyho procesu $\{X_t\}$ s Lévyho hustotou g_X zvoleného tak, že

$$E[\ln(1 + |X_1|)] < +\infty. \quad (3.4)$$

Podmínka (3.4) zde zaručuje dle (Jurek a Mason 1993) existenci stacionárního řešení SDR z *Definice 3.1* ve tvaru daném *Větou 3.1*. Tedy existuje samo-rozložitelné rozdělení pravděpodobnosti P_D takové, že $Y_t \sim P_D, \forall t > 0$, a pokud je $\{X_t\}$ subordinátorem, můžeme s využitím ODR dané vztahem (3.3) ukázat, že pro Lévyho hustotu tohoto rozdělení platí

$$g_D(x) = \int_1^{+\infty} g_X(\xi x) d\xi, \quad (3.5)$$

čímž je podle (3.2) rozdělení P_D plně charakterizováno (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001).

Definice 3.3 (Barndorff-Nielsen a Shephard 2003) Náhodný proces $\{Y_t^{Int} : t > 0\}$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) definovaný jako

$$Y_t^{(Int)} := \int_0^t Y_s ds,$$

kde $\{Y_t\}$ je Ornstein-Uhlenbeckův proces, nazveme *integrováný Ornstein-Uhlenbeckův proces* (*IntOU proces*).

Pro řešení IntOU procesů podle (Barndorff-Nielsen a Shephard 2003) dostáváme

$$\begin{aligned}
Y_t^{(Int)} &= \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})y_0 + \lambda^{-1} \int_0^t (1 - e^{-\lambda(t-s)}) dX_{\lambda s} \\
&= \lambda^{-1}(X_{\lambda t} - Y_t + y_0),
\end{aligned} \tag{3.6}$$

a ve stejné literatuře lze také dohledat obecné analytické předpisy pro charakteristickou funkci, střední hodnotu a rozptyl procesu $\{Y_t^{Int}\}$.

3.1.1 Gamma-OU proces

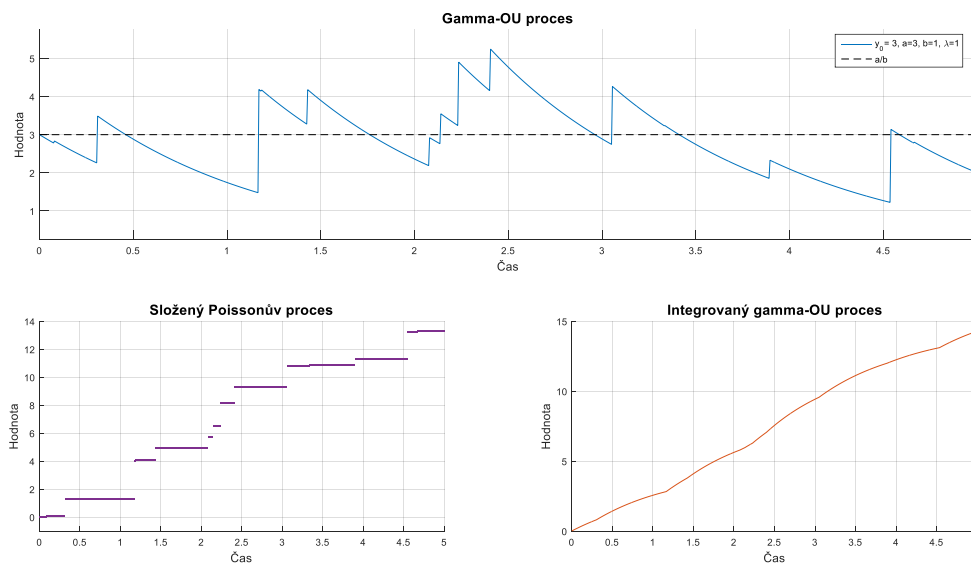
Dle značení, které bylo ustanoveno v předchozí části, se jedná o OU proces s marginálním rozdělením $\text{Gamma}(a, b)$ (viz. *Definice 2.7*) jehož Lévyho hustota je uvedena ve (2.19) a střední hodnota a rozptyl níže na téže straně. Dle (3.2) se se zřejmě jedná o samo-rozložitelné rozdělení s charakteristikou

$$h_{\text{Gamma}}(x) = ae^{-bx} \mathbf{1}_{\{x>0\}}. \tag{3.7}$$

Ze vztahu (3.3) pak dostáváme

$$\begin{aligned}
g_x(x) &= \left[-\frac{ae^{-bx}}{x} - x \left(\frac{ae^{-bx}}{x} \right)' \right] \mathbf{1}_{\{x>0\}} \\
&= \left[-\frac{ae^{-bx}}{x} - x \left(\frac{-abe^{-bx}x - ae^{-bx}}{x^2} \right) \right] \mathbf{1}_{\{x>0\}} \\
&= abe^{-bx} \mathbf{1}_{\{x>0\}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Za pomoci *Tabulky 2* a poznámky pod *Definicí 2.7* můžeme v (3.8) rozpoznat Lévyho hustotu složeného Poissonova procesu s intenzitou a a exponenciálně $\text{Exp}(b)$ rozdělenými Y_k , $k = 1, 2, \dots$. Řídící Lévyho proces Gamma-OU procesu je tedy složený Poissonův proces s exponenciálně rozdělenými skoky (viz. *Kapitola 2.2.1*) a jelikož řídicí proces má konečnou aktivitu, pak zřejmě také příslušný OU proces bude mít pouze konečný očekávaný počet skoků v každém konečném časovém úseku.



Obrázek 12: Gamma-OU proces a asociované procesy

Charakteristická funkce asociovaného IntOU procesu v závislosti na volbě y_0 nabývá tvaru

$$\varphi_{\text{Gamma-OU}}(\theta) = e^{i\theta y_0 \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda t})} e^{\frac{\lambda a}{i\theta - \lambda b} \left(b \ln \left(\frac{b}{b - i\theta \lambda^{-1}(1-e^{-\lambda t})} \right) - i\theta t \right)}. \quad (3.9)$$

(Schoutens 2003)

Na *Obrázku 12* můžeme pozorovat ukázkovou trajektorii Gamma-OU procesu, příslušného řídicího Lévyho procesu a příslušného integrovaného Gamma-OU procesu.

3.1.2 IG-OU proces

Nyní se pokusíme zkonstruovat jiný OU proces řízený subordinátorem s využitím opačného způsobu konstrukce nežli v předchozí kapitole. Uvažujme řídicí Lévyho proces $\{X_t\}$ v podobě součtu dvou nezávislých Lévyho procesů

$$X_t := I_t + C_t, \quad (3.10)$$

kde $\{I_t\}$ je inverzní gaussovský proces (IG proces) s parametry $c/2$ a ζ ustanovený *Definicí 2.9* a $\{C_t\}$ je složený Poissonův proces s intenzitou $c\zeta/2$ a $Y_k := \zeta^{-2}U_k^2$, $U_k \sim N(0,1)$, $k = 1, 2, \dots$ (viz. *Definice 2.4* a *Definice 2.5*). Lze snadno ukázat, že proces (3.10) splňuje podmínku (3.4) a je tedy garantována existence stacionárního OU procesu s příslušným řídicím Lévyho procesem (Barndorff-Nielsen 1998).

Poznámka: (Hátle a Likeš 1972) Rozdělení kvadrátu náhodné veličiny řídicí se standardním normálním rozdělením lze popsat hustotou ve tvaru

$$f_{\chi^2_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0, \quad (3.11)$$

jež odpovídá hustotě χ^2 -rozdělení s jedním stupněm volnosti.

S využitím vztahu mezi charakteristickými funkcemi součtu nezávislých náhodných veličin (1.21), speciálního tvaru charakteristického exponentu (3.1) subordinátorů, analytických vyjádření Lévyho hustot zúčastněných procesů daných *Tabulkou 2* a výrazy (3.11) a (2.26), a vzorcem pro hustotu škálované náhodné veličiny (2.8) můžeme odvodit, že Lévyho hustota řídicího Lévyho procesu má podobu

$$g_x(x) = \left[\frac{c/2}{\sqrt{2\pi x^{3/2}}} e^{-\frac{\zeta^2 x}{2}} + \frac{c\zeta}{2} \left(\frac{\zeta^2}{\sqrt{2\pi \zeta^2 x}} e^{-\frac{\zeta^2 x}{2}} \right) \right] \mathbf{1}_{\{x>0\}}. \quad (3.12)$$

Zapojením (3.5) pro Lévyho hustotu g_D marginálního rozdělení OU procesu dostáváme

$$\begin{aligned} g_D(x) &= \int_1^{+\infty} \left[\frac{c/2}{\sqrt{2\pi}(\xi x)^{3/2}} e^{-\frac{\zeta^2 \xi x}{2}} + \frac{c\zeta}{2} \left(\frac{\zeta^2}{\sqrt{2\pi}(\zeta^2 \xi x)^{1/2}} e^{-\frac{\zeta^2 \xi x}{2}} \right) \right] d\xi \mathbf{1}_{\{x>0\}} \\ &= \frac{c\zeta^3}{2\sqrt{2\pi}} \left[\int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\zeta^2 \xi x}{2}}}{(\zeta^2 \xi x)^{3/2}} d\xi + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\frac{\zeta^2 \xi x}{2}}}{(\zeta^2 \xi x)^{1/2}} d\xi \right] \mathbf{1}_{\{x>0\}} \stackrel{\text{Sub.}}{=} \left[\begin{array}{l} \rho = \zeta^2 \xi x \\ d\rho = \zeta^2 x d\xi \\ \frac{d\rho}{\zeta^2 x} = d\xi \end{array} \right] \\ &= \frac{c\zeta}{2x\sqrt{2\pi}} \left\{ \left[-\sqrt{2\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}} \right) - \frac{2e^{-\frac{\rho}{2}}}{\sqrt{\rho}} \right]_{\zeta^2 x}^{+\infty} + \left[\sqrt{2\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{2}} \right) \right]_{\zeta^2 x}^{+\infty} \right\} \mathbf{1}_{\{x>0\}} \\ &= \frac{c}{\sqrt{2\pi x^{3/2}}} e^{-\frac{\zeta^2 x}{2}} \mathbf{1}_{\{x>0\}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

kde erf značí *chybovou funkci* a využili jsme její vlastnosti $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{erf}(x) = 1$ (viz. (Zwillinger 2012)). Pokud nyní porovnáme (3.13) s (2.26), zjistíme, že se jedná přímo o Lévyho hustotu IG rozdělení s parametry c a ζ (viz. *Definice 2.9*), jež je evidentně samo-rozložitelné a podle (3.2) má jeho charakteristika samo-rozložitelnosti tvar

$$h_{\text{IG}}(x) = \frac{c}{\sqrt{2\pi}x^{1/2}} e^{-\frac{\zeta^2 x}{2}} \mathbf{1}_{\{x>0\}}. \quad (3.14)$$

Střední hodnota a rozptyl jsou potom uvedeny níže pod výrazem (2.26).

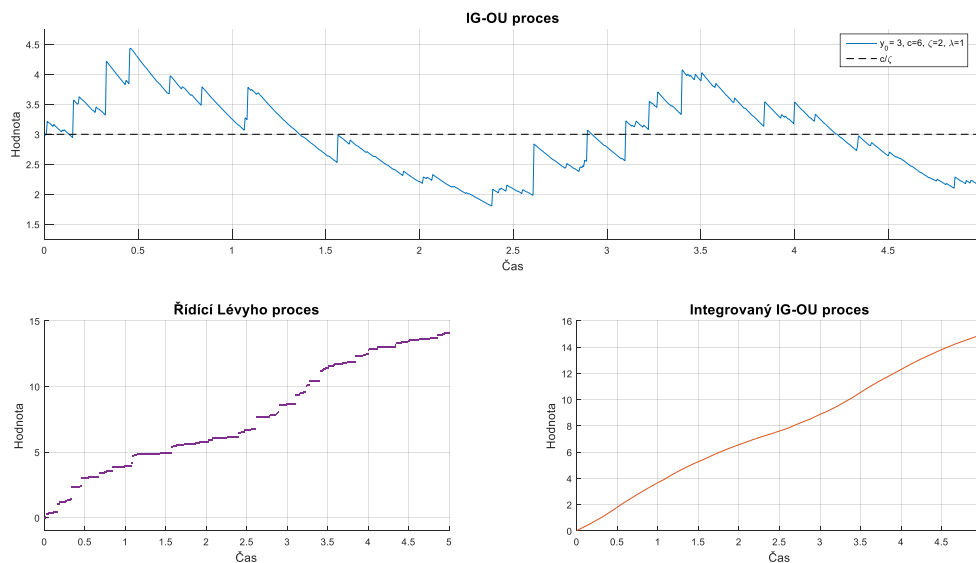
Jelikož v tomto případě má řídicí Lévyho proces nekonečnou aktivitu, bude mít příslušný OU proces nekonečný očekávaný počet malých a konečný očekávaný počet velkých skoků na každém konečném časovém úseku. Navíc pro charakteristickou funkci asociovaného IntOU procesu podle (Nicolato a Venardos 2003) dostáváme v závislosti na volbě y_0

$$\varphi_{\text{IG-OU}}(\theta) = e^{\frac{i\theta y_0(1-e^{-\lambda t})}{\lambda} + \frac{2ci\theta}{\zeta\lambda} \mathcal{A}(\theta, t)},$$

$$\mathcal{A}(\theta, t) := \frac{1 - \sqrt{1 + \kappa(1 - e^{-\lambda t})}}{\kappa} + \frac{1}{\sqrt{1 + \kappa}} \left(\text{atanh} \left(\frac{\sqrt{1 + \kappa(1 - e^{-\lambda t})}}{\sqrt{1 + \kappa}} \right) - \text{atanh} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \kappa}} \right) \right), \quad (3.15)$$

$$\kappa := -\frac{2i\theta}{\lambda\zeta^2}.$$

Ukázková trajektorie IG-OU procesu, příslušného řídicího Lévyho procesu a příslušného integrovaného IG-OU procesu je k vidění na *Obrázku 13*.



Obrázek 13: IG-OU proces a asociované procesy

3.1.3 Další příklady OU procesů

Vyzkoušeli jsme tedy obě techniky konstrukce OU procesů na předcházejících příkladech, kde jsme jako řídicí Lévyho procesy použili subordinátory. Nicméně některá další rozdělení, která jsme představili v *Kapitole 2*, jsou podle (3.2) samo-rozložitelná a tedy existuje OU proces s příslušným marginálním rozdělením. Patří mezi ně například variance gamma rozdělení, normální inverzní gaussovské rozdělení nebo Meixnerovo rozdělení (viz. (Barndorff-Nielsen 1998), (Grigelionis 1999) a (Kotz, Kozubowski a Podgórski 2001)). Dále je také možné zvolit libovolný Lévyho proces $\{X_t\}$ (který se například může skládat ze sumy

nezávislých Lévyho procesů), který splňuje existenční podmínku (3.4), a prohlásit jej za řídicí Lévyho proces nějakého OU procesu. V prvním případě ovšem může být komplikované najít řídicí Lévyho proces $\{X_t\}$, v druhém případě potom explicitní vyjádření pro marginální rozdělení pravděpodobnosti P_D .

Dalším způsobem, jež byl představen v (Barndorff-Nielsen 2001), je vytvářet nové procesy superpozicí nezávislých OU procesů.

Definice 3.4 (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001) Náhodný proces $\{Y_t^{Sup} : t > 0\}$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) definovaný jako

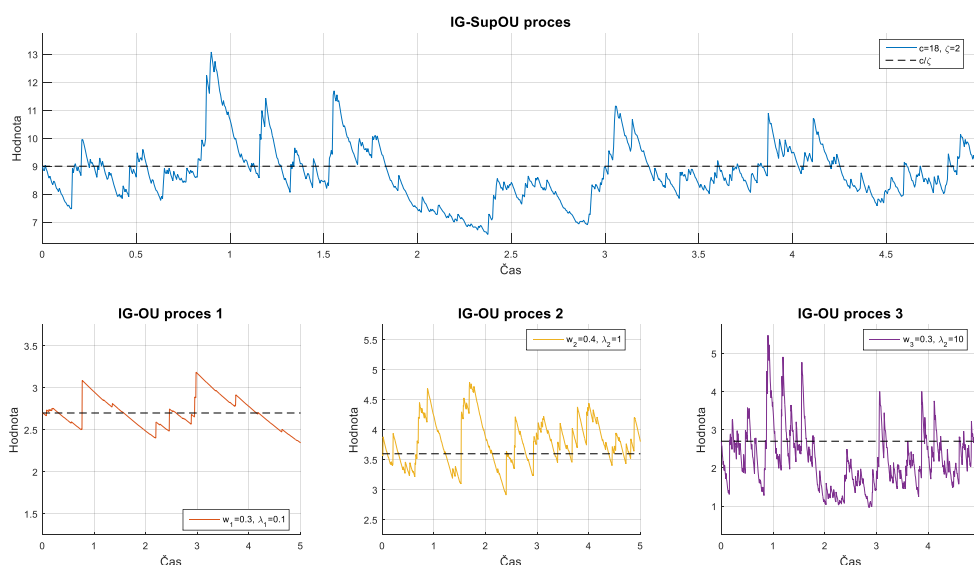
$$Y_t^{(sup)} := \sum_{j=1}^m w_j Y_t^j, \quad w_j > 0, \quad \sum_{j=1}^m w_j = 1,$$

kde

$$dY_t^j = \lambda_j Y_t^j dt + dX_t^j, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

jsou nezávislé Ornstein-Uhlenbeckovy procesy, nazveme *superpoziční Ornstein-Uhlenbeckův proces (SupOU proces)*.

Poznámka: Charakteristické funkce SupOU procesů lze získávat pomocí vztahu (1.21) a lze z nich dále vytvářet integrované procesy ve smyslu *Definice 3.3*. Další informace a teoretické pozadí k superpozici OU procesů lze nalézt v (Barndorff-Nielsen 2001).



Obrázek 14: IG-SupOU proces a asociované IG-OU procesy

Speciálním případem takového procesu může být IG-SupOU proces, kde $\{Y_t^j\}$ jsou nezávislé IG-OU procesy takové, že jejich marginální rozdělení jsou $IG(w_j c, \zeta)$, $w_j > 0$, $\sum_j w_j = 1$. Potom platí, že marginální rozdělení IG-SupOU procesu je $IG(c, \zeta)$. Ukázkovou trajektorii IG-SupOU procesu pro $m = 3$ můžeme pozorovat na *Obrázku 14* (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001).

Dále je možné přidat do OU procesu lineární drift, kdy SDR dostává tvar

$$dY_t = (\mu - \lambda Y_t) dt + dX_{\lambda t}, \quad Y_0 := y_0, \quad (3.16)$$

který může být snadno přeformulován zpět do tvaru daného *Definicí 3.1* ustanovením nového řídicího Lévyho procesu $\{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$, kde

$$\tilde{X}_t := X_t + \frac{\mu}{\lambda} t. \quad (3.17)$$

(Schoutens 2003)

3.2 CIR proces

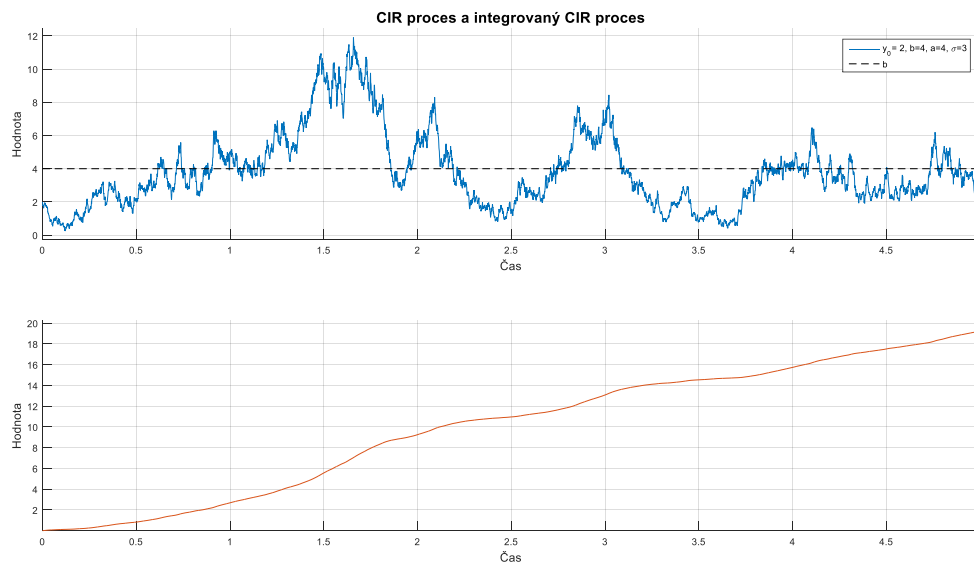
Cox-Ingersoll-Rossův proces (CIR proces) patří mezi klasické příklady nezáporných procesů s návratem ke střední hodnotě. Původně byl představen jako model dynamiky úrokových měř (viz. (Cox, Ingersoll a Ross 1985)), ale má uplatnění i v jiných oblastech jako je například modelování stochastické volatility rizikových aktiv.

Definice 3.5 (Hull 2003) Náhodný proces $\{Y_t : t \geq 0\}$ na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) , jež řeší SDR

$$dY_t = a(b - Y_t) dt + \sigma\sqrt{Y_t} dW_t, \quad Y_0 := y_0,$$

kde $a, b, \sigma > 0, y_0 > 0$ a $\{W_t\}$ je standardní Brownův pohyb, nazveme *Cox-Ingersoll-Rossův proces (CIR proces)*.

Poznámka: (Carr *et al.* 2003) Parametr b lze interpretovat jako dlouhodobý průměr, parametr a upravuje rychlost návratu ke dlouhodobému průměru a σ řídí míru kolísání procesu.



Obrázek 15: CIR proces a integrovaný CIR proces

Dále lze odvodit (viz. (Shreve 2004)), že podmíněná střední hodnota CIR procesu v závislosti na počáteční podmínce má tvar

$$E[Y_t | Y_0] = y_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} b, \quad (3.18)$$

a tedy vidíme, že dlouhodobý průměr je opravdu vyjádřen parametrem b .

Analogicky k předchozí části můžeme též definovat *integrovaný CIR proces*. Ukázková trajektorie CIR procesu a příslušného integrovaného CIR procesu je k vidění na *Obrázku 15*.

4 Finanční časové řady

V této části práce se seznámíme s *finančními časovými řadami* a uvedeme některé jejich typické vlastnosti, které podložíme empirickou evidencí. Data, která vytvářejí finanční časovou řadu, vznikají jako chronologicky uspořádaná pozorování situace na finančním trhu. V praxi nejčastěji budeme pracovat s takzvanými *logaritmickými výnosy* (*log-výnosy*), které definujeme jako

$$\begin{aligned} r_{log}(t, \Delta t) &:= \ln(S_{t+\Delta t}) - \ln(S_t) \\ &= \ln\left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t}\right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

kde $\{S_t : t \geq 0\}$ je reálný náhodný proces na prostoru s přirozenou filtrací $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ popisující vývoj ceny sledovaného rizikového aktiva a Δt značí časový přírůstek, který v praxi může nabývat hodnot od několika sekund po měsíce, což většinou výrazně ovlivňuje vlastnosti příslušných log-výnosů. Log-výnosy tedy v našem kontextu chápeme jako realizace určitého reálného náhodného procesu ve zvolených okamžicích. Tento typ výnosů je obecně preferovaný, jelikož má obvykle příznivé statistické vlastnosti a vhodně koresponduje s matematickými modely, které představíme v následující části práce (Cipra 1986, Cont 2001, Tsay 2010).

Definice 4.1 (Cipra 1986, Tsay 2010) Nechť $\{X_t : t \geq 0\}$ je slabě stacionární náhodný proces na pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{F}, P) . Potom funkci

$$\rho(s) := \frac{\text{Cov}[X_t, X_{t-s}]}{\text{Var}[X_t]}, \quad s \in [0, t],$$

nazveme *autokorelační funkce* náhodného procesu $\{X_t\}$.

Poznámka: (Tsay 2010) Autokorelační funkce je mírou lineární závislosti náhodného procesu $\{X_t\}$ na sobě samém v závislosti na parametru zpoždění s . Slabá stacionarita zajišťuje, že autokorelační funkce je pouze funkcí s , jelikož kovariační vztahy v rámci procesu jsou z definice slabé stacionarity časově invariantní. Dále zřejmě platí $\rho(0) = 1$.

V následující části práce budeme často hovořit o výběrových momentech a dalších výběrových veličinách a funkcích. Jedná se o statistické protiklady pravděpodobnostních veličin z přechozích částí práce, jež se používají pro empirické odhady teoretických veličin. Více o teorii odhadu lze nalézt ve velkém množství české i zahraniční literatury jako je například (Anděl 2002), (Reif 2004) nebo (Ryan 2007).

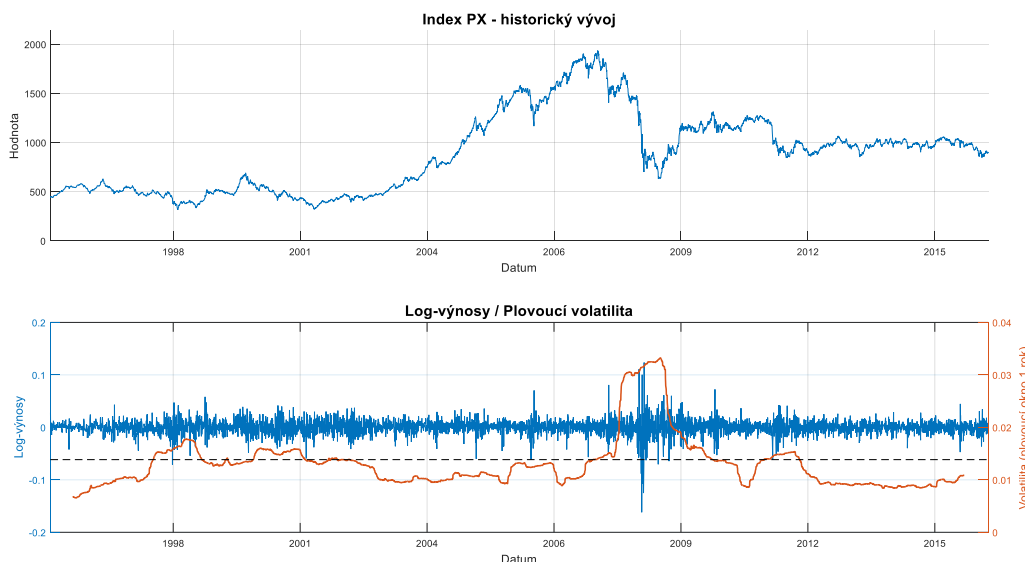
Diskutujme nyní dle (Cont 2001) některé vlastnosti logaritmických výnosů, které jsou společné pro velké množství finančních aktiv:

- (i) *Záporná šikmost:* často můžeme pozorovat velké propady v ceně aktiva, které ovšem nebývají vyváženy obdobně velkými pohyby ceny vzhůru. Rozdělení log-výnosů je tedy zpravidla asymetrické s levým koncem těžším než pravým, což způsobuje zápornou hodnotu koeficientu špičatosti. Tato vlastnost bývá výraznější pro větší Δt ;
- (ii) *Vysoká špičatost:* koeficient špičatosti má obvykle vyšší hodnotu než 3, jež je příslušná normálnímu rozdělení. To napovídá, že rozdělení log-výnosů je silně koncentrované okolo střední hodnoty a vyznačuje se těžkými konci. Toto platí zejména pro malá Δt , pro větší Δt rozdělení log-výnosů více připomíná normální rozdělení (takzvaná *agregovaná gaussovskost*);

- (iii) *Absence lineární autokorelace*: korelace log-výnosů se sebou samými má sklony být velmi malá či zanedbatelná, což ztěžuje předpovídání budoucích výnosů;
- (iv) *Autokorelace kvadrátů*: korelace kvadrátů log-výnosů se sebou samými bývá naopak velmi významná. Čili velká změna ceny aktiva (ať už pozitivní či negativní) často vyvolá další velké změny ceny, jejichž směr je ale kvůli vlastnosti (iii) jen velmi obtížně předvídatelný;
- (v) *Shlukování volatility*: tento efekt je důsledkem vlastnosti (iv), jež způsobuje, že míra kolísání log-výnosů okolo jejich střední hodnoty (takzvaná *volatilita*) vykazuje známky časové závislosti a můžeme tak pozorovat střídající se periody nízké a vysoké volatility na finančních trzích.
- (vi) *Pákový efekt*: volatilita bývá obvykle negativně korelována s cenou aktiva, čili náhlý pokles ceny bývá obvykle doprovázen nárůstem volatility;

Poznámka: (Rachev *et al.* 2011) Vlastnosti (i), (ii) a (iii) naznačují, že Lévyho procesy s dostatečně flexibilním rozdělením na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ by se mohly zdát vhodnými kandidáty pro modelování finančních časových řad. Problémem jsou ovšem vlastnosti (iv), (v) a (vi), jež procesy s nezávislými přírůstky nemohou být samy o sobě schopné zachytit. Proto je výhodné zapojit do finančního modelování také procesy z *Kapitoly 3*, jejichž inkrementy na rozdíl od Lévyho procesů vykazují vzájemnou časovou závislost podobnou té, již si můžeme povšimnout u log-výnosů pozorovaných na trhu.

Jako příklad můžeme uvažovat vývoj ceny Indexu PX Burzy cenných papírů Praha od ledna 1996 do dubna 2016 (dohromady 5080 pozorování), jež byla stažena z (Quandl 2016). Kompletní soubor dat lze nalézt v elektronické příloze této práce. Index PX sdružuje vybraná *blue chips* aktiva pražské burzy a jeho stručný popis, seznam involvovaných aktiv a přesný vzorec výpočtu lze nalézt na (PSE 2016).



Obrázek 16: Vývoj indexu PX, log-výnosy a volatilita

Na horní části *Obrázku 16* vidíme časovou řadu závěrečných cen Indexu PX. Spodní část potom zobrazuje časovou řadu denních log-výnosů (tedy pro $\Delta t = 1 \text{ den}$). Červená čára v téže části *Obrázku 16* představuje volatilitu procesu, jež byla odhadnuta výběrovou směrodatnou odchylkou s využitím dat z ročního plovoucího okna. Jednoznačně je zde patrný efekt shlukování volatility popsáný v (v) výše. Zřejmé jsou periody zvýšené volatility v letech 1998 (ruská finanční krize), 2001 (teroristické útoky v New Yorku), 2008 (světová finanční

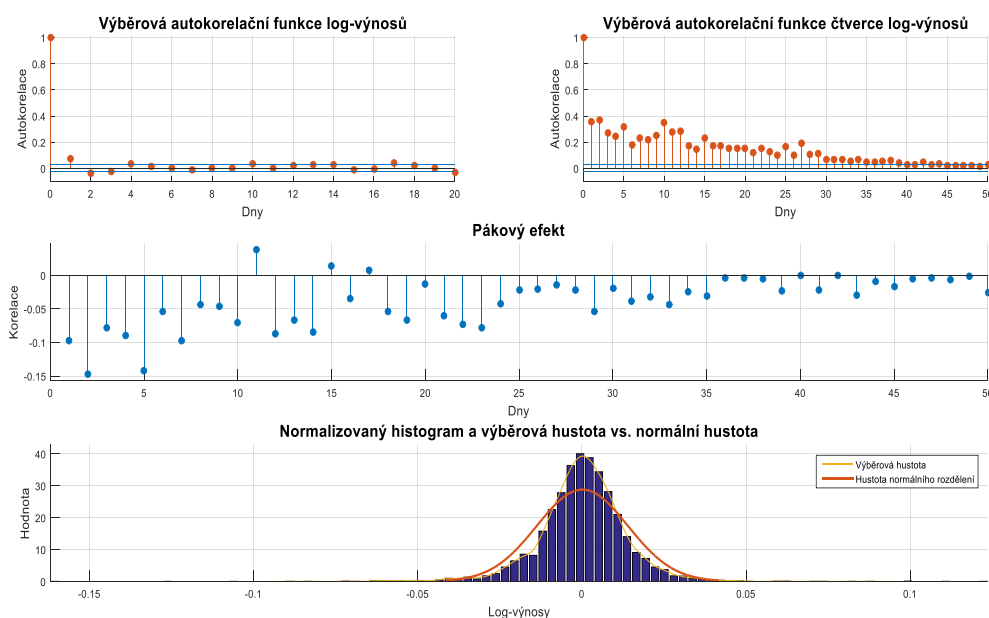
krize a 2011/2012 (dluhová krize v eurozóně), proložené klidnějšími obdobími s relativně nízkou volatilitou.

Jak jsme již uvedli dříve, efekt shlukování volatility je důsledkem toho, že druhé mocniny log-výnosů jsou vzájemně kladně korelovány, přestože log-výnosy jako takové jsou vzájemně korelovány jen velmi slabě. Tento fenomén je zachycen v horní části *Obrázku 17*. Je patrné, že výběrová autokorelační funkce čtverců log-výnosů klesá jen velmi pomalu, a tedy velikost dnešního log-výnosu je jistým způsobem ovlivněna velikostí log-výnosů v posledních několika týdnech, či dokonce měsících (průměrný měsíc má okolo 22 obchodních dnů).

Pákový efekt lze měřit různými způsoby. Jedním z nich navrhovaný v (Cont 2001) je pomocí funkce

$$C(s) := \text{Corr} \left[\left(r_{\log}(t + s, \Delta t) \right)^2, r_{\log}(t, \Delta t) \right], \quad s \in [0, t]. \quad (4.2)$$

Teoreticky bychom měli očekávat, že vlivem pákového efektu bude tato funkce začínat v negativních hodnotách a poté se s rostoucím s blížit nule. Výběrovou podobu funkce (4.2) pro $\Delta t = 1$, jež potvrzuje naše domněnky, můžeme pozorovat ve střední části *Obrázku 17*.



Obrázek 17: Výběrové autokorelační funkce, pákový efekt a normalizovaný histogram

Prozatím jsme na příkladu Indexu PX prodiskutovali očekávané vlastnosti (iii), (iv), (v) a (vi) log-výnosů a přesuneme se tedy na zbývající vlastnosti (i) a (ii). Důležité výběrové momentové statistiky log-výnosů jsou shrnuté v následující tabulce:

Výběr. střední hodnota	0.00014
Výběr. směrod. odchylka	0.01385
Výběr. koef. šikmosti	-0.44019
Výběr. koef. špičatosti	14.5760
Pozorované minimum	-0.16185
Pozorované maximum	0.12364

Tabulka 9: Výběrové statistiky log-výnosů Indexu PX

Ve shodě s (i) a (ii) pozorujeme negativní šikmost a velmi vysokou špičatost značně převyšující 3, což poukazuje na nenormalitu pozorované časové řady (připomeňme, že šikmost a špičatost normálního rozdělení jsou vždy 0 a 3, respektive). Zajímavé jsou také hodnoty pozorovaných extrémů ve zvoleném časovém úseku. Pro náhodnou proměnnou X řídicí se normálním rozdělením s odpovídající střední hodnotou a rozptylem platí $P(X \leq -0.1) = F_X(-0.1) = 2.4126 \times 10^{-13}$ (vypočteno numericky v programu MATLAB). Pro srovnání, odhadované stáří vesmíru je přibližně 1.4×10^{10} let (viz. (Villard 2002)), což je v přepočtu asi 5.1×10^{12} dnů. Tedy kdyby se data skutečně řídila normálním rozdělením, log-výnos Indexu PX menší než -0.1 by velice pravděpodobně nenastal za celou dobu trvání známého vesmíru. Ve skutečnosti, tato situace byla pozorována hned třikrát za zvolených 5080 obchodních dnů. Normální rozdělení se tedy nezdá být příliš vhodným kandidátem pro úspěšné modelování log-výnosů (zejména ne pro malá Δt). Z Čebyševovy nerovnosti (viz. poznámka pod *Definicí 1.27*) nicméně plyne, že pozorované empirické vlastnosti ve smyslu disperze okolo střední hodnoty lze modelovat náhodnou veličinou s konečnou střední hodnotou i rozptylem, čímž se budeme mimo jiné zabývat v následující kapitole.

Diskutované empirické fakty jsou podloženy v dolní části *Obrázku 17*. Modré sloupce představují normalizovaný histogram (ve smyslu, že součet obsahů modrých obdélníků je roven jedné) zkoumaných dat, červená čára představuje hustotu normálního rozdělení s odpovídající střední hodnotou a rozptylem a žlutá linka je odhadnutá výběrová hustota.

V elektronické příloze této práce lze provést stejnou analýzu s analogickými výsledky pro americký Index S&P 500 a britský Index FTSE 100 mezi roky 1990 a 2016. Tato data pochází z (Yahoo! Finance 2016a) a (Yahoo! Finance 2016b), respektive.

5 Matematické modelování finančních časových řad

V této části práce se zaměříme na aplikaci procesů zavedených v *Kapitole 2* a *Kapitole 3* v oblasti modelování finančních časových řad s důrazem na jejich stylizované vlastnosti diskutované v předchozí kapitole. Začneme modely založenými čistě na Lévyho procesech a později využijeme i procesů s návratem ke střední hodnotě.

5.1 Exponenciální Lévyho modely

Nechť $\{S_t : t \geq 0\}$ je náhodný proces na prostoru s přirozenou filtrací $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, P)$ popisující vývoj ceny rizikového aktiva a $\{X_t : t \geq 0\}$ je Lévyho proces s rozdělením přírůstků na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Uvažujme, že vývoj ceny aktiva v čase t je dán dynamikou

$$dS_t = S_t dX_t \Leftrightarrow S_t = S_0 e^{X_t}, \quad (5.1)$$

kde $S_0 > 0$ je reálná konstanta vyjadřující cenu aktiva v čase $t = 0$ (počáteční podmínka). Modely tohoto typu nazýváme *exponenciální Lévyho modely (EL modely)*. Řídící Lévyho proces $\{X_t\}$ s reálnými přírůstky umožňuje ceně aktiva vyvíjet se směrem nahoru i dolů a exponenciální funkce zajišťuje, že tato cena bude vždy kladná. V tomto kontextu se opět ukáže výhodnost využití logaritmických výnosů, jelikož s využitím vlastností Lévyho procesů dostáváme

$$\begin{aligned} r_{\log}(t, \Delta t) &= \ln \left(\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \\ &= X_{t+\Delta t} - X_t \\ &= X_{\Delta t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Prakticky tedy zvolené období (den, týden, měsíc atd.) můžeme prohlásit za základní a tedy položit pro příslušné období $\Delta t := 1$. Časová řada log-výnosů by se tedy potom dle teorie měla pro všechna $t \geq 0$ řídit stejným reálným nekonečně dělitelným rozdělením jako náhodná veličina X_1 popisující rozdělení řídicího Lévyho procesu v čase $t = 1$ (Cont 2001, Rachev *et al.* 2011, Schoutens 2003).

V této práci budeme uvažovat následující exponenciální Lévyho modely:

- (i) *Normální model (N)*: $X_t := W_t$, kde $\{W_t\}$ je Brownův pohyb (viz. *Kapitola 2.2.2*) a platí tedy $X_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$;
- (ii) *Model skokové difuze (JD)*: $X_t := D_t$, kde $\{D_t\}$ je proces skokové difuze (viz. *Kapitola 2.2.3*) a platí tedy $X_1 \sim \text{JD}(\mu, \sigma^2, m, s^2, \lambda)$;
- (iii) *Variance gamma model (VG)*: $X_t := \tilde{V}_t$, kde $\{\tilde{V}_t\}$ je variance gamma proces rozšířený o lineární drift (viz. *Kapitola 2.1* a *Kapitola 2.2.4*) a platí tedy $X_1 \sim \widetilde{\text{VG}}(\vartheta, \sigma, v, m)$;
- (iv) *Normální inverzní gaussovský model (NIG)*: $X_t := \tilde{R}_t$, kde $\{\tilde{R}_t\}$ je normální inverzní gaussovský proces rozšířený o lineární drift (viz. *Kapitola 2.1* a *Kapitola 2.2.5*) a platí tedy $X_1 \sim \widetilde{\text{NIG}}(\gamma, \beta, \delta, m)$;
- (v) *Meixnerův model (MX)*: $X_t := \tilde{E}_t$, kde $\{\tilde{E}_t\}$ je Meixnerův proces rozšířený o lineární drift (viz. *Kapitola 2.1* a *Kapitola 2.2.6*) a platí tedy $X_1 \sim \widetilde{\text{Meixner}}(a, b, \delta, m)$;
- (vi) *Zobecněný hyperbolický model (GH)*: $X_t := \tilde{H}_t$, kde $\{\tilde{H}_t\}$ je zobecněný hyperbolický proces rozšířený o lineární drift (viz. *Kapitola 2.1* a *Kapitola 2.2.7*) a platí tedy $X_1 \sim \widetilde{\text{GH}}(\gamma, \beta, \delta, \lambda, m)$.

Tyto modely budeme v následující části různými technikami kalibrovat na reálná data a podrobíme je testování a vzájemnému porovnávání.

5.1.1 Poznámky ke statistické inferenci

Při kalibraci a testování dat se budeme volně řídit postupem navrženým v (Käärik a Umbleja 2011):

- (i) Zvolme vhodné pravděpodobnostní rozdělení vzhledem k podstatě modelovaných dat;
- (ii) Najdeme statistické odhady parametrů zvoleného rozdělení například *metodou maximální věrohodnosti (MLE)* nebo *metodou momentů (MM)*;
- (iii) Prozkoumejme kvalitu shody s využitím následujících technik:
 - (a) Vizualní porovnání;
 - (b) Porovnání výběrových a teoretických momentových statistik;
 - (c) Statistiky dobré shody;
 - (d) Q-Q grafy.

Předpokládejme, že máme vzorek n pozorování x_1, x_2, \dots, x_n . Odhad metodou maximální věrohodnosti θ_{MLE} pro dané rozdělení pravděpodobnosti P_X náhodné veličiny X s hustotou pravděpodobnosti f_X je množina parametru splňující

$$\theta_{MLE} = \max_{\theta} \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta). \quad (5.3)$$

Maximalizujeme tedy sdruženou hustotu pravděpodobnosti všech pozorování přes množinu parametrů, jež specifikuje pravděpodobnostní rozdělení P_X . Jinými slovy lze říci, že výsledný maximálně věrohodný odhad θ_{MLE} maximalizuje šanci výskytu zkoumaného vzorku za předpokladu, že se řídí zvoleným rozdělením.

Odhad metodou momentů je potom založen na porovnání teoretických a výběrových momentů. Odhad metodou momentů θ_{MM} je taková množina celkem p parametrů rozdělení P_X , že prvních p momentů rozdělení se shoduje s výběrovými hodnotami statistik vypočtených z pozorovaného vzorku (Reif 2004).

Pro statistické porovnávání kvality modelů v této práci využijeme následující kritéria dobré shody:

- (i) χ^2 -test dobré shody;
- (ii) Kolmogorov-Smirnovova statistika;
- (iii) Anderson-Darlingova statistika.

χ^2 -test dobré shody je založen na porovnání teoretických četností, které vyplývají z povahy zvoleného modelu, a skutečných pozorovaných četností. Pro praktickou realizaci tohoto testu je nutné rozdělit obor hodnot pozorovaných dat do k tříd, které zvolíme tak, aby každá třída byla stejně pravděpodobná (takzvané *ekviprobabilní třídy*) a označíme n_i skutečný počet pozorování a $E[n_i]$ teoretický počet pozorování v i -té třídě. Počet tříd k potom budeme volit pomocí Doanova pravidla (viz. (Doane 1976)). Statistika χ^2 -testu je potom dána výrazem

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(n_i - E[n_i])^2}{E[n_i]}. \quad (5.4)$$

Lze odvodit, že statistika (5.4) se asymptoticky řídí χ^2 -rozdělením s $k - p - 1$ stupni volnosti, kde p je počet odhadovaných parametrů modelu a lze ji tedy porovnávat s kvantily

příslušného rozdělení. Více o χ^2 -rozdělení, χ^2 -testu a testování statistických hypotéz obecně lze nalézt například v (Anděl 2002) nebo (Reif 2004).

Poznámka: (Reif 2004) q -kvantil rozdělení P_X náhodné veličiny X s pravděpodobnostní funkcí F_X je číslo ε_q takové, že

$$F_X(\varepsilon_q) = P(X \leq \varepsilon_q) = q, \quad (5.5)$$

a tedy explicitně vyjádřeno $\varepsilon_q = F_X^{-1}(q)$, kde F_X^{-1} je inverze pravděpodobnostní funkce F_X .

Kolmogorov-Smirnovova (KS) a Anderson-Darlingova (AD) statistika jsou založeny na maximální vzdálenosti teoretické distribuční funkce F_X příslušné zvolenému modelu a výběrové distribuční funkce \hat{F}_X pozorovaných dat, měřeno metrikou danou absolutní hodnotou. Kolmogorov-Smirnovova statistika je dána výrazem

$$KS = \max_x |\hat{F}_X(x) - F_X(x)|, \quad (5.6)$$

a Anderson-Darlingova statistika potom výrazem

$$AD = \max_x \frac{|\hat{F}_X(x) - F_X(x)|}{\sqrt{F_X(x)(1 - F_X(x))}}. \quad (5.7)$$

Tedy zatímco KS statistika měří čistě maximální absolutní vzdálenost mezi uvažovanými dvěma funkcemi, AD statistika tuto vzdálenost váží způsobem, jež je výrazně zaměřen na konce testovaného rozdělení, což je v případě modelování událostí na finančních trzích velmi důležité (Anderson a Darling 1954, Reif 2004).

Poznámka: (Reif 2004) Necht' $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$ jsou seřazená pozorování. Výběrová distribuční funkce \hat{F}_X je schodová funkce definovaná jako

$$\hat{F}_X(x) := \begin{cases} 0 & \text{pro } x < x_{(1)} \\ i/n & \text{pro } x \in [x_{(i)}, x_{(i+1)}) \\ 1 & \text{pro } x \geq x_{(n)} \end{cases}. \quad (5.8)$$

Q-Q grafy jsou velmi užitečným nástrojem pro vizuální hodnocení kvality shody dat s vybraným modelem a zejména pak kvality modelování konců rozdělení. Mějme k dispozici seřazená pozorování $x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(n)}$. Q-Q graf potom vytvoříme zanesením bodů $[x_{(i)}, z_i]$ do kartézských souřadnic, kde

$$z_i := F_X^{-1}\left(\frac{i - 0.5}{n}\right). \quad (5.9)$$

Zjevně tedy porovnáváme empirické kvantily $x_{(i)}$ s kvantily z_i zvoleného teoretického rozdělení modelu. Pokud je teoretické rozdělení zvoleno vhodně, pak vykreslené body budou ležet přibližně na přímce představující osu I. a III. kvadrantu souřadnicového systému (tedy přímka $y = x$) (Reif 2004).

5.1.2 Data a výsledky

Zvolené exponenciální Lévyho modely jsme kalibrovali na časové řady denních ($\Delta t = 1$ den), týdenních ($\Delta t = 5$ dní) a měsíčních ($\Delta t = 22$ dní) log-výnosů Indexu PX, Indexu S&P 500 a Indexu FTSE 100 za 10 let mezi dubnem 2006 a dubnem 2016. Ke kalibraci byla využita metoda maximální věrohodnosti a, vyjma GH modelu, kde je velmi problematické vyjádřit vyšší momenty analyticky, také metoda momentů. Vyjádření parametrů pomocí

výběrových momentů je k dispozici v (Reif 2004) pro normální rozdělení, ve (Figuroa-Lopéz *et al.* 2011) pro VG rozdělení, v (Eriksson, Ghysels a Wang 2009) pro NIG rozdělení a v (Grigoletto a Provasi 2008) pro Meixnerovo rozdělení. Co se týká MM metody pro JD rozdělení, byla pro hodnoty parametrů modelu numericky vyřešena soustava nelineárních rovnic porovnávající teoretické a výběrové momenty s počátečním odhadem využívajícím metodu představenou v (Press 1967), jež předpokládá $\mu = 0$.

Porovnání výběrových a teoretických momentových statistik pro metodu maximální věrohodnosti a denní log-výnosy lze nalézt v *Tabulce 10*. Stejné srovnání pro týdenní a měsíční log-výnosy a hodnoty parametrů kalibrovaných modelů oběma metodami lze nalézt jako výstup příslušných programů v elektronické příloze této práce.

–	Výběr. hod.	N	JD	VG	NIG	MX	GH ¹
Index PX							
E[X]	-0.00022	-0.00022	-0.00022	-0.00022	-0.00022	-0.00022	-0.00022
Std[X]	0.01539	0.01538	0.01514	0.01423	0.01470	0.01474	0.01560
Skew[X]	-0.48127	0	-0.42623	-0.22382	-0.38160	-0.30738	-2.71323
Kurt[X]	17.3060	3	10.4044	5.80662	8.84191	7.69045	119.628
Index S&P 500							
E[X]	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019	0.00019
Std[X]	0.01319	0.01318	0.01269	0.01243	0.01325	0.01307	0.01305
Skew[X]	-0.31882	0	-0.37364	-0.17689	-0.81193	-0.62208	-0.61995
Kurt[X]	12.9512	3	6.88495	7.03226	14.2186	11.08066	11.18615
Index FTSE 100							
E[X]	0.00001	0.00001	0.00001	-0.00008	0.00001	0.00001	0.00001
Std[X]	0.01251	0.01251	0.01221	0.01216	0.01243	0.01236	0.01245
Skew[X]	-0.13258	0	-0.23950	-0.02485	-0.37291	-0.29828	-0.38727
Kurt[X]	10.3726	3	6.36588	6.79468	9.27973	7.92607	9.54394

Tabulka 10: Porovnání výběrových a teoretických momentových statistik

Z *Tabulky 10* je patrné, že všechny sofistikovanější modely byly na rozdíl od normálního modelu schopné do značné míry zachytit negativní šikmost a vysokou špičatost dat. Nyní se zaměříme na porovnání modelů s využitím zvolených statistik dobré shody. Výsledky pro vybrané exponenciální Lévyho modely, pro všechna zvolená Δt a pro obě metody kalibrace jsou k nahlédnutí v *Tabulce 11*, *Tabulce 12* a *Tabulce 13*, a jsou též výstupem příslušných programů, jež můžeme nalézt v elektronické příloze.

Index PX	MLE			MM		
	χ^2 -test (statistika/CV ²)	KS statistika	AD statistika	χ^2 -test (statistika/CV ²)	KS statistika	AD statistika
$\Delta t = 1$ den						
N	300.95 / 27.69	0.08666	1.99×10^9	302.12 / 27.69	0.08671	1.97×10^9
JD	17.96 / 23.21	0.01363	0.20234	10.30 / 23.21	0.01753	0.09032
VG	43.60 / 24.73	0.02062	1.44402	1252.5 / 24.72	0.15130	0.36572
NIG	25.79 / 24.73	0.01421	0.12795	118.10 / 24.72	0.05530	0.12958
MX	32.13 / 24.73	0.01567	0.26670	232.61 / 24.73	0.07450	0.17850
GH	7.18 / 23.21	0.01007	0.03882	-	-	-
$\Delta t = 5$ dní						

¹ Teoretické momentové statistiky vypočteny numerickou integrací

² CV představuje kritickou hodnotu testu pro hladinu významnosti $\alpha = 1\%$

N	292.85 / 29.14	0.08748	1.11×10^6	292.85 / 29.14	0.08752	1.10×10^6
JD	15.21 / 24.73	0.01405	0.10468	60.20 / 24.73	0.03820	0.09893
VG	42.84 / 26.22	0.02097	0.30479	593.25 / 26.22	0.10743	0.25386
NIG	23.15 / 26.22	0.01618	0.04738	59.12 / 26.22	0.04020	0.09524
MX	28.55 / 26.22	0.01774	0.07827	117.27 / 26.22	0.05583	0.13556
GH	17.32 / 24.73	0.01305	0.04065	-	-	-
$\Delta t = 22$ dní						
N	325.41 / 29.14	0.09232	9.07×10^4	326.16 / 29.14	0.09237	9.01×10^4
JD	20.20 / 24.73	0.01313	0.08551	58.32 / 24.73	0.03777	0.09215
VG	80.35 / 26.22	0.03018	0.16404	355.67 / 26.22	0.07371	0.15265
NIG	48.96 / 26.22	0.01919	0.08328	48.62 / 26.22	0.01980	0.08101
MX	56.20 / 26.22	0.02062	0.07829	71.77 / 26.22	0.03459	0.07434
GH	39.25 / 24.73	0.01834	0.08276	-	-	-

Tabulka 11: Statistiky dobré shody (Index PX)

Index S&P 500	MLE			MM		
	χ^2 -test (statistika/CV ²)	KS statistika	AD statistika	χ^2 -test (statistika/CV ²)	KS statistika	AD statistika
$\Delta t = 1$ den						
N	531.64 / 27.69	0.10959	6.04×10^3	532.41 / 27.69	0.10961	6.04×10^3
JD	45.13 / 23.21	0.01664	0.28264	596.71 / 23.21	0.07140	0.21561
VG	29.86 / 24.73	0.02435	0.18080	460.12 / 24.73	0.10373	0.22459
NIG	19.16 / 24.73	0.01298	0.03995	30.01 / 24.73	0.02886	0.05881
MX	17.47 / 24.73	0.01152	0.04686	40.34 / 24.73	0.02864	0.06144
GH	14.89 / 23.21	0.01029	0.04510	-	-	-
$\Delta t = 5$ dní						
N	317.24 / 29.14	0.09372	9.98×10^3	317.34 / 29.14	0.09374	9.92×10^3
JD	9.86 / 24.73	0.01167	0.38053	506.15 / 24.73	0.08665	0.23614
VG	20.69 / 26.22	0.01394	0.20890	373.40 / 26.22	0.09091	0.21288
NIG	15.37 / 26.22	0.01419	0.04857	26.39 / 26.22	0.02482	0.05528
MX	13.29 / 26.22	0.01151	0.08383	60.51 / 26.22	0.03964	0.08726
GH	13.48 / 24.73	0.01333	0.05387	-	-	-
$\Delta t = 22$ dní						
N	423.00 / 30.58	0.10692	338.163	423.22 / 30.58	0.10692	336.459
JD	26.36 / 26.22	0.01690	0.17508	1474.9 / 26.22	0.14653	0.43480
VG	30.27 / 27.69	0.01328	0.09200	122.65 / 27.69	0.05443	0.12454
NIG	38.76 / 27.69	0.02100	0.07724	40.85 / 27.69	0.02726	0.08125
MX	29.64 / 27.69	0.01881	0.07636	48.24 / 27.69	0.02184	0.04846
GH	27.62 / 26.22	0.01448	0.07723	-	-	-

Tabulka 12: Statistiky dobré shody (Index S&P 500)

Index FTSE 100	MLE			MM		
	χ^2 -test (statistika/CV ³)	KS statistika	AD statistika	χ^2 -test (statistika/CV ²)	KS statistika	AD statistika
$\Delta t = 1$ den						
N	321.26 / 26.22	0.08162	1.51×10^3	322.19 / 26.22	0.08164	1.51×10^3
JD	39.67 / 21.67	0.02088	0.19261	362.54 / 21.67	0.05850	0.14795
VG	48.14 / 23.21	0.03488	0.10401	327.64 / 23.21	0.08079	0.18007

² CV představuje kritickou hodnotu testu pro hladinu významnosti $\alpha = 1\%$

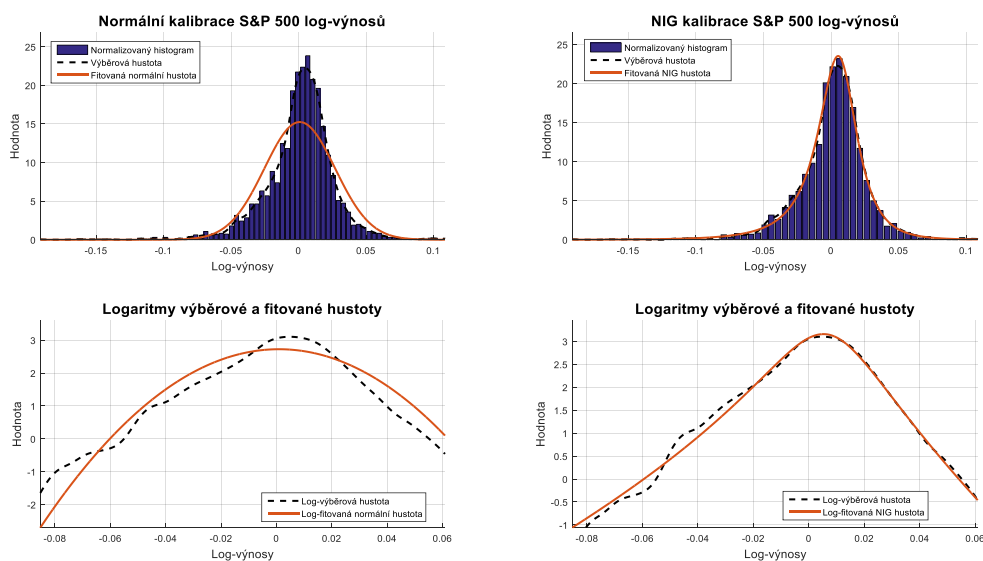
NIG	30.10 / 23.21	0.01792	0.06087	41.36 / 23.21	0.02658	0.05346
MX	29.43 / 23.21	0.01825	0.08429	61.23 / 23.21	0.03273	0.07685
GH	30.20 / 21.67	0.01814	0.05793	-	-	-
$\Delta t = 5$ dní						
N	173.49 / 29.14	0.06107	2.09×10^6	173.87 / 29.14	0.06108	2.07×10^6
JD	16.52 / 24.73	0.01514	0.43586	124.12 / 24.73	0.04517	0.12202
VG	15.16 / 26.22	0.01175	0.33536	222.50 / 26.22	0.06579	0.15130
NIG	11.16 / 26.22	0.00875	0.07764	23.08 / 26.22	0.02059	0.05203
MX	10.57 / 26.22	0.00751	0.15412	53.40 / 26.22	0.03218	0.07231
GH	10.89 / 24.73	0.00987	0.05572	-	-	-
$\Delta t = 22$ dní						
N	175.41 / 29.14	0.06936	35.2520	175.26 / 29.14	0.06938	35.1153
JD	23.25 / 24.73	0.01131	0.13436	136.77 / 24.73	0.05069	0.11303
VG	19.20 / 26.22	0.01439	0.10239	68.74 / 26.22	0.03489	0.08444
NIG	26.85 / 26.22	0.01090	0.05517	24.73 / 26.22	0.01059	0.04817
MX	22.19 / 26.22	0.01090	0.07670	34.52 / 26.22	0.01864	0.04848
GH	26.46 / 24.73	0.01091	0.05611	-	-	-

Tabulka 13: Statistiky dobré shody (FTSE 100)

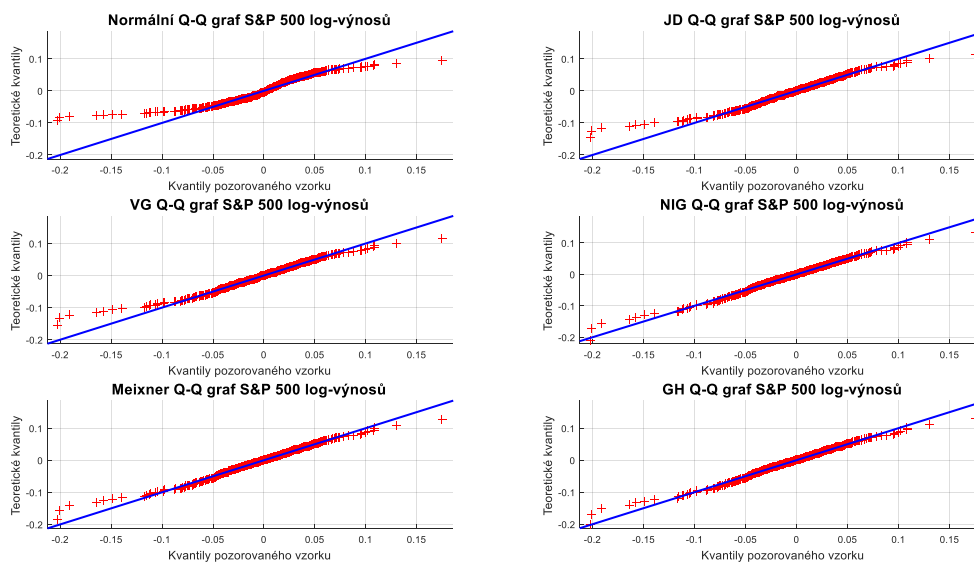
Z tabulek výše je patrné, o kolik lépe jsou modely využívající komplikovanější pravděpodobnostní rozdělení schopné modelovat log-výnosy všech vybraných aktiv pro všechna zvolená Δt . S ohledem na požadavek kvalitně modelovat těžké konce se jako nejvhodnější kandidáti zdají NIG, MX a GH modely.

Dále je z tabulky viditelné, že budeme preferovat MLE odhady parametrů vybraných modelů, jelikož na základě zvolených statistik poskytují mnohem věrnější zachycení reality finančních dat. Význam MM odhadů pak spočívá především jako vhodný počáteční odhad parametrů pro numerické řešení MLE odhadu (5.3).

Obrázek 18 a Obrázek 19 pak poskytují grafický náhled na výsledky kalibrace a potvrzují výše uvedené závěry. Porovnávají teoretické a výběrové hustoty a logaritmy hustot normálního a NIG modelu a Q-Q grafy všech zkoumaných exponenciálních Lévyho modelů pro vybraná data, $\Delta t = 5$ a při aplikaci MLE odhadů. Pro všechny ostatní kombinace opět čtenáře odkážeme na příslušné programy nacházející se v elektronické příloze této práce.

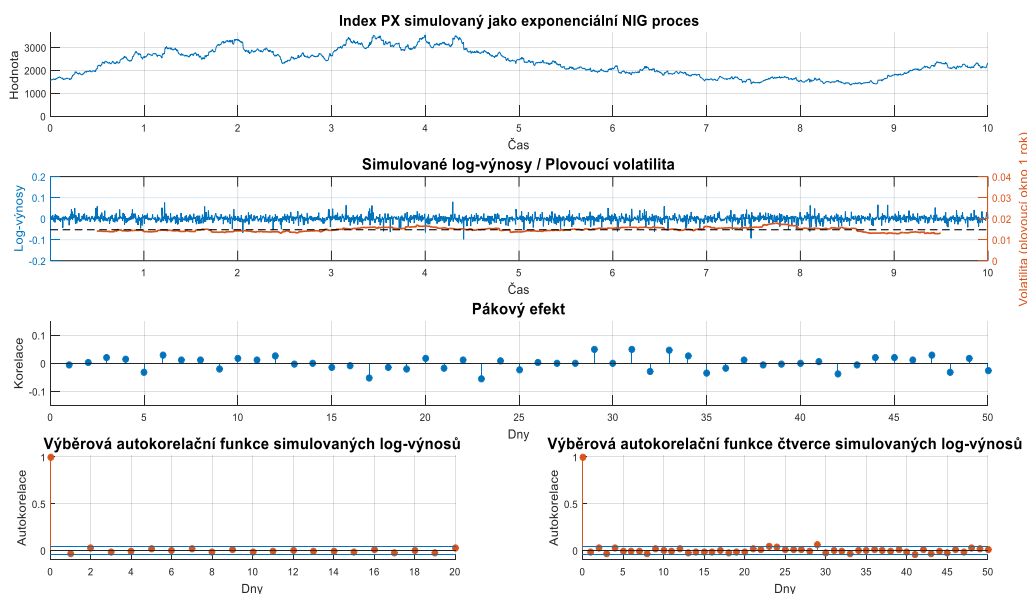


Obrázek 18: Grafické porovnání kvality shody (S&P 500, $\Delta t = 5$, MLE)



Obrázek 19: Q-Q grafy (S&P 500, $\Delta t = 5$, MLE)

V oddílu výše jsme tedy demonstrovali, jak jsou exponenciální Lévyho modely schopné odpovídajícím způsobem zachytit zápornou šikmost a vysokou špičatost log-výnosů a tedy že jsou schopné úspěšně modelovat vlastnosti (i) a (ii) typické pro finanční řady tohoto typu (viz. *Kapitola 4*). Jelikož přírůstky Lévyho procesů jsou z definice nezávislé, automaticky také získáváme vlastnost (iii) – absenci lineární autokorelace. Bohužel to také znamená, že i kvadráty inkrementů jsou nezávislé a tedy v prostředí exponenciálních Lévyho modelů, tak jak jsme je zavedli v *Kapitole 5.1*, není možné modelovat silnou autokorelaci kvadrátů log-výnosů, shlukování volatilita ani pákový efekt (tedy vlastnosti (iv), (v) a (vi)). Popsanou situaci lze demonstrovat *Obrázkem 20*, kdy jsme využili odhadnutých MLE parametrů pro $\Delta t = 1$ a nasimulovali jsme jednu trajektorii Indexu PX pomocí NIG modelu pro 10leté období mezi dubnem 2006 a dubnem 2016 (porovnejme s *Obrázkem 16* a *Obrázkem 17*).



Obrázek 20: Nedostatky exponenciálních Lévyho modelů

5.1.3 Oceňování opcí v exponenciálních Lévyho modelech

To, že exponenciální Lévyho modely sami o sobě nejsou schopné zachytit efekt shlukování volatility, který je na trhu jasně pozorovatelný, má své důsledky například v oceňování opcí, kde, jak si ukážeme v této kapitole, i přesto, že zdánlivě velmi dobře modelují rozdělení *podkladového aktiva*, nejsou schopné přesně zachytit ceny *evropských call opcí* při kalibraci napříč různými *realizačními cenami* K a *dobami do splatnosti* T opcí. V této kapitole budeme předpokládat, že čtenář má odpovídající znalosti týkající se klasické teorie oceňování opcí založené na Black-Scholesově modelu. Patříčné informace lze nalézt ve velkém množství české i zahraniční literatury, z níž zmíníme například (Cipra 2013), (Hull 2003) nebo (Bingham a Kiesel 2004).

Připomeňme, že evropská call opce je finanční instrument, jež v čase T (uvažujeme pro jednoduchost, že současnost představuje čas $t = 0$) vyplatí náhodnou sumu danou výrazem $\max(S_T - K, 0)$, kde S_T je cena podkladového aktiva a K je realizační cena opce. Cílem teorie zabývající se oceňováním opcí je určit spravedlivou cenu C_0 takového instrumentu na základě parametrů kontraktu, povahy podkladového aktiva a *bezrizikové úrokové míry* r převládající na finančním trhu. Klasická technika používaná k oceňování opcí je takzvané *rizikově neutrální* (či *martingalové*) *oceňování*, kdy cena evropské call opce je dána výrazem

$$\begin{aligned} C_0(T, K) &= e^{-rT} E^Q[\max(S_T - K, 0)] \\ &= e^{-rT} \int_K^{+\infty} (x - K) g_{S_T}^Q(x) dx, \end{aligned} \quad (5.10)$$

kde $E^Q[*]$ je střední hodnota náhodné veličiny pod *rizikově neutrální mírou* Q , $g_{S_T}^Q$ značí *rizikově neutrální hustotu pravděpodobnosti* náhodné veličiny S_T , jež určuje cenu podkladového aktiva řídicího se *rizikově neutrálním procesem* $\{S_t : t \geq 0\}$ v čase T , a výraz e^{-rT} představuje diskontování bezrizikovou úrokovou mírou k aktuálnímu datu. Tato technika oceňování úzce souvisí s technikou změny míry v integrálu, která je diskutována v *Kapitole 1.2.4* (Hull 2003).

Definice 5.1 (Schoutens 2003, Shreve 2004) Necht' $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\})$ je měřitelný prostor vybavený filtrací $\{\mathcal{F}_t\}$, P je *reálná pravděpodobnostní míra*, jež je pozorována na trhu, r je bezriziková úroková míra a q je *spojitá dividendová míra* nějakého rizikového aktiva, jehož cena se řídí adaptovaným procesem $\{S_t : t \geq 0\}$. Řekneme, že pravděpodobnostní míra Q je *rizikově neutrální* (či *martingalová*) *míra*, pokud:

- (i) Q a P jsou ekvivalentní míry (viz. *Definice 1.23*), tudíž jevy, jež nemohou nastat pod P , nemohou nastat ani pod Q a naopak.
- (ii) Náhodný proces popisující cenu rizikového aktiva v čase t upravený o diskontování a výplatu dividend $\{e^{-(r-q)t} S_t : t \geq 0\}$ je martingal na $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$ (tedy pro všechna $0 \leq s \leq t$ platí $e^{-(r-q)t} E_s^Q[S_t] = e^{-(r-q)s} S_s$ a speciálně pak pro $s = 0$ dostáváme $e^{-(r-q)t} E_0^Q[S_t] = S_0$).

Poznámka: Jak je uvedeno v definice výše, míry jsou vzájemně absolutně spojitě a zároveň jsou konečné, jelikož se jedná o pravděpodobnostní míry. Dle *Věty 1.6* tedy existují Radon-Nikodýmovy derivace dP/dQ a dQ/dP jež umožňují přecházet mezi reálnou a rizikově neutrální pravděpodobnostní mírou.

Dále budeme předpokládat absenci arbitráže a obecně nekompletní trhy. Tyto předpoklady jsou více diskutovány v uvedené literatuře. Pro nás je v tuto chvíli podstatné, že zajišťují existenci (nikoli však jedinečnost) rizikově neutrální míry. Populární volbou v současné

literatuře (viz. například (Brody, Hughston a Mackie 2012)) je přechod k rizikově neutrální míře za pomoci *Esscherova martingalu* $\{e^{\alpha X_t - t\psi_X(\alpha)} : t \geq 0\}$ (viz. *Tvrzení 2.2*) a tedy ve světě exponenciálních Lévyho procesů má rizikově neutrální proces ceny podkladového aktiva $\{S_t^Q : t \geq 0\}$ tvar

$$\begin{aligned} S_t^Q &= e^{(r-q)t} S_0 e^{X_t - t\psi_X(1)} \\ &= S_0 e^{M^Q t + X_t}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

kde $\{X_t : t \geq 0\}$ je řídicí Lévyho proces a $M^Q := r - q - \psi_X(1)$. Cena evropské call opce je tedy dána výrazem (5.10), kde se proces ceny podkladového aktiva řídí procesem (5.11). Problémem je, že hustota tohoto procesu v čase t obecně není známá. Řešení spočívá v přepsání vzorce (5.10) s využitím charakteristické funkce logaritmu (5.11), tedy charakteristické funkce Lévyho procesu $\{M^Q t + X_t : t \geq 0\}$. Tento přístup se nazývá *oceňování pomocí inverzní Fourierovi transformace* a byl poprvé využit ve zlomovém článku *Option Valuation Using the Fast Fourier Transform* od Petera Carra a Dilipa Madana (viz. (Carr a Madan 1999)). Výsledný vzorec pro cenu evropské call opce má tvar

$$C_0(T, K) = \frac{e^{-\varrho \ln K}}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\theta \ln K} \frac{e^{-rT} \varphi_{\ln S_T}^Q(\theta - i(1 + \varrho))}{\varrho^2 + \varrho - \theta^2 + i\theta(2\varrho + 1)} d\theta, \quad (5.12)$$

kde T je čas do splatnosti, K je realizační cena opce, r je bezriziková úroková míra, $\varrho > 0$ je kladná konstanta (budeme volit $\varrho = 1$) a $\varphi_{\ln S_T}^Q$ je charakteristická funkce logaritmu rizikově neutrálního procesu popisující vývoj ceny podkladového aktiva v čase T . Tento semi-analytický vzorec představuje revoluci v oceňování opcí za pomoci exponenciálních Lévyho procesů, jelikož $\varphi_{\ln S_T}^Q$ je ve většině případů snadno dostupná. Například v našem případě stačí využít charakteristických exponentů vypočtených v *Kapitole 2* spolu se vzorci (2.7) a (1.19).

Příklad (NIG model): Pro NIG model představený v *Kapitole 5.1* dostáváme pro rizikově neutrální proces vývoje ceny rizikového aktiva

$$S_t = S_0 e^{\left(r - q - m + \delta(\sqrt{\gamma^2 - (\beta+1)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2})\right)t + \tilde{R}_t}, \quad (5.13)$$

a pro charakteristickou funkci logaritmu procesu (5.13) v čase T poté dostáváme

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{NIG}}^Q(\theta) &= e^{i\theta(\ln S_0 + (r - q - m + \delta(\sqrt{\gamma^2 - (\beta+1)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}))T) + T(mi\theta - \delta(\sqrt{\gamma^2 - (\beta+i\theta)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}))} \\ &= e^{i\theta(\ln S_0 + (r - q + \delta(\sqrt{\gamma^2 - (\beta+1)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2}))T) - T\delta(\sqrt{\gamma^2 - (\beta+i\theta)^2} - \sqrt{\gamma^2 - \beta^2})}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Povšimněme si, že parametr m , jenž má charakter lineárního driftu se ve výrazu (5.14) vynuřil. Toto je typické pro techniku rizikově neutrálního oceňování.

My se nyní budeme zabývat kalibrací modelů na reálná data. Cena opce $C_0^{\text{mod.}}(\theta, \mathcal{E})$ v našich modelech závisí na dané množině parametrů modelu (v příkladu výše $\theta = \{\gamma, \beta, \delta\}$) a množině dalších parametrů \mathcal{E} specifikujících detaily kontraktu, podkladového aktiva a tržní situaci (obvykle $\mathcal{E} = \{S_0, T, K, r, q\}$). Nyní předpokládejme, že známe cenu opce C_0^{trh} obchodované na trhu a množinu parametrů \mathcal{E} . Naším cílem je potom identifikovat rizikově neutrální množinu parametrů θ^Q takovou, že

$$C_0^{\text{mod.}}(\theta^Q, \mathcal{E}) = C_0^{\text{trh}}. \quad (5.15)$$

Ve skutečnosti máme obvykle k dispozici celou množinu n tržních cen opcí $C_{0,i}^{\text{trh}}, i = 1, 2, \dots, n$ a snažíme se nalézt množinu parametrů θ^Q , jež co nejlépe aproximuje situaci na

trhu. Tento odhad se nejčastěji provádí ve smyslu *nejmenších čtverců (LS odhad)*. Tedy řešíme minimalizační úlohu

$$\theta_{LS}^Q = \min_{\theta^Q} \sum_{i=1}^n \left(C_{0;i}^{trh} - C_{0;i}^{mod.}(\theta^Q, \mathcal{E}) \right)^2. \quad (5.16)$$

Kvalitu odhadu poté můžeme měřit pomocí řady různých kritérií, z nichž pro účely této práce vybereme *průměrnou relativní chybu (ARPE)* a *odmocninu průměrné chyby čtverců (RMSE)*, které jsou dané výrazy

$$ARPE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{|C_{0;i}^{trh} - C_{0;i}^{mod.}(\theta_{LS}^Q, \mathcal{E})|}{C_{0;i}^{trh}},$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(C_{0;i}^{trh} - C_{0;i}^{mod.}(\theta_{LS}^Q, \mathcal{E}) \right)^2}{n}}. \quad (5.17)$$

(Cont a Tankov 2004, Schoutens 2003)

Detailní odvození formule (5.12), numerické experimenty, explicitně rozepsané výrazy ve stylu (5.13) a (5.14) pro některé další exponenciální Lévyho modely a další informace o kalibraci a testování modelů lze nalézt v (Panoš 2014).

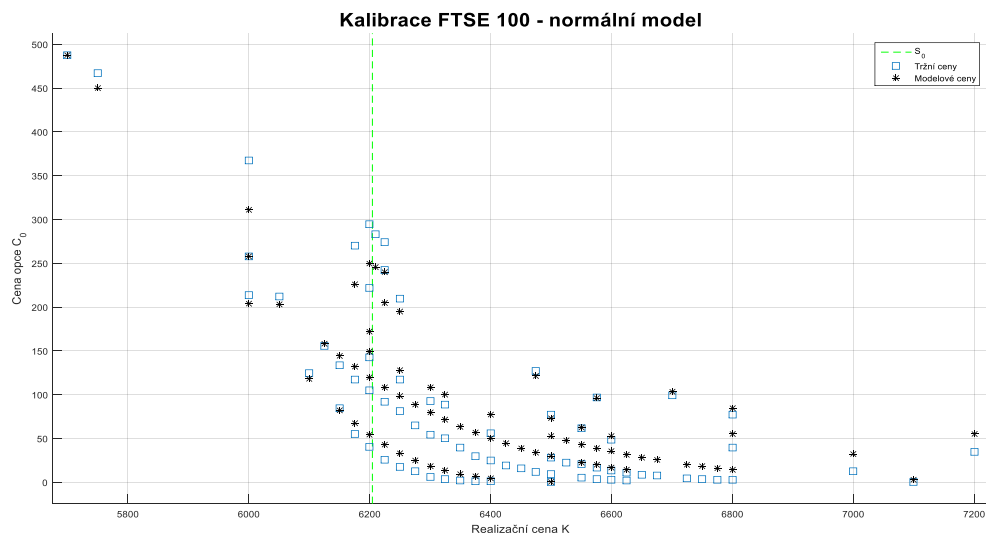
Uvažujme nyní soubor celkem 920 evropských call opcí z 26. dubna 2016 na Index S&P 500 stažený z (MarketWatch 2016) s různými doby do splatnosti (které převedeme na roční bázi) a různými realizačními cenami. Příslušná počáteční hodnota Indexu S&P 500 byla $S_0 = 2091.70$ (MarketWatch 2016), bezriziková úroková míra byla odhadnuta výnosem 12měsíčního U.S. bondu jako $r = 0,0019$ (Investing.com 2016) a spojitý dividendový výnos příslušného indexu byl $q = 0.0210$ (Multipl 2016). V elektronické příloze je též k dispozici menší soubor celkem 74 opcí na Index FTSE 100 ze zdroje (The ICE 2016), kde $S_0 = 6204,40$ (Yahoo! Finance 2016b), $r = 0.0038$ (Financial Times 2016) a $q = 0.0395$ (Upcoming Dividends 2016). Je vhodné upozornit, že v rámci kalibrace využíváme pouze aktuálních dat, jelikož předpokládáme, že aktuální ceny v sobě zahrnují všechny informace dostupné na trhu. Porovnání výsledků kalibrace, jež jsou výstupem příslušných programů v elektronické příloze, pro vybrané modely a oba soubory dat pomocí kritérií (5.17) je v *Tabulce 14* a grafické porovnání kalibrace na FTSE 100 opce normálního a JD modelu na *Obrázku 21* a *Obrázku 22*.

–	Index S&P 500		Index FSTE 100	
	ARME	RMSE	ARME	RMSE
N	0.76792	13.7390	1.23536	20.2381
JD	0.13715	7.16086	0.15845	9.31480
VG	0.35160	7.74353	0.31195	9.81427
NIG	0.22838	7.21714	0.20756	9.35607
MX	0.32438	7.37641	0.25931	9.45622

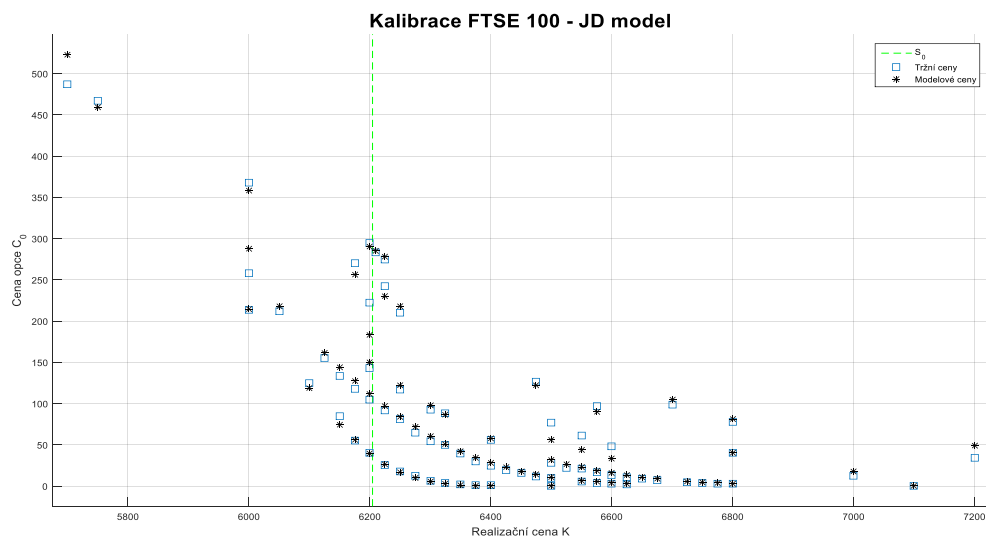
Tabulka 14: Kritéria kvality kalibrace – exponenciální Lévyho modely

Poznámka: Jelikož kalibrace modelů proběhla na opce s různou dobou do splatnosti, nebyla kalibrace provedena pro GH model. Důvody jsou detailněji probrány v *Kapitole 2.2.7*.

Zlepšení víceparametrických modelů oproti modelu založeném na normálním rozdělení je zřejmé – průměrná chyba se snížila z téměř 80 % (respektive 120 %) ceny opce u normálního modelu na hodnoty v přibližném rozpětí 15 – 35 % u ostatních modelů. Nicméně kalibrace zdaleka není perfektní. Důvodem je, že exponenciální Lévyho modely nejsou schopné modelovat efekty autokorelovanosti kvadrátů log-výnosů, shlukování volatility ani pákový efekt, přičemž informace o nich jsou v tržních cenách inherentně obsaženy. Tím je ovlivněna zejména schopnost efektivně zachytit tržní ceny opcí s delší dobou do splatnosti. Otázkou tedy zůstává, jakým způsobem vylepšit použité modely tak, aby byly schopné výše uvedené efekty zachytit a přitom abychom mohli využít stávajícího aparátu pro oceňování opcí. Odpověď je ukryvá ve využití procesů s návratem ke střední hodnotě z *Kapitoly 3* spolu s exponenciálními Lévyho modely. Takovými modely se zabývá následující kapitola (Cont a Tankov 2004).



Obrázek 21: Kalibrace na opce na Index FTSE 100 – normální model



Obrázek 22: Kalibrace na opce na Index FTSE 100 – JD model

5.2 Exponenciální Lévyho modely se stochastickou volatilitou

Ukázali jsme, že empirická evidence si žádá zavedení stochastické volatility do exponenciálních Lévyho modelů tak, aby mohli efektivněji modelovat realitu finančních trhů. Existuje několik způsobů, jakým lze stochastickou volatilitu do stávajících modelů zaintegrovat a přitom zachovat možnost využití techniky oceňování inverzní Fourierovou transformací funkce $\varphi_{\ln S_T}^Q$ pomocí formule (5.12).

Lze ukázat, že autokorelační funkce OU procesů a CIR procesu představených v *Kapitole 3* mají tvar

$$\rho_{OU}(s) = e^{-\lambda s} \quad \text{a} \quad \rho_{CIR}(s) = e^{-as}, \quad (5.18)$$

a jsou tedy schopné zachycovat autokorelaci za předpokladu, že autokorelační funkce je exponenciálního charakteru. Veškeré programy související s kalibrací v této kapitole jsou opět k nalezení v elektronické příloze této práce (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001, Cont a Tankov 2004).

5.2.1 Hestonův a Batesův model

Hestonův model (HM) využívá k modelování ceny S_t rizikového aktiva normálního modelu v kombinaci s CIR procesem. Stejně jako u exponenciálních Lévyho modelů předpokládáme modely ve tvaru $S_t = S_0 e^{X_t}$, ale s dynamikou, jenž je pod reálnou pravděpodobností mírou popsána následujícími stochastickými diferenciálními rovnicemi:

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^S, \\ dV_t &= a(b - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^V, \\ \text{Corr}[W_t^S, W_t^V] &= \rho, \quad V_0 := v_0, \end{aligned} \quad (5.19)$$

Kde $\{W_t^S : t \geq 0\}$ a $\{W_t^V : t \geq 0\}$ jsou dva navzájem lineárně závislé standardní Brownovy pohyby s korelačním koeficientem $\rho \in [-1, 1]$. Vidíme tedy, že Hestonův model skutečně vychází z normálního modelu, očekává, že se volatilita ceny řídí CIR procesem představeným v *Kapitole 3.2*, a navíc předpokládá vzájemnou provázanost náhodných složek obou procesů (Crisóstomo 2014).

Poznámka: (Cont 2001, Crisóstomo 2014) Korelace mezi $\{W_t^S\}$ a $\{W_t^V\}$ inkorporuje do modelu pákový efekt popsáný v *Kapitole 4*. Přirozeně bychom tedy měli očekávat záporné hodnoty parametru ρ , jež přímo určuje korelaci mezi procesy $\{W_t^S\}$ a $\{W_t^V\}$.

Charakteristická funkce logaritmu ceny aktiva v čase T v rizikově neutrálním prostředí je potom dle (Crisóstomo 2014) dána následujícími výrazy:

$$\begin{aligned} \varphi_{HM}^Q(\theta) &= e^{i\theta(\ln S_0 + (r-q)T) + b\mathcal{C}(\theta, T) + v_0\mathcal{D}(\theta, T)}, \\ \mathcal{C}(\theta, T) &:= a \left(Tf_- - \frac{2}{\sigma^2} \ln \left(\frac{1 - ge^{-hT}}{1 - g} \right) \right), \\ \mathcal{D}(\theta, T) &:= f_- \frac{1 - e^{-hT}}{1 - ge^{-hT}}, \\ f_{\pm} &:= \frac{\beta \pm h}{\sigma^2}, \quad h := \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, \quad g := \frac{f_-}{f_+}, \\ \alpha &:= -\frac{1}{2}\theta^2 - \frac{1}{2}i\theta, \quad \beta := a - \rho\sigma i\theta, \quad \gamma := \frac{\sigma^2}{2}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Batesův model (BM) je rozšířením Hestonova modelu, kdy umožníme, aby se v ceně aktiva objevily náhodné skoky. Vychází tedy z modelu skokové difuze s dodatečným předpokladem, že se volatilita ceny řídí CIR procesem. Dynamika modelu pod reálnou pravděpodobnostní mírou je tedy dána soustavou SDR

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t^S + dC_t, \\ dV_t &= a(b - V_t) dt + \sigma\sqrt{V_t} dW_t^V, \\ \text{Corr}[W_t^S, W_t^V] &= \rho, \quad V_0 := v_0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

kde $\{C_t : t \geq 0\}$ je složený Poissonův proces se skoky $Y_k \sim N(m, s^2)$. Předpokládáme, že proces $\{C_t\}$ je nezávislý se všemi ostatními procesy v (5.21) (Cont a Tankov 2004).

Při hledání rizikově neutrální charakteristické funkce logaritmu ceny aktiva v čase T vyjdeme z (5.20), *Tabulky 2* a vlastnosti (1.19). S využitím vztahu pro charakteristické funkce nezávislých náhodných veličin (1.21) pak dostáváme

$$\varphi_{\text{BM}}^Q(\theta) = \varphi_C(\theta) \varphi_{\text{HM}}^Q(\theta), \quad (5.22)$$

kde $\varphi_C(\theta)$ je charakteristická funkce složeného Poissonova procesu s normálně rozdělenými skoky (Cont a Tankov 2004, Crisóstomo 2014).

Jelikož máme k dispozici charakteristické funkce pro logaritmus ceny, můžeme aplikovat Carrovu a Madanovu formuli (5.12) a použít modely k oceňování opcí. Výsledky kalibrace pro oba modely na oba soubory dat popsané v předchozí části jsou k nalezení v *Tabulce 15*.

5.2.2 Barndorff-Nielsen-Shephardovy modely

Barndorff-Nielsen-Shephardovy modely (BNS modely) vycházejí z normálního modelu, který podobně jako Hestonův model v předchozí kapitole rozšiřují o stochastickou volatilitu řízenou tentokrát OU procesem, kde řídicí Lévyho proces je subordinátor, a pákový efekt. Nyní pro model ve tvaru $S_t = S_0 e^{X_t}$ předpokládáme dynamiku

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t + \rho dZ_{\lambda t}, \\ dV_t &= -\lambda V_t dt + dZ_{\lambda t}, \quad V_0 := v_0, \end{aligned} \quad (5.23)$$

kde $\{W_t : t \geq 0\}$ je standardní Brownův pohyb a $\{Z_t : t \geq 0\}$ je řídicí Lévyho proces s nezápornými přírůsky. Tyto dva procesy předpokládáme vzájemně nezávislé. Parametr ρ v tuto chvíli již přímo neudává hodnotu korelačního koeficientu a tedy může nabývat libovolného reálného čísla, nicméně vzhledem k povaze pákového efektu lze očekávat záporné hodnoty tohoto parametru (Barndorff-Nielsen, Nicolato a Shephard 2002, Nicolato a Venardos 2003).

Konkrétně se v této práci budeme zabývat dvěma modely, jež využívají Gamma-OU a IG-OU procesy. Označme

$$\begin{aligned} f_1 &:= i\theta\rho - \frac{1}{2}(\theta^2 + i\theta)(1 - e^{-\lambda T}), \\ f_2 &:= i\theta\rho - \frac{1}{2}(\theta^2 + i\theta), \end{aligned} \quad (5.24)$$

a poté dle (Barndorff-Nielsen, Nicolato a Shephard 2002) dostáváme v rizikově neutrálním prostředí pro logaritmus ceny aktiva v čase T pro BNS Gamma-OU model

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{BNS Gamma-OU}}^Q(\theta) &= e^{i\theta\left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{a\lambda\rho}{b-\rho}\right)T\right) - \frac{v_0}{2\lambda}(\theta^2 + i\theta)(1 - e^{-\lambda T})} \\ &\times e^{\frac{a}{b-f_2}\left(b \ln\left(\frac{b-f_1}{b-i\theta\rho}\right) + f_2\lambda T\right)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

a pro BNS IG-OU model

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{BNS IG-OU}}^Q(\theta) &= e^{i\theta\left(\ln S_0 + \left(r - q - \frac{\rho\lambda c}{\zeta\sqrt{1-2\rho\zeta^{-2}}}\right)T\right) - \frac{v_0}{2\lambda}(\theta^2 + i\theta)(1 - e^{-\lambda T})} \\ &\times e^{c\left(\sqrt{\zeta^2 - 2f_1} - \sqrt{\zeta^2 - 2i\theta\rho}\right) + \frac{2cf_2}{\sqrt{2f_2 - \zeta^2}}\left(\arctan\left(\sqrt{\frac{\zeta^2 - 2i\theta\rho}{2f_2 - \zeta^2}}\right) - \arctan\left(\sqrt{\frac{\zeta^2 - 2f_1}{2f_2 - \zeta^2}}\right)\right)}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Díky charakteristickým funkcím (5.25) a (5.26) opět můžeme využít vzorce (5.12) a BNS modely využít pro oceňování opcí. Výsledky kalibrace pro oba modely na oba soubory dat jsou k nalezení v *Tabulce 15* (Barndorff-Nielsen, Nicolato a Shephard 2002, Nicolato a Venardos 2003).

5.2.3 Modely se stochastickým časem

Odlisný přístup, než jaký byl prezentován v *Kapitole 5.2.1* a *Kapitole 5.2.2* představuje princip stochastické změny času Lévyho procesů s reálnými přírůstky pomocí integrovaných Ornstein-Uhlenbeckových procesů (*Lévy-IntOU modely*). Hlavní idea tohoto přístupu spočívá v myšlence, že čas na burze (business time) neplyne lineárně tak jako běžný čas, ale někdy běží rychleji a někdy pomaleji a představuje jakousi kumulativní míru ekonomické aktivity na trhu. Tyto období rychlejšího či pomalejšího běhu času potom ústí v periody vyšší a nižší volatility obchodovaného aktiva. Výhodou je, že v rámci těchto modelů lze využít komplexnějších Lévyho procesů než je Brownův pohyb. Na druhou stranu odpadá možnost snadného modelování pákového efektu tak, jak jsme viděli u modelů v předcházejících kapitolách (Carr *et al.* 2003).

Proces ceny rizikového aktiva $\{S_t : t \geq 0\}$ nyní modelujeme jako

$$S_t = S_0 e^{X_{Y_t}}, \quad (5.27)$$

v reálném prostředí a

$$S_t = S_0 \frac{e^{(r-q)t + X_{Y_t}}}{\mathbb{E}[e^{X_{Y_t}}]}, \quad (5.28)$$

v rizikově neutrálním prostředí, kde $\{X_t : t \geq 0\}$ je Lévyho proces s podporou na celé reálné ose s charakteristickým exponentem Ψ_X a $\{Y_t : t > 0\}$ je zvolený IntOU proces modelující business time s charakteristickou funkcí φ_Y . Potom, jak je ukázáno v (Carr *et al.* 2003), lze odvodit obecný předpis pro charakteristickou funkci logaritmu ceny rizikového aktiva pod rizikově neutrální mírou v čase T :

$$\varphi_{\ln S_T}^Q = e^{i\theta(\ln S_0 + (r-q)T)} \frac{\varphi_Y(-i\Psi_X(\theta))}{\varphi_Y(-i\Psi_X(-i))^{i\theta}}. \quad (5.29)$$

Tímto dostáváme velice snadný recept ke konstrukci široké škály modelů, kdy můžeme kombinovat Lévyho procesy z *Kapitoly 2* a integrované procesy z *Kapitoly 3*, a pomocí vzorce (5.29) snadno nalézt charakteristickou funkci využitelnou k oceňování opcí inverzní Fourierovou transformací. Výsledky kalibrace pro vybrané modely na oba zkoumané soubory dat jsou k nalezení v *Tabulce 16*.

Poznámka: (Schoutens 2003) Jelikož se nyní o škálování Lévyho procesu $\{X_t\}$ s rostoucím časem stará náhodný proces $\{Y_t\}$ s počáteční podmínkou $Y_0 := y_0$, stává se jeden z parametrů,

jež ovlivňují míru disperze procesu $\{X_t\}$ v čase, nadbytečným. Proto jsme u všech Lévyho procesů použitých v této kapitole jeden z parametrů zafixovali tak, aby rozptyl náhodné veličiny X_1 byl jednotkový. Ve výstupech příslušných programů v elektronické příloze je tento parametr vždy označen dolním indexem způsobem par_{fix} .

5.2.4 Výsledky kalibrace

V této části uvedeme a stručně prodiskutujeme výsledky kalibrace modelů z *Kapitoly 5.2.1*, *Kapitoly 5.2.2* a *Kapitoly 5.2.3*.

–	Index S&P 500		Index FSTE 100	
	ARME	RMSE	ARME	RMSE
HM	0.08676	3.11463	0.16740	8.61339
BM	0.06577	2.84451	0.15834	8.60090
BNS Gamma-OU	0.14776	4.80933	0.13636	8.78699
BNS IG-OU	0.11239	7.03284	0.15801	9.29857

Tabulka 15: Kritéria kvality kalibrace – modely se stochastickou volatilitou 1

–	Index S&P 500		Index FSTE 100	
	ARME	RMSE	ARME	RMSE
N-Gamma-IntOU	0.42626	12.1157	0.60660	15.1526
N-IG-IntOU	0.56019	12.4275	0.60994	15.1649
JD-Gamma-IntOU	0.06533	3.44558	0.11886	8.44749
JD-IG-IntOU	0.09546	6.22979	0.14860	8.72626
VG-Gamma-IntOU	0.09092	3.47975	0.11539	8.44196
VG-IG-IntOU	0.07154	3.36754	0.19703	8.91939
NIG-Gamma-IntOU	0.08621	3.49420	0.11533	8.44477
NIG-IG-IntOU	0.07761	3.37435	0.13322	8.97627
MX-Gamma-IntOU	0.12344	6.23828	0.11530	8.44111
MX-IG-IntOU	0.12996	6.89797	0.17725	8.87632

Tabulka 16: Kritéria kvality kalibrace – modely se stochastickou volatilitou 2

Výsledky přesvědčivě ukazují, že stochastická volatilita je nezbytná komponenta pro úspěšné modelování finančních dat. Z výsledků v *Tabulce 15* se velmi dobře jeví Batesův model, jež jako jediný z doposud prezentovaných modelů dokáže modelovat všechny význačné vlastnosti finančních časových řad, jež jsme uvedli v *Kapitole 4*. Hestonův i BNS modely sice dovedou modelovat časovou závislost volatility, ale vychází z Brownova pohybu, jež se řídí normálním rozdělením, které nezvládá přesně popsat zápornou šikmost a vysokou špičatost log-výnosů podkladového aktiva.

Naopak modely se stochastickým časem (výsledky v *Tabulce 16*) úspěšně modelují zápornou šikmost a vysokou špičatost log-výnosů (kromě N modelu), ale schází jim složka, jež by zachycovala páková efekt. I přesto si modely založené na sofistikovanějších Lévyho procesech vedly v empirickém testování výrazně lépe, než modely bez stochastické volatility (viz. *Tabulka 14*).

Z dostupných výsledků nelze jednoznačně určit, zda je pro modelování volatility vhodnější Gamma-OU či IG-OU proces, přestože IG-OU proces má komplexnější struktury vyznačující se řídicím Lévyho procesem s nekonečnou aktivitou. Proto z principu Occamovy britvy a s ohledem na míru složitosti numerických výpočtů, zdá se být vhodnější pro modelování stochastické volatility využívat Gamma-OU proces.

5.2.5 Další možné modifikace

Existuje několik dalších modifikací, jež lze potencionálně využít k vylepšení stávajících modelů při zachování možnosti využití metody inverzní Fourierovy transformace. První z nich spočívá v přidání komponenty zachycující vzájemnou korelaci ceny a volatility aktiva do Lévy-IntOU modelů, jež by jim umožnila zachytit pákový efekt. Nechť $\{Z_t : t \geq 0\}$ je řídicí Lévyho proces zvoleného OU procesu, jež řídí dynamiku asociovaného integrovaného OU procesu. Potom v tomto případě proces ceny aktiva $\{S_t : t \geq 0\}$ modelujeme jako

$$S_t = S_0 e^{X_{Y_t} + \rho Z_{\lambda t}}, \quad (5.30)$$

kde $\rho \in \mathbb{R}$ interpretujeme analogicky k BNS modelům, a jinak vše ostatní zůstává identické jako v (5.27). Tento typ modelů označíme jako *Lévy-IntOULev modely*. V (Carr *et al.* 2003) můžeme nalézt odvození obecné podoby rizikově neutrální charakteristické funkce logaritmu ceny podkladového aktiva v čase T :

$$\begin{aligned} \varphi_{\ln S_T}^Q &= e^{i\theta(\ln S_0 + (r-q)T)} \frac{\varphi(-i\Psi_X(\theta), \theta\rho)}{\varphi(-i\Psi_X(-i), -i\rho)^{i\theta}}, \\ \varphi(u, v) &:= e^{iuy_0 \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda} + \int_L^U \frac{\Psi_Z(x)}{u+\lambda(v-x)} dx}, \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$L := v, \quad U := v + u \frac{1 - e^{-\lambda t}}{\lambda},$$

kde Ψ_Z je charakteristický exponent řídicího Lévyho procesu $\{Z_t\}$. V některých případech lze analyticky vyřešit integrál v (5.31). Konkrétně v případě využití Gamma-OU procesu dostáváme

$$\int_L^U \frac{\Psi_Z(x)}{u + \lambda(v-x)} dx = \left[\ln \left((x+ib)^{\frac{a}{\lambda-i/b(u+\lambda v)}} (u+\lambda(b-x))^{\frac{a/b(u+\lambda v)}{\lambda((u+\lambda v)/b+i\lambda)}} \right) \right]_L^U. \quad (5.32)$$

Do (5.31) potom tedy za příslušný integrál dosadíme výraz (5.32) vyhodnocený v bodě $x = v + u \frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}$ mínus výraz (5.32) vyhodnocený v bodě $x = v$ (Carr *et al.* 2003).

Již dobře známá kritéria kvality pro kalibrované Lévy-IntOULev modely a obě sady testovacích dat jsou k nahlédnutí v následující tabulce:

—	Index S&P 500		Index FSTE 100	
	ARME	RMSE	ARME	RMSE
N-Gamma-IntOULev	0.13775	5.36201	0.14001	8.82817
JD-Gamma-IntOULev	0.06534	3.44519	0.10897	8.47128
VG-Gamma-IntOULev	0.08760	3.47588	0.20019	8.42960
NIG-Gamma-IntOULev	0.08104	3.49538	0.11889	8.42002
MX-Gamma-IntOULev	0.10515	5.05339	0.13338	8.45755

Tabulka 17: Kritéria kvality kalibrace – Lévy-IntOULev modely

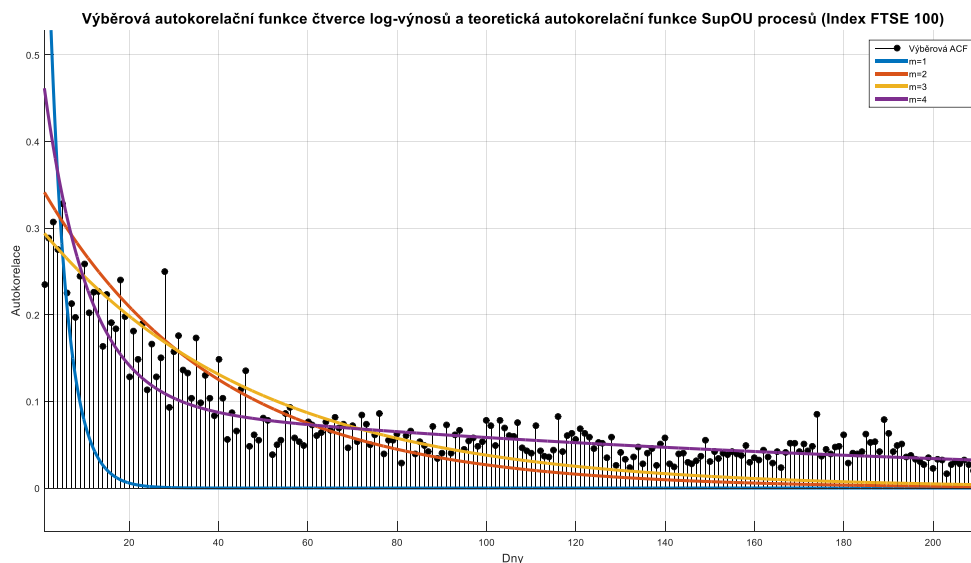
Přidání pákového efektu do Lévy-IntOU modelů se projevilo zejména zjevným zlepšením normálního modelu, jež se kvalitativně posunul na úroveň Hestonova či BNS modelů. Na komplexnější modely již přidání této komponenty výraznější vliv nemělo.

Poznamenejme, že pro další možné modifikace, jež následují dále v této kapitole, kalibrace již provádět nebudeme.

Další možností je využití SupOU procesů z *Kapitoly 3.1.3*. Jejich autokorelační funkce má tvar

$$\rho_{\text{SupOU}}(s) = w_1 e^{-\lambda_1 s} + w_2 e^{-\lambda_2 s} + \dots + w_m e^{-\lambda_m s}, \quad (5.33)$$

což umožňuje lépe vystihnout povahu časové závislosti kvadrátů log-výnosů, jež často vykazují příznaky takzvané *dlouhé paměti*. Situaci ilustruje *Obrázek 23*, jež na příkladu Indexu FTSE 100 porovnává výběrovou autokorelační funkci s teoretickou pro $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ s hodnotami λ_j odhadnutými metodou nejmenších čtverců tak, aby minimalizovaly součet kvadrátů odchylek obou funkcí a s nerovnoměrně zvolenými hodnotami w_j tak, aby různé složky mohly mít různou váhu ve výsledné struktuře teoretické autokorelační funkce. Zdá se, že již pro $m = 4$ je SupOU proces schopen velice dobře modelovat dlouhou časovou závislost kvadrátů log-výnosů. Připomeňme, že charakteristické funkce SupOU procesů lze snadno získat s využitím nezávislosti, díky níž můžeme zapojit charakteristické funkce jednoduchých OU procesů a vzorec (1.21) (Barndorff-Nielsen a Shephard 2001).



Obrázek 23: Porovnání výběrové a teoretických ACF – Index FTSE 100

Dále uvedeme možnost spočívající v experimentování s rozdělením skoků složeného Poissonova procesu v rámci procesu skokové difuze. Obecně se totiž skoky nemusí řídit normálním rozdělením a lze tak využít některá z rozdělení, jež disponují flexibilní šikmostí a špičatostí. K získání charakteristické funkce výsledného procesu stačí využít charakteristické funkce zvoleného rozdělení skoků v rámci složeného Poissonova procesu (viz. *Tabulka 2*).

Na závěr ještě zmíníme, že je též možné vyjít z poznámky pod *Definicí 2.12* a odvodit modely založené na zobecněném hyperbolickém (GH) procesu. Problém je ovšem natolik komplikovaný, že přesahuje rámec této práce. Pro více informací o GH modelech čtenáře odkážeme na (Prause 1999).

5.3 Přehled představených modelů

V této kapitole jsme představili několik různých typů modelů založených na procesech představených v *Kapitole 2* a *Kapitole 3*. Modely jsme budovali postupně se snahou stále lépe a přesněji modelovat vlastnosti finančních časových řad popsané v *Kapitole 4*. Jelikož modelů bylo představeno větší množství, je v *Tabulce 18* připraven jejich stručný přehled. Modely rekapitulujeme v tom pořadí, v jakém se objevily v průběhu této kapitoly.

–	Záporná šikmost a těžké konce	Shlukování volatility	Pákový efekt
EL modely	✓	✗	✗
Hestonův model	✗	✓	✓
Batesův model	✓	✓	✓
BNS modely	✗	✓	✓
Lévy-IntOU modely	✓	✓	✗
Lévy-IntOULEv modely	✓	✓	✓

Tabulka 18: Přehled představených modelů a jejich vlastností

EL modely sice mohou využívat Lévyho procesy s dostatečně flexibilním rozdělením přírůstků, nicméně nezvládají modelovat žádné další důležité vlastnosti časových řad log-výnosů. Hestonův model a BNS modely jsou shodně založené na Brownově pohybu, jehož přírůstky se řídí normálním rozdělením a tedy ani jeden z této množiny modelů není schopen plně zachytit specifický negaussovský tvar rozdělení log-výnosů podkladového aktiva.

Princip Lévy-IntOU modelů spočívá ve stochastické změně času EL modelů pomocí integrovaných Ornstein-Uhlenbeckových procesů. Tyto modely tedy těží jak z možnosti využít komplexních rozdělení sofistikovanějších Lévyho procesů, tak z časové závislosti použitých OU procesů. Přestože tyto modely neumějí zachytit pákový efekt, jejich výkon na testovacích vzorcích se zdál být velmi dobrý.

Batesův model a Lévy-IntOULEv modely jsou pomyslným vrcholem žebříčku, jelikož dokáží modelovat všechny důležité aspekty časových řad log-výnosů představené v *Kapitole 4*. Tomu také odpovídá jejich velmi dobrý výkon při kalibraci, ačkoliv zlepšení Lévy-IntOULEv modelů oproti Lévy-IntOU modelům již nebylo ve většině případů (kromě normálního modelu) významné. Zbývající nepřesnosti kalibrace považujeme za tržní anomálie, jež zkonstruované modely nejsou schopné zachytit.

Empirické testování tedy poukazuje na vhodnost využití všech tří komponent – za první Lévyho procesů s přírůstků řídicí se některým z flexibilních rozdělení zachycující vlastnosti časových řad log-výnosů (*i*), (*ii*) a (*iii*), za druhé procesů s návratem ke střední hodnotě jako jsou OU procesy či CIR proces, díky nimž zachycujeme vlastnosti (*iv*) a (*v*), a za třetí zanesení korelace mezi náhodným procesem, jež řídí dynamiku cenu aktiva, a Lévyho procesem, jež řídí dynamiku volatilitu aktiva, pro modelování pákového efektu (*vi*). Naprosto esenciální pro úspěšné modelování zkoumaných vzorků reálných dat se potom zdají být zejména první dvě zmíněné komponenty.

Modely nakalibrované v rizikově neutrální míře lze poté využít k oceňování evropských call opcí neoceněných trhem (například při *OTC prodeji*) přímým využitím vzorce (5.12), a stejně tak evropských pull opcí díky takzvané put-call paritě (viz. například (Cipra 2013) nebo (Shreve 2004)). Dále modely mohou být využity pro oceňování exotických opcí simulační Monte Carlo metodou. Více o exotických opcích a Monte Carlo přístupu k oceňování opcí

v prostředí modelů založených na Lévyho procesech lze nalézt například v (Kyprianou, Schoutens a Wilmott 2005).

Závěrečné shrnutí

Tato práce si neklada za cíl obsáhnout co nejširší spektrum možných modelů pro finanční časové řady. Naopak, byla zaměřena na specifickou skupinu modelů založených na Lévyho procesech a procesech z Lévyho procesů odvozených. Důraz byl kladen na to, aby modely byly vybudovány na pevných teoretických základech vycházejících z teorie míry, teorie pravděpodobnosti a teorie náhodných procesů. Poté byla představena řada Lévyho procesů s různými vlastnostmi, jež nám v dalších částech práce umožnila sestavit široké spektrum různých modelů vhodných pro aplikaci na reálná finanční data.

Kapitola 1 se zaměřila na důležité teoretické elementy potřebné k vybudování pozadí pro konstrukci Lévyho modelů. První část této kapitoly se stručně zabírala množinami a operacemi s nimi. Množiny jsou základními stavebními kameny v modelování náhodných pokusů v teorii pravděpodobnosti a jejich představení bylo tedy nezbytné pro správné pochopení druhé části *Kapitoly 1*. Jejím hlavním cílem bylo seznámit se s vybranými částmi moderní teorie pravděpodobnosti. Představili jsme abstraktní množinové struktury jako π -systém či σ -algebra, pomocí nichž jsme vybudovali takzvané měřitelné prostory. Ty jsme později vybavili speciální skupinou množinových funkcí – mírami. Zkoumali jsme rozličné vlastnosti měr a uvedli některé příklady včetně pro účely této práce nejdůležitější pravděpodobnostní míry. Ta spolu s měřitelnými prostory formuje takzvané pravděpodobnostní prostory, které tvoří potřebný základ pro modelování náhodných pokusů. Dále jsme na pravděpodobnostních prostorech definovali náhodné proměnné, přípustné operace s nimi a jejich pravděpodobnostní rozdělení a distribuční funkce.

V druhé polovině druhé části *Kapitoly 1* jsme definovali velice důležitý koncept integrálu vzhledem k míře a neméně důležité Radon-Nikodýmovy derivace, které jsme využili k definici hustoty a pravděpodobnostní funkce pravděpodobnostního rozdělení. Následně jsme za pomoci integrálu představili momenty, charakteristické funkce a momentové vytvořující funkce pravděpodobnostních rozdělení a některé jejich užitečné vlastnosti. Závěr této části poté patřil myšlenkám nezávislosti náhodných proměnných a podmíněné pravděpodobnosti.

Náhodné procesy byly hlavním tématem třetí části této kapitoly. Byl definován pojem náhodný proces a dále jsme se zabývali filtracemi a teorií martingalů, jež představují jistý matematický koncept férové hry. *Kapitola 1* byla zakončena krátkou poznámkou ke stochastické integraci a stochastickým diferenciálním rovnicím.

V *Kapitole 2* začalo budování portfolia konkrétních příkladů náhodných procesů, které nám v dalších částech posloužilo k budování modelů vhodných pro modelování finančních dat. Středobodem zájmu této kapitoly byly Lévyho procesy – obecně nespojitě náhodné procesy s nezávislými a stacionárními přírůstky. Nejdříve jsme definovali Lévyho procesy v rámci vybudovaného teoretického rámce, diskutovali jejich intimní vztah s nekonečně dělitelnými pravděpodobnostními rozděleními a poukázali na speciální tvar jejich charakteristické a momentové vytvořující funkce, jež se vyznačuje takzvaným charakteristickým exponentem. Poté jsme rozdělili Lévyho procesy podle charakteru jejich trajektorií s ohledem na množství nespojitostí – skoků, jež se v nich objevuje, a ukázali, jak z libovolného Lévyho procesu obecně zkonstruovat proces s charakterem martingalu. Nakonec jsme zmínili vybrané techniky vytváření nových Lévyho procesů ze stávajících pomocí subordinace, přidáním lineárního driftu a škálováním.

V druhé části *Kapitoly 2* jsme představili několik zástupců Lévyho procesů. Začali jsme Poissonovým a složeným Poissonovým procesem, jež mají po částech konstantní trajektorie s konečným množstvím skoků na každém konečném časovém intervalu. Poté jsme se zabývali

Brownovým pohybem, velice důležitým zástupcem Lévyho procesů, který sehrál důležitou historickou roli nejen ve vývoji finančních modelů. Brownův pohyb je založen na normálním rozdělení pravděpodobnosti a jako jediný z Lévyho procesů má spojité trajektorie. Proces skokové difuze je potom kombinací Brownova pohybu a složeného Poissonova procesu.

Všechny další představené Lévyho procesy se již vyznačovali nekonečnou aktivitou, tedy nekonečným množstvím skoků na konečném časovém intervalu. Patří mezi ně procesy s pouze nezápornými přírůstky (subordinátory) jako je gamma proces a inverzní gaussovský proces, pomocí nichž lze stochastickou změnou času (subordinací) Brownova pohybu zkonstruovat variance gamma proces a normální gaussovský proces. Dalšími představenými procesy s nekonečnou aktivitou pak byly Meixnerův proces a zobecněný hyperbolický proces. Při představování procesů byl kladen důraz zejména na podobu jejich charakteristického exponentu a podobu momentů jejich pravděpodobnostních rozdělení.

Kapitola 3 se věnovala procesům, jejichž dynamika vychází z Lévyho procesů, ale na rozdíl od nich se jejich přírůstky vyznačují vzájemnou časovou závislostí. Prvním typem procesů, jimiž jsme se v této kapitole zabývali, jsou negaussovské Ornstein-Uhlenbeckovy procesy, jejichž řídicími Lévyho procesy jsou subordinátory. Diskutovali jsme některé jejich obecné teoretické vlastnosti a poté různými způsoby zkonstruovali konkrétní případy procesů. Jmenovitě stacionární Ornstein-Uhlenbeckovy procesy, jejichž marginálními rozděleními jsou gamma rozdělení (Gamma-OU proces) a inverzní gaussovské rozdělení (IG-OU proces). Dále byly také definovány některé odvozené procesy jako integrované či superpoziční Ornstein-Uhlenbeckovy procesy. Další část se zabývala CIR procesem, jehož dynamika vychází z Brownova pohybu, a přestože se nejedná o Ornstein-Uhlenbeckův proces, má některé podobné vlastnosti s procesy diskutovanými výše.

Kapitola 4 byla převážně empirického charakteru. Věnovala se analýze reálných finančních dat v podobě historických logaritmických výnosů pražského Indexu PX, newyorského Indexu S&P 500 a londýnského Indexu FTSE 100. Byly předneseny a následně na zvolených příkladech prakticky demonstrovány některé vlastnosti typické velkému množství finančních časových řad tohoto typu. Konkrétně se jedná o zápornou šikmost a vysokou špičatost způsobující těžké konce pravděpodobnostního rozdělení log-výnosů, absenci lineární autokorelace za současné přítomnosti silné autokorelace kvadrátů log-výnosů, jež způsobuje efekt takzvaného shlukování volatility, a o pákový efekt, který popisuje korelaci mezi změnou ceny a volatility aktiva.

Závěrečná *Kapitola 5* se zabývala konstrukcí modelů vhodných pro modelování finančních dat za pomoci procesů představených v *Kapitole 2* a *Kapitole 3* s cílem co nejpřesněji modelovat význačné vlastnosti studované v předchozí kapitole. První část pojednávala o exponenciálních Lévyho modelech (EL modelech), které modelují cenu rizikového aktiva jako exponenciální funkci vybraného Lévyho procesu. Představili jsme celkem 6 modelů postavených na bázi Brownova pohybu, procesu skokové difuze, variance gamma procesu, normálního inverzního gaussovského procesu, Meixnerova procesu a zobecněného hyperbolického procesu. V další části byly stručně popsány vybrané statistické metody, které byly následně aplikovány na časové řady log-výnosů výše uvedených burzovních indexů, a byla statisticky měřena kvalita shody dat se zvolenými modely. Pro kalibraci modelů na historická data byla využita metoda maximální věrohodnosti a momentová metoda, a kvalita shody byla měřena χ^2 -testem dobré shody, Kolmogorov-Smirnovovou statistikou, Anderson-Darlingovou statistikou a graficky s využitím Q-Q grafů. Též došlo k porovnání teoretických momentů modelů odhadnutých metodou maximální věrohodnosti s výběrovými momenty vypočtenými z historických dat. Toto testování jednoznačně ukázalo převahu ostatních

exponenciálních Lévyho modelů nad normálním modelem, jež jako jediný nedokáže zachytit zápornou šikmost a těžké konce rozdělení log-výnosů.

Hlavním tématem následující části poslední kapitoly bylo oceňování opcí v rámci EL modelů. Byla představena metoda rizikově neutrálního oceňování a diskutován přechod mezi reálnou a rizikově neutrální mírou. Dále byla představena Carrova a Madanova metoda oceňování pomocí inverzní Fourierovi transformace charakteristické funkce logaritmu ceny rizikového aktiva, jež nám umožňuje využít charakteristických funkcí Lévyho procesů. Výhodou tohoto přístupu je obvyklá snadná dostupnost charakteristických funkcí v analytické podobě (a to i pro komplikovanější modely). Nevýhodou pak fakt, že cenu opce je třeba kalkulovat numericky. Kalibrace modelů metodou nelineárních nejmenších čtverců na sady evropských call opcí na Index S&P 500 a Index FTSE 100 poukázala na nedostatky EL modelů, jež selhávají v modelování shlukování volatilita a pákového efektu.

Pro odstranění těchto nedostatků jsme v druhé polovině *Kapitoly 5* představily hned několik komplikovanějších modelů, jež do existujících modelů inkorporují shlukování volatilita, pákový efekt či dokonce obojí najednou, při zachování možnosti využít dříve představený aparát k oceňování opcí. Časová závislost kvadrátů log-výnosů, jež shlukování volatilita způsobuje je modelována pomocí Ornstein-Uhlenbeckových procesů či CIR procesu, jejichž autokorelační funkce vykazuje exponenciálně klesající charakter. Pákový efekt je poté modelován zanesením korelace mezi procesy, jež řídí dynamiku ceny a dynamiku volatilita aktiva.

Prvním představeným modelem byl Hestonův model, jež je založen na Brownově pohybu a CIR procesu, též založeném na Brownově pohybu, pro modelování volatilita. Oba Brownovy pohyby jsou v Hestonově modelu vzájemně korelovány. Vylepšením Hestonova modelu je potom Batesův model, kde je místo Brownova pohybu využito procesu skokové difuze. Obdobně koncipované jsou též Barndorff-Nielsen-Shephardovy modely (BNS modely), jež byly ustanoveny v následující části. Taktéž vycházejí z Brownova pohybu, ale dynamika volatilita v tomto případě vychází z Ornstein-Uhlenbeckových procesů. Pákový efekt není zachycen přímo pomocí korelace Brownova pohybu a řídicího Lévyho procesu příslušného OU procesu, ale pomocí dedikovaného parametru, jež přímo v exponentu ovlivňuje míru pákového efektu. Zaměřily jsme se konkrétně na dva BNS modely, kde u prvního je volatilita modelována Gamma-OU a u druhého IG-OU procesem.

Jiný přístup využívá k modelování stochastické volatilita subordinace Lévyho procesů náhodným časem, který je dán integrovaným Gamma-OU nebo IG-OU procesem. V kombinaci s EL modely lze odvodit generický předpis pro charakteristickou funkci, kterou můžeme využít pro konstrukci celé řady modelů podle kombinace Lévyho a OU procesu. Tyto modely, jež jsme označily jako Lévy-IntOU modely, dokáží modelovat jak typický tvar rozdělení, tak časovou strukturu volatilita časových řad log-výnosů podkladového aktiva, a kalibrace potvrdila vhodnost jejich použití. Pro Gamma-OU proces lze také odvodit verzi těchto modelů vylepšenou o zachycení pákového efektu.

Úplným závěrem byly diskutovány další možnosti vylepšení, například použití superpozičních Ornstein-Uhlenbeckových procesů, jež mají schopnost lépe zachytit tvar výběrové autokorelační funkce kvadrátu log-výnosů či využití negaussovských skoků v procesu skokové difuze. Též byl prezentován stručný přehled představených modelů. Do budoucna je možné se zaměřit kupříkladu na implementaci a testování těchto dalších vylepšení, či na intenzivnější využití testovaných modelů v oblasti ekonometrického modelování a risk managementu.

Literatura

- Aas, K. a Haff, I. H. (2006) 'The Generalised Hyperbolic Skew Student's t-distribution', *Journal of Financial Econometrics*, 4(2), pp. 275-309.
- Anderson, T. W. a Darling, D. A. (1954) 'A Test of Goodness of Fit', *Journal of the American Statistical Association*, 49(268), str. 765-769.
- Anděl, J. (2002) *Základy matematické statistiky*. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze.
- Applebaum, D. (2009) *Lévy Processes and Stochastic Calculus*. 2. edice. Cambridge: Cambridge University Press.
- Athreya, K. B. a Lahiri, S. N. (2006) *Measure Theory and Probability Theory*. New York: Springer Science.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1997) 'Normal Inverse Gaussian Distributions and Stochastic Volatility Modelling', *Scandinavian Journal of Statistics*, 24(1), str. 1-133.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (1998) 'Processes of normal inverse Gaussian type', *Finance and stochastics*, 2(1), pp. 41-68.
- Barndorff-Nielsen, O. E. (2001) 'Superposition of Ornstein-Uhlenbeck processes', *Theory of Probability & Its Applications*, 45(2), pp. 175-194.
- Barndorff-Nielsen, O. E., Nicolato, E. a Shephard N. (2002) 'Some recent developments in stochastic volatility modelling', *Quantitative Finance*, 2(1), str. 11-23.
- Barndorff-Nielsen, O. E. a Shephard, N. (2001) 'Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics', *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 63(2), str. 167-241.
- Barndorff-Nielsen, O. E. a Shephard, N. (2003) 'Integrated OU processes and non-Gaussian OU-based stochastic volatility models', *Scandinavian Journal of Statistics*, 30(2), str. 277-295.
- Barndorff-Nielsen, O. E. a Shephard, N. (2012) 'Basics of Lévy processes', *Ukázkové kapitoly z knihy 'Lévy Driven Volatility Models'*. Dostupné na: <http://www.people.fas.harvard.edu/~shephard/introlevy120608.pdf> (Přistoupeno: 14 července 2014).
- Bingham N. H. a Kiesel R. (2004) *Risk-neutral Valuation: pricing and hedging of financial derivatives*. 2. edice. Londýn: Springer-Verlag.
- Bingham, N. H. (2006) 'Lévy processes and self-decomposability in finance', *Probability and Mathematical Statistics*, 26(2), str. 131-142.
- Brockwell, P. and Lindner, A. (2012) 'Lévy-Driven Times Series Models for Financial Data' v Rao, T. S., Rao, S. S. and Rao, C. R. (editoři), *Handbook of Statistics, Vol. 30; Time Series Analysis: Methods and Applications*, Oxford: Elsevier B.V, str. 543-563.
- Brody, D. C., Hughston, L.P. a Mackie, E. (2012) 'General Theory of geometric Lévy models for dynamic asset pricing', *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science*, 468(2142), str. 1778-1798.

- Brzezniak, Z. a Zastawniak, T. (2002) *Basic Stochastic Processes*. 4. edice. London: Springer-Verlag.
- Carr, P. a Madan, D. (1999) 'Option Valuation Using the Fast Fourier Transform', *Journal of computational finance*, 2(4), str. 61-73.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B. a Yor, M. (2003) 'Stochastic Volatility for Lévy Processes', *Mathematical Finance*, 13(3), str. 345-382.
- Carr, P., Geman, H., Madan, D. B. a Yor, M. (2007) 'Self-decomposability and Option Pricing', *Mathematical Finance*, 17(1), str. 31-57.
- Cinlar, E. (2011) *Probability and Stochastics*. New York: Springer Science + Business Media.
- Cipra, T. (1986) *Analýza časových řad s aplikacemi v ekonomii*. Praha: Nakladatelství technické literatury Alfa.
- Cipra, T. (2013) *Matematika cenných papírů*. Praha: Kamil Mařík – Professional Publishing.
- Cont, R. (2001) 'Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues', *Quantitative Finance*, 1(2), pp. 223-236.
- Cont, R. a Tankov, P. (2004) *Financial Modelling With Jumps Processes*. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. a Ross, S. A. (1985) 'A Theory of the Term Structure of Interest Rates', *Econometrica*, 53(2), str. 385-408.
- Crisóstomo, K. (2014) 'An Analysis of the Heston Stochastic Volatility Model: Implementation and Calibration Using Matlab', *arXiv.org e-print in Quantitative Finance*. Dostupné na: <http://de.arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1502/1502.02963.pdf> (Přistoupeno: 1. dubna 2016).
- Doane, D. P. (1976) 'Aesthetic Frequency Classification', *The American Statistician*, 30(4), str. 181-183.
- Eberlein, E. (2001) 'Application of Generalized Hyperbolic Lévy Motions in Finance' v Barndorff-Nielsen, O. E., Mikosch, T. a Resnick, S. I. (editoři), *Lévy Processes: Theory and Applications*, Boston: Springer Science+Business Media, str. 319-336.
- Eriksson, A., Ghysels, E. a Wang, F. (2009) 'The normal inverse Gaussian distribution and the pricing of derivatives', *The Journal of Derivatives*, 16(3), str. 23-37.
- Figueroa-López, J. E., Lancette, S. R., Lee, S. R. a Mi, Y. (2011) 'Estimation of NIG and VG Models for High Frequency Financial Data', v Viens, F. G., Mariani, M. C. and Florescu, I. (editoři) *Handbook of Modelling High-Frequency Data in Finance*, Hoboken: John Wiley & Sons.
- Financial Times (2016) *Bonds & Rates*. Dostupné na: <http://markets.ft.com/research/Markets/Bonds> (Přistoupeno 15. dubna 2016).
- Geman, H., Madan, D. a Yor, M. (1998) 'Asset Prices Are Brownian Motion: Only in Business Time' v Avellaneda, M. (editor), *Quantitative Analysis in Financial Markets, Vol. 2; Collected papers of the New York University Mathematical Finance Seminar*, Singapore: World Scientific Publishing Co, str. 103-146.
- Grigelionis, B. (1999) 'Processes of Meixner type', *Lithuanian Mathematical Journal*, 31(1), str. 33-41.

- Grigoletto M. a Provasi C. (2008) 'Simulation and Estimation of the Meixner Distribution', *Communications in Statistics – Simulation and Computation*, 38(1), str. 58-77.
- Hátle J. a Likeš J. (1972) *Základy počtu pravděpodobnosti a matematické statistiky*. 2. edice. Bratislava: Nakladatelství technické literatury Alfa.
- Hull, J. C. (2003) *Options, Futures and Other Derivatives*. 5. edice. New Jersey: Prentice Hall.
- Investing.com (2016) *U.S. 1-Month Bond Yield*. Dostupné na: <http://www.investing.com/rates-bonds/u.s.-1-month-bond-yield> (Přistoupeno 26. dubna 2016).
- Jacod, J. a Protter, P. E. (2003) *Probability Essentials*. 2. edice. Berlin: Springer – Verlag.
- Jurek, Z. J. a Mason, J. D. (1993) *Operator-Limit Distributions in Probability Theory*. New York: John Wiley & Sons.
- Käärik, M. a Umbleja, M. (2011) 'On claim size fitting and rough estimation of risk premium base on Estonian traffic insurance example', *International Journal of Mathematical Model and Methods in Applied Sciences*, 5(1), pp. 17-24.
- Klenke, A. (2008) *Probability Theory: A comprehensive Course*. Londýn: Springer – Verlag London.
- Kotz, S., Kozubowski, T. J. a Podgórski, K. (2001) *The Laplace Distribution and Generalizations*. New York: Springer Science+Business Media.
- Kyprianou, A. E. (2006) *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Berlin: Springer – Verlag.
- Kyprianou, A. E., Schoutens, W. a Wilmott, P. (2005) *Exotic Option Pricing and Advanced Lévy models*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Leadbetter, R., Cambanis, S. a Pipiras, V. (2014) *A Basic Course in Measure and Probability*. New York: Cambridge University Press.
- Lévy, P. (1934) 'Sur les intégrales dont les éléments sont des variables aléatoires indépendantes', *Annali Della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze*, 3(3-4), pp. 337-366.
- Madan D. B., Carr P. P. and Chang E. C. (1998) 'The Variance Gamma Process and Option Pricing', *European Finance Review*, 2(1), pp. 79-105.
- Malý, J (2014) 'Teorie míry a integrálu', *Učební text pro předmět Teorie míry a integrálu NMMA203 na MFF UK*, verze k 9. 1. 2014. Dostupné na: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~maly/tmi.htm> (Přistoupeno: 1. září 2014).
- MarketWatch (2016) *S&P 500 Index Option Chain*. Dostupné na: <http://www.marketwatch.com/investing/index/spx/options> (Přistoupeno 26. dubna 2016).
- MathWorks (2016) *MATLAB Documentation*. Dostupné na: <http://www.mathworks.co.uk/help/matlab/> (Přistoupeno: 20. března 2016).
- Matsuda, K. (2004) 'Introduction to Merton Jumps Diffusion Model', *The City University of New York unpublished script*. Dostupné na: <http://maxmatsuda.com/Papers/Intro/Intro%20to%20MJD%20Matsuda.pdf> (Přistoupeno: 18. července 2014).

- Matsuda, K. (2005) 'Introduction to the Mathematics of Lévy Processes', *The City University of New York unpublished script*. Dostupné na: www.maxmatsuda.com/Papers/2005/Matsuda%20Feb05.pdf (Přistoupeno: 7. července 2014).
- Multip (2016) *S&P 500 Dividend Yield*. Dostupné na: <http://www.multip.com/s-p-500-dividend-yield/> (Přistoupeno 26. dubna 2016).
- Nicolato, E. a Venardos, E. (2003) 'Option pricing in stochastic volatility models of the Ornstein-Uhlenbeck type', *Mathematical Finance*, 13(4), str. 445-466.
- Olschowka, K. (2007) *The Meixner Process* [Seminar on alternative models for stock prices], TU Kaiserslautern. 21. června.
- Øksendal, B. (2003) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. 5. edice. Heidelberg: Springer-Verlag.
- Panoš, J. (2014) *Lévy Processes with Applications in Finance*. Master's degree dissertation, Brunel University London.
- Prause, K. (1999) *The Generalized Hyperbolic Model: Estimation, Financial Derivatives, and Risk Measures*. PhD thesis, Albert Ludwigs University of Freiburg.
- Press, S. J. (1967) 'A Compound Events Model for Security Prices', *The Journal of Business*, 40(3), str. 317-335.
- Protter, P. E. (1990) *Stochastic Integration and Differential Equations*. 2. edice. Berlin: Springer – Verlag.
- PSE (2016) *Burzovní indexy – Burza cenných papírů Praha, a. s.* Dostupné na: <https://www.pse.cz/dokument.aspx?k=Burzovni-Indexy> (Přistoupeno: 4. dubna 2016).
- Quandl (2016) *Prague Stock Index: PX*. Dostupné na: <https://www.quandl.com/data/PRAGUESE/PX-Prague-Stock-Index-PX> (Přistoupeno: 3. dubna 2016).
- Rachev, S. T., Kim Y. S., Bianchi M. L. a Fabozzi F. J. (2011) *Financial models with Lévy Processes and Volatility Clustering*. Hoboken: John Wiley & Sons.
- Reif, J. (2004) *Metody matematické statistiky*. 2. edice. Plzeň: Vydavatelství ZČU.
- Ryan, T. P. (2007) *Modern Engineering Statistics*. New Jersey: John Wiley & Sons.
- Rydberg, T. H. (1997) 'The normal inverse Gaussian Lévy process: simulation and approximation', *Communication in statistics. Stochastic Models*, 13(4), str. 887-910.
- Sato, K. (1999) *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Schoutens, W. (2002) 'The Meixner Process: Theory and Applications in Finance', *Eurandom Institute Reports 2002*. Dostupné na: <http://www.eurandom.tue.nl/reports/2002/004-report.pdf> (Přistoupeno: 20. března 2016).
- Schoutens, W. (2003) *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Chichester: John Wiley & Sons.
- Shreve, S. E. (2004) *Stochastic Calculus for Finance II*. New York: Springer Science + Business Media.

Swishchuk, A. (2009) *Levy Processes: History, Ideas, Applications in Finance* [PRMIA Luncheon Talk], University of Calgary. 10. února.

Šedivá, B. (2015) 'Mnohorozměrné statistické metody', *Přednášky k předmětu KMA/MSM*. Západočeská univerzita v Plzni. Zimní semestr 2015/2016.

Tankov, P. a Voltchkova, E. (2009) 'Jump-diffusion models: a practitioner's guide', *Banque et Marchés*, 99(3), str. 1-24.

The ICE (2016) *FTSE 100 Index Option*. Dostupné na:
<https://www.theice.com/products/38716770/FTSE-100-Index-Option>
(Přistoupeno 15. dubna 2016).

Tsay, R. S. (2010) *Analysis of Financial Time Series*. 3. edice. New Jersey: John Wiley & Sons.

Uhlenbeck, G. E. a Ornstein L. S. (1930) 'On the Theory of the Brownian Motion', *Physics Review*, Volume 36, str. 823-841.

Upcoming Dividends (2016) *Dividend Yields – FTSE 100*. Dostupné na:
<http://www.upcomingdividends.co.uk/dividendyield.py?market=ftse100>
(Přistoupeno 15. dubna 2016).

Villard, R. (2002) 'Age of the Universe', *Space Sciences at Encyclopedia.com*. Dostupné na:
http://www.encyclopedia.com/topic/Age_of_the_Universe.aspx (Přistoupeno: 5. dubna 2016).

Williams, D. (1991) *Probability with Martingales*. Cambridge: Cambridge University Press.

Winkel, M. (2010) 'Lévy processes and Finance', *Přednášky k předmětům MS3b a MScMCF*. University of Oxford. Hilary term 2010.

Yahoo Finance (2016a) *S&P 500 Historical Prices*. Dostupné na:
<https://finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EGSPC+Historical+Prices>
(Přistoupeno: 5. dubna 2016).

Yahoo Finance (2016b) *FTSE 100 Historical Prices*. Dostupné na:
<https://uk.finance.yahoo.com/q/hp?s=%5EFTSE>
(Přistoupeno: 5. dubna 2016).

Zwillinger, D. (2012) *Standard Mathematical Tables and Formulae*. 32. edice. Boca Raton: CRC Press.

Poznámky k elektronické příloze

Součástí této práce je CD nesoucí elektronickou přílohu. Ta obsahuje elektronickou verzi této práce ve formátu PDF, použitá finanční data ve formátu XLSX, v práci použité obrázky, jež nejsou programovým výstupem, a programy, jež generují veškeré uvedené výstupy této práce, a které jsou optimalizované pro MathWorks MATLAB r2015a. Veškeré programy náleží autorovi této práce, pokud není uvedeno jinak.