

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

**Numerické modelování reálných úloh
založené na metodě nespojitých
konečných prvků**

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Vedoucí práce

Ing. Hana Kopincová, Ph.D.

Vypracoval

Bc. Miroslav Chyla

květen 2016

Prohlášení

Prohlašuji, že svoji diplomovou práci na téma Numerické modelování reálných úloh založené na metodě nespojitých prvků jsem vypracoval samostatně pouze za odborného dohledu Ing. Hany Kopincové, Ph.D. a s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Plzni

Poděkování

Rád bych poděkoval vedoucí své diplomové práce Ing. Haně Kopincové, Ph.D. za poskytnutí odborných rad, věcné připomínky, trpělivost, ochotu, vstřícný přístup během zpracování této práce a čas strávený při pečlivém pročitání a konzultacích, které mi velmi pomohli při jejím vypracování.

Velké poděkování také patří mé rodině za podporu, trpělivost a povzbuzování po dobu mého studia.

Abstrakt

Cílem této práce je stručný popis metody konečných prvků (FEM), jak spojitě, tak nespojitě varianty. Dále stručně představíme metodu XFEM, neboli rozšíření metody FEM o takzvanou level set funkci. Tyto metody budou implementovány v prostředí MATLAB a aplikovány na Burgersovu rovnici.

Klíčová slova: FEM, XFEM, Galerkinova metoda, Nespojitá Galerkinova metoda, Burgersova rovnice

Abstract

The aim of this master's thesis is the description of the finite element method (FEM), both continuous and discontinuous variation. I also briefly introduce XFEM method, or FEM methods extension of the so-called level set function. These methods will be implemented in MATLAB and applied to Burgers equation.

Key words: FEM, XFEM, Galerkin method, Discontinuous Galerkin method, Burgers' equation

Obsah

1	Metoda spojitých konečných prvků	8
1.1	Slabá a silná formulace parciálních diferenciálních rovnic	8
1.2	CFL podmínka	10
1.3	Nestacionární Burgersova rovnice	10
1.4	Stacionární Stokesova úloha	15
2	Metoda nespojitých konečných prvků	19
2.1	Slope limiter	19
2.2	Nestacionární Burgersova rovnice	20
2.3	Stacionární Stokesova úloha	24
3	XFEM	25
3.1	XFEM	25
3.2	Numerické experimenty	27
3.2.1	Experiment se stacionárním rozhraním mezi médii	27
3.2.2	Experiment s pohybujícím se rozhraním mezi médii	30
4	Závěr	34
A	Obsah CD	36

Úvod

V této práci se budeme zabývat zákony zachování, které jsou reprezentovány parciálními diferenciálními rovnicemi. Bude stručně shrnuta silná a slabá formulace parciálních diferenciálních rovnic, která je výchozím bodem pro metodu konečných prvků (Kapitola 1). Dále v této kapitole představíme Burgersovu rovnici a Stokesovu úlohu. Na tyto úlohy aplikujeme spojitou Galerkinovu metodu.

V další kapitole bude Burgersova rovnice řešena nespojitou Galerkinovou metodou. Bude rovněž představen Slope limiter (Kapitola 2), který je nedílnou součástí metody pro rekonstrukci dat.

Závěrem této práce se budeme věnovat metodě XFEM, která byla vyvinuta roku 1999 Tadem Belytrchko a jeho spolupracovníky. Metoda byla vyvinuta ve snaze zmírnění nedostatků klasické metody konečných prvků, které se objevovali při modelování problému s nespojitostmi (nespojité v počátečních datech nebo v nespojitost v první derivaci).

Kapitola 1

Metoda spojitých konečných prvků

Metoda konečných prvků je numerická metoda pro získání přibližného řešení parciálních diferenciálních rovnic. Tyto problémy jsou nazývány jako počátečně-okrajové úlohy, neboť se skládají z parciálních diferenciálních rovnic, okrajových podmínek a podmínek počátečních. Metoda konečných prvků převádí parciální diferenciální rovnice na soustavy algebraických rovnic. Tyto počáteční úlohy, jež se skládají z parabolické nebo hyperbolické diferenciální rovnice a počátečních podmínek (kromě podmínek okrajových), nemůžou být vyřešeny pouze metodou konečných prvků. Parabolické nebo hyperbolické parciální diferenciální rovnice obsahují čas jako jednu nezávislou proměnnou. Pro převod časových derivací do algebraických výrazů je zapotřebí další numerické metody, jako je například metoda konečných diferencí. Pro řešení počátečního problému je zapotřebí metody konečných diferencí i metody konečných prvků, kde prostorové difference jsou převáděny na systém algebraických rovnic metodou konečných prvků a časové derivace, které jsou řešeny jinou metodou (např. metodou konečných diferencí).

V tomto odstavci bude metoda spojitých prvků aplikována na nestacionární Burgersovu rovnici a na stacionární Stokesovu úlohu.

1.1 Slabá a silná formulace parciálních diferenciálních rovnic

Mnoho problémů v praxi je modelováno parciálními diferenciálními rovnicemi. Tyto parciální diferenciální rovnice jsou často označovány jako silná formulace problému.

Samotnou parciální diferenciální rovnici nazýváme jako silnou formulaci, protože vztah musí být splněn v každém bodě výpočetní oblasti dané úlohy společně s počáteční podmínkou a podmínkami okrajovými.

Slabou formulací rozumíme, že daná rovnice (v integrálním tvaru) je splněna pouze v obecném smyslu.

Více informací o slabé a silné formulaci úlohy dostupné v [1].

Konstrukce slabé formulace

Slabá formulace diferenciálních rovnic je konstruována ve 4 krocích:

1. Vynásobení diferenciální rovnice testovací funkcí.
2. Integrace výsledku získaného v bodu 1. přes oblast úlohy Ω .
3. Integrovaní úlohy per partes s použitím Greenovy formule pro snížení derivací na nejnižší řád.
4. Nahrazení okrajových podmínek.

Ukážeme si odvození slabé formulace na jednoduchém příkladě. Mějme zadánu diferenciální rovnici s okrajovými podmínkami ve tvaru:

$$-u_{xx} + \lambda u - f = 0 \text{ pro } 0 \leq x \leq L, \quad (1.1)$$

$$u(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$u_x(L) = q. \quad (1.3)$$

Takto definovanou úlohu nazýváme silnou formulací diferenciální rovnice. Od silné formulace vyžadujeme na řešení, aby bylo dvakrát diferencovatelné a zároveň splňovalo zadané okrajové podmínky. Abychom nepožadovali na výsledku, aby byl dvakrát spojitě diferencovatelný, můžeme odvodit slabou formulaci, která bude požadovat pouze, aby byl výsledek pouze jedenkrát spojitě diferencovatelný.

Nejprve danou úlohu přenásobíme testovací funkcí v a integrujeme přes zadanou oblast:

$$\int_0^L (-u_{xx} + \lambda u - f)v dx = 0. \quad (1.4)$$

Integrací per partes získáme:

$$\int_0^L u_x v_x + \lambda u v dx = \int_0^L f v dx + [v u_x]_L - [v u_x]_0. \quad (1.5)$$

Na testovací funkci v budeme klást podmínky takové, aby $v = 0$ tam, kde je zadána Dirichletova okrajová podmínka. Díky tomuto požadavku bude člen $[v u_x]_0 = 0$.

Nyní ještě můžeme člen $[v u_x]_L$ doplnit o Neumanovu okrajovou podmínku. Tedy dostáváme:

$$\int_0^L (u_x v_x + \lambda u v) dx = \int_0^L f v dx + q v(L). \quad (1.6)$$

Rovnici (1.6) pak nazýváme slabou formulací úlohy (1.1).

1.2 CFL podmínka

Splnění CFL podmínky je nezbytnou podmínkou pro zaručení stability numerické metody.

Princip CFL podmínky si můžeme představit na jednoduchém příkladě, kdy se nám pohybuje vlna přes diskretizovanou síť, a chceme spočítat amplitudu této vlny v diskretních časových krocích. Časový krok tedy musí být menší, než je čas, za který vlna dosáhne sousedního uzlu sítě. Důsledkem toho je, pokud budeme snižovat prostorový krok, musí být s tím zmenšován i krok časový.

Courantovo číslo je měřítkem toho, jaké množství informací a se rozšíří elementem Δx za časový krok Δt . Aby byla splněna CFL podmínka požadujeme:

$$\frac{a\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{1}{2p+1}, \quad (1.7)$$

kde Δt představuje časový krok, tedy vzdálenost dvou po sobě jdoucích časových vrstev, Δx je vzdálenost dvou sousedních uzlů diskretizované sítě a p je stupeň polynomu básových funkcí v Galerkinově metodě.

Více o CFL podmínce dostupné v [2].

1.3 Nestacionární Burgersova rovnice

Burgersova rovnice v jedné dimenzi s konstantním difúzním parametrem $\nu \in \mathbb{R}$ a advekčním konstantním parametrem $\epsilon \in \mathbb{R}$ je uvedena v následující počátečně-okrajové úloze: Najít $u(x, t)$ tak, že

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ na } [a; b] \times [0, T], \quad (1.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \forall x \in [a; b], \quad (1.9)$$

$$u(a, t) = \hat{u}(a, t), \quad (1.10)$$

$$u(b, t) = \hat{u}(b, t), \quad (1.11)$$

kde počáteční podmínka u_0 , Dirichletovy okrajové podmínky $\hat{u}(a, t)$, $\hat{u}(b, t)$ jsou předepsány a splňují podmínky kompatibility.

Možným přístupem k řešení parciální diferenciální rovnice závislé na čase pomocí metody konečných prvků je nejprve časovou derivaci aproximovat metodou konečných diferencí, která poskytuje rekurzivní množinu stacionárních problému, které jsou převáděny do variační formulace.

Necht' index $k \in \mathbb{N}$ označuje výpočetní časovou vrstvu t^k . Například, $u^k = u(x, t^k)$. Diskretizace konečnými diferencemi v čase spočívá ve vzorkování původní parciální diferenciální rovnice na určité časové úrovni. Tedy k určuje:

$$\frac{\partial}{\partial t} u^k = -\epsilon u^k \frac{\partial}{\partial x} u^k + \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^k. \quad (1.12)$$

Časovou derivaci aproximujeme pomocí konečné diference:

$$\frac{\partial}{\partial t}u^k = \frac{u^k - u^{k-1}}{\Delta t}, \quad (1.13)$$

kde Δt je časový diskretizační parametr. (více o nahrazení časové derivace zpětnou diferencí dostupné z [3]). Touto časovou diskretizací převedeme původní parciální diferenciální rovnici do tvaru:

$$u^0 = u_0, \quad (1.14)$$

$$u^k + \Delta t \epsilon u^k \frac{\partial}{\partial x} u^k - \Delta t \nu \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^k = u^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.15)$$

kde u^{k-1} je již známá předchozí časová vrstva.

Nyní použijeme metodu konečných prvků pro řešení časově diskrétní parciální diferenciální rovnice, kde jsou stále platné prostorové diferenciály. Tedy převedeme rovnici do slabé formulace.

Než definujeme slabou formulaci rovnice (1.15), musíme nejprve definovat prostor:

$$V_{\hat{a}}^k = \{u^k \in C^1([a, b]) : u(a, t) = \hat{u}(a, t), u(b, t) = \hat{u}(b, t)\}. \quad (1.16)$$

Nyní členy rovnice přenásobíme libovolnou testovací funkcí $v \in V_{\hat{a}}^k$ a integrujeme přes oblast Ω . Členy s druhou derivací integrujeme per partes. Tím získáme váženou reziduální formulaci rovnice (1.15).

$$\int_{\Omega} u^k v dx + \int_{\Omega} \Delta t \epsilon u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} v dx - \int_{\Omega} \Delta t \nu \frac{\partial u^k}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_{\Omega} u^{k-1} v dx - \left[\Delta t \frac{\partial u^k}{\partial x} v \right]_a^b. \quad (1.17)$$

To je problém takový, že hledáme $u^k \in V_{\hat{a}}^k$ tak, že platí (1.17).

Výhodou slabé formulace je, že nyní požadujeme na u pouze diferencovatelnost prvního řádu, namísto druhého řádu. Slabá formulace poskytuje základ pro diskretizaci konečnými prvky.

Zavedením bilineární formy $a(u, v) : V_{\hat{a}}^k \times V_{\hat{a}}^k \rightarrow \mathbb{R}$ a lineární formy $l(v) : V_{\hat{a}}^k \rightarrow \mathbb{R}$, jež jsou definované:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} u^k v dx + \int_{\Omega} \Delta t \epsilon u^k \frac{\partial u^k}{\partial x} v dx - \int_{\Omega} \Delta t \nu \frac{\partial u^k}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx, \quad (1.18)$$

$$l(v) = \int_{\Omega} u^{k-1} v dx - \left[\Delta t \frac{\partial u^k}{\partial x} v \right]_a^b, \quad (1.19)$$

pak můžeme slabou formulaci vyjádřit jako: Najít $u \in V_{\hat{a}}^k$, kde pro všechna $v \in V_{\hat{a}}^k$ je splněna rovnice:

$$a(u, v) = l(v). \quad (1.20)$$

Řešení lineárními konečnými prvky

Slabá formulace je výchozím bodem pro numerickou diskretizaci. Toho je dosaženo zavedením prostoru $V_{\hat{u},h}$, kde jsou aproximovány funkce z $V_{\hat{u}}$.

Výpočetní oblast Ω je rozdělena na podoblasti H_j , jež jsou nazývány elementy, takové, že

$$\bigcup_{j=1}^N \bar{H}_j = \bar{\Omega} \quad (1.21)$$

a zároveň platí

$$H_j \cap H_i = \emptyset \text{ pro } j \neq i, j, i \in \{1, \dots, N\}. \quad (1.22)$$

Uzávěr množiny $\bar{\Omega}$ je definován jako

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega, \quad (1.23)$$

kde Ω je oblast a $\partial\Omega$ je hranice oblasti.

Důležitou vlastností metody končených prvků je využití lokálních bázových funkcí, které jsou nenulové jen na malém počtu elementů.

Nechť interval $[a, b]$ je rozdělen na konečný počet po dvou disjunktních podintervalů $H_j = (x_{j-1}, x_j)$, $j = 1, \dots, N$. Nechť

$$V_{\hat{u},h}^k = \{u \in C^0 : u \in P^h(H_j), \forall H_j \subset [a, b], u(a, t) = \hat{u}(a, t), u(b, t) = \hat{u}(b, t)\} \subset V_{\hat{u}}^k, \quad (1.24)$$

kde $P^h(a, b)$ je prostor polynomů stupně h nad intervalem (a, b) . To znamená, že nad každým elementem je polynomiální bázová funkce stupně h , ale požaduje se, aby funkce byly spojitě na hranicích jednotlivých prvků.

Bázové funkce ϕ_j jsou definovány:

$$\phi_j(x) \in P^k(H_j), x \in H_j, \quad (1.25)$$

a splňujících podmínku $\phi_i(x_j) = \delta_{ij}$, kde δ_{ij} je Kronckerova delta, která je definována

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \dots & \text{pro } i = j, \\ 0 & \dots & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.26)$$

Tedy pro bázové funkce dostáváme:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} 1 & \dots & \text{pro } x = x_j, \\ 0 & \dots & \text{pro } x = x_k, k \neq j. \end{cases} \quad (1.27)$$

Lineární bázové funkce jsou definovány:

$$\phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{j-1}}{x_j-x_{j-1}} & \dots & \text{pro } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j+1}-x}{x_{j+1}-x_j} & \dots & \text{pro } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \dots & \text{jinak.} \end{cases} \quad (1.28)$$

Řešení $u^k \in V_{\hat{u},h}^k$ a testovací funkce $v^k \in V_{\hat{u},h}^k$ je možné zapsat jako lineární kombinaci bázových funkcí ve tvaru:

$$u^k(x) = \hat{u}(a, t^k)\phi_0(x) - \hat{u}(b, t^k)\phi_N(x) + \sum_{j=1}^{N-1} u_j^k \phi_j(x), \quad (1.29)$$

$$v(x) = \sum_{j=1}^{N-1} v_j \phi_j(x). \quad (1.30)$$

Příspěvek $\hat{u}(a, t_k)\phi_0$ musí být nastaven tak, aby splňoval okrajovou podmínku $u(a, t) = \hat{u}(a, t)$ a všechny ostatní bázové funkce ϕ_j musí být na tomto okraji rovny nule. Obdobně je tomu pro $\hat{u}(b, t_k)\phi_N$.

Diskretizací metodou konečných prvků lze integrál přes celou oblast úlohy rozdělit na integrály přes jednotlivé elementy díky tomu, že bázové funkce jsou nenulové jen na malém počtu elementů. Rovnici (1.20) lze převést na soustavu rovnic ve tvaru:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} U_j^k \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i \phi_j dx \right] + \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{l=1}^{N-1} U_j^k \left[\Delta t \epsilon \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i \phi_j' \phi_k dx \right] + \\ & + \sum_{j=1}^{N-1} U_j^k \left[\Delta t \nu \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i' \phi_j' dx \right] = \sum_{j=1}^{N-1} U_j^{k-1} \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_i \phi_j dx \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

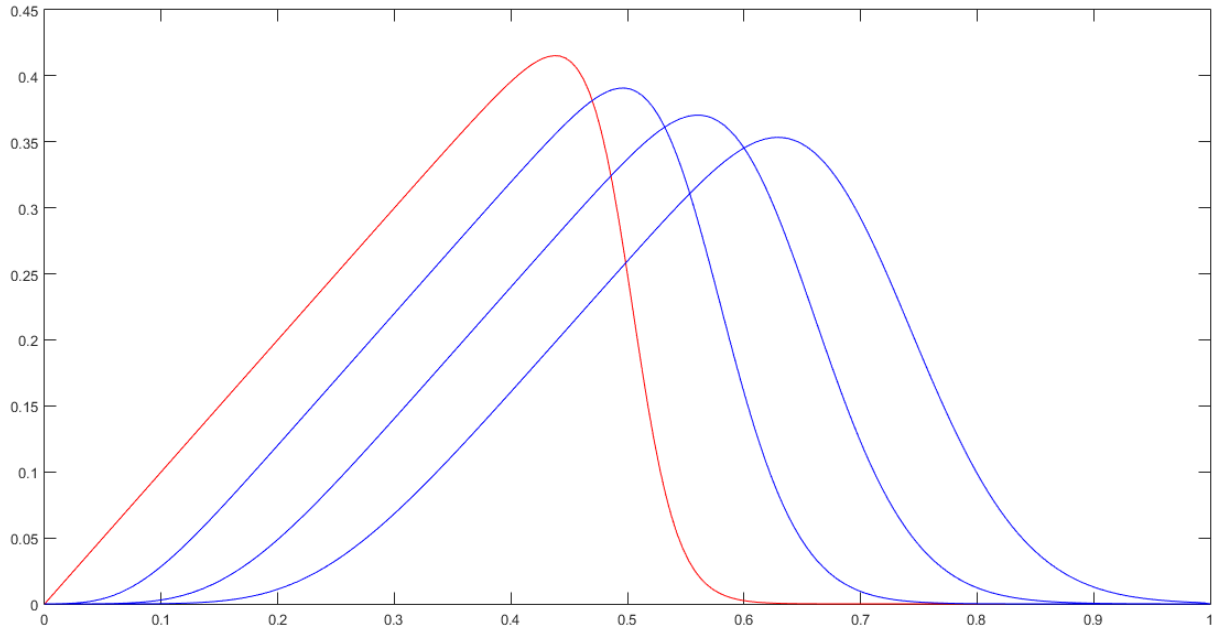
Soustavu algebraických rovnic získaných z (1.31) je nyní možno řešit standardním aparátem pro řešení lineárních algebraických rovnic, jako je například LU rozklad, Gaussova eliminace a podobné.

Numerický test 1

Zadání následující počátečně okrajové úlohy bylo převzato z [4].

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [1, 2.5], \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 1) = \frac{x}{1 + \sqrt{\frac{1}{e^{1/8\nu}} e^{x^2/4\nu}}}, \\ \nu = 0.005, \\ \epsilon = 1. \end{cases} \quad (1.32)$$

Na obrázku 1.1 je zobrazena červenou barvou počáteční podmínka ($t = 1$). Modrou barvou je pak zobrazen výsledek spočtený pomocí metody konečných prvků z rovnice (1.31) v čase $t = 1.5$, $t = 2.0$, $t = 2.5$, s časovým krokem $\Delta t = 0.1$ a prostorovým krokem $\Delta x = 0.02$.



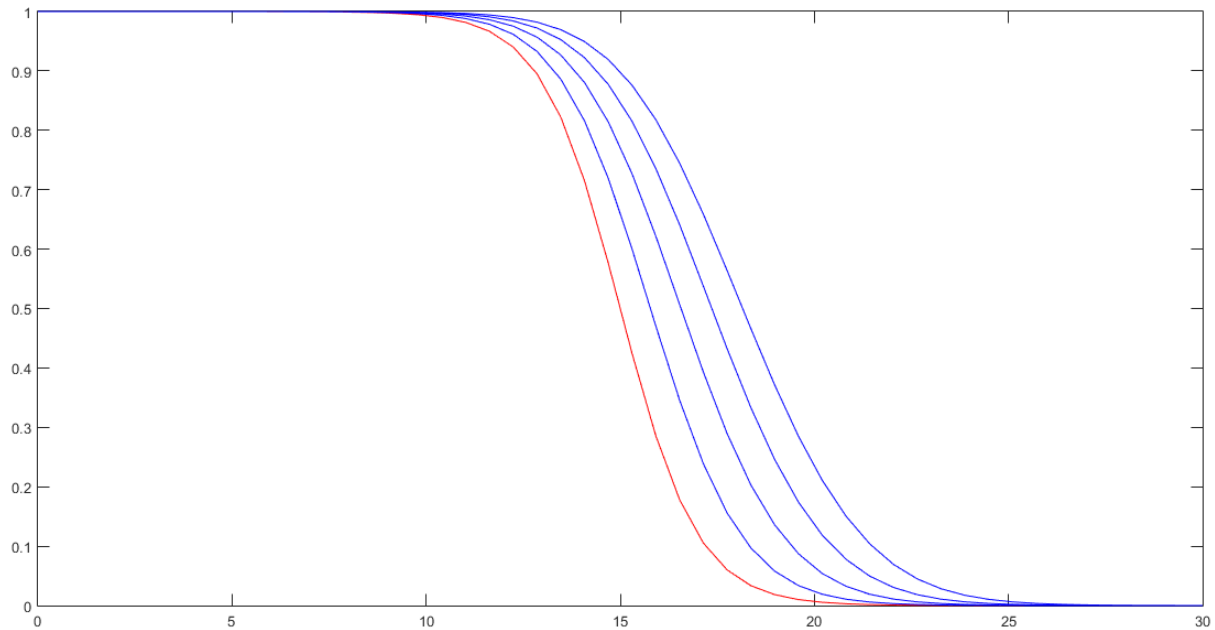
Obrázek 1.1: Experiment Burgersova rovnice

Numerický test 2

Data pro počátečně okrajovou úlohu byla převzata z [4].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 30], \\ t = [0, 4], \\ u(0, t) = 1 \\ u(30, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{1}{4\nu}(x - 15)\right) \right], \\ \nu = \frac{1}{2}, \\ \epsilon = 1. \end{array} \right. \quad (1.33)$$

Modrou barvou je zobrazen výsledek spočtený metodou konečných prvků z rovnice (1.31) v čase $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$, $t = 4$, s časovým krokem $\Delta t = 0.1$ a prostorovým krokem $\Delta x = 0.2$ na obrázku 1.2. Červenou barvou je v obrázku 1.2 zobrazena počáteční podmínka $u(x, 0)$.



Obrázek 1.2: Experiment Burgersova rovnice

1.4 Stacionární Stokesova úloha

Stacionární Stokesova úloha je základním modelem nestlačitelného vazkého proudění. Úloha je dána soustavou parciálních diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} \nabla p - \nu \Delta u &= f, \\ \nabla u &= 0. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Okrajovou úlohou pro zmíněnou rovnici rozumíme najít $u(x)$ a $p(x)$ na oblasti Ω , které splňují uvedené rovnice společně s Dirichletovou okrajovou podmínkou:

$$u(x) = \hat{u}(x) \text{ na } \partial\Omega_D, \tag{1.35}$$

kde Ω_D je hranice oblasti s definovanou Dirichletovou okrajovou podmínkou, a Neumanovou okrajovou podmínkou

$$\nu \frac{\partial u}{\partial n} - np = s \text{ na } \partial\Omega_N, \tag{1.36}$$

kde Ω_N je hranice oblasti s definovanou Neumanovou okrajovou podmínkou, n je normálový vektor oblasti a s je hodnota Neumanovy podmínky.

Necht' V je prostor řešení a $V_{\hat{u}}$ je prostor přípustných testovacích funkcí, potom slabou

formulací okrajové úlohy rozumíme najít $u \in V$ takové, že

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla u : \nabla v - \int_{\Omega} p \nabla \cdot v &= \nu \int_{\partial\Omega_N} \left(\frac{\partial u}{\partial n} - pn \right) \cdot v, \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot u &= 0, \end{aligned} \quad (1.37)$$

kde $\nabla u : \nabla v = \nabla u_x \cdot \nabla v_x + \nabla u_y \cdot \nabla v_y$ a v, q jsou testovací funkce definované na uzávěru množiny $\bar{\Omega}$.

Řešení lineárními konečnými prvky

Uvažujeme konečně dimenzionální podprostory $V^h \subset V$ a $W^h \subset L_2(\Omega)$ a jejich bázové funkce. Potom můžeme úlohu přepsat do tvaru, kde hledáme $u_h \in V^h$ a $p_h \in W^h$ tak, že

$$\begin{aligned} \nu \int_{\Omega} \nabla u_h : \nabla v_h - \int_{\Omega} p_h \nabla \cdot v_h &= \nu \int_{\partial\Omega} s \cdot v_h, \quad \forall v_h \in V_0^h, \\ \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot u_h &= 0, \quad \forall q_h \in W^h. \end{aligned}$$

Řešení pro rychlost u_h , respektive pro tlak p_h , píšeme jako lineární kombinaci bázových funkcí V^h

$$\begin{aligned} u_h &= \sum_{i=1}^{n_d^u} (u_{1i}, u_{2i})^T R_i^u + \sum_{i=n_d^u+1}^{n_v^u} (u_{1i}^*, u_{2i}^*)^T R_i^u, \\ p_h &= \sum_{i=1}^{n^p} p_i R_i^p, \end{aligned}$$

kde n_d^u je počet bodů, ve kterých není zadána Dirichletova okrajová podmínka, R_i^u, R_i^p jsou lineární bázové funkce pro rychlost a tlak.

Označíme-li $u_k = (u_{ki})_{i=1}^{n_d^u}$, $p = (p_i)_{i=1}^{n^p}$ a $s_k = (s_{ki})_{i=1}^{n_v^u}$, převedeme problém na řešení lineární soustavy rovnic

$$\begin{bmatrix} A & 0 & -B_1^T \\ 0 & A & -B_2^T \\ B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1^T C \\ u_2^T C \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 0 & A^* \\ B_1^* & B_2^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^* \\ u_2^* \end{bmatrix}, \quad (1.38)$$

kde

$$\begin{aligned} A &= [A_{ij}], & 1 \leq i \leq n_d^u, & 1 \leq j \leq n_d^u, \\ A^* &= [A_{ij}], & 1 \leq i \leq n_d^u, & n_d^u + 1 \leq j \leq n_d^u, \\ B_k &= [B_{kij}], & 1 \leq i \leq n^p, & 1 \leq j \leq n_d^u, \\ B_k^* &= [B_{kij}], & 1 \leq i \leq n^p, & n_d^u + 1 \leq j \leq n_v^u, \end{aligned} \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \nu \int_{\Omega} \nabla R_i^u \cdot \nabla R_j^u d\Omega, \\
B_{kij} &= \int_{\Omega} R_i^p [\nabla R_j^u \cdot e_k] d\Omega, \\
C_{ij} &= \nu \int_{\partial\Omega_N} R_i^u \cdot R_j^u d\Omega,
\end{aligned}
\tag{1.40}$$

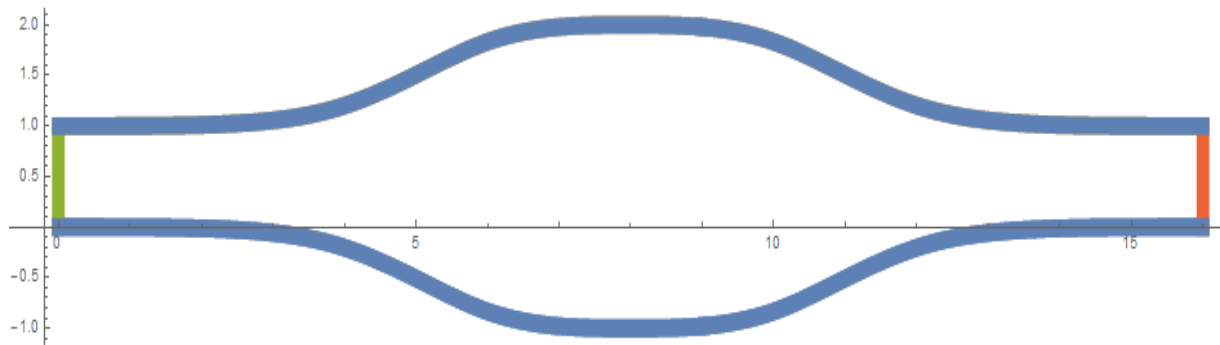
kde e_k je bázový jednotkový vektor souřadného systému.

Numerický test

Řešme následující úlohu

$$\begin{cases} \nabla p - \nu \Delta u = f, \\ \nabla u = 0, \end{cases}
\tag{1.41}$$

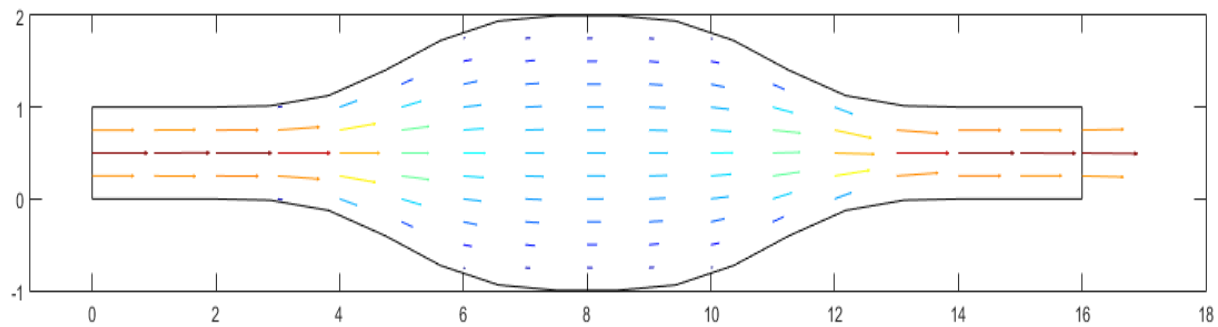
na oblasti zobrazené na obrázku 1.3, s okrajovými podmínkami:



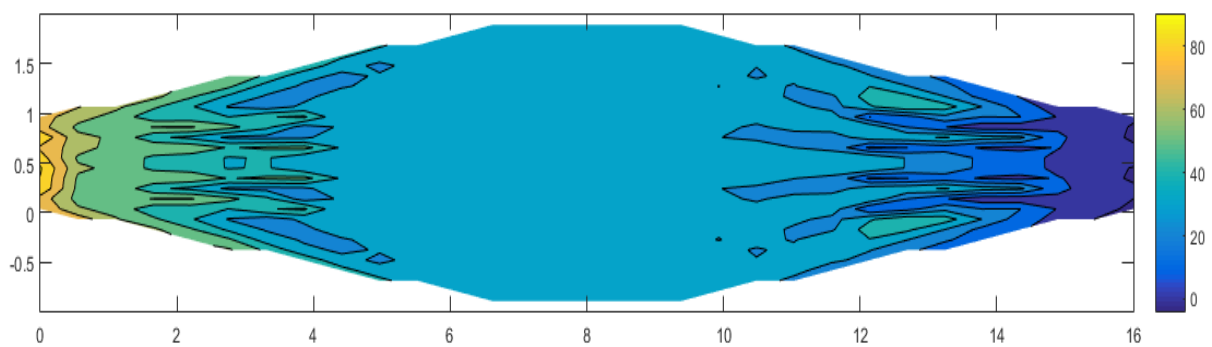
Obrázek 1.3: Zadání oblasti

1. modrá - nulová rychlost
2. zelená - vstupní parabolický profil
3. červená - homogenní Neumanova podmínka.

Na obrázku 1.4 je zobrazeno rychlostí pole pro zadání (1.41), kdy výpočetní oblast byla rozdělena na trojúhelníkové elementy v počtu 1440. Obrázek 1.5 zachycuje rozložení tlaku pro stejnou úlohu.



Obrázek 1.4: Rychlostní pole



Obrázek 1.5: Tlak

Kapitola 2

Metoda nespojitých konečných prvků

Nespojitá Galerkinova metoda je třídou metody nespojitých konečných prvků, která za testovací funkce a funkce pro řešení používá nespojité funkce. Nespojitá Galerkinova metoda je tedy variantou standardní Galerkinovy metody, s tím rozdílem, že nevyžadujeme kontinuitu řešení podél rozhraní prvků (hrany).

Podrobné informace o nespojité Galerkinově metodě dostupné v [5].

Tuto metodu budeme nejprve aplikovat na Burgersovu rovnici se spojitou počáteční podmínkou a následně s nespojitou počáteční podmínkou. Rovněž bude metoda aplikována na stacionární Stokesovu úlohu.

2.1 Slope limiter

Pro rekonstrukci dat získaných nespojitou Galerkinovou metodou je využíván tzv. slope limiter, odstraňující oscilace, které vznikají u lineárních aproximací v okolí nespojitosti. Jedná se o po částech lineární aproximační schéma.

V časovém kroku n jsou data v každé elementu sítě rekonstruována vztahem:

$$u(x, t = t_n) = \bar{u}_{i+1/2}^n + \sigma_i^n (x - x_{i+1/2}), \text{ pro } x_i < x < x_{i+1}, \quad (2.1)$$

kde $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_{i+1} + x_i)$, σ_i^n je slope limiter a $\bar{u}_{i+1/2}^n$ je hodnota v bodě $x_{i+1/2}$, která je získaná z rekonstrukce dat původními bázovými nespojitými funkcemi.

V této práci byl slope limiter zvolený MC limiter, který je daný jako:

$$\sigma_i^n = \minmod\left(\frac{\bar{u}_{i+3/2}^n - \bar{u}_{i-1/2}^n}{x_{i+3/2} - x_{i-1/2}}, \minmod\left(2 \cdot \left(\frac{\bar{u}_{i+1/2}^n - \bar{u}_{i-1/2}^n}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}}\right), 2 \cdot \left(\frac{\bar{u}_{i+3/2}^n - \bar{u}_{i+1/2}^n}{x_{i+3/2} - x_{i+1/2}}\right)\right)\right). \quad (2.2)$$

Funkce *minmod* je dána předpisem:

$$\minmod(a, b) = \begin{cases} a \dots |a| < |b| \wedge a \cdot b > 0, \\ b \dots |a| > |b| \wedge a \cdot b > 0, \\ 0 \dots a \cdot b < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Více o slope limiter v [6].

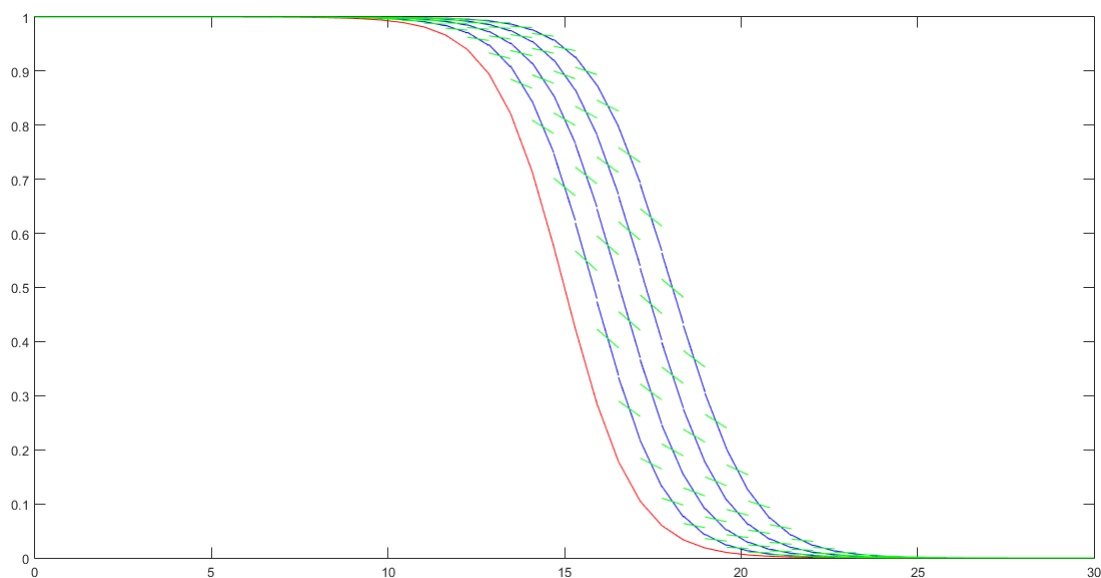
2.2 Nestacionární Burgersova rovnice

Burgersova rovnice se spojitou počáteční podmínkou

Data pro počátečně okrajovou úlohu byla převzata z [4].

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 30], \\ t = [0, 2], \\ u(0, t) = 1 \\ u(30, t) = 0, \\ u(x, 0) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh\left(\frac{1}{4\nu}(x - 15)\right) \right], \\ \nu = \frac{1}{2}, \\ \epsilon = 1. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Pro řešení úlohy bylo použito uniformní dělení sítě s krokem $\Delta x = 0.02$. Časový krok byl nastaven $\Delta t = 0.1$. Na obrázku 2.1 je červenou barvou zobrazena počáteční podmínka. Zeleně jsou zobrazena nelimitovaná data a modře data rekonstruovaná pomocí MC limiteru v časových krocích $t = 0.5$, $t = 1$, $t = 1.5$ a $t = 2$.



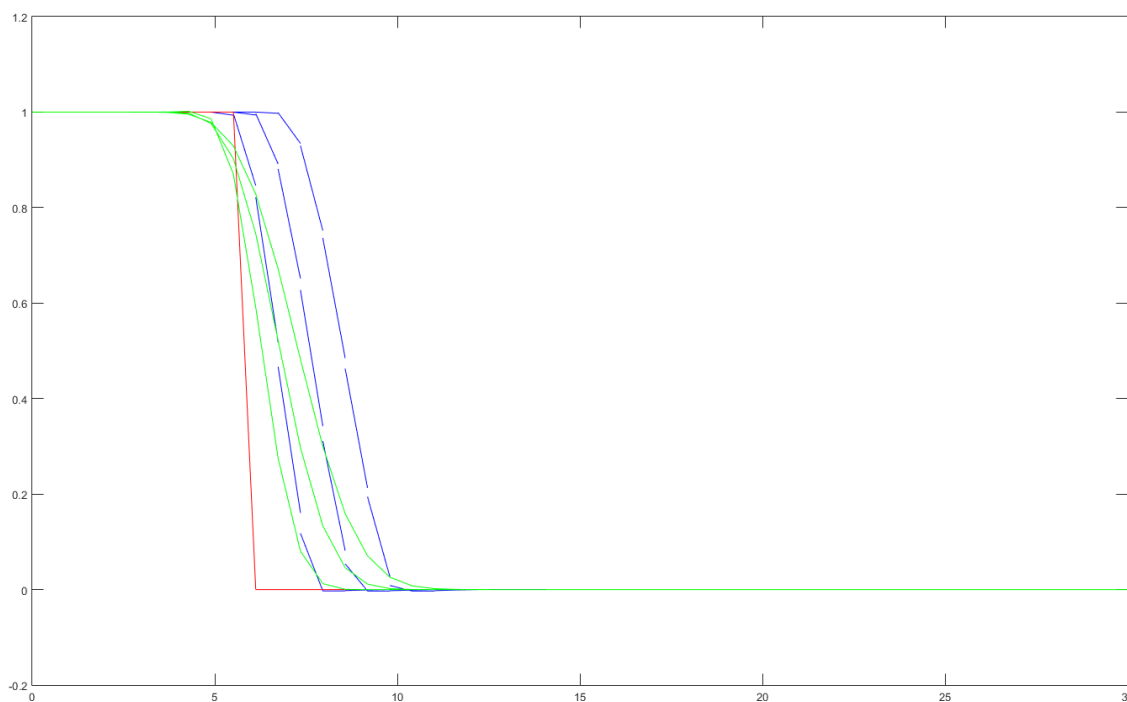
Obrázek 2.1: Burgersova rovnice řešená nespojitou Galerkinovou metodou

Burgersova rovnice s nespojitou počáteční podmínkou

Druhým testovacím příkladem je Burgersova rovnice s nespojitou počáteční podmínkou. Mějme dānu ůlohu:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 30], \\ t = [0, 2.7], \\ u(0, t) = 1 \\ u(30, t) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1 \dots x \in (0, 5), \\ 0 \dots x \in (5, 30), \end{cases} \\ \nu = \frac{1}{2}, \\ \epsilon = 1. \end{cases} \quad (2.5)$$

Řešení ůlohy (2.5) je zobrazeno na obrázku 2.2. Červenou barvou je zobrazena počáteční podmínka. Zelenou barvou je zobrazeno řešení spojitou Galerkinovou metodou v čase $t = 0.9$, $t = 1.8$ a $t = 2.7$. Modrou barvou jsou ve stejných časových krocích zobrazeny data z nespojitě Galerkinovy metody, které byli limitovány MC slope limiterem.



Obrázek 2.2: Burgersova rovnice řešenā nespojitou Galerkinovou metodou pro počáteční nespojitā data

Z řešení druhého numerického experimentu je patrné, že u standardní Galerkinovy me-

tody dochází k patrnějšímu rozmazání dat na rozdíl od nespojitě Galerkinovy metody, kde zůstává patrnější původní nespojitost z počátečních dat.

Burgersova rovnice s nespojitou počáteční podmínkou a dominující advekcí

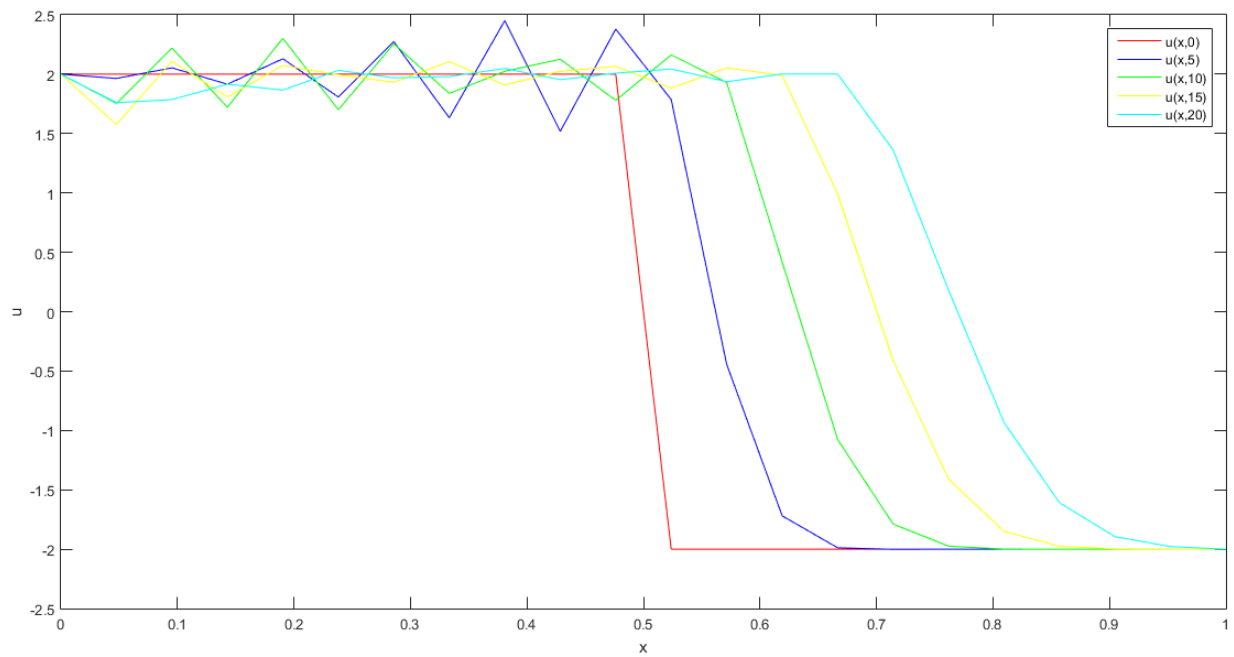
Mějme zadánu počátečně okrajovou úlohu, s advekcí dominující nad difúzí, v následujícím tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [0, 0.055], \\ u(0, t) = 2, \\ u(1, t) = -2, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 2 \dots x \leq 0.5, \\ -2 \dots x > 0.5, \end{cases} \\ \nu = 10^{-6}, \\ \epsilon = 5. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

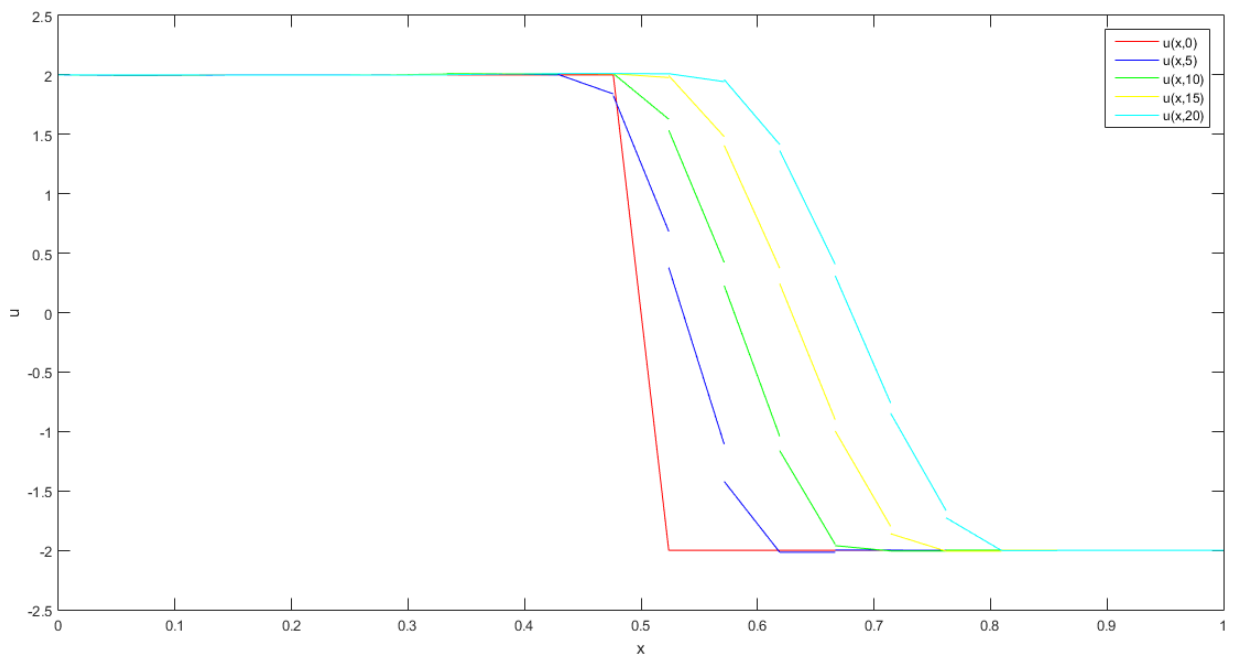
Výpočetní oblast Ω byla rozdělena na 21 elementů a v čase byla úloha diskretizována do dvaceti časových vrstev, tedy krok $\Delta t = 0.00275$. Na obrázku 2.3 je zobrazen výsledek získaný metodou končených prvků, kde testovací funkce byly voleny spojité, lineární. Výsledky jsou zobrazeny na časových hladinách $t = 0$ (červená barva), $t = 5 \cdot \Delta t = 0.01375$ (tmavě modrá), $t = 10 \cdot \Delta t = 0.0275$ (zelená barva), $t = 15 \cdot \Delta t = 0.04125$ (žlutá barva) a $t = 20 \cdot \Delta t = 0.055$ (světle modrá barva).

Na obrázku 2.4 jsou zobrazeny výsledky získané metodou konečných prvků, kde byly použity nespojitě testovací funkce, ze stejné úlohy. Výsledky jsou pak zobrazeny stejnými barvami na stejných časových vrstvách jako v případě metody konečných spojitých prvků.

Ukazuje se, že metoda konečných prvků se spojitými testovacími funkcemi pro advekčně-dominantní úlohu vykazuje výskyt oscilací v řešení. Tyto oscilace je možné odstranit záměnou spojitých testovacích funkcí za nespojitě testovací funkce v metodě konečných prvků a s aplikací slope limiteru.



Obrázek 2.3: Advekčně dominantní problém řešený spojitými konečnými prvky

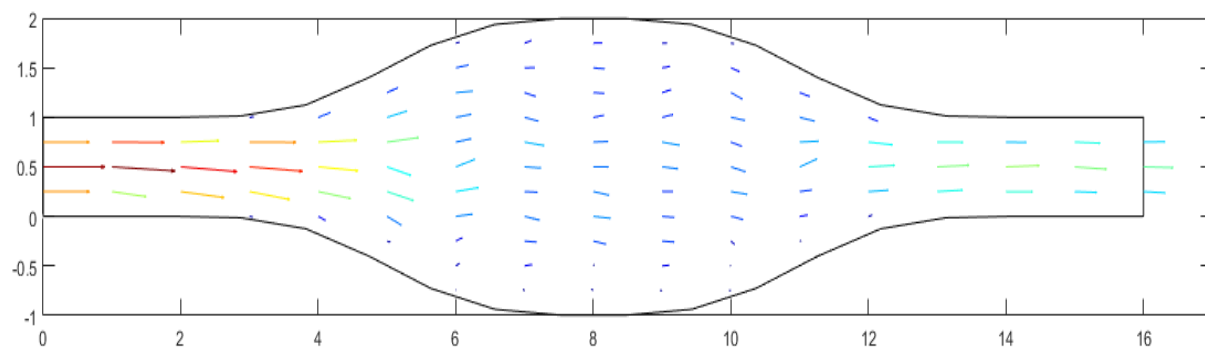


Obrázek 2.4: Advekčně dominantní problém řešený nespojitými konečnými prvky

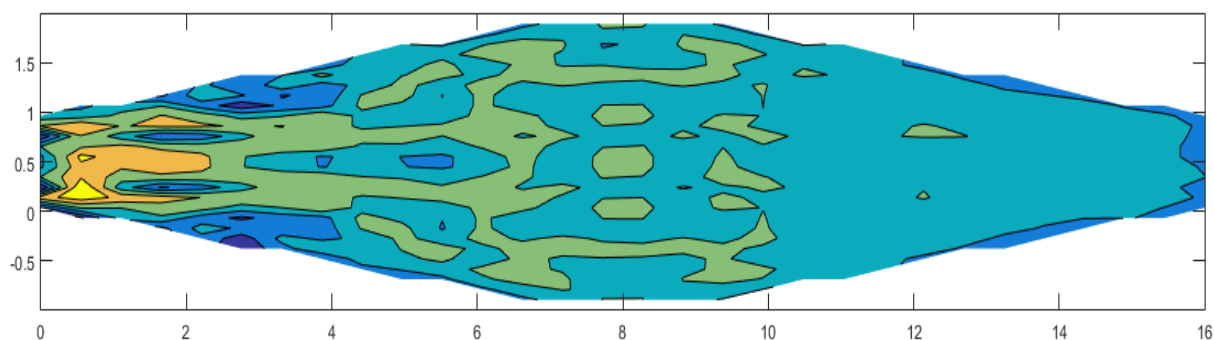
2.3 Stacionární Stokesova úloha

Mějme stejné zadání jako v odstavci 1.4, tedy úlohu (1.41), kde místo spojitých testovacích funkcí použijeme nespojité testovací funkce.

Proudnicice pro úlohu (1.41) získané nespojitou Galerkinovou metodou jsou zobrazeny na obrázku 2.5, rozložení tlaku pro stejnou úlohu je vizualizováno na obrázku 2.6.



Obrázek 2.5: Rychlost



Obrázek 2.6: Tlak

Kapitola 3

XFEM

3.1 XFEM

Metoda XFEM je obecně používána pro aproximaci nespojitého řešení (silná nespojitost) nebo pro řešení mající nespojité derivace (slabá nespojitost).

Standardní XFEM aproximace funkce $u^h(x)$ na d -dimenzionální oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^d$ je dáno:

$$u^h(x, t) = \underbrace{\sum_i N_i(x) u_i}_{\text{standardní FE část}} + \underbrace{\sum_{i \in I^*} N_i^*(x) \psi(x, t) a_i}_{\text{obohacení}}. \quad (3.1)$$

Vztah (3.1) je platný pouze v případě jednoho obohacujícího členu. $N_i(x)$ je standardní testovací funkce pro metodu konečných prvků pro uzel i , u_i je neznámá pro část se standardní metodou konečných prvků v uzlu i , I je množina všech uzlů sítě pro výpočetní oblast Ω . $N_i^*(x)$ je jednoduchá funkce přidružená uzlu i , ψ_i je globální obohacovací funkce, a_i jsou neznámé pro obohacení v uzlu i a $I^* \subset I$, takových, že $i \in I^*$ dochází-li v bodě i k obohacování.

Globální obohacovací funkce $\psi(x, t)$ zahrnuje do prostorové aproximace známé charakteristiky z řešení. Typická volba obohacovací funkce je:

Krokové obohacení:

$$\psi(x, t) = \text{sign}(\phi(x, t)) = \begin{cases} -1 \dots \phi(x, t) < 0, \\ 0 \dots \phi(x, t) = 0, \\ 1 \dots \phi(x, t) > 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

volené pro silné nespojitosti (skok), a absolutní ohodnocení:

$$\psi(x, t) = |\phi(x, t)|, \quad (3.3)$$

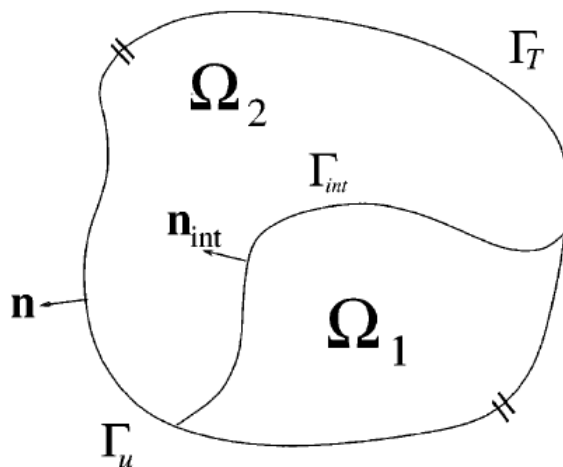
používaná pro slabé nespojitosti (nespojitosť v první derivaci).

Poznamenejme, že obohacovací funkce $\phi(x, t)$ závisí na level-set funkci $\phi(x, t)$, která je typicky znamínkově-vzdálenostní funkcí. Za předpokladu, že $\phi_d(x, t)$ je nejkratší vzdálenost

mezi bodem x oblasti Ω a hranicí mezi oblastmi Ω_1 a Ω_2 v čase t , potom funkci $\phi(x, t)$ definujeme:

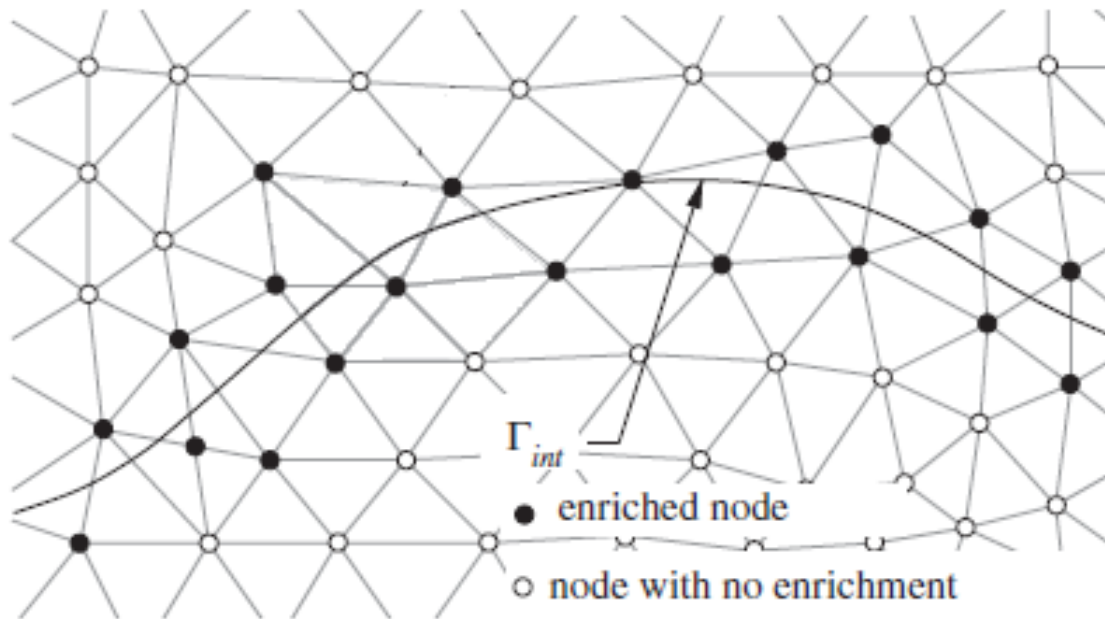
$$\phi(x, t) = \begin{cases} -\phi_d(x, t) \dots \forall x \in \Omega_1, \\ +\phi_d(x, t) \dots \forall x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (3.4)$$

kde Ω_1 a Ω_2 jsou podoblasti oblasti Ω na opačné straně nespojitosti. Problém je schematicky znázorněn na obrázku 3.1 (obrázek převzat z [7]), kde Γ_{int} označuje nespojitost.



Obrázek 3.1: Schéma problému, Γ_{int} označuje nespojitost

Typickou diskretizovanou výpočetní oblastí problému pro metodu XFEM je zobrazena na obrázku 3.2 (obrázek je převzat z [8]). Na tomto obrázku je nespojitost označena Γ_{int} , obohacované uzly (enriched node) patří do I^* a body patří pouze do množiny indexů uzlů sítě I .



Obrázek 3.2: Typická síť pro konečné prvky s rozhraním Γ_{int} zobrazující obohacované body (enriched node) a body bez obohacení

3.2 Numerické experimenty

3.2.1 Experiment se stacioárním rozhraním mezi médii

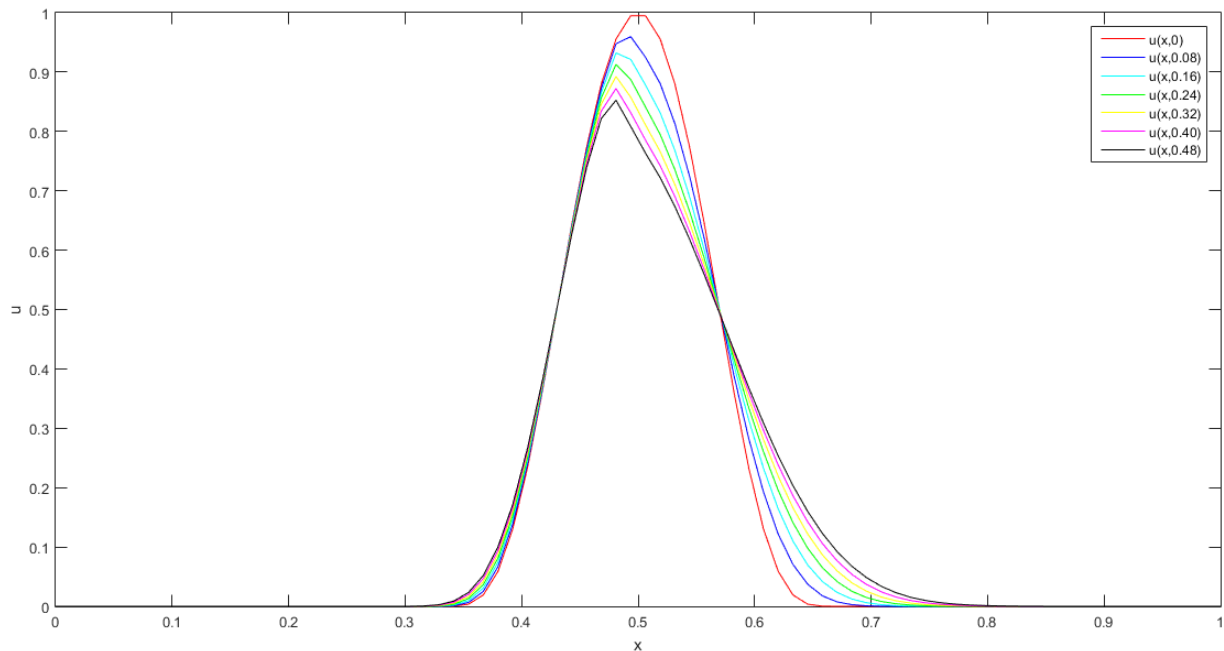
Difúzní rovnice

Mějme nejprve zadánu difúzní rovnici:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [0, 0.481], \\ u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} e^{5 + \frac{5}{\left(\frac{|x-0.5|}{0.2}\right)^2 - 1}} & \dots \text{pro } \frac{|x-0.5|}{0.2} \leq 1, \\ 0 & \dots \text{jinak,} \end{cases} \\ \nu = \begin{cases} 0.5 \cdot 10^{-3} & \dots x \leq 0.5, \\ 5.0 \cdot 10^{-3} & \dots x > 0.5. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Výsledky této úlohy jsou zobrazeny na obrázku 3.3 v časech $t = 0$ (červená), $t = 0.08$ (modrá), $t = 0.16$ (světle modrá), $t = 0.24$ (zelená), $t = 0.32$ (žlutá), $t = 0.40$ (růžová),

$t = 0.48$ (černá).



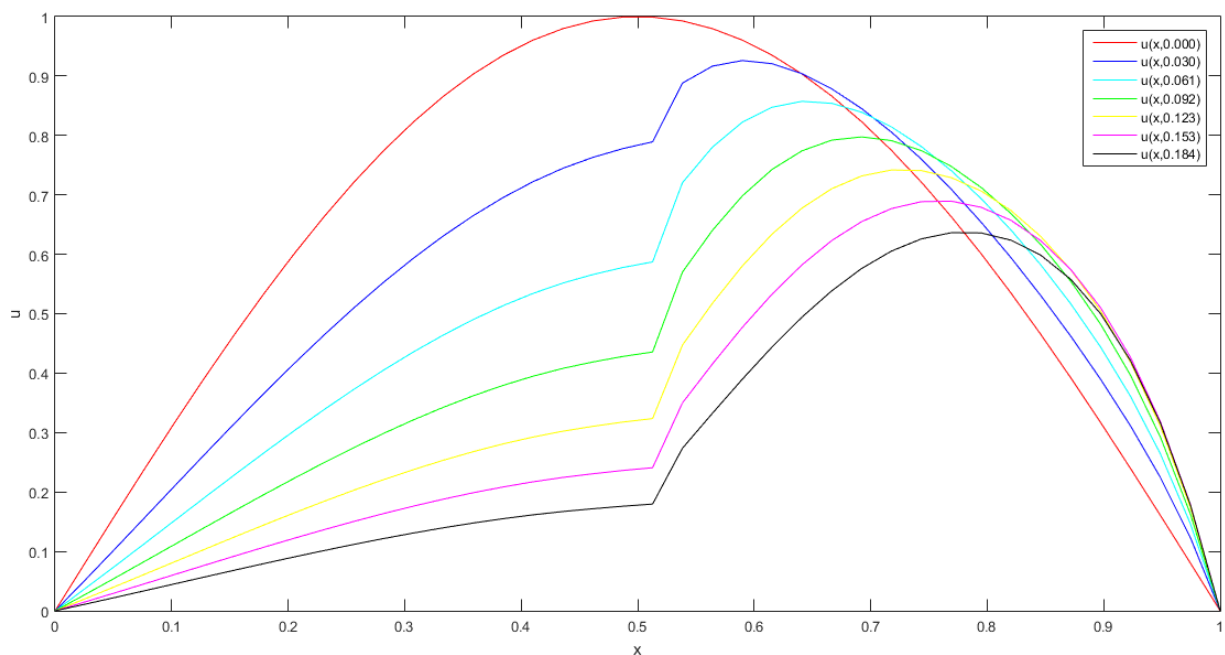
Obrázek 3.3: Řešení difúzní rovnice na oblasti Ω s dvěma médii a nepohybující se hranicí mezi těmito médii

Burgersova rovnice

Mějme zadánu Burgersovu rovnici s dvěma médii ve tvaru:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [0, 0.139], \\ u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ \nu = \begin{cases} 1.0 \dots x \leq 0.5, \\ 0.1 \dots x > 0.5. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.6)$$

V této úloze se rozhraní mezi médii nepohybuje v čase. Výsledky této úlohy jsou zobrazeny na obrázku 3.4 v časech $t = 0$ (červená), $t = 0.030$ (modrá), $t = 0.061$ (světle modrá), $t = 0.092$ (zelená), $t = 0.123$ (žlutá), $t = 0.153$ (růžová), $t = 0.184$ (černá).



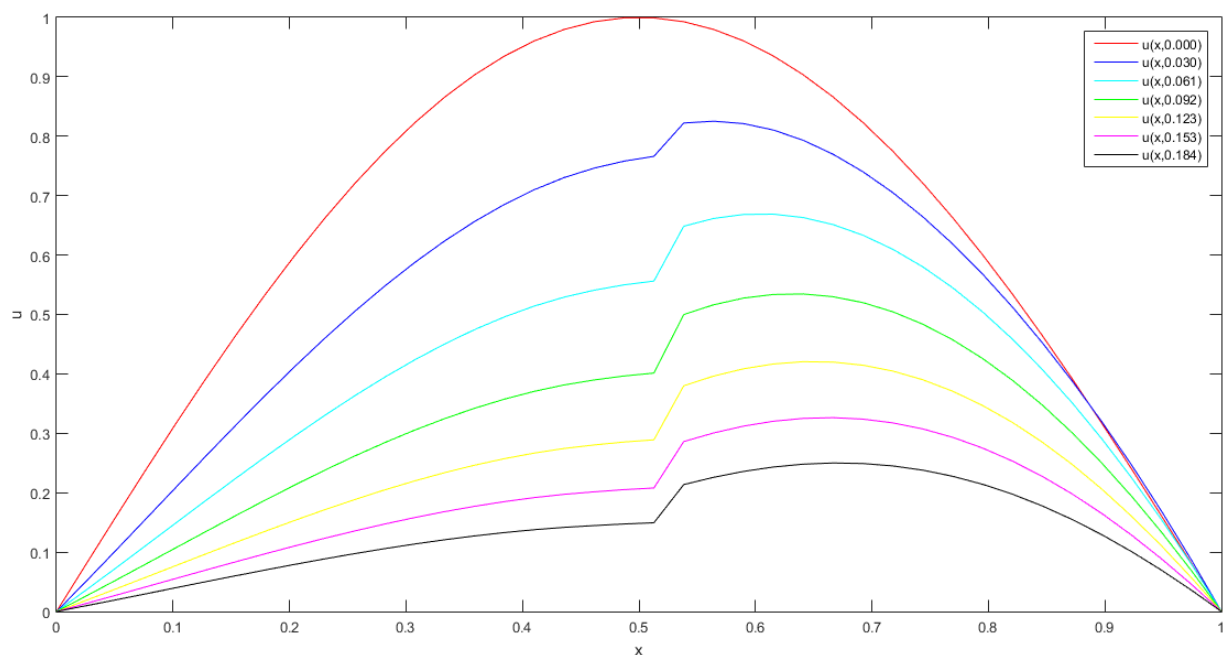
Obrázek 3.4: Řešení Burgersovy rovnice na oblasti Ω s dvěma médii a nepohybující se hranicí mezi těmito médii

Uvažujme nyní stejnou zadání jako (3.6), pouze difúzní koeficient zaměníme za:

$$\nu = \begin{cases} 1.0 \dots x \leq 0.5, \\ 0.5 \dots x > 0.5. \end{cases} \quad (3.7)$$

Opět uvažujeme stacionární rozhraní mezi médii, tedy v bodě $x = 0.5$. Vlivem menšího poměru mezi difúzními koeficienty mezi médii by mělo docházet k rychlejšímu snižování koncentrace u na obou stranách rozhraní.

Výsledky pro úlohu (3.6) s difúzními koeficienty (3.7) jsou zaznamenány na obrázku 3.5 na časových hladinách $t = 0$ (červená), $t = 0.030$ (modrá), $t = 0.061$ (světle modrá), $t = 0.092$ (zelená), $t = 0.123$ (žlutá), $t = 0.153$ (růžová), $t = 0.184$ (černá).



Obrázek 3.5: Řešení Burgersovy rovnice na oblasti Ω s dvěma médii a nepohybující se hranicí mezi těmito médii

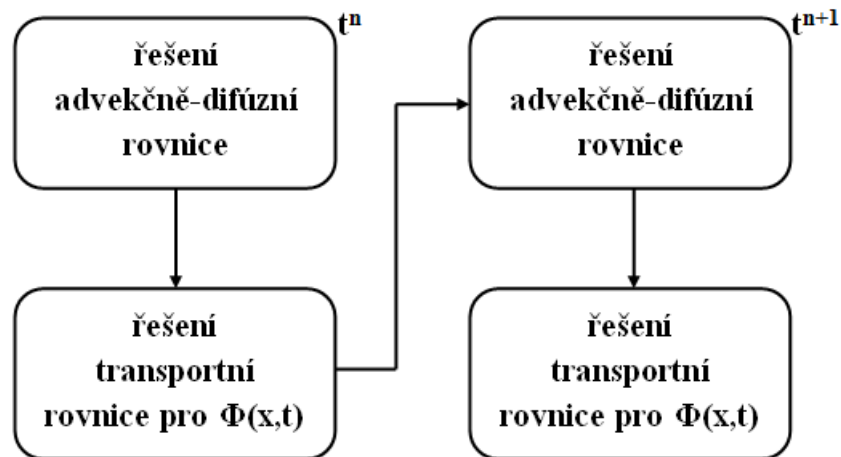
3.2.2 Experiment s pohybujícím se rozhraním mezi médii

Řešíme-li úlohu s pohybujícím se rozhraním mezi médii, musí být řešena i advekční rovnice pro vzdálenostní funkci $\phi(x, t)$. Tedy řešíme navíc úlohu:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0. \quad (3.8)$$

V těchto testovacích příkladech předpokládáme, že počáteční pozice rozhraní mezi médii je známa.

Řešení advekčně-difúzních rovnic společně s transportní rovnicí pro advekční rovnici můžeme schematicky zakreslit jako na obrázku 3.6.



Obrázek 3.6: Schematické znázornění řešení úloh s pohybujícím se rozhraní mezi médii

Advekčně-difúzní rovnice

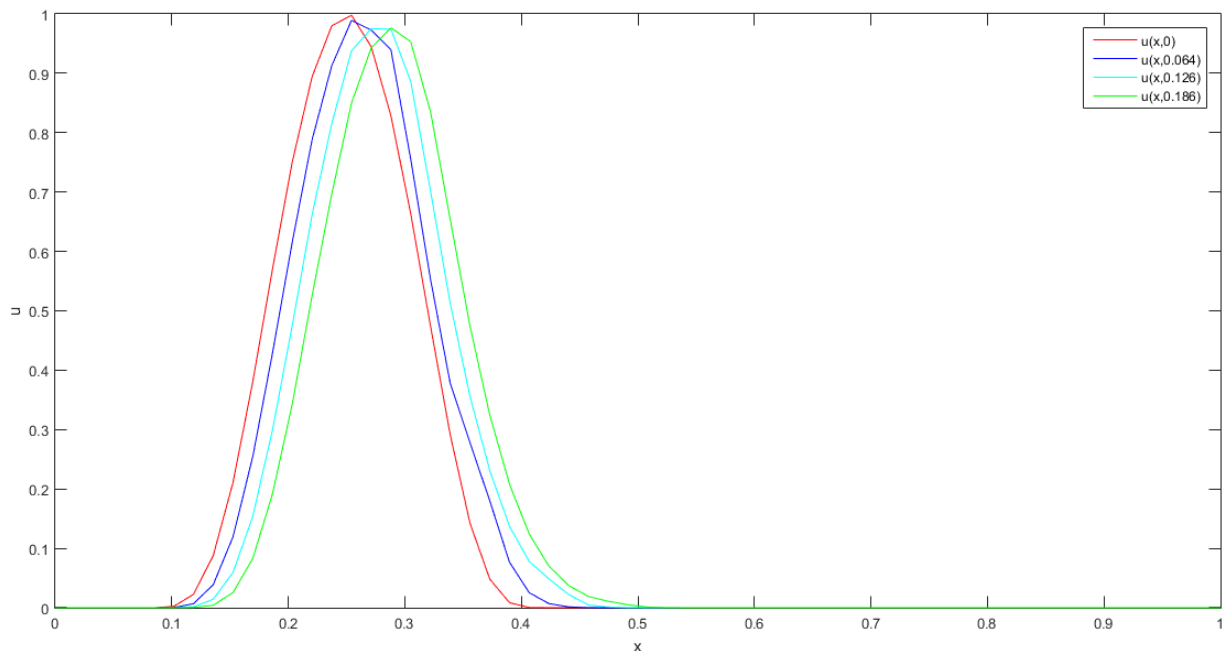
Necht' je zadána počátečně okrajová úloha ve tvaru:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [0, 0.186], \\ u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} e^{5 + \frac{5}{\left(\frac{|x-0.25|}{0.2}\right)^2 - 1}} & \dots \text{pro } \frac{|x-0.25|}{0.2} \leq 1, \\ 0 & \dots \text{jinak,} \end{cases} \\ \nu = \begin{cases} 0.5 \cdot 10^{-3} & \dots x \leq 0.3, \\ 5.0 \cdot 10^{-3} & \dots x > 0.3, \end{cases} \\ \epsilon = 0.3. \end{cases} \quad (3.9)$$

Rozhraní mezi médii se v čase $t = 0$ nachází v bodě $x = 0.3$. Vzdálenostní funkce je ve tvaru:

$$\phi(x, 0) = x - 0.3. \quad (3.10)$$

Výsledky úlohy (3.9) jsou zobrazeny na obrázku 3.7 v časech $t = 0$ (červená), $t = 0.064$ (modrá), $t = 0.126$ (světle modrá), $t = 0.186$ (zelená).



Obrázek 3.7: Řešení advekčně-difúzní rovnice na oblasti Ω s dvěma médii a pohybující se hranicí mezi těmito médii

Burgersova rovnice

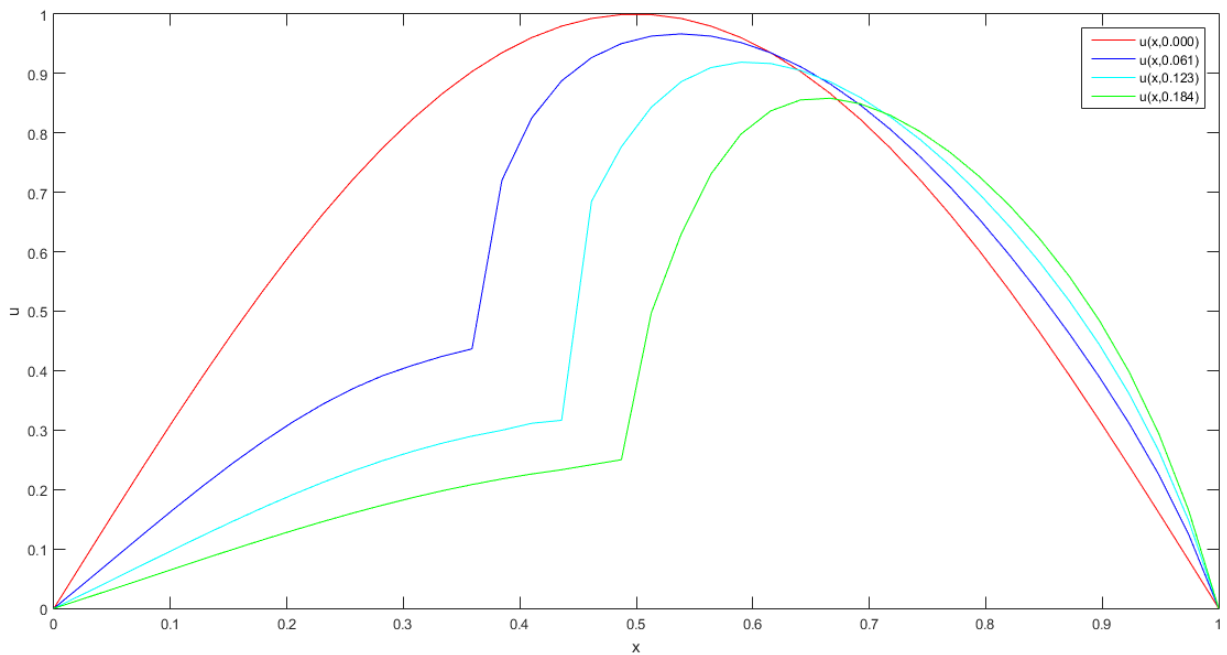
Necht' je dána úloha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = -u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ \Omega = [0, 1], \\ t = [0, 0.184], \\ u(0, t) = 0, \\ u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \sin(\pi x) \\ \nu = \begin{cases} 1.0 \dots x \leq 0.3, \\ 0.1 \dots x > 0.3. \end{cases} \end{array} \right. \quad (3.11)$$

Pohyb v čase je nelineární díky nelineárnímu transportnímu členu v Burgersově rovnici. Je znám pouze počáteční stav rozhraní mezi médii, tedy vzdálenostní funkce má tvar:

$$\phi(x, 0) = x - 0.3. \quad (3.12)$$

Výsledky pro tuto úlohu jsou zanzamenány na obrázku 3.8 na časových hladinách $t = 0$ (červená), $t = 0.061$ (modrá), $t = 0.123$ (světle modrá), $t = 0.184$ (zelená).



Obrázek 3.8: Řešení Burgersovy rovnice na oblasti Ω s dvěma médii a pohybující se hranicí mezi těmito médii

Počáteční data pro všechny úlohy v odstavci 3.2 byly převzaty z článku [9]. Výsledky těchto úloh byly srovnány s prezentovanými výsledky v článku [9].

Kapitola 4

Závěr

V této práci byla zopakována metoda konečných prvků, která byla nejprve aplikována na Burgersovu rovnici a následně na stacionární Stokesovu úlohu. Následně byla použita metoda konečných prvků, kde místo spojitých testovacích funkcí byly použity nespojitě testovací funkce a slope limiter. Díky této metodě se v advekčně dominantním problému odstranili oscilace v řešení.

V závěru této práce byla představena metoda XFEM, jež je základním kamenem pro řešení úloh dvoufázového proudění. Tato metoda byla aplikována na Burgersovu rovnici, difúzní rovnici a advekčně-difúzní rovnici. Výpočetní oblast úloh byla složena ze dvou médií s rozdílnými koeficienty difúze. Byly řešeny příklady, kdy se rozhraní mezi médii pohybovalo v čase, ale i příklady, kdy rozhraní bylo v čase neměnné.

Všechny úlohy prezentované v této práci byly řešeny ve výpočetním prostředí MATLAB.

Literatura

- [1] O. Kayser-Herold H. G. Matthies. Lecture notes introduction to pdes and numerical methods. University Lecture, 2002.
- [2] N.CHALMERS, L. KRIVODONOVA, and R. QIN. Relaxing the cfl number of the discontinuous galerkin method. *SIAM J. Sci. Comput.*, 36:1–25, 2014.
- [3] Fenics project: time-dependent problems. <http://fenicsproject.org/documentation/tutorial/timedep.html>. cit. 2016-03-12.
- [4] A. A. Soliman. A galerkin solution for burgers' equation using cubic b-spline finite elements. *Abstract and Applied Analysis*, 2012:1–15, 2012.
- [5] D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L. D. Marini. Unified analysis of discontinuous galerkin methods for elliptic problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 39:1749–1779, 2002.
- [6] S. May and M. Berger. Two-dimensional slope limiters for finite volume schemes on non-coordinate-aligned meshes. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 35:A2163–A2187, 2013.
- [7] J. Chessa and T. Belytschko. An extended finite element method for two-phase fluids. *Journal of Applied Mechanics*, 70:10–17, 2003.
- [8] J. Chessa and T. Belytschko. An enriched finite element method and level sets for axisymmetric two-phase flow with surface tension. *International journal for numerical methods in engineering*, 58:2041–2064, 2003.
- [9] T. P. Fries and A. Zilian. On time integration in the xfem. *International journal for numerical methods in engineering*, 79:69–93, 2009.

Příloha A

Obsah CD

1. diplomová práce (*.pdf)
2. zdrojové kódy (*.m)