

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Oceňování bariérových opcí

Diplomová práce

Vypracovala: Bc. Kateřina Seibtová

Vedoucí diplomové práce: Ing. Jan Pospíšil, Ph.D.

Studijní program: Matematika

Studijní obor: Matematika a management

Plzeň 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracovala samostatně a použila jen pramenů, které cituji a uvádím v příloženém seznamu literatury.

V Teplicích dne 13. 5. 2016

Podpis:

Ráda bych poděkovala Ing. Janu Pospíšilovi, Ph.D., za věnovaný čas, odborné rady a připomínky, kterými přispěl k vypracování této diplomové práce. V neposlední řadě děkuji své rodině a přátelům za nepřetržitou podporu při studiu.

Abstrakt:

V předložené práci se seznamujeme s bariérovými opcemi a jejich osmi typy. Tyto bariérové opce chceme ocenit jak na základě Black–Scholesova, tak i Hestonova modelu. Pro oba tyto modely nejprve oceňujeme bariérové opce analyticky, čímž se snažíme získat nějaké základní vztahy pro výpočet. Dalším způsobem, kterým opce oceňujeme je simulační metoda Monte Carlo, jejíž výsledky můžeme zpřesnit ještě metodou redukce rozptylu. Pro zpřesnění výsledných hodnot jsme vybrali metodu s použitím antithetických proměnných. Poslední aplikovaná metoda bude metoda konečných diferencí, přesněji metoda implicitní. V druhé polovině práce, jsou tyto metody implementovány v softwaru Matlab. Kromě přesných hodnot je zde graficky znázorněn průběh vývoje ceny opce. Nakonec jsou všechny použité metody porovnány se známými oceňovacími formulami.

Klíčová slova:

bariérové opce, Monte Carlo, simulace, metoda konečných diferencí, Hestonův model, Black–Scholesův model

Abstract:

In the thesis, we introduce the barrier option and its eight types. We want to price the barrier options under the Black–Scholes model and also under the Heston model. First, we price the options analytically for getting some closed form solution under the both models. Next method for pricing options is simulation by the Monte Carlo method. In this method we can make the results more accurate with method of variance reduction. One of the variance reduction methods is the method with using the antithetic variates, which we choose. The last pricing method is the implicit schema of finite difference method. In the second part of the thesis we implement these methods in software Matlab. Apart from the exact values there are the illustrations of the evolution of option values during the time with dependency on the strike price. Finally, all used methods are compared with the known pricing formulas.

Keywords:

barrier options, Monte Carlo, simulation, finite difference method, Heston model, Black–Scholes model

Obsah

1 Úvod	1
2 Základní pojmy	4
2.1 Teorie pravděpodobnosti	4
2.2 Oceňování	6
2.3 Bariérové opce	8
3 Metodologie	11
3.1 Analytické řešení	11
3.1.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu	11
3.1.2 Hestonův model	16
3.2 Metoda Monte Carlo	20
3.2.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu	21
3.2.2 Hestonův model	22
3.3 Implicitní metoda konečných diferencí	24
3.3.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu	24
3.3.2 Hestonův model	28
4 Numerické řešení	30
4.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu	31
4.1.1 Oceňovací formule	31
4.1.2 Metoda Monte Carlo	31
4.1.3 Metoda konečných diferencí	32
4.1.4 Porovnání výsledků	33
4.2 Hestonův model	33
4.2.1 Metoda Monte Carlo	34
4.2.2 Porovnání výsledků	34
5 Závěr	43
Literatura	47

1 Úvod

Opce jsou dnes hojně používaným finančním nástrojem na trhu. Tento nástroj dává držiteli právo prodat (prodejní opce, z angl. put) nebo koupit (kupní opce, z angl. call) podkladové aktivum za určitou cenu v určitém čase. Základním opčním kontraktem je tzv. **klasická (Vanilla) opce**, jejíž výplatní funkce závisí pouze na rozdílu realizační ceny a ceny podkladového aktiva v čase expirace. Existují ale i opce, jejichž výplatní funkci ovlivňuje více faktorů, a sice **exotické opce**.

Exotickými opcemi rozumíme opce, které pokrývají nějakou specifickou poptávku. Z tohoto důvodu mohou být pro investora velice výhodné. Může si zvolit za jakých podmínek bude nákup nebo prodej podkladového aktiva uskutečněn. Také bývají mnohem levnější než klasické opce, jelikož podléhají většímu riziku. Ve většině případů ale nelze spočítat opční prémii jedním univerzálním vzorcem. Na rozdíl od klasických opcí, kde používáme k oceňování Black–Scholesův nebo binomický model, pro každý druh exotických opcí existují různé metody výpočtu.

Exotické opce mohou být jen modifikací klasických opcí nebo jsou vázané na vývoj ceny podkladového aktiva a nebo jsou vázané na více podkladových aktiv ([Zhang \(1998\)](#)).

V této práci se zaměříme na exotické opce, závislé na vývoji ceny podkladového aktiva, přesněji na **bariérové opce**. Jde o opce, u kterých je výplata závislá na tom, zda cena podkladového aktiva překročila předem danou bariéru či nikoliv. Tato opce se chová jako evropská, dokud cena podkladového aktiva nepřekročí bariéru (knock-out), resp. pokud překročí bariéru (knock-in). Jednoduché definice a vysvětlení tohoto typu opce můžeme najít ve spoustě finančních nebo obchodních slovníčích, nebo na internetových stránkách pro obchodníky s opcemi ([SuperDerivatives](#); [OptionsTrading.org](#)). Stručný matematický popis bariérových opcí, kde se dozvíme nejen to, co jsou bariérové opce, ale také to, jak se obecně oceňují, najdeme také v nejrůznějších studijních materiálech univerzit (viz. [Ankirchner \(2013\)](#); [Humphreys \(2014\)](#)).

Základní model pro oceňování opcí je tzv. Black–Scholesův model. Tento model je dán diferenciální rovnicí:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t,$$

kde \widetilde{W}_t je pro $0 \leq t \leq T$ Brownův pohyb, r je bezriziková úroková míra, σ značí volatilitu a $S(t)$ je cena podkladového ativa v čase t . [Zhang \(1998\)](#) se zabývá exotickými opcemi právě na základě Black-Scholesova modelu, stejně jako například [R. Poulsen \(2006\)](#), [J. Hozman, S. Sanfelici, G. Fusai a spol.](#), [R. Zvan a spol.](#) Každý ale řeší při oceňování výslednou parciální diferenciální rovnicí jinou metodou. [J. Hozman \(2013\)](#) i [S. Sanfelici \(2004\)](#) řeší v uvedených

dílech daný problém Galerkinovou metodou, G. Fusai et al. (2006) ho redukuje na Wiener–Hopfovou rovnici, R. Zvan et al. (2000) se o výslednou parciální diferenciální rovnici zajímají v obecné rovině (jak ji řešit).

Návod pro určení koeficientu překročení bariéry, a to přeformulováním náhodné procházky pomocí reflektivního principu, nám ve svém článku představuje S. M. Levitan et al. (2003). Oceňování na základě toho, že základní akcie je modelována procesem větvení (z angl. branching process), popsali ve svém článku G. K. Mitov et al. (2009). Pokud by nás zajímalo, jak je to s oceňováním, kde se základní akcie řídí stochastickou volatilitou, dočteme se o tom například ve článku C. Chiarella a spol. (Chiarella et al. (2012)).

Existují také jiné modely, na základě nichž bychom se mohli zabývat bariérovými opcemi. N. Thakoor et al. (2014) se ve svém díle zaměřili jak na oceňování opcí na základě Black–Scholesova modelu, tak CEV modelu (constant elasticity of variance model). O oceňování Hestonovým modelem se můžeme dozvědět v článku S. Griebische a U. Wystupa (Griebisch – Wystup (2008)). Další modely, na základě kterých můžeme oceňovat bariérové opce, jsou například tzv. regime switching model z článku P. N. Henriksena (Henriksen (2011)), hyper–exponenciální aditivní model, kterým se zabývají M. Jeannin – Pistorius (2010) a jiné modely trhu, o kterých se můžeme dočíst v práci S. Albeveria a V. Steblovskaya (Albeverio – Steblovskaya (2002)) nebo třeba H. Browna (Brown et al. (2001)).

Hestonův model, se kterým budeme porovnávat Black–Scholesův model, přesněji budeme porovnávat oceňování bariérových opcí těmito modely, je jedním z modelů stochastické volatility. Narozdíl od Black–Scholesova modelu, kde se předpokládá konstantní volatilita, v Hestonově modelu se volatilita v čase vyvíjí. Model je tedy definován dvěma náhodnými procesy, a sice procesem ceny S_t a volatility v_t :

$$\begin{aligned} dS_t &= r_t S_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t} \\ dv_t &= \kappa(\theta - v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t} dW_{2,t} \\ dW_{1,t} dW_{2,t} &= \rho dt, \end{aligned}$$

kde parametr r je míra návratnosti, θ střední rozptyl, pro který platí $t \rightarrow \infty \Rightarrow v_t \rightarrow \theta$, κ rychlost návratu k průměru, ρ korelační koeficient a σ je volatilita rozptylu (Durok – Umar (2009)). Proces volatility je tzv. CIR model (Cox–Ingersoll–Ross model). Popis tohoto modelu najdeme například v textu W. Szatzschnaidera (Szatzschnaider).

My se také podíváme na simulaci bariérových opcí, konkrétně metodou Monte Carlo. Touto problematikou klasického Black–Scholesova modelu se zabývají G. Ökten et al. (2008) nebo K. Moon (2008). Příkladem v případě jiných modelů by mohla být metoda Monte Carlo pro bariérové opce na základě tzv. regime switching modelu v článku P. Hiebera a spol. (Hieber – Scherer (2010)). Pro numerickou simulaci existuje i řada dalších metod. Například metoda vycházející z klasického Monte Carla, a sice pravděpodobnostní Monte Carlo, která navíc počítá s pravděpodobností překročení resp. nepřekročení bariéry. Tuto metodu představuje práce P. Rostana a spol. (Rostan et al. (2014)).

Díky nové technologii Bloomberg existuje i kalkulačka bariérových opcí, která nám pomůže

zjistit cenu, volatilitu, všechny ostatní parametry a další informace důležité pro investora. Ukázky z kalkulačky pro tento typ opcí najdeme v knize P. Wilmotta ([Wilmott \(2007\)](#)).

Cílem této práce je seznámení se s bariérovými opcemi a s jejich oceňovacími metodami. Zejména numerické a simulační metody jsou v této práci přínosem. Tyto metody budeme aplikovat na data v prostředí Matlab.

Struktura práce je následující. Ve druhé kapitole se seznámíme se základními pojmy jak z oblasti teorie pravděpodobnosti, tak z oblasti samotného oceňování. Konkrétně potom zadefinujeme bariérové opce. Následně, ve třetí kapitole, se zaměříme na oceňování opcí třemi různými metodami a to na základě dvou zvolených modelů- modelu vycházející z geometrického Brownova pohybu a Hestonova modelu. Další kapitola bude zaměřena na simulace v softwaru Matlab. V této části práce se budou znázorňovat a porovnávat výsledky ze zvolených metod a modelů.

2 Základní pojmy

V této kapitole definujeme základní pojmy, jak z teorie pravděpodobnosti, tak z teorie oceňování. Následně budou zavedeny samotné bariérové opce.

2.1 Teorie pravděpodobnosti

Definice 1. σ -*algebra* je systém \mathcal{A} podmnožin množiny Ω ($\Omega \neq \emptyset$), právě když platí

- $\emptyset \in \mathcal{A}$;
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$;
- $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Definice 2. *Pravděpodobnostní míra* je zobrazení $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ takové, že platí:

- $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$;
- $A_i \cap A_j = \emptyset$ pro $i \neq j \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Definice 3. Trojici (Ω, \mathcal{A}, P) , kde Ω je neprázdná množina elementárních jevů, \mathcal{A} je σ -algebra podmnožin Ω a P je pravděpodobnostní míra na \mathcal{A} , nazýváme **pravděpodobnostním prostorem**.

Definice 4. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, \mathcal{R} je libovolná neprázdná množina a \mathcal{B} je σ -algebra jejích podmnožin. **Náhodná veličina** je zobrazení $X : \Omega \rightarrow \mathcal{R}$ takové, že $\forall B \in \mathcal{B}$ platí:

$$[X \in B] : \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}.$$

Definice 5. *Střední hodnotu* definujeme jako Lebesgueův integrál: $\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X dP$, kde P je pravděpodobnostní míra náhodné veličiny X . (ozn. μ , resp. $\mathbb{E}^P(X)$)

Definice 6. *Rozptyl* je definován jako $\mathbb{V}(X) := \int_{\Omega} |X - E(X)|^2 dP$. (ozn. σ^2)

Definice 7. *Směrodatná odchylka* je odmocnina z rozptylu. (ozn. σ)

Definice 8. Pravděpodobnostní rozdělení náhodné veličiny je pravděpodobnostní míra $P_X : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ na σ -algebře Borelovských množin \mathcal{B} definovaná $P_X(B) = P(X \in B)$, pro každou $B \in \mathcal{B}$.

Definice 9. Náhodný proces je posloupnost náhodných veličin $X_t : t \in [0, T]$ definovaných ve stejném pravděpodobnostním prostoru (Ω, \mathcal{A}, P) .

Definice 10. Wienerův proces (Brownův pohyb) je náhodný proces, který splňuje následující vlastnosti:

- $W_0 = 0$, skoro jistě;
- přírůstky $W_t - W_s$ jsou normálně rozdělené, tj. $\mathcal{N}(0, t - s) \forall t \geq s \geq 0$;
- nezávislost přírůstků $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}, \forall 0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ (přírůstky jsou také náhodné veličiny).

Definice 11. Nechť (Ω, \mathcal{F}, P) je pravděpodobnostní prostor ve kterém je definován Wienerův proces $W_t, t \geq 0$. **Filtrace** Wienerova procesu je systém σ -algeber $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}, t \geq 0$ takových, že platí

- každá množina obsažená v \mathcal{F}_s je také v \mathcal{F}_t , pro $0 \leq s < t$
- W_t je \mathcal{F}_t -měřitelný, $\forall t \geq 0$
- $W(u) - W(t)$ jsou nezávislé na \mathcal{F}_t , pro $0 \leq t < u$

Definice 12. Uvažujme náhodný proces $X_t, t \geq 0$. Říkáme, že X_t je **adaptovaný** k filtraci \mathcal{F}_t , jestliže je $\forall t \geq 0$ \mathcal{F}_t -měřitelný.

Definice 13. Nechť W_t je Wienerův proces a nechť \mathcal{F}_t příslušná filtrace, $t \geq 0$. **Itovův proces** je náhodný proces X_t tvaru:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \Delta(u) dW_u + \int_0^t \Theta(u) du,$$

kde X_0 je dané a $\Delta(u)$ a $\Theta(u)$ jsou adaptované náhodné procesy.

Lemma 1 (Itovo lemma). Nechť proces X_t je Itovův proces:

$$dX_t = u dt + v dW_t,$$

kde W_t je Wienerův proces, u je míra driftu X_t a v^2 je míra rozptylu. Buď $g(t, x)$ funkce $\in C^2([0, \infty) \times \mathbb{R})$, tzn. g je dvakrát spojitě diferencovatelná na $[0, \infty) \times \mathbb{R}$. Potom:

$$Y_t = g(t, X_t)$$

je opět Itovův proces a

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2,$$

kde $(dX_t)^2 = (dX_t) \cdot (dX_t)$ se spočte pomocí pravidel

$$dt \cdot dt = dt \cdot dW_t = dW_t \cdot dt = 0, dW_t \cdot dW_t = dt.$$

Důkaz. [Oksendal \(1998\)](#), Věta 4.1.2. □

Lemma 2 (Vícerozměrné Itovo lemma). *Nechť*

$$\begin{aligned} dX_1 &= u_1 dt + v_{11} dW_t + \dots + v_{1m} dW_t \\ dX_2 &= u_2 dt + v_{21} dW_t + \dots + v_{2m} dW_t \\ &\vdots \\ dX_n &= u_n dt + v_{n1} dW_t + \dots + v_{nm} dW_t, \end{aligned}$$

maticově zapsáno:

$$dX_t = u dt + v dW_t$$

je n -dimensionální Itovův proces. Nechť $g(t, x) = (g_1(t, x), \dots, g_p(t, x))$ funkce $\in C^2 : [0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Potom proces

$$Y(t, \omega) = g(t, X_t)$$

je opět Itovův proces, jehož k -tá komponenta je

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t, X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t, X)dX_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t, X)dX_i dX_j,$$

kde

$$dt \cdot dW_i = dW_i \cdot dt = 0, dW_i \cdot dW_j = \delta_{i,j} dt.$$

Důkaz. [Oksendal \(1998\)](#), Věta 4.2.1. □

2.2 Oceňování

Nyní si zadefinujeme některé pojmy z oblasti trhu.

- **Opce** je finanční derivát, který dává kupujícímu právo prodat či koupit podkladové aktivum v předem dohodnutém čase a za danou cenu K (realizační cena).

- **Plain vanilla opce** je základním typem opce, jejíž výplatní funkce závisí jen na rozdílu mezi realizační cenou a cenou podkladového aktiva v daném čase.
- **Evropské opce** jsou plain vanilla opce, u kterých dochází k uplatnění pouze v čase expirace (T).
- **Americké opce** jsou plain vanilla opce, u kterých dochází k uplatnění kdykoliv v čase $t \in [0, T]$.
- **Exotické opce** jsou klasické opce rozšířené o specifické vlastnosti. Příkladem exotických opcí jsou tzv. bariérové opce, Bermudské apod.
- **Bermudská opce** je druhem exotické opce, která může být vyplacena v předem definovaných časech a v den expirace.
- **Call opce** je opce, která dává majiteli právo koupit podkladové aktivum za určitou cenu v určitém čase. Výplatní funkce je dána vztahem $V = (S - K)^+$.
- **Put opce** je naopak opce, která dává majiteli právo prodat podkladové aktivum za určitou cenu v určitém čase. Výplatní funkce je dána vztahem $V = (K - S)^+$.
- **Podkladové aktivum** je předmětem termínovaného kontraktu. Může se jednat o akcie, dluhopisy, cizí měny, apod.
- **Spotová cena** je cena podkladového aktiva. (ozn. S , resp. S_t)
- **Realizační cena opce** je cena, za kterou můžeme akcii koupit nebo prodat v čase expirace. (ozn. K)
- **Volatilita** je míra oscilace spotové ceny. (ozn. v , popř. v_t)
- **Portfolio** je soubor akcií, které vlastní jeden investor. (ozn. Π)
- **Čas expirace** je čas vypršení platnosti opce. (ozn. T)
- **Rizikově neutrální míra** je pravděpodobnostní míra taková, že cena akcie je rovna diskontované očekávané hodnotě ceny vzhledem k této míře. (ozn. Q)
- **Úroková míra** je míra průměrného růstu ceny aktiva nebo-li drift procesu. (ozn. r)
- **Rabat** je částka, která se vyplatí kupujícímu v případě, že opce není v čase expirace v platnosti. (ozn. R)
- **Bariéra** je hranice spotové ceny, při jejímž dosažení nebo překročení nabyde opce platnosti popř. pozbyde platnosti. (ozn. B)

- **In–out parita** je obdobou put–call parity. In–out parita říká, že součet hodnot in opce a out opce se rovná hodnotě klasické vanilla opci. ($c = c_{in} + c_{out}$)
- **Dividenda** je podíl vlastníka akcie na zisku akciové společnosti připadající na jednu akcii. (ozn. D)
- **Arbitráž** je proces ceny portfolia X_t , splňující $X_0 = 0$ a pro $T > 0$:
 - $\mathbb{P}(X_T \geq 0) = 1$;
 - $\mathbb{P}(X_T > 0) > 0$,

přičemž \mathbb{P} je rizikově neutrální míra.

Věta 1 (První základní věta oceňování). *Jestliže na trhu existuje rizikově neutrální míra, potom není možná arbitráž.*

Důkaz. [Shreve \(2004\)](#), Věta 5.4.7. □

2.3 Bariérové opce

Bariérové opce se vyznačují existencí předem stanovené hranice (*bariéry*), na které se musí obě strany domluvit při uzavírání kontraktu. Stejně tak se musí domluvit, zda držitel obdrží nějakou refundanci z opčního poplatku při aktivaci nebo deaktivaci opce (tzv. rabat).

Jak už jsme napověděli v předchozí větě, při překročení bariéry cenou podkladového aktiva se opce aktivuje (*knock–in*) nebo deaktivuje (*knock–out*). Aktivační opce jsou z počátku bezcenné. Naopak deaktivací opce se chovají jako klasické evropské opce a při překročení hranice ztrácí veškerou hodnotu. K překročení bariéry může dojít shora resp. zdola. Podle toho, jestli cena podkladového aktiva klesá resp. roste, nazýváme opci '*down*' resp. '*up*'. Bariérové opce, stejně jako klasické evropské opce, mohou být typu *call* a *put*. Máme tedy 8 tříd bariérových opcí (2.3):

Obrázek 2.1 znázorňuje Down-Out-Call opci, jejíž trajektorie protla předem danou bariéru a celá opce se tudíž stává bezcennou. Naopak obrázek 2.2 ukazuje případ, kdy bariéra není dosažena a opce je tedy stále aktivní.

Významným vztahem, který pro bariérové opce platí, je in–out parita. Díky této paritě můžeme jednoduše získat všechny typy knock–in bariérových opcí.

A. [Blümke \(2009\)](#) ve své práci tvrdí, že čím delší je u knock–in opcí doba do splatnosti a čím více se cena podkladového aktiva přibližuje k bariéře, tím více cena opce konverguje k hodnotě klasické opce. U knock–out opcí naopak platí, že čím delší je doba do splatnosti a čím více se cena podkladového aktiva přibližuje k bariéře, tím levnější se opce stává. Tedy její cena v limitě konverguje k nule.

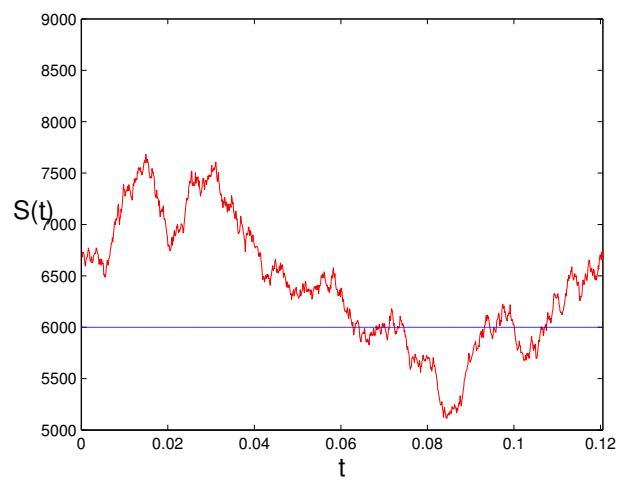
K platbě bariérových opcí dochází ihned po překročení bariéry nebo po skončení životnosti opce.

Opce	Bariéra		Efekt bariéry na payoff profil	
	Typ	Umístění	Dosažena	Nedosažena
Call	Up-Out (ozn. UOC)	Nad spotovou cenou	Bezcenná	Vanilla call
	Up-In (UIC)	Nad spotovou cenou	Vanilla call	Bezcenná
	Down-Out (DOC)	Pod spotovou cenou	Bezcenná	Vanilla call
	Down-In (DIC)	Pod spotovou cenou	Vanilla call	Bezcenná
Put	Up-Out (UOP)	Nad spotovou cenou	Bezcenná	Vanilla put
	Up-In (UIP)	Nad spotovou cenou	Vanilla put	Bezcenná
	Down-Out (DOP)	Pod spotovou cenou	Bezcenná	Vanilla put
	Down-In (DIP)	Pod spotovou cenou	Vanilla put	Bezcenná

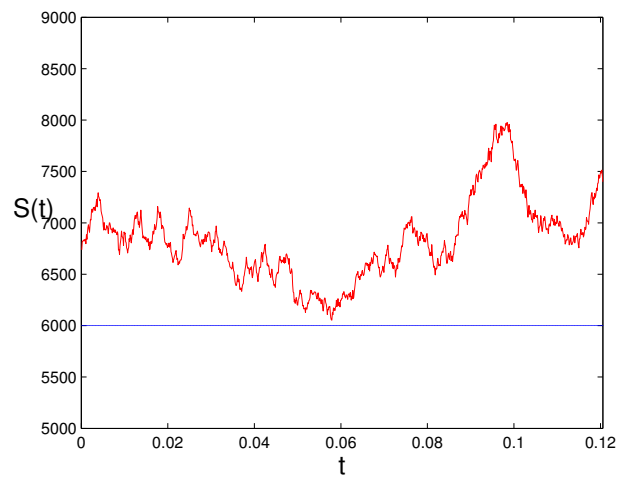
Tabulka 2.1: Druhy bariérových opcí

Bariérové opce jsou levnější z toho důvodu, že můžeme ztratit celou hodnotu opce (v případě opce s rabatem skoro celou) nebo naše opce ani nevstoupí v platnost.

Existují další modifikace těchto opcí tzv. bariérové exotické opce. Bariérové opce mohou být jak evropské, tak i americké nebo bermudské. Dalšími variantami standardních bariérových opcí jsou opce se dvěma bariérami (double), se dvěma aktivy (two-asset), reverzní, pařížské a jiné (Rejnuš (2012)).



Obrázek 2.1: Down-Out-Call opce- neaktivní



Obrázek 2.2: Down-Out-Call opce- aktivní

3 Metodologie

3.1 Analytické řešení

Narozdíl od klasických opcí, závisí bariérové opce i na cenotvorné události. K jejich ocenění použijeme model vycházející z geometrického Brownova pohybu a Hestonův model se stochastickou volatilitou.

3.1.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu

Pokud chceme odvodit oceňovací formule, musíme začít u geometrického Brownova pohybu, který splňuje následující stochastickou diferenciální rovnici:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t,$$

kde \widetilde{W}_t je pro $0 \leq t \leq T$ Brownův pohyb vzhledem k rizikově neutrální míře. Řešení této rovnice nám určí cenu podkladového aktiva v čase t . Označme $\widehat{W}_t = \frac{1}{\sigma} (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \widetilde{W}_t$, potom řešením diferenciální rovnice je

$$S_t = S_0 e^{\sigma \widehat{W}_t}.$$

Nyní definujeme $\widehat{M}_t = \max_{0 \leq t \leq T} \widehat{W}_t$, čímž získáme

$$\max_{0 \leq t \leq T} S_t = S_0 e^{\sigma \widehat{M}_t}.$$

Cenu opce v čase expirace T můžeme vyjádřit

$$(S_T - K)^+ = \left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K \right)^+,$$

kde K je realizační cena opce. Jelikož budeme chtít ocenit knock-out opci, poslední rovnost platí pouze za předpokladu, že $S_0 e^{\sigma \widehat{M}_t} \leq B$ a $K < B$ (B značí bariéru). Cenu knock-out opce lze také vyjádřit ve tvaru:

$$V_T = \left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K \right)^+ \mathbb{I}_{\{S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T} \leq B\}} = \left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K \right)^+ \mathbb{I}_{\{S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} \geq K \wedge S_0 e^{\sigma \widehat{M}_T} \leq B\}}$$

$$= \left(S_0 e^{\sigma \widehat{W}_T} - K \right)^+ \mathbb{I}_{\{\widehat{W}_T \geq k \wedge \widehat{M}_T \leq b\}},$$

kde \mathbb{I} značí indikátorovou funkci, tj.

$$\mathbb{I}_{\{\text{podmínka}\}} = \begin{cases} 1 & \text{podmínka splněna} \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poslední rovnost plyne z úpravy $k = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{K}{S_0}$ a $b = \frac{1}{\sigma} \ln \frac{B}{S_0}$.

Cena up-and-out call opce $v(t, x)$ splňuje Black-Scholesovu diferenciální rovnici, kde $S(t) = x$:

$$v_t(t, x) + rxv_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) = rv(t, x), \quad 0 \leq t, 0 \leq x \leq B,$$

s okrajovými podmínkami

$$\begin{aligned} v(t, 0) &= 0, & 0 \leq t \leq T, \\ v(t, B) &= e^{r(T-t)} R, & 0 \leq t < T, \\ v(T, x) &= (x - K)^+, & 0 \leq x < B, \end{aligned}$$

kde $R \geq 0$ je rabat.

Pokud bychom bychom uvažovali i $x \geq B$, cena $v(T, x)$ by se rovnala R . Abychom získali cenu opce, je třeba tuto rovnici vyřešit (Shreve (2004)). Pro jednoduchost budeme předpokládat, že rabat je nulový a budeme uvažovat pouze $0 \leq x \leq B$.

Nejdříve spočteme hodnotu opce v čase $t = 0$

$$V_0 = \mathbb{E} [e^{-rT} V_T].$$

K výpočtu využijeme rovnici hustoty pro $w \leq m$ a $m \geq 0$

$$\widehat{f}_{\widehat{M}_T, \widehat{W}_T}(m, w) = \frac{2(2m - w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2}.$$

Předpokládáme, že $0 < S_0 \leq B$, tedy b, k jsou konečné a $b > 0$. Víme tedy, že $b > 0, w \geq k, m \leq b$ a $w \leq m$. Z toho je zřejmé, že $k \leq w \leq b$ a $w^+ \leq m \leq b$. Tyto dvě oblasti využijeme při integraci.

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_k^b \int_{w^+}^b e^{-rT} (S_0 e^{\sigma w} - K) \frac{2(2m - w)}{T\sqrt{2\pi T}} e^{\alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2m-w)^2} dm dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b (S_0 e^{\sigma w} - K) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b (S_0 e^{\sigma w} - K) e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw \\ &= S_0 I_1 - K I_2 - S_0 I_3 + K I_4, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw, \\
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}w^2} dw, \\
I_3 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\sigma w - rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw, \\
I_4 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-rT + \alpha w - \frac{1}{2}\alpha^2 T - \frac{1}{2T}(2b-w)^2} dw.
\end{aligned}$$

Tyto integrály jsou tvaru

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\beta + \gamma w - \frac{1}{2T}w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{-\frac{1}{2T}(w-\gamma T)^2 + \frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} dw.$$

Pokud provedeme záměnu proměnných, a sice $y = \frac{w-\gamma T}{\sqrt{T}}$, můžeme integrál upravit takto:

$$e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{\sqrt{T}}(k-\gamma T)}^{\frac{1}{\sqrt{T}}(b-\gamma T)} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \left[N\left(\frac{b-\gamma T}{\sqrt{T}}\right) - N\left(\frac{k-\gamma T}{\sqrt{T}}\right) \right],$$

kde N značí kumulativní distribuční funkci normálního rozdělení. Nyní použijeme vlastnost normálního rozdělení $N(z) = 1 - N(-z)$ a dosadíme za proměnné k, b . Konečná úprava tohoto integrálu bude vypadat:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \int_k^b e^{\beta + \gamma w - \frac{1}{2T}w^2} dw = e^{\frac{1}{2}\gamma^2 T + \beta} \left[N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + \gamma\sigma T \right]\right) - N\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left[\ln \frac{S_0}{B} + \gamma\sigma T \right]\right) \right].$$

Pro zjednodušení integrálů I_1, \dots, I_4 zdefinujeme novou proměnnou δ , a to:

$$\delta_{\pm}(\tau, s) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln s + \left(r \pm \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \tau \right].$$

Tyto úpravy použijeme k vyjádření integrálů:

$$\begin{aligned}
I_1 &= N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right) \\
I_2 &= e^{-rT} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right) \right] \\
I_3 &= \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}-1} \left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right] \\
I_4 &= e^{-rT} \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right]
\end{aligned}$$

Za předpokladu $0 < S_0 < B$ můžeme tyto integrály dosadit do oceňovací formule a získáme výslednou up and out oceňovací formuli.

$$\begin{aligned}
V_0 &= S_0 I_1 - K I_2 - S_0 I_3 + K I_4 \\
&= S_0 \left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right) \right] \\
&\quad - e^{-rT} K \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{S_0}{B}\right)\right) \right] \\
&\quad - B \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_+\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right] \\
&\quad + e^{-rT} K \left(\frac{S_0}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \left[N\left(\delta_-\left(T, \frac{B^2}{KS_0}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(T, \frac{B}{S_0}\right)\right) \right]
\end{aligned}$$

Jestliže uvažujeme $t \in [0, T)$, S_t označíme jako x a $\tau = T - t$, získáme obecnější tvar předchozí formule:

$$\begin{aligned}
v(t, x) &= x \left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right) \right] \\
&\quad - e^{-r\tau} K \left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{B}\right)\right) \right] \\
&\quad - B \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}} \left[N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right) \right] \\
&\quad + e^{-r\tau} K \left(\frac{x}{B}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}+1} \left[N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B^2}{Kx}\right)\right) - N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{B}{x}\right)\right) \right],
\end{aligned}$$

kde opět $0 \leq t < T$ a $0 < x \leq B$. Pro $x > B$ platí, že $v(t, x) = 0$.

Ostatní typy bariérových opcí bychom spočítali obdobně. Jestliže ale známe tvar rovnice pro knock-out opce, lze knock-in opce jednoduše spočítat odečtením out opce od klasické vanilla opce. Tento vztah se nazývá in-out parita. Ceny evropských opcí jsou dány vztahy:

$$c(t, x) = xe^{-D\tau} N\left(\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - Ke^{-r\tau} N\left(\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)$$

$$p(t, x) = Ke^{-r\tau} N\left(-\delta_-\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right) - xe^{-D\tau} N\left(-\delta_+\left(\tau, \frac{x}{K}\right)\right)$$

Chceme-li tedy použít pro oceňování bariérových opcí Black-Scholesův model, můžeme cenu opce spočítat jednoduše dosazením do formule. Velmi často se používá formulace těchto vztahů podobná té následující.

$K > B$	UP	DOWN
IN	$c = A + E$ ($\eta = -1, \phi = 1$) $p = A - B + D + E$ ($\eta = -1, \phi = -1$)	$c = C + E$ ($\eta = 1, \phi = 1$) $p = B - C + D + E$ ($\eta = 1, \phi = -1$)
OUT	$c = F$ ($\eta = -1, \phi = 1$) $p = B - D + F$ ($\eta = -1, \phi = -1$)	$c = A - C + F$ ($\eta = 1, \phi = 1$) $p = A - B + C - D + F$ ($\eta = 1, \phi = -1$)

$K < B$	UP	DOWN
IN	$c = B - C + D + E$ ($\eta = -1, \phi = 1$) $p = C + E$ ($\eta = -1, \phi = -1$)	$c = A - B + D + E$ ($\eta = 1, \phi = 1$) $p = A - B + D + E$ ($\eta = 1, \phi = -1$)
OUT	$c = A - B + C - D + F$ ($\eta = -1, \phi = 1$) $p = A - C + F$ ($\eta = -1, \phi = -1$)	$c = B - D + F$ ($\eta = 1, \phi = 1$) $p = F$ ($\eta = 1, \phi = -1$)

Kde proměnné v tabulkách jsou dány vztahy:

$$A = \phi S e^{-DT} N(\phi x_1) - \phi K e^{-rT} N\left(\phi x_1 - \phi \sigma \sqrt{T}\right)$$

$$B = \phi S e^{-DT} N(\phi x_2) - \phi K e^{-rT} N\left(\phi x_2 - \phi \sigma \sqrt{T}\right)$$

$$C = \phi S e^{-DT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_1) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_1 - \eta \sigma \sqrt{T}\right)$$

$$D = \phi S e^{-DT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2(\mu+1)} N(\eta y_2) - \phi K e^{-rT} \left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_2 - \eta \sigma \sqrt{T}\right)$$

$$E = R e^{-rT} \left[N\left(\eta x_2 - \eta \sigma \sqrt{T}\right) - \left(\frac{B}{S}\right)^{2\mu} N\left(\eta y_2 - \eta \sigma \sqrt{T}\right) \right]$$

$$F = R \left[\left(\frac{B}{S}\right)^{\mu+\lambda} N(\eta z) + \left(\frac{B}{S}\right)^{\mu-\lambda} N\left(\eta z - 2\eta \lambda \sigma \sqrt{T}\right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{\frac{r-D-\sigma^2}{2}}{\sigma^2} \\
\lambda &= \sqrt{\mu^2 + 2\frac{r}{\sigma^2}} \\
x_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S}{K}\right) + (1+\mu)\sigma^2 T \right) \\
x_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{S}{B}\right) + (1+\mu)\sigma^2 T \right) \\
y_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{B^2}{SK}\right) + (1+\mu)\sigma^2 T \right) \\
y_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{B}{S}\right) + (1+\mu)\sigma^2 T \right) \\
z &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{B}{S}\right) + \lambda\sigma^2 T \right)
\end{aligned}$$

V následujícím textu si ukážeme, že pro jiné modely nemusí být odvození formulí tak snadné.

3.1.2 Hestonův model

Hestonův model je modelem pro oceňování opcí, který předpokládá proměnlivou volatilitu, popsanou samostatným stochastickým procesem. Hestonův model je tedy modelem se stochastickou volatilitou.

V tomto modelu se podkladové aktivum řídí následujícím předpisem:

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t dW_{1,t},$$

a volatilita:

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}dW_{2,t},$$

přičemž r je míra driftu procesu, v_t volatilita, θ dlouhodobý průměrný rozptyl, ke kterému se bude v_t po vychýlení vracet rychlostí κ a σ je volatilita volatility. $dW_{1,t}$, $dW_{2,t}$ představují Wienerovy procesy, které jsou korelované a platí

$$dW_{1,t}dW_{2,t} = \rho dt.$$

Proces volatility je tzv. CIR procesem, který má dvě významné vlastnosti, a sice

- **nezápornost** volatility za podmínky $2\kappa\theta > \sigma^2$ (Fellerova podmínka ([Feller \(1951\)](#))),
- **návratnost** ke středu, tedy k průměru θ .

Stručný popis CIR procesu najdeme například v textu W. Szatzschnedera ([Szatzschneder](#)). Poprvé byl ale tento proces publikován v článku J. C. Coxe, J. E. Ingersolla a S. A. Rosse z roku 1985 ([Cox et al. \(1985\)](#)).

Analytické řešení ocenění bariérových opcí zatím neznáme, tudíž budeme nejdříve odvozovat oceňovací formuli pro klasické vanilla call opce ([Rouah \(2013\)](#)).

Uvažujme dvě různé vanilla opce $U = U(S, v, t)$ a $V = V(S, v, t)$. Potom můžeme portfolio, skládající se z těchto dvou opcí, zapsat následujícím předpisem:

$$\Pi = V + \Delta S + \phi U,$$

kde Δ je počet jednotek podkladového aktiva S a ϕ je počet jednotek opce U . Pro změnu portfolia platí:

$$d\Pi = dV + \Delta dS + \phi dU$$

Po aplikaci dvou-dimenzionálního Itoova lemmatu ([2](#)) získáme:

$$\begin{aligned} d\Pi = & \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) dt + \\ & \phi \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) dt + \\ & \left(\frac{\partial V}{\partial S} + \phi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta \right) dS + \left(\frac{\partial V}{\partial v} + \phi \frac{\partial U}{\partial v} \right) dv \end{aligned}$$

Aby bylo portfolio rizikově neutrální musí ale platit, že poslední dvě závorky jsou nulové. Tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial S} + \phi \frac{\partial U}{\partial S} + \Delta &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial v} + \phi \frac{\partial U}{\partial v} &= 0. \end{aligned}$$

Z těchto rovnic si vyjádříme ϕ a Δ :

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{\frac{\partial V}{\partial v}}{\frac{\partial U}{\partial v}} \\ \Delta &= -\phi \frac{\partial U}{\partial S} - \frac{\partial V}{\partial S} \end{aligned}$$

a dosadíme zpět do portfolia Π :

$$d\Pi = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) dt +$$

$$\phi \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \right) dt$$

Nyní máme rizikově neutrální portfolio a jeho výnos je tedy roven výnosu rizikově neutrální úrokové míry r . To znamená, že

$$d\Pi = r\Pi dt = r(V + \Delta S + \phi U)dt.$$

Pokud v portfoliu označíme

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 V}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \\ A_2 &= \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

dostaneme

$$A_1 + \phi A_2 = r(V + \Delta S + \phi U).$$

Dosazením za ϕ a Δ a následnou úpravou získáme vztah:

$$\frac{A_1 - rV + rS \frac{\partial V}{\partial S}}{\frac{\partial V}{\partial v}} = \frac{A_2 - rU + rS \frac{\partial U}{\partial S}}{\frac{\partial U}{\partial v}}$$

Na obou stranách rovnice je stejná funkce, ovšem jedna je funkce opce V a druhá je funkce opce U . Heston vychází z toho, že obě funkce lze zapsat jako $f(S, v, t)$. Tuto funkci potom definoval předpisem:

$$f(S, v, t) = -\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t),$$

kde λ je tržní cena za riziko.

Hestonovu parciální diferenciální rovnici pro oceňování opcí získáme nahrazením levé strany funkcí f a dosazením zpátky za A_2 :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2 U}{\partial S^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \\ &-rU + rS \frac{\partial U}{\partial S} + (\kappa(\theta - v) + \lambda(S, v, t)) \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

Při oceňování klasických vanilla call opcí řešíme Hestonovu parciální diferenciální rovnici s následujícími okrajovými podmínkami.

$$\begin{aligned} U(S, v, T) &= \max(S - K, 0) \\ U(0, v, t) &= 0 \\ \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{dU}{dS}(S, v, t) &= 1 \\ \lim_{v \rightarrow \infty} U(S, v, t) &= S \end{aligned}$$

Pokud provedeme substituci $x = \ln S$ a $\lambda(S, v, t)$ nahradíme lineární funkcí volatility λv , dostaneme jednodušší tvar Hestonovy rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left(r - \frac{1}{2}v\right) \frac{\partial U}{\partial x} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 U}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} \\ - rU + (\kappa(\theta - v) + \lambda v) \frac{\partial U}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

Cena vanilla call opce je potom rovna:

$$C_T(K) = e^{-r\tau} E[(S_T - K)^+] = e^{x_t} P_1(x, v, \tau) - e^{-r\tau} K P_2(x, v, \tau),$$

přičemž $\tau = T - t$ je doba do expirace, $x_t = \ln S_t$ a $P_j(x, v, \tau)$ je pravděpodobnost toho, že opce dosáhne času expirace (in-the-money).

$$P_j(x, v, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(x, v, \tau, \phi)}{i\phi} \right] d\phi,$$

kde $j = 1, 2$ a $f_{1,2}$ jsou charakteristické funkce:

$$f_j(x, v, \phi) = e^{C_j(\tau, \phi) + D_j(\tau, \phi)v_0 + i\phi x}$$

Parciální diferenciální rovnice charakteristické funkce je tvaru:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial f_j}{\partial \tau} + \frac{1}{2}v \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2} + \rho\sigma v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2 v \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2} \\ + (r + u_j v) \frac{\partial f_j}{\partial x} + (a - b_j v) \frac{\partial f_j}{\partial v} = 0 \end{aligned}$$

kde $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $a = \kappa\theta$, $b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$ a $b_2 = \kappa + \lambda$.

Abychom zjistili koeficienty C_j a D_j , dosadíme do předchozí rovnice derivace

$$\frac{\partial f_j}{\partial \tau}, \frac{\partial f_j}{\partial x}, \frac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \frac{\partial f_j}{\partial v}, \frac{\partial^2 f_j}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 f_j}{\partial v \partial x}.$$

Tím získáme rovnici

$$v \left(-\frac{\partial D_j}{\partial \tau} + \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \right) - \frac{\partial C_j}{\partial \tau} + r i\phi + a D_j = 0,$$

ze které plyne soustava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D_j}{\partial \tau} &= \rho\sigma i\phi D_j - \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 D_j^2 + u_j i\phi - b_j D_j \\ \frac{\partial C_j}{\partial \tau} &= r i\phi + a D_j \end{aligned}$$

s počátečními podmínkami $D_j(0, \phi) = 0$ a $C_j(0, \phi) = 0$. Přičemž první rovnice je tzv. Riccatiho rovnice a druhá je obyčejná diferenciální rovnice.

Řešením této soustavy jsou koeficienty C_j a D_j :

$$D_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{\sigma^2} \left(\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right)$$

$$C_j = ri\phi\tau + \frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma i\phi + d_j)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right],$$

kde

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma i\phi + d_j}{b_j - \rho\sigma i\phi - d_j}$$

$$d_j = \sqrt{(\rho\sigma i\phi - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j i\phi - \phi^2)}$$

$$b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma$$

$$b_2 = \kappa + \lambda$$

Nyní máme řešení Hestonovy parciální difereciální rovnice pro evropské call opce. Bohužel modifikace pro bariérové opce nevede na Riccatiho rovnici a v případě Hestonova modelu jsme tedy nezískali žádnou uzavřenou formuli pro výpočet ceny opce.

3.2 Metoda Monte Carlo

Metoda Monte Carlo je velmi často používanou metodou pro oceňování, jelikož ji lze použít i v případě, že neznáme analytické řešení.

Tato metoda je založena na rizikově neutrálním oceňování. Cenu opce tedy určujeme jako střední hodnotu (ozn. \mathbb{E}) tzv. diskontované výplatní funkce (V_t), a to podle rizikově neutrální míry (Q) (Ökten et al. (2008)).

$$V = \mathbb{E}^Q[V_t],$$

kde

$$V_t = e^{-rt}(S_t - K)^+, \text{ resp. } V_t = e^{-rt}(K - S_t)^+.$$

V případě call opce platí první rovnost pro V_t . Druhá rovnost platí pro put opci.

Jelikož uvažujeme bariérové opce, nesmíme zapomenout na podmínku překročení bariéry. Pokud u knock-in opce nepřekročí cena podkladového aktiva bariéru, vyplátí se pouze rabat. Naopak u knock-out opce se vyplácí pouze rabat, pokud cena podkladového aktiva bariéru překročí.

V následující části si ukážeme, jak bude Monte Carlo vypadat v případě námi zvolených modelů.

Pro přesnější výsledky použijeme u obou modelů metodu redukce rozptylu za použití tzv. antithetické proměnné.

Metoda antithetické proměnné

Běžně metoda Monte Carlo využívá k výpočtu M samostatně generovaných trajektorií. Tato metoda využívá také M trajektorií, s tím rozdílem, že $M/2$ trajektorií je s dalšími $M/2$ záporně korelováno. Díky tomu získáme užší interval spolehlivosti a tedy i přesnější hodnoty.

Jestliže tedy budeme uvažovat dvě náhodně generované trajektorie

$$\begin{aligned} p^1 &= p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1 \\ p^2 &= p_1^2, p_2^2, \dots, p_n^2, \end{aligned}$$

můžeme uvažovat i trajektorii

$$p_i = \frac{(p_i^1 + p_i^2)}{2}.$$

Průměr z M takových trajektorií má rozptyl

$$Var(\bar{p}_M) = \frac{Var(p_{iM})}{M} = \frac{Var(p_{iM}^1) + Var(p_{iM}^2) + 2Cov(p_{iM}^1, p_{iM}^2)}{4M}.$$

Z tohoto vztahu plyne základ této metody, a sice hodnota rozptylu bude nižší, pokud budou jednotlivé trajektorie záporně korelované. (Pozn.: p_{iM}^2 je opačná k $p_{iM}^1 \Rightarrow Var(\bar{p}_M) = 0$)

Další metody redukce rozptylu bychom našli ve výukovém materiálu M. Mervyna ([Mervyn \(2009\)](#)).

3.2.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu

Nyní uvažujeme model vycházející z geometrického Brownova pohybu. Pro tento základní model známe tvar řešení ceny podkladového aktiva v čase t :

$$S_t = S_0 e^{\frac{1}{\sigma}(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2)t + W_t},$$

kde W_t je Brownův pohyb v čase t a D je dividenda.

Aplikace algoritmu bude tedy jednoduchá.

Pro ukázkou algoritmu výpočtu ceny opce typu down-out call použijeme software Matlab:

```

1 dW = sqrt(dt) * randn(M,N); % prirůstky
2 W = cumsum(dW,2); % Wienerův proces
3
4 % MC simulace procesu S (gBm)
5 St = S0 * exp(sigma * W + (r-D - 0.5*sigma^2) * repmat(t,[M 1]));
6
7 %DOC
8     max_val_DOC = max(St(:,end) - K, 0);
9     [i,j]=find(St<=B);
10    max_val_DOC(i)=R;
11    path_DOC=exp(-(r-D) * T) * max_val_DOC;
12    DOC= mean(path_DOC);
13    conf_DOC=[DOC-1.96*std(path_DOC)/sqrt(M),DOC+1.96*std(
        path_DOC)/sqrt(M)];

```

V případě down-out put bychom pouze upravili:

```

1 %DOP
2     max_val_DOP = max(K - St(:,end), 0);

```

S použitím metody antithetické proměnné, dojde k úpravě pouze ve výpočtu Wienerova procesu:

```

1 M=2*M;
2 dW=sqrt(dt)*randn(M/2,N);
3 dW=[dW;-dW];

```

3.2.2 Hestonův model

Uvažujeme-li Hestonův model, postup bude stejný.

```

1 St=MC_QE(M,N,S0,tau,r,v0,kappa,theta,sigma,rho); % MC simulace
    procesu S (Heston- QE schéma)
2
3 %DOC
4     max_val_DOC = max(St(:,end) - K, 0);
5     [i,j]=find(St<=B);
6     max_val_DOC(i)=R;
7     path_DOC=exp(-(r-D) * T) * max_val_DOC;
8     DOC= mean(path_DOC);
9     conf_DOC=[DOC-1.96*std(path_DOC)/sqrt(M),DOC+1.96*std(
        path_DOC)/sqrt(M)];

```

Eulerovo schéma ale není pro tento model zcela vhodné, jelikož výsledné hodnoty nejsou, jak jsme zjistili, úplně správné. Využili jsme tedy funkci (MC_QE) z práce M. Mrázka (Mrázek (2013)), jejíž výpočet se opírá o tzv. QE–schéma (Quadratic Exponential). Hodnoty jsou nyní přesnější.

Popišme si tedy základní princip QE–schématu.

QE schéma (Kvadratické–exponenciální)

Kvadratické exponenciální schéma poprvé popsal ve svém článku L. Andersen (2008).

QE–schéma vychází z toho, že proces volatility je CIR proces se střední hodnotou m a rozptylem s^2 .

$$v_{n+1} = a(b + Z_v)^2,$$

přičemž Z_v představuje standartní normálně rozdělenou náhodnou veličinu, jejíž druhá mocina už má χ^2 rozdělení a v_n má tedy také χ^2 rozdělení.

- Pro dostatečně velké hodnoty v_n můžeme toto rozdělení aproximovat mocinnou funkcí, aplikovanou na standartní normálně rozdělenou veličinu Z_v :

$$v_{n+1} = a(b + Z_v)^2,$$

kde

$$a = \frac{m}{1 + b^2},$$

$$b = \left(\frac{2}{\psi} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\psi} \left(\frac{2}{\psi} - 1 \right)} \right)^{\frac{1}{2}},$$

přičemž

$$\psi = \frac{s^2}{m^2},$$

$$m = \theta + (v_n - \theta)e^{-\kappa\Delta_n},$$

$$s^2 = \frac{v_n\sigma^2 e^{-\kappa\Delta_n}}{\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta_n}) + \frac{\theta\sigma^2}{2\kappa} (1 - e^{-\kappa\Delta_n})^2.$$

- Pokud jsou hodnoty v_n malé, aproximujeme hodnotu v_{n+1} inverzí distribuční funkce:

$$v_{n+1} = \Psi^{-1}(U_v, p, \beta),$$

kde

$$\Psi^{-1}(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } 0 \leq u \leq p \\ \frac{1}{\beta} \ln \frac{1-p}{1-u} & \text{pro } p \leq u \leq 1 \end{cases},$$

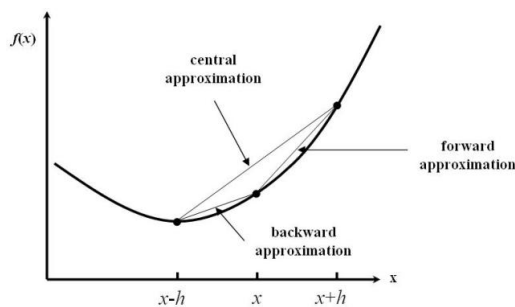
$$p = \frac{\psi - 1}{\psi + 1},$$

$$\beta = \frac{1 - p}{m}$$

a U_v je rovnoměrně rozdělená náhodná proměnná.

3.3 Implicitní metoda konečných diferencí

Metoda konečných diferencí spočívá v diskretizaci parciální diferenciální rovnice. Derivace z parciální diferenciální rovnice nahradíme příslušnými diferencemi. Nejčastějšími způsoby jsou dopředná, centrální a zpětná aproximace (viz obr. 3.1).



Obrázek 3.1: Aproximace funkce $f(x)$.

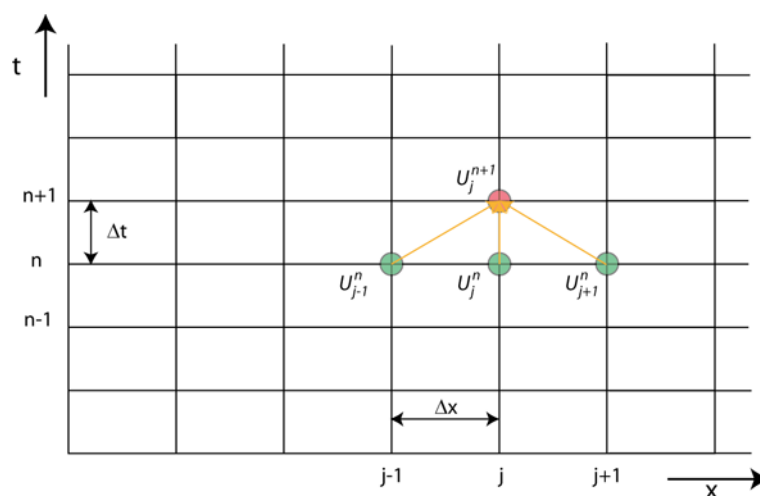
Nyní se podíváme, jakým způsobem se derivace nahradí u různých modelů. V celé kapitole budeme uvažovat implicitní schéma a ekvidistantní mřížku, přičemž implicitní schéma řeší mřížku zpátky v čase. Znamená to, že z jedné známé hodnoty musíme určit tři neznámé (obr. 3.2).

3.3.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu

Jak jsme zmínili dříve, cena opce splňuje Black-Scholesovu diferenciální rovnici:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + rS \frac{\partial v}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} - rv = 0,$$

kde $S = S(t)$ a $v = v(t, S(t))$.



Obrázek 3.2: Stromové znázornění implicitní metody ($x = S$, $i = n$, $u = v$).

Derivace z této rovnice teď budeme aproximovat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &\sim \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t} \\ \frac{\partial v}{\partial S} &\sim \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{S_{j+1} - S_{j-1}} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial S^2} &\sim \frac{2v_{i,j-1}}{(S_j - S_{j-1})(S_{j+1} - S_{j-1})} - \frac{2v_{i,j}}{(S_j - S_{j-1})(S_{j+1} - S_j)} + \frac{2v_{i,j+1}}{(S_{j+1} - S_{j-1})(S_{j+1} - S_j)}, \end{aligned}$$

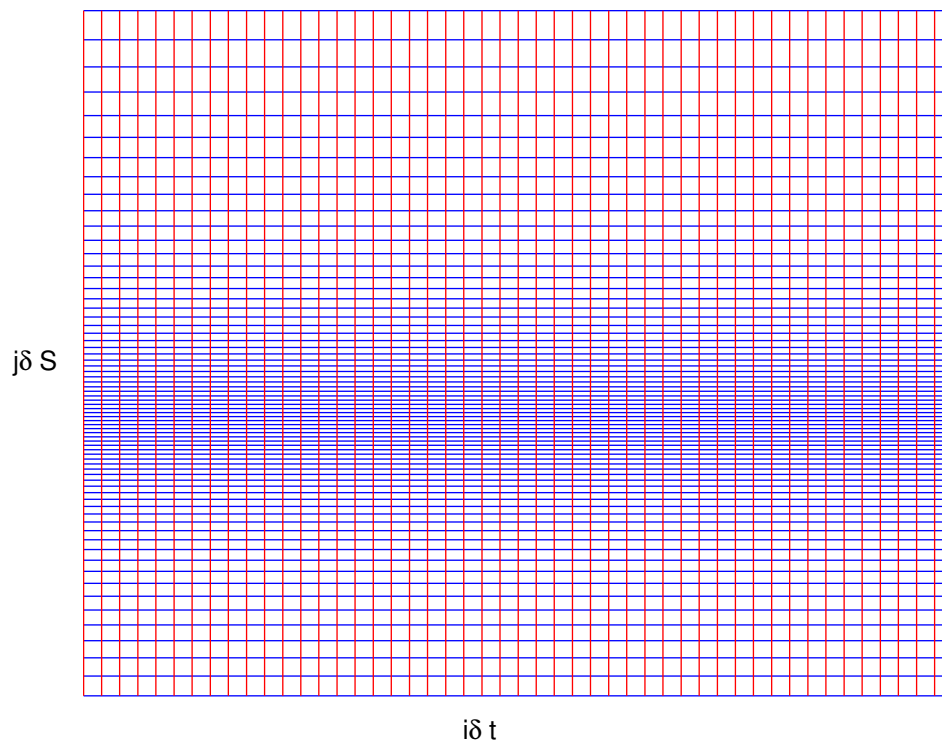
přičemž $i = 0, 1, \dots, N$ a $j = 0, 1, \dots, M$ představují body mřížky (viz. obr. 3.3).

Pokud tedy dosadíme do původní Black-Scholesovy rovnice a upravíme, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{\Delta t} &= r v_{i,j} - r S_j \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{S_{j+1} - S_{j-1}} \\ &\quad - \sigma^2 S_j^2 \left(\frac{2v_{i,j-1}}{(S_j - S_{j-1})(S_{j+1} - S_{j-1})} - \frac{2v_{i,j}}{(S_j - S_{j-1})(S_{j+1} - S_j)} + \frac{2v_{i,j+1}}{(S_{j+1} - S_{j-1})(S_{j+1} - S_j)} \right) \end{aligned}$$

Tuto rovnici můžeme zjednodušit do tvaru

$$v_{i+1,j} = a_j v_{i,j-1} + b_j v_{i,j} + c_j v_{i,j+1},$$



Obrázek 3.3: Mřížka bodů S v závislosti na t .

kde

$$\begin{aligned}
 a_j &= \frac{S_j}{S_{j+1} - S_{j-1}} \left(r - \sigma^2 \frac{S_j}{S_j - S_{j-1}} \right) dt, \\
 b_j &= 1 + \left(r + \sigma^2 \frac{S_j^2}{(S_j - S_{j-1})(S_{j+1} - S_j)} \right) dt, \\
 c_j &= \frac{-S_j}{S_{j+1} - S_{j-1}} \left(r + \sigma^2 \frac{S_j}{S_{j+1} - S_j} \right) dt.
 \end{aligned}$$

Pro implementaci v softwaru Matlab, jsme využili maticový zápis. Ten je následující.

$$V_{i+1} + C_i = AV_i,$$

kde $i = N - 1, \dots, 0$, C je matice okrajových podmínek a A je třídiagonální maticí hodnot a_j , b_j , c_j .

$$C_i = \begin{pmatrix} -a_1 v_{i,0} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -c_{M-1} v_{i,M} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-1} & b_{M-1} \end{pmatrix}$$

Pokud chceme tímto způsobem ocenit bariérové opce, musíme nastavit odpovídající okrajové podmínky a mřížku, vytvořenou diskretizací proměnných času a ceny podkladového aktiva. Pro down-out call opci jsou okrajové podmínky následující:

```

1      % Specify the expiry time boundary condition
2      price(:,end) = max(Svec(:)-K,0);
3      % minimum and maximum price boundary conditions
4      price(1,:) = R*exp(-r*tvec(end:-1:1));
5      price(end,:) = (Svec(end)-K)*exp(-r*tvec(end:-1:1));

```

Samotný výpočet pak vypadá takto:

```

1 % Form the tridiagonal matrix
2 A = diag(aj(3:M),-1) + diag(bj(2:M)) + diag(cj(2:M-1),1);
3 %[L,U] = lu(B);
4
5 % Solve at each node
6 offset = zeros(size(A,2),1);
7
8 for idx = N:-1:1
9     offset(1) = aj(2)*price(1,idx);
10    offset(end) = cj(end)*price(end,idx); % This will always be
11    zero
12    price(2:M,idx) = A\(price(2:M,idx+1) - offset);
13    % price(2:M,idx) = U\(L\(price(2:M,idx+1) - offset)); % B\A=
14    InvB*A
15 end

```

Vše je u down-out opce řešeno na uniformní mřížce, kde minimální hodnota diskretizace podkladového aktiva je B . Pro hodnoty nižší než B metoda není definována.

Nakonec tedy ještě přidáme podmínky pro případ down opcí, kdy $S_0 \leq B$ a naopak pro up opce, kdy $S_0 \geq B$:

```

1 % Calculate the option price
2 if S0 <= B
3     oPrice = R;
4 else
5     oPrice = interp1(Svec, price(:, 1), S0);

```

3.3.2 Hestonův model

V případě Hestonova modelu se nahrazují derivace následujícími diferencemi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial S}(S_i, v_j) &= \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{S_{i+1} - S_{i-1}} \\ \frac{\partial U}{\partial v}(S_i, v_j) &= \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{v_{j+1} - v_{j-1}} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial S^2}(S_i, v_j) &= \frac{2U_{i-1,j}^n}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_{i-1})} - \frac{2U_{i,j}^n}{(S_i - S_{i-1})(S_{i+1} - S_i)} + \frac{2U_{i+1,j}^n}{(S_{i+1} - S_i)(S_{i+1} - S_{i-1})} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial v^2}(S_i, v_j) &= \frac{2U_{i,j-1}^n}{(v_j - v_{j-1})(v_{j+1} - v_{j-1})} - \frac{2U_{i,j}^n}{(v_j - v_{j-1})(v_{j+1} - v_j)} + \frac{2U_{i,j+1}^n}{(v_{j+1} - v_j)(v_{j+1} - v_{j-1})} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial S \partial v}(S_i, v_j) &= \frac{U_{i+1,j+1}^n - U_{i-1,j+1}^n - U_{i+1,j-1}^n + U_{i-1,j-1}^n}{(S_{i+1} - S_{i-1})(v_{j+1} - v_{j-1})}. \end{aligned}$$

Uvažujeme $i = 1, \dots, N_S$, $j = 1, \dots, N_v$.

Pro řešení rovnice lze použít například tzv. θ -chéma.

θ -schéma

θ -schéma je definované vztahem:

$$\frac{\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n}{dt} = \mathbf{L}(\theta \mathbf{U}_{n+1} + (1 - \theta) \mathbf{U}_n).$$

Narozdíl od BSM, kde je L třídiagonální matice obsahující prvky pouze proměnné S , zde jsou v matici elementy odpovídající dvěma proměnným (S a v). \mathbf{L} je tedy matice velikosti $N \times N$, $N = (N_S + 1)(N_v + 1)$, $\theta \in [0, 1]$, \mathbf{U}_n je vektor délky N a \mathbf{U}_0 je počáteční podmínka, která odpovídá hodnotě opce v čase expirace. Pro call opci platí $\mathbf{U}_0 = (S - K)^+$ a pro put opci $\mathbf{U}_0 = (K - S)^+$.

Rovnici si můžeme upravit:

$$\mathbf{U}_{n+1} = (\mathbf{I} - \theta dt \mathbf{L})^{-1} (\mathbf{I} + (1 - \theta) dt \mathbf{L}) \mathbf{U}_n,$$

přičemž \mathbf{I} značí jednotkovou matici a matice \mathbf{L} se modifikuje pro Hestonův model operátorem

$$L = \frac{1}{2}vS^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2}\sigma^2v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \rho\sigma vS \frac{\partial^2}{\partial v \partial S} + rS \frac{\partial}{\partial S} + \kappa(\theta - v) \frac{\partial}{\partial v} - r,$$

pro Black–Scholesův model

$$L = \frac{1}{2}\sigma^2S^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + rS \frac{\partial}{\partial S} - r.$$

Na základě tohoto schématu, lze řešit ocenění opcí třemi metodami, a sice podle toho, jaké zvolíme θ :

$\theta = 0$	explicitní metoda
$\theta = \frac{1}{2}$	vede na Crank-Nicolsonovu metodu
$\theta = 1$	implicitní metoda

4 Numerické řešení

Abychom znázornili ocenění bariérových opcí a stejně tak abychom si vypočetli ceny bariérových opcí, využili jsme softwaru Matlab. Tento software je pro naše potřeby dostačující a v něm jsme si tedy vytvořili funkce, které nám výše zmíněné umožní.

Metody, popsané v předchozí kapitole, budeme aplikovat na konkrétní data. Vzhledem k tomu, že tržní data na bariérové opce nejsou volně k dispozici, použili jsme data na Evropské opce na britský index FTSE 100 ze dne 8.1.2014. Hodnoty parametrů jsou získané kalibrací Hestonova modelu na tato data a hodnota bariéry a rabatu byla stanovena sice uměle, přesto smysluplně pro reálné použití.

S_0	= 6721,80	počáteční cena podkladového aktiva
T	= 1	čas expirace
K	= 6250	realizační cena opce
B	= 6050	bariéra
R	= 30	rabat
r	= 0,009	úroková míra
σ	= 0,05	volatilita
D	= 0	dividenda

Hestonovy parametry budou následující:

κ	= 1,4	míra návratu k průměru
θ	= 0,055	dlouhodobý průměrný rozptyl
ρ	= -0,4	míra korelace
v_0	= 0,05412	počáteční volatilita

Parametry simulace budeme volit dle náročnosti výpočtu:

M	počet simulací
N	počet kroků v čase

Pokud ale nastavíme vyšší počet simulací, budeme mít přesnější výsledek.

4.1 Model vycházející z geometrického Brownova pohybu

4.1.1 Oceňovací formule

Oceňovací fomule, sepsané na konci podkapitoly 3.1.1, dávají pro výše zvolená data následující hodnoty.

DOC: 535.2007
DIC: 29.2212
UOC: 30
UIC: 534.6891
DOP: 2.7392
DIP: 33.8851
UOP: 30
UIP: 6.8915

Vidíme, že pokud máme zadané $S_0 > B$, má smysl u bariérových opcí mluvit pouze o down opcích (DOC, DIC, DOP, DIP). Hodnoty up opce by byly totiž v případě knock-out opce rovny rabatu ihned při uzavření kontraktu, knock-in opce by byly totožné s klasickou vanila opcí.

Zřejmé je to i na grafech znázorňující závislost ceny opce na čase a realizační ceně (viz. obr. 4.1).

4.1.2 Metoda Monte Carlo

První numerickou metodou, kterou jsme použili, je metoda Monte Carlo (3.2.1). Opět jsme provedli výpočet na výše uvedená data.

DOC: 533.4394	[524.4785, 542.4003]
DIC: 29.3433	[29.1238, 29.5627]
UOC: 30	[30, 30]
UIC: 533.0515	[524.0712, 542.0318]
DOP: 2.8933	[2.4603, 3.3264]
DIP: 33.2536	[32.4574, 34.0498]
UOP: 30	[30, 30]
UIP: 6.4157	[5.4324, 7.3990]

První hodnoty určují hodnotu opce a závorky představují intervaly spolehlivosti s 95% pravděpodobností. Mohlo by se zdát, že intervaly spolehlivosti jsou dost široké. Abychom dosáhli toho, že intervaly budou užší a hodnoty opcí přesnější, aplikujeme při stejném počtu simulací metodu redukce rozptylu pomocí antithetických proměnných (3.2).

DOC:	535.0967	[528.8044 541.3891]
DIC:	29.2045	[29.0816 29.3274]
UOC:	30	[30 30]
UIC:	534.5700	[528.2603 540.8798]
DOP:	2.7950	[2.5098 3.0803]
DIP:	33.7615	[33.1330 34.3900]
UOP:	30	[30 30]
UIP:	6.8253	[6.0771 7.5735]

Opět se podíváme, jak vypadají grafy zobrazující závislost ceny opce na čase a realizační ceně (obr. 4.2).

4.1.3 Metoda konečných diferencí

Metodu konečných diferencí, přesněji její implicitní schéma, jsme zvolili z toho důvodu, že konverguje k přesnému řešení a je tedy stabilní. Kdybychom zvolili jednodušší explicitní schéma, museli bychom tuto stabilitu zaručit CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) podmínkou ([Wilmott et al. \(1995\)](#)).

Jak již bylo popsáno v kapitole 3.3.1, simulace všech typů bariérových opcí byla náročnější. Pro down opce jsme museli počítat s jinou diskretizací podkladového aktiva než pro up opce. Na obrázku 4.3 vidíme, že plocha znázorňující cenu opce typu DOC na definovaných hodnotách podkladového aktiva odpovídá klasické evropské call opci.

Pro knock–out opce jsme použili výpočet definovanou implicitní metodou konečných diferencí.

DOC:	535.2039
UOC:	30
DOP:	2.7345
UOP:	30

Tomuto výpočtu odpovídají plochy na obr. 4.4.

Z tohoto obrázku je také vidět, že plochy odpovídají průběhu vývoje cen vypočtených z formulí.

V případě knock–in opcí využijeme tzv. in–out parity.

$$\text{vanilla opce} = \text{in–opce} + \text{out–opce}$$

In–out parita je ale definována jen pro bariérové opce bez rabatu. Pokud tedy nastavíme parametr rabatu $R = 0$, získáme výsledky pro každý typ bariérové opce.

DOC: 534.4538
DIC: 0.2354
UOC: 0
UIC: 534.6891
DOP: 1.9844
DIP: 4.9071
UOP: 0
UIP: 6.8915

4.1.4 Porovnání výsledků

Jestliže chceme porovnat výsledky všech použitých metod ocenění bariérových opcí s přesnými hodnotami získanými výpočtem z formulí, nastavíme $R = 0$.

	FORMULE	MC	MC_anti	FDI
DOC:	534.4507	536.3909	533.9175	534.4538
DIC:	0.2384	0.3472	0.2256	0.2354
UOC:	0	0	0	0
UIC:	534.6891	536.7381	534.1432	534.6891
DOP:	1.9893	1.7725	1.9502	1.9844
DIP:	4.9023	4.3919	4.5447	4.9071
UOP:	0	0	0	0
UIP:	6.8915	6.1645	6.4949	6.8915

Nyní je zřejmé, že implicitní metoda konečných diferencí dává hodnoty nejméně se blíží přesnému řešení. Jak již bylo řečeno není tato metoda vhodná k oceňování, pokud uvažujeme rabat.

Pokud nás bude zajímat rozdíl cen ve výpočtu formulí a metodou konečných diferencí, můžeme se podívat názorně na obrázek 4.5.

Vidíme, že s rostoucí realizační cenou roste i rozdíl ve výsledných hodnotách těchto metod. Celkově jsou ale rozdíly minimální. Zobrazují se na stupnici s maximální hodnotou 0.02.

Jestliže tedy budeme numericky oceňovat bariérovou opci za předpokladu, že při dosažení (resp. nedosažení) bariéry se vyplatí vlastníkovvi v případě knock-out (resp. knock-in) opce rabat, zvolíme metodu Monte Carlo s redukcí rozptylu. Pokud ale budeme mít bariérovou opci definovanou bez výplaty rabatu, volíme jednoznačně implicitní metodu konečných diferencí.

4.2 Hestonův model

Jelikož nemáme žádnou formuli pro výpočet hodnoty opce, provedli jsme první výpočet metodou Monte Carlo.

4.2.1 Metoda Monte Carlo

Narozdíl od předchozího modelu tentokrát nepoužijeme klasické Eulerovo schéma této metody, ale tzv. QE schéma, které nám dá mnohem přesnější výsledky (3.2.2).

Opět použijeme stejná data jako u předchozího modelu. Aplikací metody redukce rozptylu získáme hodnoty:

DOC:	659.1748	[586.7171 731.6324]
DIC:	257.6241	[221.7081 293.5401]
UOC:	30	[30 30]
UIC:	887.0677	[813.3290 960.8063]
DOP:	19.9606	[19.0636 20.8575]
DIP:	385.5234	[347.3345 423.7123]
UOP:	30	[30 30]
UIP:	375.7528	[337.2051 414.3004]

Výsledné hodnoty z této simulace by měly být, jak je známo reálnější, jelikož se volatilita simuluje CIR procesem, což více odpovídá reálnému chování volatilita než konstantní volatilita klasického Black–Scholesova modelu.

Zobrazení závislosti ceny opce na realizační ceně a čase představuje obrázek 4.6.

4.2.2 Porovnání výsledků

Pokud chceme porovnávat výsledné hodnoty z Black–Scholesova a Hestonova modelu, zvolíme volatilitu Black–Scholesova modelu $\sigma = \sqrt{v_0}$ viz.(3.1.2), kde v_0 je jedním z Hestonových parametrů. Tím si alespoň trochu přiblížíme tyto dva modely.

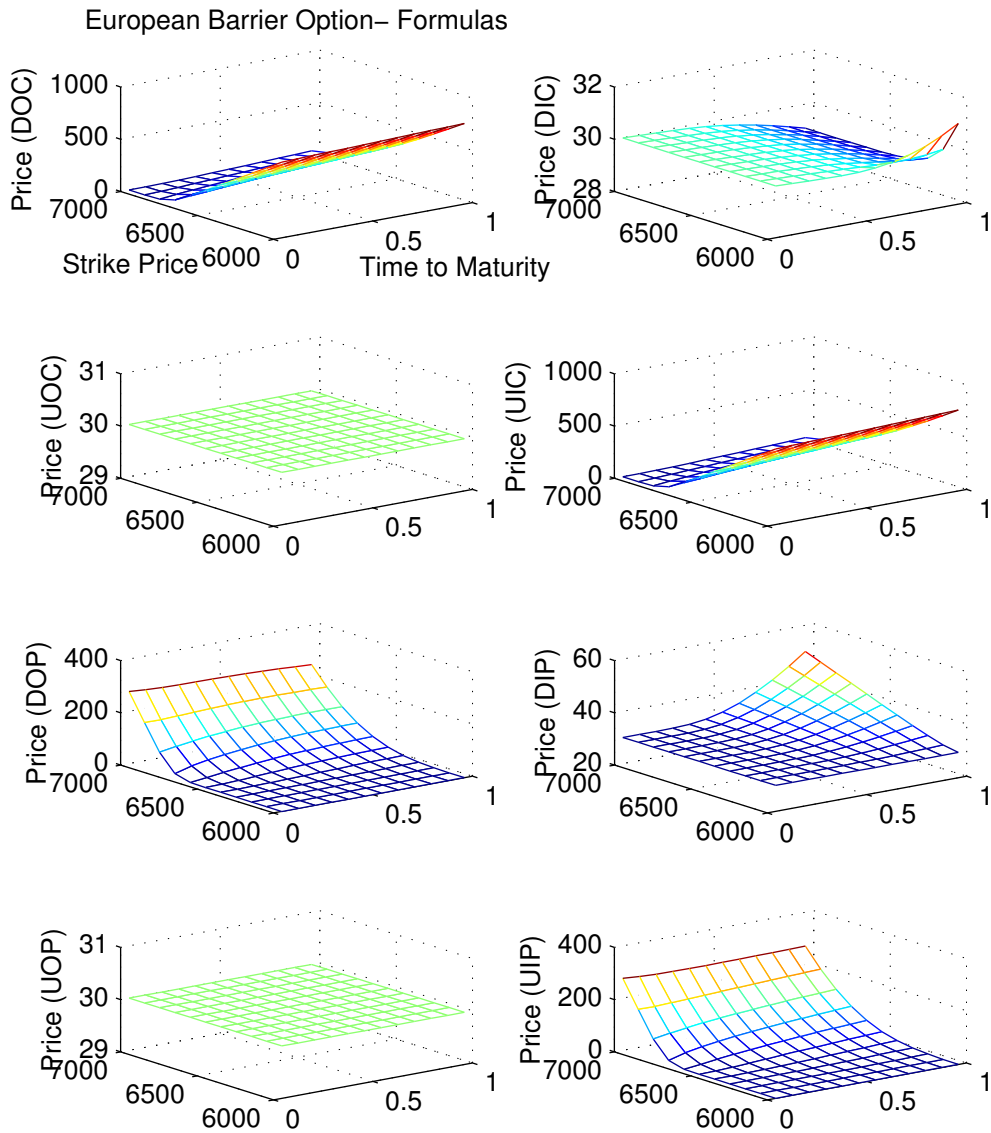
Z obrázku 4.7 se zdá, že si výpočet pomocí formulí Black–Scholesova modelu s metodou Monte Carlo Hestonova modelu odpovídají.

	Formule	MC	MC_anti
DOC:	655.9749	679.4716	666.2674
DIC:	272.1623	267.7141	264.8581
UOC:	30	30	30
UIC:	898.2786	917.4546	901.3944
DOP:	20.3684	19.8741	19.9926
DIP:	379.9712	392.9177	379.9139
UOP:	30	30	30
UIP:	370.4810	383.0606	370.1753

Z hodnot naopak vidíme, že ačkoliv jsme si modely přiblížili volbou volatilita, nejsou výsledné hodnoty stejné ani přibližně stejné. Můžeme ale říci, že aplikací redukce rozptylu, získáme hodnoty bližší hodnotám Black–Scholesova modelu.

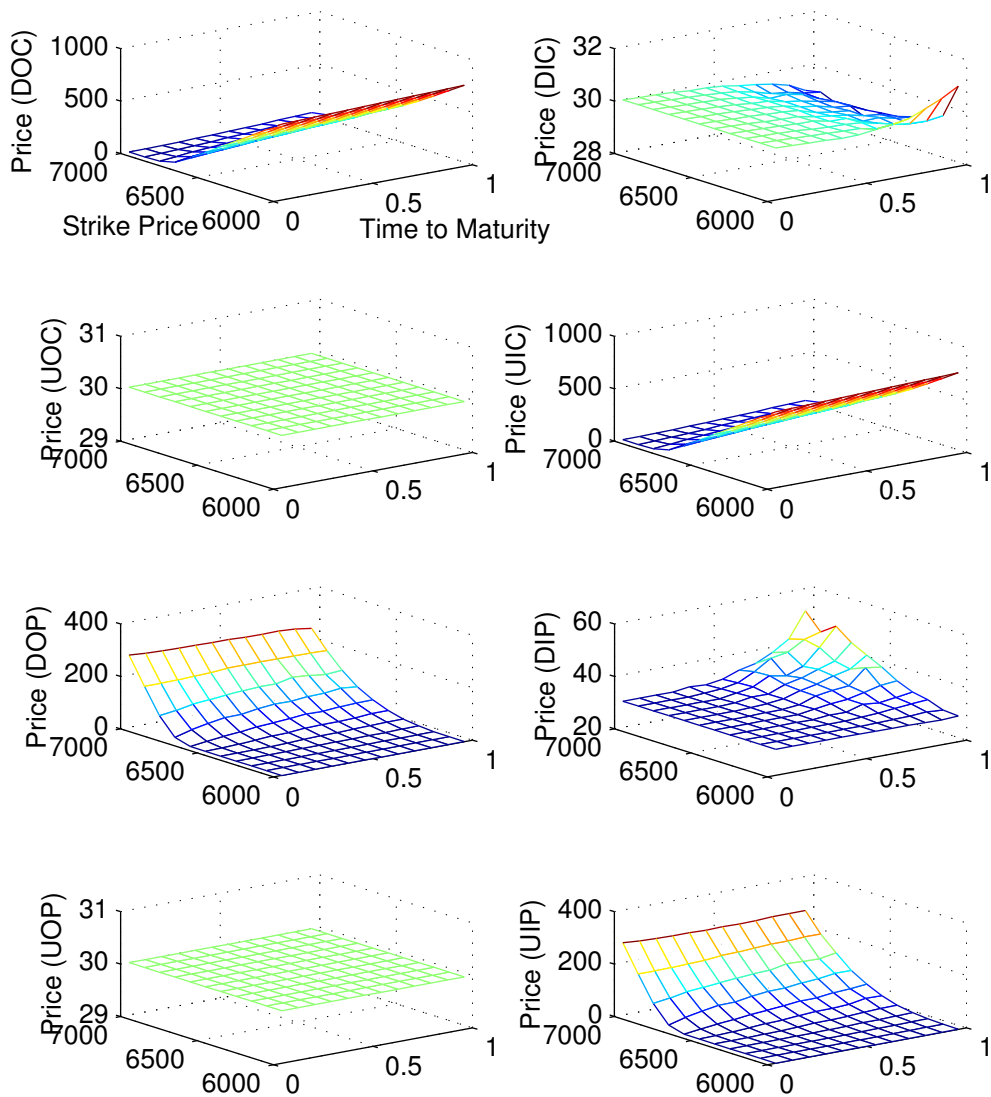
Znázornění rozdílů výsledných cen při výpočtu metodou Monte Carlo s antithetickou proměnnou a výpočtu formulí vidíme na obr. 4.8. Konkrétně se jedná o rozdíly výsledných cen opce typu DOC.

Vidíme, že rozdíly cen se v tomto případě nepohybují v desetinných číslech ale v desítkách. Jelikož se jedná o dva různé modely, určité rozdíly při porovnání dostaneme i kdybychom použili jinou metodu.

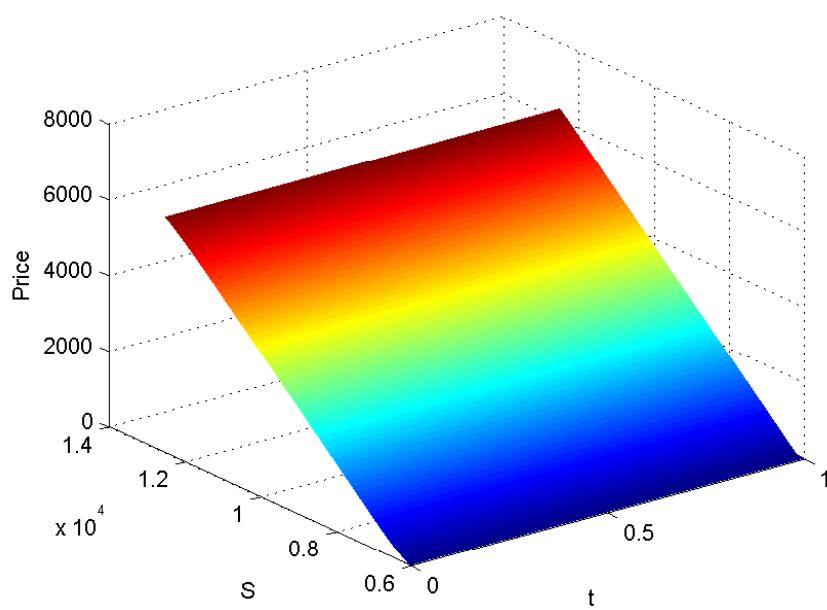


Obrázek 4.1: Evropské bariérové opce- Výpočet pomocí formulí

European Barrier Option– Monte Carlo– BSM

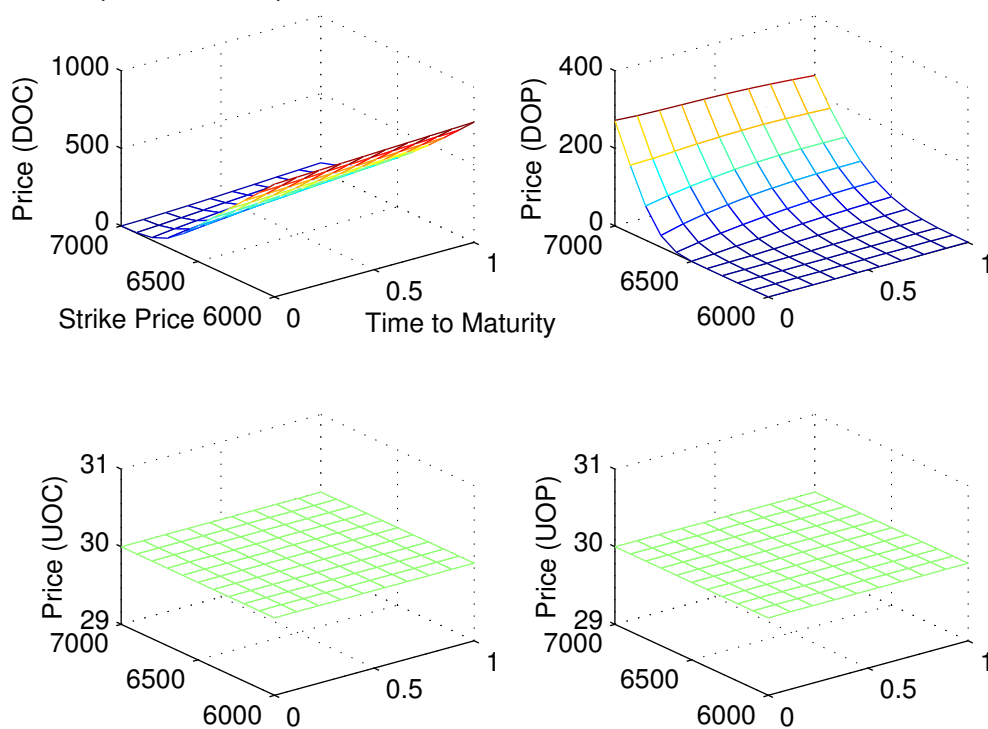


Obrázek 4.2: Evropské bariérové opce- Výpočet metodou Monte Carlo

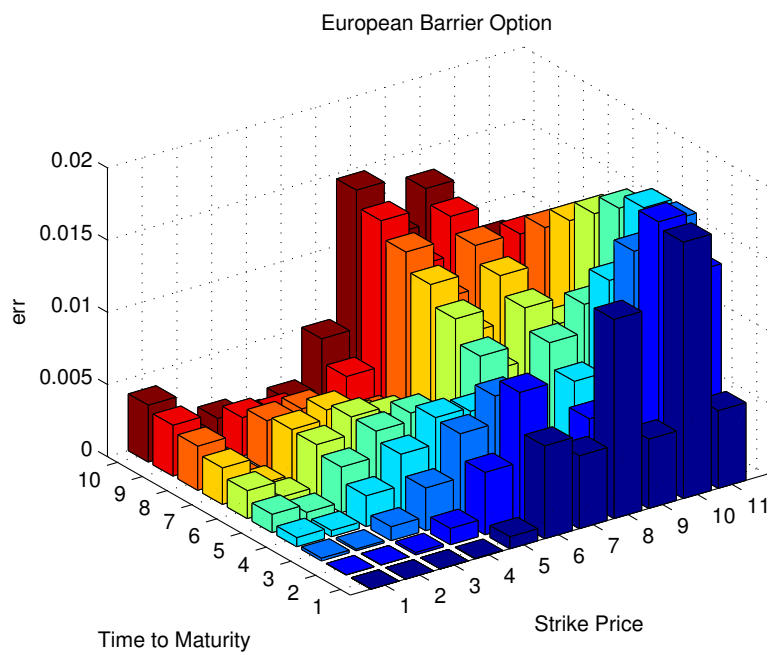


Obrázek 4.3: Down and out call opce- výpočet implicitní metodou konečných diferencí

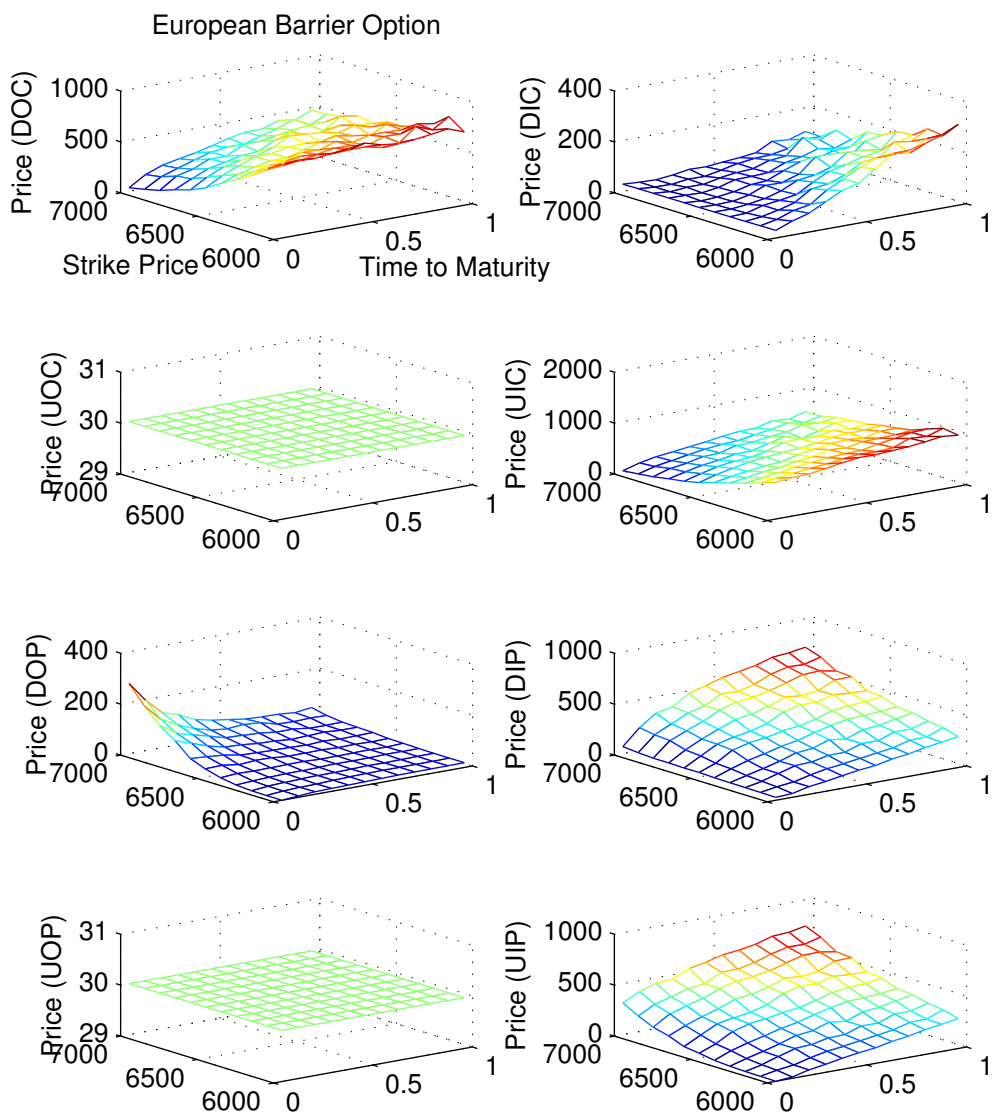
European Barrier Option– Finite Difference



Obrázek 4.4: knock-out opce- výpočet implicitní metodou konečných diferencí

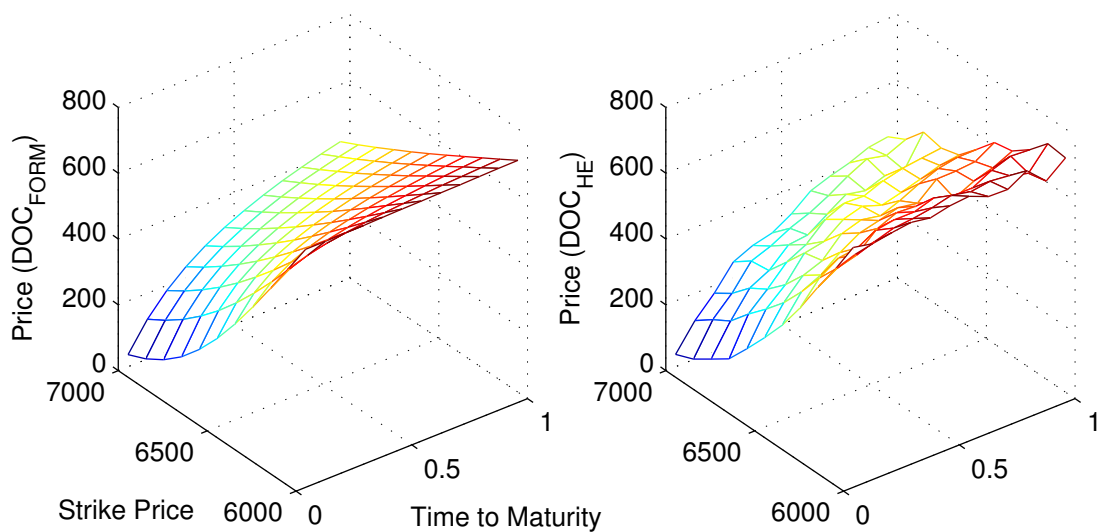


Obrázek 4.5: Evropské bariérové opce- rozdíl výsledných cen (formule x konečné diference)

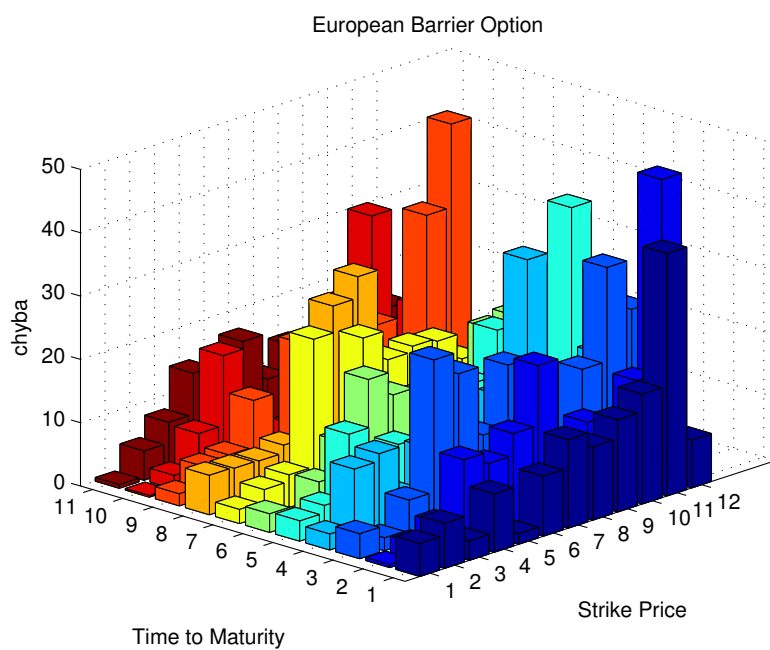


Obrázek 4.6: Evropské bariérové opce- metoda Monte Carlo (Hestonův model)

European Barrier Option– Formulas x Heston model (MC)



Obrázek 4.7: Plochy DOC- Monte Carlo(Hestonův model) a formule(Black-Scholes))



Obrázek 4.8: Rozdíl výsledných cen metody Monte Carlo (Hestonův model) a formulí (Black-Scholesův model)

5 Závěr

V úvodu práce jsme sepsali podrobnou rešerši na téma bariérových opcí. Dozvěděli jsme se o různých variantách oceňování těchto opcí. Kromě klasického Black-Scholesova modelu, můžeme oceňovat opce i na základě modelu se stochastickou volatilitou, CEV modelu, regimeswitching modelu a na základě dalších modelů, které nejsou v práci uvedeny. Na základě těchto modelů se získá výsledná oceňovací diferenciální rovnice, kterou lze řešit různými metodami. Některé tyto metody jsou zde také zmíněny.

Dalším cílem bylo popsat matematické vlastnosti klasického modelu vycházejícího z geometrického Brownova pohybu, Hestonova modelu se stochastickou volatilitou a případně modelu se skoky. Matematické vlastnosti těchto modelů, jako je popis modelu diferenciální rovnicí (resp. rovnicemi), příslušnou oceňovací parciální diferenciální rovnici společně s okrajovými podmínkami, jsou potřeba k analytickému způsobu oceňování, proto jsou popsány v této části práce, a sice v kapitole Metodologie. Model se skoky nebyl vzhledem k rozsahu práce uvažován.

Ve třetí kapitole jsme také navrhli metody pro ocenění bariérových opcí. Jak již bylo zmíněno v předchozím odstavci, nejprve jsme se snažili o nalezení uzavřené formule, a to analytickým řešením příslušné parciální diferenciální rovnice. Bohužel u Hestonova modelu se nám nepodařilo tuto formuli odvodit, jelikož jsme řešením nezískali Ricattiho rovnici jako v modifikaci řešení pro evropské opce. Dalším navrženým způsobem oceňování je simulační metoda Monte Carlo, jejíž výsledné hodnoty jsme zpřesnili redukcí rozptylu pomocí antithetických proměnných. Pro model vycházející z geometrického Brownova pohybu bylo dostačující klasické Eulerovo schéma. Toto schéma v Hestonově modelu nedávalo rozumné výsledné hodnoty, proto jsme aplikovali QE schéma. Algoritmy těchto simulací jsou znázorněny pomocí simulačních kódů v softwaru Matlab. Posledním uvedeným způsobem je implicitní metoda konečných diferencí, která řeší příslušnou parciální diferenciální rovnici nahrazením diferencí, v ní obsažených. Algoritmus je opět pro model vycházející z geometrického Brownova pohybu znázorněn simulačním kódem. Pro Hestonův model je navrženo θ -schéma, které je zde popsáno.

Hlavním cílem bylo nasimulovat tyto modely za použití zmíněných metod v softwaru Matlab a následně je mezi sebou porovnat. V této části jsme zjistili, že implementace metod ve zvoleném softwaru je pro bariérové opce náročnější, pokud chceme ocenit všechny typy bariérových opcí v jedné výpočetní funkci. Zejména metodou konečných diferencí. Díky tomu, že se nám to podařilo, bohužel jen pro bariérové opce bez možnosti výplaty rabatu, jsme vytvořili mnohem přesnější simulaci pro řešení ceny než je ta s využitím metody Monte Carlo. Rozdíl od vý-

počtu pomocí formulí je minimální. Bohužel také během práce došlo ke zjištění, že reálná data pro bariérové opce nejsou veřejně dostupná, použila se tedy data klasických evropských opcí. Velkým přínosem bylo, že jsme řešili metody jak za předpokladu neexistence rabatu, tak za předpokladu jeho existence. To nám také ukázalo, že rabat některé metody dost komplikuje a omezuje. Určitě tedy také záleží na definici rabatu. Pokud uvažujeme v definici opce výplatu rabatu při překročení, resp. nepřekročení bariéry, můžeme na základě této práce říci, že lze opce ocenit za předpokladu Black-Scholesova modelu jednoduše dosazením do odvozených formulí, metodou Monte Carlo, knock-out opce metodou konečných diferencí a za předpokladu Hestonova modelu metodou Monte Carlo. Předpokládáme-li opci bez rabatu, lze ocenit všechny typy bariérové opce metodou konečných diferencí.

Literatura

- ALBEVERIO, S. A. – STEBLOVSKAYA, V. Financial Market with Interacting Assets. Pricing Barrier Options. *Tp. MNAH*. 2002, 237, s. 173–184.
- ANDERSEN, L. Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*. 2008, 11, 3, s. 1–42.
- ANKIRCHNER, S. *Option Pricing: Barrier Options*. [online]. 2013. Institute for Applied Mathematics, Universität Bonn, [cit. 28.1.2016]. Dostupné z: <http://docplayer.net/docview/26/8905904/>.
- BLÜMKE, A. *How to invest in structured products: a guide for investors and asset managers*. John Wiley & Sons, 2009.
- BROWN, H. – HOBSON, D. – ROGERS, L. C. Robust hedging of barrier options. *Mathematical Finance*. 2001, 11, 3, s. 285–314.
- CHIARELLA, C. – KANG, B. – MEYER, G. H. The evaluation of barrier option prices under stochastic volatility. *Computers & Mathematics with Applications*. 2012, 64, 6, s. 2034–2048.
- COX, J. C. – INGERSOLL, J. E. – ROSS, S. A. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*. 1985, 53, 2, s. 385–407.
- DUROK, S. – UMAR, S. Pricing barrier options in a stochastic volatility framework - with applications to Structures Investment Products. Master's thesis, Aarhus, Dánsko, 2009.
- FELLER, W. Two Singular Diffusion Problems. *The Annals of Mathematics*. 1951, 54, 1, s. 173–182.
- FUSAI, G. – ABRAHAMS, I. D. – SGARRA, C. An exact analytical solution for discrete barrier options. *Finance and Stochastics*. 2006, 10, 1, s. 1–26.
- GRIEBSCH, S. – WYSTUP, U. On the Valuation of Fader and Discrete Barrier Options in Heston's Stochastic Volatility Model. *Available at SSRN 1310422*. 2008.

- HENRIKSEN, P. N. Pricing barrier options by a regime switching model. *Quantitative Finance*. 2011, 11, 8, s. 1221–1231.
- HIEBER, P. – SCHERER, M. Efficiently pricing barrier options in a Markov-switching framework. *Journal of computational and applied mathematics*. 2010, 235, 3, s. 679–685.
- HOZMAN, J. Valuing barrier options using the adaptive discontinuous Galerkin method. *Programs and Algorithms of Numerical Mathematics*. 2013, s. 94–99.
- HUMPHREYS, N. A. *Lesson 13: Part II. Barrier options*. [online]. 2014. The University of Texas at Dallas, [cit. 28.12.2015]. Dostupné z: <<https://www.coursehero.com/file/9939333/MFE-Lesson-132-slides/>>.
- JEANNIN, M. – PISTORIUS, M. Pricing and hedging barrier options in a hyper-exponential additive model. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2010, 13, 05, s. 657–681.
- LEVITAN, S. M. – MITCHELL, K. – TAYLOR, D. R. *Discrete Closed Form Solutions for Barrier Options*. University of the Witwatersrand, 2003.
- MERVYN, M. *Monte Carlo Methods* [online]. 2009. Iowa State University, [cit. 20.1.2016]. Dostupné z: <<http://www.public.iastate.edu/~mervyn/stat580/Notes/s09mc.pdf>>.
- MITOV, G. K. et al. Barrier option pricing by branching processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*. 2009, 12, 07, s. 1055–1073.
- MOON, K.-S. Efficient Monte Carlo algorithm for pricing barrier options. *Communications of the Korean Mathematical Society*. 2008, 23, 2, s. 285–294.
- MRÁZEK, M. Hestonův model stochastické volatility. Master's thesis, Západočeská univerzita v Plzni, 2013.
- OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations* 5th ed, 1998.
- ÖKTEN, G. – SALTA, E. – GÖNCÜ, A. On pricing discrete barrier options using conditional expectation and importance sampling Monte Carlo. *Mathematical and Computer Modelling*. 2008, 47, 3, s. 484–494.
- OPTIONSTRADING.ORG. *Barrier Options Explained* [online]. [cit. 9.11.2015]. Dostupné z: <<http://www.optionstrading.org/basics/option-types/barrier/>>.
- POULSEN, R. Barrier options and their static hedges: simple derivations and extensions. *Quantitative Finance*. 2006, 6, 4, s. 327–335.
- REJNUŠ, O. Systemizace exotických opcí. *Trendy ekonomiky a managementu*. 2012.

- ROSTAN, P. – ROSTAN, A. – RACICOT, F.-É. A Probabilistic Monte Carlo model for pricing discrete barrier and compound real options. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*. 2014, 20, 2, s. 113–126.
- ROUAH, F. D. *The Heston Model and its Extensions in Matlab and C#, + Website*. Wiley Finance Series. Wiley, 2013. ISBN 978-1-118-54825-7.
- SANFELICI, S. Galerkin infinite element approximation for pricing barrier options and options with discontinuous payoff. *Decisions in Economics and Finance*. 2004, 27, 2, s. 125–151.
- SHREVE, S. E. *Stochastic calculus for finance. II*. Springer Finance. Springer-Verlag, 2004.
- SUPERDERIVATIVES. *Barrier options overview* [online]. [cit. 12.11.2015]. Dostupné z: <http://www.sdgm.com/support/glossary.aspx?term=Barrieroptionsoverview>.
- SZATZSCHNEIDER, W. *Cox Ingersoll Ross (CIR) interest rate model (1985)* [online]. México, Anahuac University, [cit. 18.2.2016]. Dostupné z: <http://www.riskmathics.com/files/PODCAST/Cox-Ingersoll-Ross-CIR-interest-rate-model->
- THAKOOR, N. – TANGMAN, D. Y. – BHURUTH, M. Efficient and high accuracy pricing of barrier options under the CEV diffusion. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2014, 259, s. 182–193.
- WILMOTT, P. *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. John Wiley & Sons, 2007. ISBN 9780470060773.
- WILMOTT, P. – HOWISON, S. – DEWYNNE, J. *The mathematics of financial derivatives: a student introduction*. Cambridge University Press, 1995.
- ZHANG, P. *A Guide to Second Generation Options*. World Scientific, 1998.
- ZVAN, R. – VETZAL, K. R. – FORSYTH, P. A. PDE methods for pricing barrier options. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2000, 24, 11, s. 1563–1590.