

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI  
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
KATEDRA MATEMATIKY

**Bakalářská Práce**  
**Součtová evoluční dynamika na mřížkách**

# Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně pouze s použitím pramenů a literatury uvedených v seznamu citované literatury.

V Plzni, dne 27. června 2016

.....

vlastnoruční podpis

## **Poděkování**

Ráda bych poděkovala panu doc. RNDr. Petru Stehlíkovi Ph.D. za odborné vedení, čas, který mi věnoval při konzultacích, a rady, díky kterým mohla být tato práce dokončena.

## Abstrakt

Cílem této práce je zkoumat vývoj spolupráce hráčů v prostorových evolučních hrách a jak se při daných parametrech a jejich případné změně celý dynamický systém vyvíjí. Práce zkoumá vývoj populace v čase při použití kooperačních her. Kooperační hry budou aplikovány na vlastní model Součtová evoluční dynamika na mřížkách, přičemž se bude jednat o upravený model, kde se užitky Spolupracujících a Nespolutracujících sčítají. Hlavním výsledkem této práce je popsání podmínek, za kterých jeden osamocený Nespolutracující přiměje populaci jinak Spolupracujících k defekci.

**Klíčová slova:** Prostorové evoluční hry, kooperační hry, evolučně stabilní strategie, defekce, spolupráce

## Abstract

The goal of this thesis is to study evolution of cooperation in spatial games. Specifically, we describe the dynamics of the system in the dependence on the game-theoretical parameters. The thesis studies the evolution of population in time in the framework of (spatial) cooperative games. Cooperative games are the basis of the new model Aggregate spatial evolution dynamics. In this modified model, the payoffs of Cooperators and Defectors are added up. Main result of this thesis is a description of conditions, under which one singular Defector forces the population of Cooperators to defect.

**Key words:** Spatial games, cooperative games, evolutionary stable strategy, defection, cooperation

# Obsah

<b>1 Úvod</b>	<b>6</b>
<b>2 Teorie her</b>	<b>7</b>
2.1 Předpoklady teorie her . . . . .	7
2.2 Typy her . . . . .	7
2.2.1 Rovnováha . . . . .	8
2.3 Kooperační hry . . . . .	9
2.3.1 Vězňovo dilema . . . . .	10
2.3.2 Plná spolupráce . . . . .	11
2.3.3 Lov jelena . . . . .	12
2.3.4 Jestřábi a holubice . . . . .	13
<b>3 Evoluční hry</b>	<b>15</b>
3.1 Evoluční teorie . . . . .	15
3.1.1 Princip evolučních her . . . . .	15
3.1.2 Stabilita rovnováh . . . . .	16
3.1.3 Vztah mezi užitky a stabilitou rovnováh . . . . .	17
3.2 Prostorové evoluční hry . . . . .	18
<b>4 Součtová evoluční dynamika na mřížkách</b>	<b>22</b>
4.1 Představení modelu . . . . .	22
4.2 Invaze Nespolutracujících . . . . .	24
4.2.1 populace se sudým počtem hráčů . . . . .	30
4.2.2 populace s lichým počtem hráčů . . . . .	38
4.3 Koexistence Spolutracujících a Nespolutracujících . . . . .	49
<b>5 Závěr</b>	<b>55</b>
<b>Reference</b>	<b>56</b>

## 1 Úvod

Bakalářská práce je rozdělena do několika částí. V Kapitole 2 se seznámíme s problematikou teorie her, popíšeme si její názvosloví, předpoklady, ale také si přiblížíme, k čemu je tato vědní disciplína vhodná a kde se používá. Stručně zde budou vysvětleny statické hry a pojem *Nashova rovnováha*, který je pro teorii her klíčový. Vzhledem k tomu, že je v celé práci řešena spolupráce, budou zde přiblíženy kooperační hry.

V Kapitole 3 se seznámíme s evolučními hrami, pojmem *evolučně stabilní strategie*, ale také s motivací, proč se evolučními hrami zabývat. Rovněž zde bude vysvětlen pojem *replikátorová dynamika*. V podkapitole budou vysvětleny principy prostorových her, *Moorovo okolí* a *von Neumannovo okolí*.

V praktické části (Kapitola 4) této práce bude zkoumána invaze jednoho Nespolutracujícího na populaci Spolutracujících. Je studován nový model *Součtová evoluční dynamika na mřížkách*, který bude aplikován na Neumannovo okolí. Analyticky budou zkoumány dvě oblasti – oblast, kde dojde k absolutní defekci, tedy kdy všichni Spolutracující změni strategii na nespolutracii, či naopak oblast, kde samotný Nespolutracující zahyne a vznikne tak absolutní spolutrace. Zkoumání jiných oblastí je analyticky příliš náročné, proto budou zkoumány numericky.

## 2 Teorie her

V této kapitole se seznámíme se základy teorie her, obecnými předpoklady, názvoslovím a aplikací.

Teorie her je mezioborová vědní disciplína na pomezí ekonomie a aplikované matematiky, která analyzuje konfliktní rozhodovací situace a vytváří pro ně matematické modely. Velké využití má v přírodních i sociálních vědách. Z přírodních věd je její uplatnění například v biologii, kde jsou důležité evoluční hry modelující chování populací různých živočichů. V sociálních vědách její aplikaci pozorujeme například v ekonomii a politologii.

Teorie her pohlíží na konfliktní situace jako na *hry*, a účastníci, kteří jsou zde označováni jako *hráči*, hledají optimální variantu na základě nejen *užitků* svých, ale také na základě užitků ostatních hráčů. V této hře ale musí vystupovat vždy alespoň dva hráči. Možnosti, jak se mohou jednotliví hráči zachovat, nazýváme *strategiemi*, přičemž každý hráč má dané užitky pro všechny kombinace svých strategií i strategií ostatních hráčů. Strategii nazýváme jako *čistou*, pokud hráč dosáhne svého cíle pouze za použití své jediné strategie. Smíšená strategie pak znamená, že hráč musí s pravděpodobností  $p$  volit jednu strategii a s pravděpodobností  $(1 - p)$  druhou, aby dosáhl svého cíle za předpokladu, že má na výběr ze dvou svých strategií. V případě vyššího počtu strategií využijeme další proměnné. Užitek je vlastně prospěch z dané kombinace, nicméně užitek může být i záporný [11].

### 2.1 Předpoklady teorie her

Stejně jako jiné disciplíny, i teorie her má své obecné předpoklady. Jsou to:

1. užitková funkce je známa všem,
2. všichni hráči jsou racionální,
3. všichni účastníci znají pravidla, která se během hry nemění [11].

Teorie her se oproti optimalizaci liší právě v tom, že nezanedbává okolí, které musí být racionální. V optimalizaci navíc hledáme nejlepší strategii jednoho hráče, zatímco v teorii her hledáme z určitého pohledu nejvýhodnější kombinaci strategií všech hráčů. Tato kombinace se pak nazývá *rovnováha*.

### 2.2 Typy her

V teorii her existuje několik typů her. Může se jednat o hry statické, hry dynamické, nebo například evoluční hry. Tyto hry se mohou lišit i v počtu hráčů či strategií. U všech těchto her však hráči volí strategie, aby maximalizovali svůj užitek.

Kvůli návaznosti na evoluční hry a prostorové evoluční hry, které jsou v této práci nejvíce využity



je potřeba si stručně popsat statické hry.

**Definice 1.** *Statická hra je matematická struktura dána:*

1. množinou  $N$  hráčů  $i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ ,
2. množinami jejich strategií  $S_1, S_2, \dots, S_N$ ,
3. užitkovou funkcí  $\pi : S \rightarrow \mathbb{R}^N$ , kde  $S$  je kartézským součinem množin strategií jednotlivých hráčů, tedy  $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_N$ . [11, str. 63]

Statické hry se od dynamických liší tím, že hráči hrají současně a s časem svá rozhodnutí nemění. Pro potřeby této práce budeme uvažovat pouze hru dvou hráčů se dvěma strategiemi, která k názornosti postačí. Nyní se podívejme, jak může být takováto hra zapsána – viz Tabulka 1.

Tabulka 1: Užitková matice (zdroj: [5])

		$H_2$	
		$C$	$D$
$H_1$	$A$	$a, w$	$b, x$
	$B$	$c, y$	$d, z$

Tato tabulka je nazývána *Užitková matice* a jedná se o obecný příklad aplikovatelný na jakoukoliv statickou hru se dvěma hráči se dvěma strategiemi. Z užitkové matice je zřejmé, že máme dvouprvkovou množinu hráčů  $\{H_1, H_2\}$ . Množiny (rovněž dvouprvkové) jejich strategií jsou  $S_1 = \{A, B\}$  a  $S_2 = \{C, D\}$ , což jsou čisté strategie a jejich kombinací získáme strategie smíšené. Užítky mohou být  $\pi_1 = \{a, b, c, d\}$  pro prvního hráče a  $\pi_2 = \{w, x, y, z\}$  pro druhého hráče, případně lze vypočítat i užítky smíšené. Tím jsme zkonkretizovali Definici 1 pro hru dvou hráčů se dvěma strategiemi.

**Definice 2.** *Smíšená strategie  $i$ -tého hráče udává pravděpodobnost  $p(\cdot)$ , že bude hrána strategie  $s \in S_i$ . Smíšená strategie bude označena  $\sigma_i$  a množina všech možných smíšených strategií  $i$ -tého hráče bude označena  $\Sigma_i$  [11, str. 64].*

Po definování smíšených strategií je možno vysvětlit hledání řešení her – rovnováh. Ty můžeme hledat například pomocí dominovaných strategií [11, str. 66]. Pro tuto práci je však zásadní obecnější a praktičtější pojem *Nashova rovnováha*.

### 2.2.1 Rovnováha

Rovnováha je v teorii her označení pro kombinaci strategií hráčů. Existují různé typy *rovnováh*, přičemž se vlastně jedná o řešení dané hry. Nejznámější je rozhodně *Nashova rovnováha* (v textu se objeví také zkratka *NR*) definována americkým matematikem Johnem Forbsem Nashem [7],

který díky svému bádání v oblasti teorie her získal v roce 1994 Nobelovu cenu za ekonomii [8, str. 46].

**Definice 3.** *Nashova rovnováha pro dva hráče je kombinace strategií  $(\sigma_1^*, \sigma_2^*)$  taková, že platí:*

$$\begin{aligned} \pi_1(\sigma_1^*, \sigma_2^*) &\geq \pi_1(\sigma_1, \sigma_2^*) && \text{pro všechna } \sigma_1 \in \Sigma_1, \\ \pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2^*) &\geq \pi_2(\sigma_1^*, \sigma_2) && \text{pro všechna } \sigma_2 \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

Zjednodušeně řečeno - žádný hráč si pouze změnou své strategie nemůže zvýšit užitek [11, str. 69].

### 2.3 Kooperační hry

Kooperační hry jsou hry popisující spolupráci. Často jsou používány pro popis populací s  $i = \{1, 2, 3, \dots, N\}$  hráči, kde má každý člen populace právě dvě strategie  $S = \{C, D\}$  a užitky  $\pi = \{r, s, t, p\}$ . Označení strategií hráčů vychází z anglického cooperátor – spolupracující a defektor – nespolupracující. Označení užiteků je rovněž z angličtiny – r (reward) je odměna hráčů za spolupráci, s (sucker) je užitek „naivního“ hráče, který spolupracuje, zatímco druhý hráč nikoliv, t (temptation) je užitek hráče, který nespolupracoval, zatímco druhý hráč ano, a p (punishment) je „trest“ obou nespolupracujících hráčů [9, str. 4]. Vzhledem k tomu, že je v práci zásadní hlavně zdroj [8], využijeme názvosloví z této knihy, tedy užitky  $\pi = \{a, b, c, d\}$ .

Tyto hry jsou symetrické, proto stačí pouze čtyři užitky. Užítková matice kooperačních her je zobrazena v Tabulce 2.

Tabulka 2: Užítková matice kooperačních her

		$H_2$	
		C	D
$H_1$	C	$a, a$	$b, c$
	D	$c, b$	$d, d$

Předpoklady kooperačních her:

1. Snaha o spolupráci obou hráčů, musí tedy platit  $a > b$  a zároveň  $c > d$ ,
2. vytvoření produktu plynoucího ze spolupráce je lepší než defekce, z čehož plyne  $a > d$ ,
3. pokud spolupracuje jen jeden, je pro hráče výhodnější, je-li to ten druhý, musí tedy platit  $c > b$ .

Z těchto předpokladů vyplývá následující vztah užiteků:  $\min\{a, c\} > \max\{b, d\}$  [4, str. 7].

Je zřejmé, že jsou možné čtyři variace užiteků  $a, b, c$  a  $d$ , vznikají tak čtyři kooperační hry, které zde budou nyní popsány.

### 2.3.1 Vězňovo dilema

Vězňovo dilema získalo své jméno ze vzorové situace, kdy jsou policisty chyceni dva zločinci. Neexistují žádné přímé důkazy, proto se policisté spoléhají na to, že se alespoň jeden ze zločinců přizná a ten díky spolupráci s policisty dostane menší trest/bude propuštěn. Na druhou stranu, pokud budou oba zločinci zapírat, půjdou sice do vězení, ale kvůli nepřímým důkazům je zde čeká jen krátká doba. Zločinci zde mohou využít dvě strategie – {Přiznat se, Zapírat}. Užítky jsou zde léta ve vězení. Ve hře jsou použity záporné hodnoty, aby byla zachována snaha maximalizace užitku. Hra může vypadat například takto:

Tabulka 3: Vězňovo dilema

		Zločinec 2	
		Zapírat	Přiznat se
Zločinec 1	Zapírat	-1, -1	-20, 0
	Přiznat se	0, -20	-10, -10

Vězňovo dilema popisuje situaci, kdy  $c > a > d > b$ . Z Tabulky 3 je tedy zřejmé, že strategie *Přiznat se* je vlastně nespolupráce a strategie *Zapírat* je spolupráce (mezi zločinci).

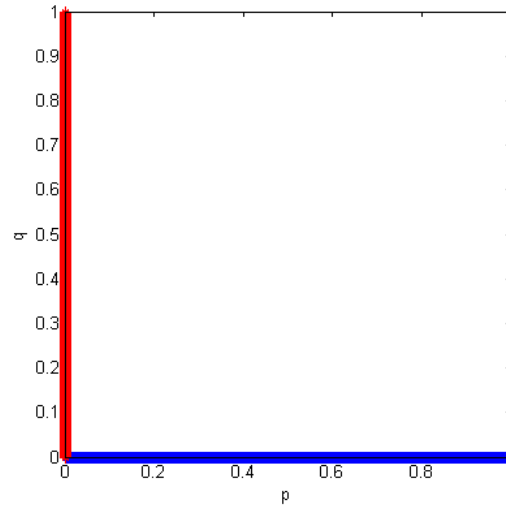
Chceme-li nalézt rovnováhy, využijeme reakční funkce (více popsáno v [11]). Vypočítáme je obecně s využitím Tabulky 2, a poté dosadíme jednotlivé kombinace užitků, abychom zjistili nejlepší odezvy hráčů. Předpokládejme smíšené strategie  $\sigma_1 = (p, 1 - p)$  hráče  $H_1$  a  $\sigma_2 = (q, 1 - q)$  hráče  $H_2$ .

$$\begin{aligned}
 \pi_1(p, q) &= apq + bp(1 - q) + c(1 - p)q + d(1 - p)(1 - q) \\
 &= p(aq + b - bq - cq - d + dq) + cq + d - dq \\
 &= p((a - b - c + d)q + b - d) + cq + d - dq
 \end{aligned} \tag{1}$$

V Rovnici (1) se zajímáme o hráče  $H_1$  a zkoumáme tedy pravděpodobnost  $p$ , s jakou má volit strategii  $C$ . Pro jednotlivé hry tedy budeme řešit situace, kdy  $q^* > \frac{d-b}{a-b-c+d}$ , kdy  $q^* = \frac{d-b}{a-b-c+d}$  a kdy  $q^* < \frac{d-b}{a-b-c+d}$ . Jelikož jsou kooperační hry symetrické, to samé bude platit pro hráče  $H_2$  a pravděpodobnost  $q$ .

Vzhledem ke kombinaci užitků z Vězňova dilematu  $c > a > d > b$  je pro  $q \in [0, 1]$  výraz  $(a - b - c + d)q + b - d$  vždy záporný, hráč  $H_1$  tedy bude reagovat s pravděpodobností  $p = 0$  (modrá křivka v Obrázku 1). Jelikož je hra symetrická, stejně tak hráč  $H_2$  vždy zvolí pravděpodobnost  $q = 0$  (červená křivka v Obrázku 1), čímž získáváme Nashovu rovnováhu  $(D, D)$  (*Přiznat se, Přiznat se*) v Tabulce 3).

Obrázek 1: Reakční funkce pro Vězňovo dilema



### 2.3.2 Plná spolupráce

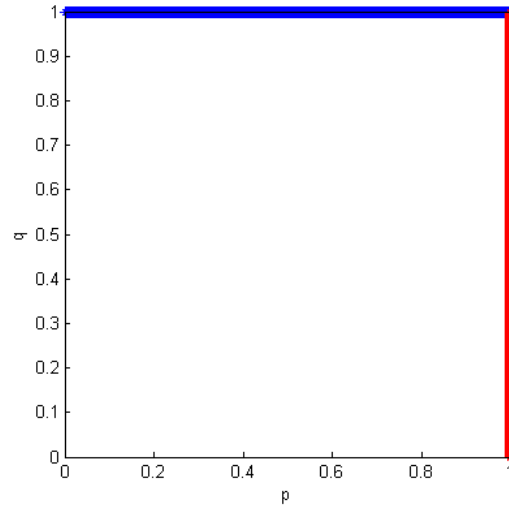
Plná spolupráce je dalším zástupcem kooperačních her. Popisuje například následující situaci. Dva kamarádi se chtějí setkat. Sejit se mohou buď venku (na půli cesty od obou bydlíšť), nebo doma u jednoho z nich. Pokud by se sešli u jednoho z nich doma, musí dotyčný uklidit. Druhý hráč má zas tu nevýhodu, že musí jít celou cestu. Získáváme tedy dvě strategie {Venku, Doma}. Jedna z možností, jak může taková hra vypadat je v Tabulce 4.

Tabulka 4: Plná spolupráce

		Kamarád 2	
		Venku	Doma
Kamarád 1	Venku	5, 5	1, 3
	Doma	3, 1	0, 0

Strategie *Venku* je vlastně spolupráce a strategie *Doma* nespolupráce. Z Rovnice (1) je zřejmé, že při kombinaci užiteků  $a > c > b > d$ , které popisují Plnou spolupráci, je výraz  $(a - b - c + d)q + b - d$  vždy kladný. Hráč  $H_1$  tedy bude reagovat s pravděpodobností  $p = 1$  (modrá křivka v Obrázku 2). Jelikož je hra symetrická, stejně tak hráč  $H_2$  vždy zvolí pravděpodobnost  $q = 1$  (červená křivka v Obrázku 2), čímž získáváme Nashovu rovnováhu  $(C, C)$  (odpovídá  $(Venku, Venku)$  v Tabulce 4).

Obrázek 2: Reakční funkce pro Plnou spolupráci



### 2.3.3 Lov jelena

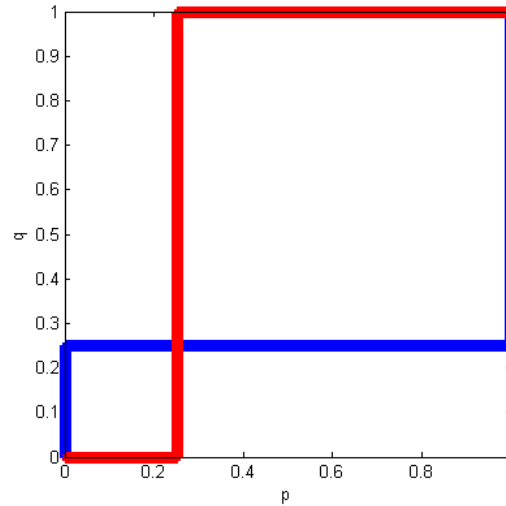
Lov jelena je popsán vzorovou situací, kdy jsou dva myslivci na lovu. Pokud chtějí zastřelit jelena, musí na něj vystřelit oba. Na zastřelení zajíce stačí pouze jeden, ale získá tak menší trofej. Zde myslivci volí ze dvou strategií {Jelen, Zajíc}. Tuto hru popisuje kombinace užitek  $a > c > d > b$ , tedy skolení jelena přináší nejvyšší užitek. Pokud skolil zajíce jen jeden, je to pro něj větší „výhra“, než pokud mají úlovek oba.

Tabulka 5: Lov jelena

		Myslivec 2	
		Jelen	Zajíc
Myslivec 1	Jelen	5, 5	0, 2
	Zajíc	2, 0	1, 1

Strategie *Jelen* vlastně popisuje spolupráci myslivců, zatímco strategie *Zajíc* situaci, kdy nejsou myslivci schopni se zkoordinovat a nespolupracují. Do Rovnice (1) vložme konkrétní příklad z Tabulky 5. Získáváme rovnici  $\pi_1(p, q) = p(4q - 1) + q + 1$ . Pokud  $q^* = \frac{1}{4}$ , na hodnotě  $p$  nezáleží, neboť bude výraz  $(4q - 1)$  nulový. Pokud  $q^* > \frac{1}{4}$ , je pro hráče  $H_1$  nejlepší zvolit  $p = 1$  a pokud  $q^* < \frac{1}{4}$ , tento hráč volí  $p = 0$  (modrá křivka). Obdobně to platí i pro hráče  $H_2$  a pravděpodobnost  $q$  (červená křivka).

Obrázek 3: Reakční funkce pro Lov jelena



Z tohoto příkladu získáváme dvě čisté NR  $(C, C)$  (tedy  $(Jelen, Jelen)$  z Tabulky 5) a  $(D, D)$  (tedy  $(Zajíc, Zajíc)$  z Tabulky 5) a jednu smíšenou NR  $(\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{d-b}{a-b-c+d})$  (konkrétně  $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ ), tedy situaci, kdy budou oba myslivci střílet na jelena s pravděpodobností  $\frac{1}{4}$ .

### 2.3.4 Jestřábi a holubice

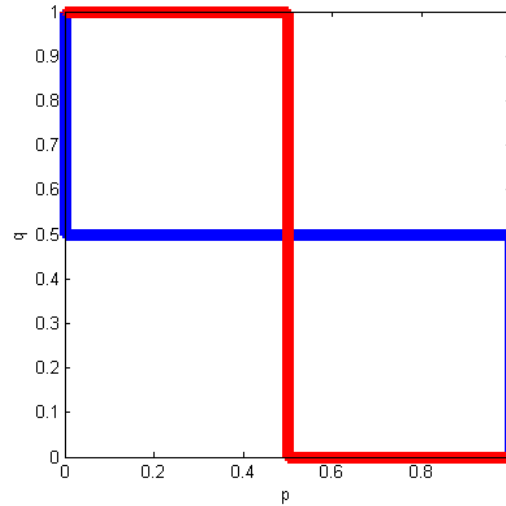
Jestřábi a holubice je hra s kombinací užitek  $c > a > b > d$  a ve vzorovém příkladu řeší agresivitu (jestřábi) a mírumilovnost (holubice). Mějme situaci, kde si dva lvi mají rozdělit kořist. Budou-li spolupracovat, získají oba půl kořisti. Pokud se o kořist poperou, budou zranění. Pokud jeden ustoupí, druhý si sice ponechá celou kořist, ale nedojde ke zranění. Lvi tak mají dvě možnosti konání, a to {Rozdělit se, Poprat se}.

Tabulka 6: Jestřábi a holubice

		Lev 2	
		Rozdělit se	Poprat se
Lev 1	Rozdělit se	1, 1	0, 2
	Poprat se	2, 0	-1, -1

Rozdělení se je vlastně spolupráce, zatímco když se lvi poperou, značí to nespolupráci. Do Rovnice (1) vložme konkrétní příklad z Tabulky 6. Získáváme rovnici  $\pi_1(p, q) = p(-2q + 1) + 3q - 1$ . Pokud  $q^* = \frac{1}{2}$ , na hodnotě  $p$  nezáleží, neboť bude výraz  $(-2q + 1)$  nulový. Pokud  $q^* > \frac{1}{2}$ , pak je výraz  $(-2q + 1)$  záporný a pro hráče  $H_1$  je nejlepší zvolit  $p = 0$  a pokud  $q^* < \frac{1}{2}$ , tento hráč volí  $p = 1$ , neboť je výraz  $(-2q + 1)$  kladný (modrá křivka). Obdobně to platí i pro hráče  $H_2$  a pravděpodobnost  $q$  (červená křivka).

Obrázek 4: Reakční funkce pro Jestřábi a holubice



Z tohoto příkladu získáváme dvě čisté NR  $(C, D)$  (tzn. *Rozdělit se, Poprat se*) v Tabulce 6) a  $(D, C)$  (tzn. *Poprat se, Rozdělit se*) v Tabulce 6) a jednu smíšenou NR  $(\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{d-b}{a-b-c+d})$  (konkrétně  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ), což je situace, kdy se lvi o kořist rozdělí s pravděpodobností  $\frac{1}{2}$ .

Shrneme-li, vypadají kombinace užitek kooperáčnických her a struktura jejich NR takto:

1. Věžňovo dilema se vzájemnými vztahy užitek  $c > a > d > b$  a NR  $(D, D)$ ,
2. Plná spolupráce s  $a > c > b > d$  a NR  $(C, C)$ ,
3. Lov jelena s  $a > c > d > b$ , čistými NR  $(C, C), (D, D)$  a smíšenou NR  $(\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{d-b}{a-b-c+d})$ ,
4. Jestřábi a holubice s užitky  $c > a > b > d$ , čistými NR  $(C, C), (D, D)$  a smíšenou NR  $(\frac{d-b}{a-b-c+d}, \frac{d-b}{a-b-c+d})$ .

### 3 Evoluční hry

Evoluční hry jsou dalším typem her. Mají aplikaci v biologii a byly díky nim vysvětleny principy chování různých živočichů (a především jejich populací), jako je boj, kooperace, komunikace, či koexistence. Nemusí se jednat pouze o zvířata, ale také lidi (evoluční teorii využívají také ekonomové či politologové), buňky, geny, dokonce i viry. Ze světa zvířat je nám známý například společný lov či společné bránění teritoria. Spolupracují ale také nepřibuzné druhy živočichů, někdy se nemusí jednat o dobrovolnou spolupráci, ale o nátlak dominantního. Tímto se zabývá například Tim Clutton-Brock [1].

Nashova rovnováha, která byla definována již v Kapitole 2.2.1 je velice podobná tzv. *evolučně stabilní strategii* (často se používá také zkratka ESS), která bude v této kapitole vysvětlena.

#### 3.1 Evoluční teorie

Evoluce si pochopitelně žádá populaci s rozmnožujícími se jedinci. V evoluční teorii jsou velmi důležité tři pojmy, a to:

1. replikace,
2. mutace,
3. selekce.

Někteří jedinci, či lépe řečeno buňky a viry, se dokáží replikovat, vytvořit kopii sebe sama. Tímto způsobem se reprodukuje, ačkoliv i zde mohou nastat jisté odchylky, mutace. Mutace je změna genotypu, v názvosloví teorie her se jedná o změnu strategie jedním hráčem. Selekcce (výběr) je důležitá, když spolu dva jedinci bojují, neboť se tak ukáže, který z jedinců má větší schopnost přežít (užitek), zvítězí nad soupeřem a tím se zachová i jeho „silnější“ geny (evoluční strategie). K matematickým výpočtům a znázornění těchto tří termínů se často používají diferenciální rovnice, které jsou v biologii klíčové. Právě selekce, kdy populaci rozdělíme na dvě části, kde každá část populace hraje jinou strategii, ale také mutace, neboť tito hráči budou moci při určitých pravidlech měnit své strategie, budou v této práci využity [8, str. 4].

Zakladateli evolučních her jsou John von Neumann a Oskar Morgenstern. Teorii her přinesl do evoluční biologie John Maynard Smith, který rovněž přišel s důležitým konceptem, evolučně stabilní strategií [8, str. 45].

V evolučních hrách nemají hráči konstantní užitek - ten se mění spolu s tím, jak se mění četnost různých fenotypů v populaci, užitek je tedy závislý na frekvenci [8, str. 45]. Oproti statickým hrám zde hráči mění své strategie, vyvíjí se.

##### 3.1.1 Princip evolučních her

Chceme-li navrhnout deterministickou hru, využijeme následující pravidla:



1. všichni hráči jsou aktualizováni současně,
2. každý hráč převezme strategii s největším užitekem ze svého okolí [8, str. 146].

**Poznámka 1.** *Hráči z okolí budou v této práci označováni jako sousední hráči, sousední buňky, či sousedi.*

Uvažujme symetrickou hru se dvěma strategiemi  $S = \{A, B\}$ , vystačíme si tak pouze s užítkovou maticí znázorněnou v Tabulce 7.

Tabulka 7: Symetrická užítková matice ([8, str. 49])

	A	B
A	a	b
B	c	d

**Poznámka 2.** *Pro názornost - strategie, která je psána jako první značí strategii zkoumaného hráče, užitek hráče se strategií A, hrajícího proti hráči se strategií A je tak  $\pi(A, A) = a$ , na stejný způsob  $\pi(A, B) = b$ ,  $\pi(B, A) = c$  a  $\pi(B, B) = d$ .*

Jak již bylo zmíněno, pro evoluční hry je klíčová frekvence. Populaci rozdělíme na hráče hrající strategii A a hráče hrající strategii B. Jejich četnosti označíme jako  $x_A$  a  $x_B$ , přičemž se jedná o číslo z intervalu  $[0, 1]$ . Poté je užitek hráčů součtem užiteků vyplývajících ze strategií sousedů vynásoben jejich četností, tedy [8, str. 49]:

$$\begin{aligned}\pi_A &= ax_A + bx_B \\ \pi_B &= cx_A + dx_B.\end{aligned}\tag{2}$$

### 3.1.2 Stabilita rovnováh

V Kapitole 2.2.1 byla v Definicí 3 popsána Nashova rovnováha. V evolučních hrách však tento pojem nestačí. Jelikož se s časem mění frekvence hráčů s určitou strategií, snažíme se najít rovnováhu, která bude stabilní a změna strategie hráči nepřinese vyšší užitek. Definujme si další důležitý termín, *Evolučně stabilní strategie*. Pro ESS je nutné, aby byla hra symetrická.

**Definice 4.** *Strategie  $S_k$  je evolučně stabilní strategií pro všechna  $k \neq i$ , pokud:*

$$\begin{aligned}\pi(S_k, S_k) &> \pi(S_i, S_k), \text{ nebo} \\ \pi(S_k, S_k) &= \pi(S_i, S_k) \text{ a zároveň } \pi(S_k, S_i) > \pi(S_i, S_i)\end{aligned}$$

[8, str. 54]

Vektor  $\vec{x} = (x_A, x_B)$  představuje složení populace. Je patrné, že i kdyby populaci dělilo více strategií, suma všech prvků vektoru  $\vec{x}$  by se rovnala jedné. Označme užitek hráče hrajícího strategii A jako  $\pi_A(\vec{x})$  a užitek hráče hrajícího strategii B jako  $\pi_B(\vec{x})$ . Replikátorová dynamika poté může být zapsána jako:

$$\begin{aligned}\dot{x}_A &= x_A[\pi_A(\vec{x}) - \phi] \\ \dot{x}_B &= x_B[\pi_B(\vec{x}) - \phi],\end{aligned}\tag{3}$$

kde  $\phi$  je průměrný užitek, tedy  $\phi = x_A\pi_A(\vec{x}) + x_B\pi_B(\vec{x})$  [8, str. 47].

Vzhledem k tomu, že  $x_A + x_B = 1$ , můžeme  $x_A$  zapsat jako  $x$  a  $x_B$  jako  $(1 - x)$ . Předchozí soustavu rovnic lze tedy nahradit obyčejnou diferenciální rovnicí I. řádu

$$\dot{x} = x(1 - x)[\pi_A(x) - \pi_B(x)].\tag{4}$$

Ze znalosti obyčejných diferenciálních rovnic vyplývá, že rovnováhy leží v bodech  $x = 0$ ,  $x = 1$  a v intervalu  $x \in (0, 1)$  za předpokladu, že  $\pi_A(x) = \pi_B(x)$ . Stabilita rovnováh je následující:

- rovnováha pro  $x = 0$  je stabilní, pokud  $\pi_A(0) < \pi_B(0)$ ,
- rovnováha pro  $x = 1$  je stabilní, pokud  $\pi_A(1) > \pi_B(1)$ ,
- rovnovážný bod  $x^*$  z intervalu  $(0, 1)$  je stabilní, pokud derivace funkcí  $\pi_A$  a  $\pi_B$  podle  $x$  splňují  $\pi'_A(x^*) < \pi'_B(x^*)$  [8, str. 48].

Odtud je zřejmý vztah ESS a replikátorové dynamiky. NR je v replikátorové dynamice pouze pevným bodem (opačně to platit nemusí - pevné body nemusí být NR), kdežto ESS je v replikátorové dynamice asymptoticky stabilním bodem. Pokud tedy dojde k vychýlení od pevného bodu, systém spěje k asymptoticky stabilnímu bodu, ke kterému se i při vychýlení vrátí.

Nyní se podíváme na užítkové funkce  $\pi_A$  a  $\pi_B$  z Rovnice (2), a určíme, v jakém pořadí musí užítky  $\{a, b, c, d\}$  být, aby byly rovnováhy stabilní.

### 3.1.3 Vztah mezi užítky a stabilitou rovnováh

Funkce  $\pi_A(x)$  a  $\pi_B(x)$  jsme již definovali. Nyní tedy můžeme do Rovnice (4) jejich definici dosadit. Rovnice pak vypadá následovně:

$$\dot{x} = [ax + b(1 - x) - (cx + d(1 - x))]x(1 - x).\tag{5}$$

Po úpravě a označení Rovnice (5)  $f(x)$  získáváme:

$$f(x) = [(a - b - c + d)x + b - d]x(1 - x).\tag{6}$$

Ze zdroje [8, str. 50] zjišťujeme, při jakých užitecích jsou rovnováhy stabilní. Tyto rovnováhy popíšeme přímo na jednotlivých kooperačních hrách s tím, že strategie A značí spolupráci a označíme

ji jako  $C$  a strategie  $B$  značí nespolupráci a bude tudíž označena jako  $D$ .

Z Rovnice (6) zjišťujeme, že klidové (rovnovážné) stavy  $x_e$  jsou  $x = 0$  (čistá nespolupráce),  $x = 1$  (čistá spolupráce) a  $x = \frac{d-b}{a-b-c+d}$  (smíšená strategie). Pokud Rovnici (6) zderivujeme podle  $x$ , získáme:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = 2x(a-b-c+d) - 3x^2(a-b-c+d) + b - 2bx - d + 2dx. \quad (7)$$

Do Rovnice (7) postupně vložíme klidové stavy.

$$\frac{\partial f(0_+)}{\partial x} = b - d \quad (8)$$

$$\frac{\partial f(1_-)}{\partial x} = -a + c \quad (9)$$

$$\frac{\partial f\left(\frac{d-b}{a-b-c+d}\right)}{\partial x} = -\frac{(a-c)(b-d)}{(a-b-c+d)} \quad (10)$$

**Poznámka 3.** U klidového stavu  $x = 0$  používáme derivaci zprava, u klidového stavu  $x = 1$  derivaci zleva. Vychází to již z daného intervalu  $x \in [0, 1]$ .

Pokud je derivace záporná, pak je klidový stav asymptoticky stabilní [6, str. 114]. Pro jakoukoliv hru o dvou strategiích je strategie evolučně stabilní strategií právě tehdy, když je korespondující pevný bod v replikátorové dynamice asymptoticky stabilní [11, str. 172]. Ze znalosti kombinací užitek jednotlivých kooperačních her z Kapitoly 2.3 vychází následující informace.

- Věžňovo dilema má ESS  $D$ ,  $C$  je nestabilní pevný bod replikátorové dynamiky,
- Plná spolupráce má ESS  $C$ ,  $D$  je nestabilní pevný bod replikátorové dynamiky,
- Lov jelena má ESS  $C$  a  $D$  (také se používá pojem „bistabilní“) a nestabilní smíšenou NR  $\frac{d-b}{a-b-c+d}$ ,
- Jestřábi a holubice má ESS  $\frac{d-b}{a-b-c+d}$  a nestabilní NR  $C$  a  $D$ .

### 3.2 Prostorové evoluční hry

V prostorových evolučních hrách jsou členové populace rozloženi ve dvou- či vícedimenzionálním poli, přičemž v každém tahu každý jednotlivec hraje hru se svým bezprostředním okolím, tedy s určitými hráči, jejichž počet i pozice závisí na definici daného okolí. V každém tahu hráči mění své strategie na strategii hráče z bezprostředního okolí s nejvyšším užitekem. Biologicky je tato změna vysvětlena tím, že hráči chtějí zvýšit svůj užitek a tím šanci na potomstvo. Tato pravidla určují celulární (buněčný) automat. Rakousko-uherský matematik a ekonom John von Neumann stál na počátku obojího – teorie her i celulárního automatu, přičemž se v teorii prostorových her tyto dva přístupy setkávají [8, str. 145].

V prostorových hrách je velmi zajímavé, že strategie, které jsou v evolučních hrách pro určité kooperační hry nestabilní, mohou zde být stabilními.

**Poznámka 4.** V úvodu kapitoly 3.2 byl stručně popsán princip prostorových evolučních her typu *game against the field* (hra proti poli, hra proti přírodě), neboť zde vlastně členové populace nemají protihráče, který by odhadoval jejich strategii a podle toho se snažil optimálně vybrat svou. Známe je však také typ *pairwise contest*, kde je aktuálnímu hráči z populace náhodně vybrán protihráč, takže užitek závisí pouze na kombinaci strategií těchto dvou hráčů. Tento typ prostorových evolučních her se statickým hrám podobá více, než hra proti přírodě. I proto je předmětem této práce právě typ *game against the field* [11, str. 141-142].

Nyní si výše popsaný model prostorových her (dále uváděný jako *Evoluční dynamika na mřížkách*) více popíšeme.

**Definice 5.** Binární dynamický systém na mřížce je dán hráči, kteří jsou definováni množinou  $h \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , kde  $N$  je velikost populace, a mají strategie  $\{S_1, S_2, S_3, \dots, S_N\}$ .

$A(t)$  typu  $mn$ ,  $A(t) : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$ ,  $A(t) = (a_{i,j})_{m,n}(t)$ , kde

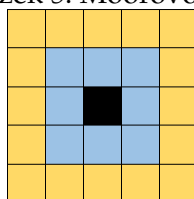
$$a_{i,j}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } S_{i,j} = C \\ 0, & \text{pokud } S_{i,j} = D \end{cases}$$

aktualizující své strategie s časem  $t \in \mathbb{N}_0$ , představuje populaci  $N$ , jejíž velikost je rovna  $N = mn$ .  $(i, j) \in \Omega = \{i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$ .

**Poznámka 5.** Hráč na pozici  $(i, j)$  bude dále v textu označován jako  $h_{i,j}$ .

Nowak ve své knize [8] popisuje Moorovo okolí, kde má jeden hráč vždy 8 sousedů (jako pohyb krále po šachovnici), přičemž je tak změna jeho strategie závislá celkem na 25 hráčích - na něm samotném (na Obrázku 5 znázorněn černě), na jeho 8 sousedech (znázornění modře) a na 16 sousedech jeho sousedů (znázornění žlutě).

Obrázek 5: Moorovo okolí



Čtvercová mřížka, která je zde použita, je modifikována tak, aby měl každý hráč stejný počet sousedů. Proto například každému z hráčů na pravém okraji přiřadíme za souseda odpovídajícího hráče na levém okraji mřížky apod. De facto vznikne geometrický útvar podobný toru.

Pro Moorovo okolí používáme následující metriku.

$\rho(h_{i,j}, h_{k,l}) = \sqrt{\max\{\min\{(i-k)^2, (m-|i-k|)^2\}, \min\{(j-l)^2, (n-|j-l|)^2\}\}}$  udává vzdálenost hráče  $h_{i,j}$  od hráče  $h_{k,l}$ , kde dvojice  $(i, j), (k, l) \in \Omega$ .

**Definice 6.**  $\rho_\lambda^{i,j}$  je množina hráčů se vzdáleností  $\lambda \in \mathbb{N}_0$  od hráče  $h_{i,j}$ . Množina  $\rho_{\leq \lambda}^{i,j} = \bigcup_{\mu \leq \lambda} \rho_\mu^{i,j}$ , kde  $\mu \in \mathbb{N}_0$  a  $\mu \leq \lambda$ , jedná se tedy o množinu hráčů se vzdáleností menší nebo rovno  $\lambda$  od hráče  $h_{i,j}$ .

**Poznámka 6.** Z Definice 6  $\rho_{\leq 1}^{i,j}$  znamená hráče, kteří jsou od  $h_{i,j}$  ve vzdálenosti 0 či 1, počítán je tak i samotný hráč  $h_{i,j}$ . Hráče, kteří jsou od  $h_{i,j}$  ve vzdálenosti 1, budeme označovat také jako patřící do „1-okolí“, analogicky to bude pro jiné vzdálenosti.

**Definice 7.** Evoluční dynamiku na mřížkách lze matematicky zapsat jako čtveřici  $(S, u, \pi, \varphi)$ :

1.  $S = \{C, D\} = \{1, 0\}$  jako množinu strategií všech hráčů,
2.  $u = \{a, b, c, d\}$  splňující  $\min\{a, c\} > \max\{b, d\}$  vyplývající z Kapitoly 2.3 jako množinu užiteků, kde  $u \subset \mathbb{R}^4$ ,
3.  $\pi(t) : S^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  jako užitkovou funkci v čase  $t \in \mathbb{N}_0$  definovanou jako
 
$$\begin{cases} \pi_{i,j}(t) = an_C + bn_D, & \text{pokud } a_{i,j}(t) = 1 \\ \pi_{i,j}(t) = cn_C + dn_D, & \text{pokud } a_{i,j}(t) = 0' \end{cases}$$
 kde  $n_C$  je počet Spolupracujících a  $n_D$  počet Nespolupracujících sousedů hráče  $h_{i,j}$ ,

4.  $\varphi : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$  taková, že

$$\varphi_{i,j}(A) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) > \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{nebo } (\max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) = \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{a zároveň } a_{i,j}(t) = 1) \\ 0, & \text{pokud } \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) < \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{nebo } (\max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) = \max_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{a zároveň } a_{i,j}(t) = 0) \end{cases}.$$

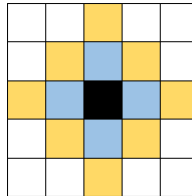
Hráč  $h_{i,j}$  tedy v příštím tahu v Moorově okolí volí strategii na základě 9 hráčů  $h_{k,l}$  patřících do množiny  $\rho_{\leq 1}^{i,j}$  a jejich užiteků  $\pi_{k,l}(t)$ .

Nowak ve své knize [8] zkoumá vývoj populace při hře Věžňovo dilema, kde řeší změny vývoje při konstantních užitech  $a, b$  a  $d$  a proměnlivém užitku  $c$ , v této hře často interpretovaném jako „dopustit se zrady“ na druhém vězni, zatímco on „zapíral“. Tímto zkoumáním je inspirována další část práce, kde bude použit jiný model aplikován na von Neumannovo okolí a zkoumat se

tentokrát budou užitky  $b$  a  $c$ .

Von Neumannovo okolí je struktura, kde má každý hráč právě 4 sousedy. Jedná se o sousední hráče nalevo, napravo, nahore a dole. Daný hráč je tak ovlivňován 13 hráči - sám sebou (na Obrázku 6 znázorněn černě), 4 bezprostředními sousedy (znázornění modře) a 8 sousedy svých sousedů (znázornění žlutě).

Obrázek 6: Von Neumannovo okolí



Toto okolí bude využito v modelu Součtová evoluční dynamika na mřížkách. Ve von Neumannově okolí se vzdálenost sousedů počítá pomocí modifikace *Manhattanské metriky* [2, str. 99], která je definována následovně:  $\rho(h_{i,j}, h_{k,l}) = \min\{|i - k|, m - |i - k|\} + \min\{|j - l|, n - |j - l|\}$  udává vzdálenost hráče  $h_{i,j}$  od hráče  $h_{k,l}$ , kde dvojice  $(i, j), (k, l) \in \Omega$ .

## 4 Součtová evoluční dynamika na mřížkách

V předchozích kapitolách byly představeny evoluční hry a poté prostorové hry, kde je velmi důležitá frekvence strategií sousedících hráčů. Byla zde zmíněna dvě okolí - Moorovo okolí a von Neumannovo okolí.

V této kapitole bude ke zkoumání vlivu spolupráce využito von Neumannovo okolí. Na upraveném modelu nazvaném *Součtová evoluční dynamika na mřížkách*, kde hráči nebudou měnit strategii na strategii souseda s největším užitekem (viz Kapitola 3.2), nýbrž se budou užítky Spolupracujících a Nespolutracujících v přímém okolí sčítat, si ukážeme, při jakých kombinacích užiteků  $b$  a  $c$  při konstantních užitech  $a$  a  $d$  dosáhne systém absolutní defekce či absolutní spolupráce za jedné pevně dané počáteční konfigurace. Takovýto systém bude simulován v softwaru Matlab, a poté bude zkoumáno, při jakých kooperačních hrách lze jedné strategie jako ESS dosáhnout.

### 4.1 Představení modelu

Opět zde bude využit binární dynamický systém na mřížce z Definice 5.

**Definice 8.** *Součtovou evoluční dynamiku na mřížkách jako binární dynamický systém definujeme čtveřicí  $(S, u, \pi, \varphi)$ :*

1.  $S = \{C, D\} = \{1, 0\}$  jako množinu strategií všech hráčů,
2.  $u = \{a, b, c, d\}$  splňující  $\min\{a, c\} > \max\{b, d\}$  vyplývající z kapitoly 2.3 jako množinu užiteků, kde  $u \subset \mathbb{R}^4$ ,
3.  $\pi(t) : S^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  jako užitkovou funkci v čase  $t \in \mathbb{N}_0$  definovanou jako
 
$$\begin{cases} \pi_{i,j}(t) = an_C + bn_D, & \text{pokud } a_{i,j}(t) = 1 \\ \pi_{i,j}(t) = cn_C + dn_D, & \text{pokud } a_{i,j}(t) = 0 \end{cases}$$
 , kde  $n_C$  je počet Spolupracujících a  $n_D$  počet Nespolutracujících sousedů hráče  $h_{i,j}$ ,
4.  $\varphi : \mathbb{R}^{m,n} \rightarrow \mathbb{R}^{m,n}$  taková, že
 
$$\varphi_{i,j}(A) = \begin{cases} 1, & \text{pokud } \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) > \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{nebo } (\sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) = \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{a zároveň } a_{i,j}(t) = 1) \\ 0, & \text{pokud } \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) < \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{nebo } \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=1} \pi_{k,l}(t) = \sum_{h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}(t)=0} \pi_{k,l}(t) \\ & \text{a zároveň } a_{i,j}(t) = 0) \end{cases}$$

Užitková matice je znázorněná v Tabulce 8.

Tabulka 8: Symetrická užítková matice kooperačních her ([8, p. 62])

	C	D
C	a	b
D	c	d

Pro naše potřeby si bez újmy na obecnosti zvolíme užitek  $a = 1$  a užitek  $d = 0$  (nespolupráce nic nevynáší), takže budou zkoumány pouze užítky  $b$  a  $c$ , tedy stavy, kdy se setká spolupráce s nespolutrací [4, str. 9]. To si můžeme dovolit díky uvažování užítkové funkce  $\pi(t)$  a zobrazení

$$\tilde{x} = \frac{x - d}{a - d}, \quad \text{pro } x = a, b, c, d. \quad (11)$$

Užítková matice je v Tabulce 9.

Tabulka 9: Užítková matice Součtové evoluční dynamiky na mřížkách

	C	D
C	1	b
D	c	0

Pro jednoduchost budeme nadále vždy předpokládat matici  $A(t)$  čtvercovou, kde  $m = n$  a  $A(t)$  je tak typu  $n$ . Zároveň předpokládejme, že  $n \geq 3$ .

Von Neumannovo okolí bylo popsáno v Kapitole 3.2, kde bylo zmíněno, že hráč mění svou strategii na základě 13 hráčů. Existuje tedy dohromady  $2^{13}$  možností, jak mohou být v tomto okolí hráči se dvěma strategiemi rozděleni. Bude však uvažován pouze symetrický systém, takže jich bude zkoumáno méně.

**Definice 9.** Konfiguraci označíme jako symetrickou, existuje-li dvojice  $(i, j)$  taková, že  $a_{i\pm k, j\pm l} = a_{i\mp k, j\mp l} = a_{i\pm l, j\pm k} = a_{i\mp l, j\mp k}$  pro všechna  $(k, l)$ . Počáteční matici  $A(0)$  mající takovouto symetrickou konfiguraci označme jako  $A^*(0)$ . Prvky matice  $A^*(t)$  označme jako  $a_{i,j}^*(t)$ .

**Poznámka 7.** Z Definice 8 je zřejmé, že v jakémkoliv čase  $t \in \mathbb{N}$  bude takováto konfigurace  $A^*(t)$  rovněž symetrická, neboť se jedná o deterministický dynamický systém  $\varphi$  a ze symetrické konfigurace tak musí vzniknout rovněž symetrická konfigurace.

Hráč měnící strategii se bude rozhodovat podle hráčů z množiny  $\rho_{\leq 1}^{i,j}$  - tedy svých sousedů a sebe. Zvlášť budou sečteny užítky Spolupracujících a Nespolutracujících, a který užitek bude vyšší, tu strategii hráč zvolí. Za předpokladu, že bude součet užitků obou strategií stejný, hráč si ponechává svou strategii. Pro jednoduchost jsou strategie jednotlivců znázorněny barevně - červeně jsou



znázornění Spolupracujících (v programu hodnota 1) a modře Nespolupracujících (v programu hodnota 0), přičemž se konfigurace s časem  $t \in \mathbb{N}_0$  mění. Bíle jsou znázorněni vždy pouze Spolupracující hráči, kteří nemohou měnit svou strategii (kromě absolutní spolupráce, kde svou strategii rovněž nezmění, ale ta je znázorněna červeně).

## 4.2 Invaze Nespolupracujících

V této části bude popsána invaze Nespolupracujících, kteří napadají Spolupracující. Bude zde zkoumáno, při jakých kombinacích užiteků  $b$  a  $c$  se bude nespolupráce šířit.

**Definice 10.** Jako šíření nespolupráce zde bude brána konfigurace, kdy se v čase  $(t + 1)$ , kde  $t \in \mathbb{N}_0$ , nespolupráce rozšíří do **celého**  $(\lambda + 1)$ -okolí hráče  $h_{i,j}$ , kde  $\lambda \in \mathbb{N}_0$ , přičemž v předchozí konfiguraci (v čase  $t$ ) jsou Nespolupracujícími hráči od hráče  $h_{i,j}$  až do  $\lambda$ -okolí hráče  $h_{i,j}$ , tedy  $h_{k,l} \in \rho_{\leq \lambda}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$ . Analogicky je bráno šíření spolupráce.

**Poznámka 8.** V textu dále budou použity dvojice  $(k, l)$  a  $(p, q) \in \Omega$ , kde značení  $h_{k,l}$  bude použito pro Nespolupracující a  $h_{p,q}$  pro Spolupracující hráče.

Začneme s první konfigurací  $A_1^*$  s jedním Nespolupracujícím  $h_{i,j}$ , tedy  $a_{i,j}^* = 0$  a  $h_{k,l} \in \rho_{\geq 1}^{i,j} : a_{k,l}^* = 1$ .

Obrázek 7: Konfigurace  $A_1^*$

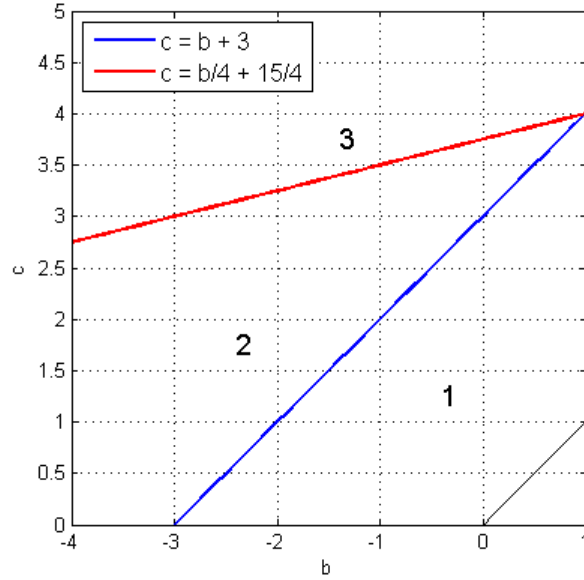
		4		
	4	b+3	4	
4	b+3	4c	b+3	4
	4	b+3	4	
		4		

V tomto případě mohou měnit strategii dva typy hráčů - hráč  $h_{i,j} : \pi_{i,j} = 4c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$ .

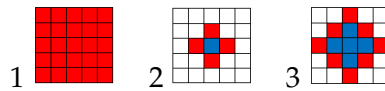
- pokud  $c < b + 3$ , poté  $a_{i,j}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$ , poté  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Na Obrázku 9 jsou tři možnosti, které mohou nastat, názorně ukázány.

Obrázek 8: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_1^*)$



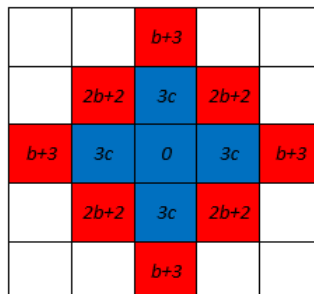
Obrázek 9:  $\varphi(A_1^*)$



1.  $c < b + 3$ ,
2.  $c \leq \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$  a zároveň  $c \geq b + 3$ ,
3.  $c > \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$ .

Pokud  $c > \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$ , získáme  $A_2^*$ , kde  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{ij} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{ij}$ .

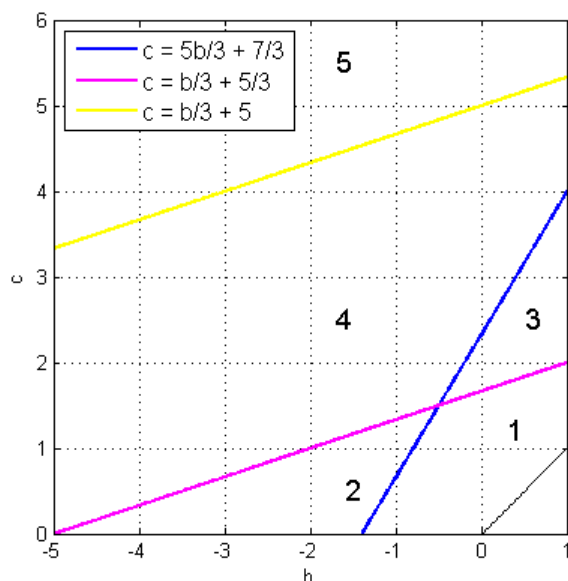
Obrázek 10: Konfigurace  $A_2^*$



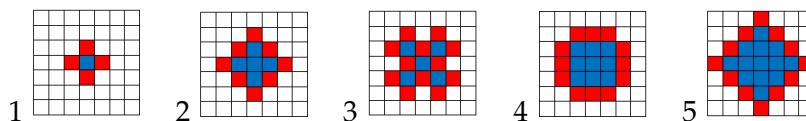
$h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$ , není tedy možné, aby  $h_{i,j}$  změnil strategii, tedy  $\varphi_{i,j}(A_2^*) = 0$ . Ke změně strategie může dojít u hráčů  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$ , a u hráčů  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} \in \{2b+2, b+3\}$ .

- pokud  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ , poté  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = b+3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 11: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_2^*)$



Obrázek 12:  $\varphi(A_2^*)$



1.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
2.  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
3.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
4.  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + 5$ ,
5.  $c > \frac{b}{3} + 5$ .

Pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$ , získáme  $A_3^*$ , kde  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$ .

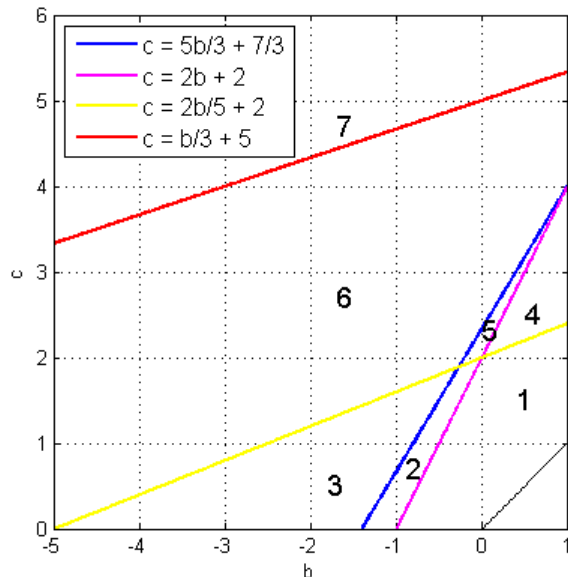
Obrázek 13: Konfigurace  $A_3^*$

			b+3			
		2b+2	3c	2b+2		
	2b+2	2c	0	2c	2b+2	
b+3	3c	0	0	0	3c	b+3
	2b+2	2c	0	2c	2b+2	
		2b+2	3c	2b+2		
			b+3			

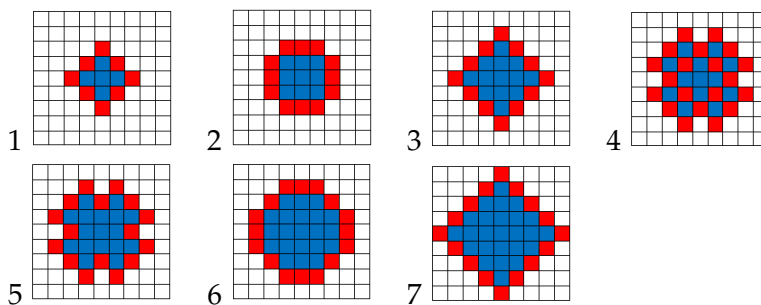
$h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} \in \{2c, 3c\}$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} \in \{2b+2, b+3\}$ .

- pokud  $c < 2b+2$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{2b}{5} + 2$  poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$  poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = b+3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 14: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_3^*)$



Obrázek 15:  $\varphi(A_3^*)$



1.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$ ,
2.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > 2b + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$ ,
3.  $c > \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$ ,
4.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ ,
5.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ ,
6.  $c > \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + 5$ ,
7.  $c > \frac{b}{3} + 5$ .

Pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$ , získáme  $A_4^*$ , kde  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 3}^{ij} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 3}^{ij}$ .

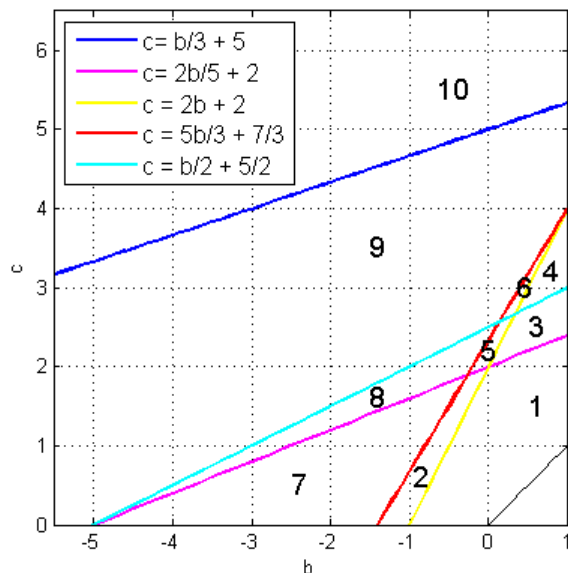
Obrázek 16: Konfigurace  $A_4^*$ 

				$b+3$				
			$2b+2$	$3c$	$2b+2$			
		$2b+2$	$2c$	$0$	$2c$	$2b+2$		
	$2b+2$	$2c$	$0$	$0$	$0$	$2c$	$2b+2$	
$b+3$	$3c$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$3c$	$b+3$
	$2b+2$	$2c$	$0$	$0$	$0$	$2c$	$2b+2$	
		$2b+2$	$2c$	$0$	$2c$	$2b+2$		
			$2b+2$	$3c$	$2b+2$			
				$b+3$				

$h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} \in \{2c, 3c\}$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{p,q} \in \{2b+2, b+3\}$ . Je nutné zmínit, že zde máme dva typy hráčů  $h_{p,q}$  s užitky  $2b+2$  – ti, kteří jsou na diagonále od  $h_{i,j}$  mají dva Nespolupracující sousedy s užitky  $2c$ , zatímco ostatní takoví hráči mají jednoho souseda s užitkem  $2c$  a jednoho souseda s užitkem  $3c$ .

- pokud  $c < 2b+2$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$ , kteří jsou na diagonále od  $h_{i,j}$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{2b}{5} + 2$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$ , kteří nejsou na diagonále od  $h_{i,j}$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = b+3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Možnosti, kam se může systém vyvíjet, jsou znázorněny na Obrázku 18.

Obrázek 17: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_4^*)$ 


Jelikož se pohybujeme v toru, za předpokladu  $c > \frac{b}{3} + 5$  v čase  $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  nastane poprvé situace, kdy bude mít **každý** Nespolupracující v konfiguraci ve 2-okolí více než tři Nespolupracující. Uvažujeme-li populaci, kde  $n$  je sudé číslo a v  $A^*(0)$  je pouze jeden Nespolupracující hráč, tedy  $A^*(0) = A_1^*$ , nastane tato situace v čase  $t = \frac{n}{2} - 1$  a bude se jednat o hráče z  $(\frac{n}{2} - 1)$ -okolí. Pokud  $n$  je liché číslo, bude se jednat o hráče z  $(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)$ -okolí a tato situace nastane v čase  $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ .

Nyní uvažujme možnost, kdy  $c > \frac{b}{3} + 5$  a zároveň jsme v čase  $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ . Je nezbytné rozdělit zkoumání na možnost, kdy  $n$  je sudé a možnost, kdy  $n$  je liché.

**Poznámka 9.** Bude zde zavedeno nové značení. Konfigurace  $A_{-\lambda,s}$  je konfigurace, kde  $n$  je sudé a  $\lambda \in \mathbb{N}$  je počet kroků od konce, tedy počet kroků k dosažení absolutní defekce. Na stejný způsob  $A_{-\lambda,l}$  je konfigurace s lichým  $n$ .

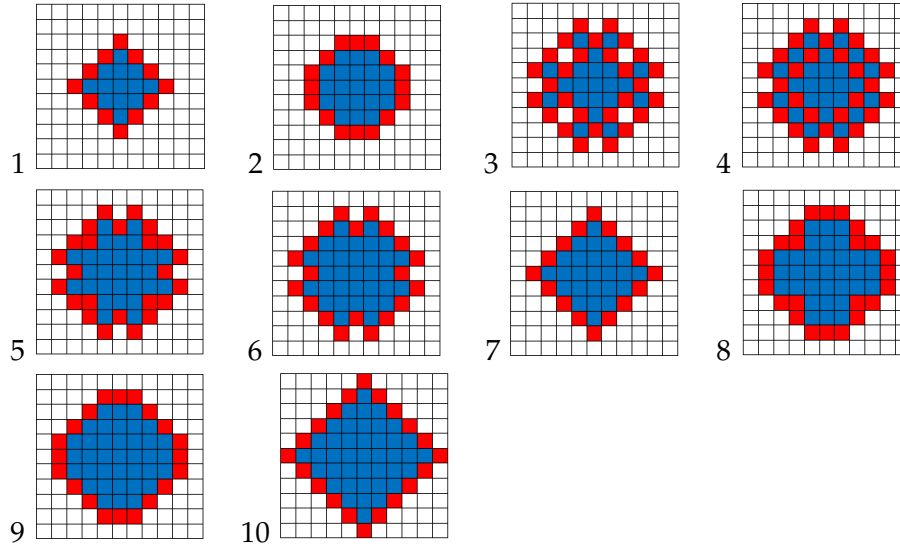
#### 4.2.1 Populace se sudým počtem hráčů

Pro  $n$  sudé uvažujme kvůli zobrazení bez újmy na obecnosti, že  $n = 6$ . Hráčem  $h_{i,j}$  označme jako hráče na pozici  $(3,3)$  (obecně  $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ ). Pro  $n = 6$  dojde k situaci, kde má každý Nespolupracující hráč ve svém 2-okolí více, než tři Nespolupracující v čase  $t = 2$ , začněme tedy rovnou s touto situací.

Mějme  $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$ .

$h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} \in \{2c, 3c\}$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$ . Je nutné zmínit, že tím, že je populace s  $n = 6$ , jsou zde dva typy hráčů  $h_{p,q}$  s užítky

Obrázek 18:  $\varphi(A_4^*)$



1.  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c < 2b + 2$ ,
2.  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ ,
3.  $c > \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
4.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
5.  $c > \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
6.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
7.  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ ,
8.  $c > \frac{2b}{5} + 2$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
9.  $c \leq \frac{b}{3} + 5$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ ,
10.  $c > \frac{b}{3} + 5$ .

Obrázek 19: Konfigurace  $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$  pro  $n = 6$

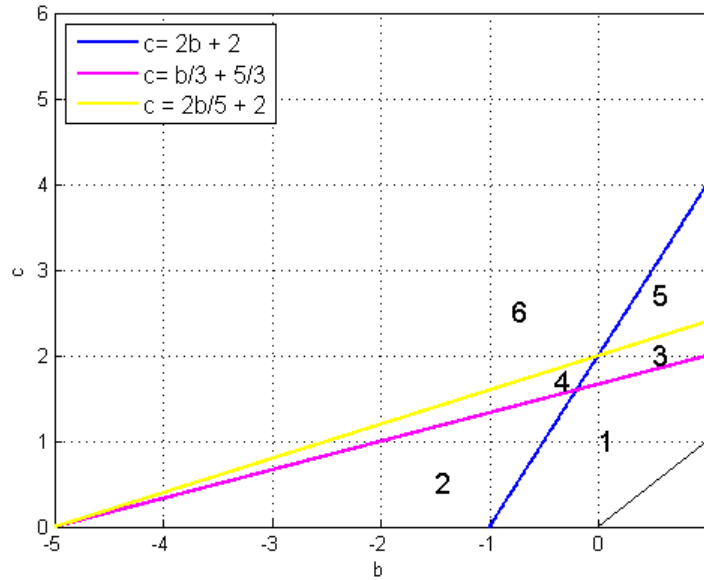
	$2b+2$	$3c$	$2b+2$		
$2b+2$	$2c$	$0$	$2c$	$2b+2$	
$3c$	$0$	$0$	$0$	$3c$	$2b+2$
$2b+2$	$2c$	$0$	$2c$	$2b+2$	
	$2b+2$	$3c$	$2b+2$		
		$2b+2$			

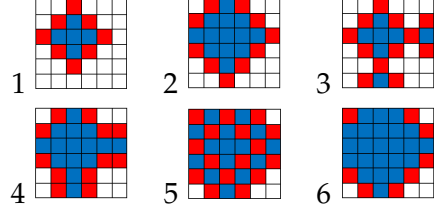


$2b + 2$  – ti, kteří mají Nespolupracující sousedy s užitekly  $2c$  a  $3c$  (a zkoumání byli již v  $A_3^*$ ) a ti, kteří měli v  $A_3^*$  užitek  $b + 3$ , ale nyní mají užitek  $2b + 2$  a dva Nespolupracující sousedy s užitekly  $3c$ .

- pokud  $c < 2b + 2$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c < 2b + 2$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{2b}{5} + 2$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$ , kde  $h_{k,l} \in \rho_1^{p,q} : \pi_{p,q} \in \{2c, 3c\}$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$ , kde  $h_{k,l} \in \rho_1^{p,q} : \pi_{p,q} = 3c$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 20: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*)$



Obrázek 21:  $\varphi(A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*)$ 


1.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
2.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
3.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$ ,
4.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{5} + 2$ ,
5.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ ,
6.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ .

Pokud  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ , získáme  $A_{-3,s}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 3}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 3}^{i,j}$ .

 Obrázek 22: Konfigurace  $A_{-3,s}^*$  pro  $n = 6$ 

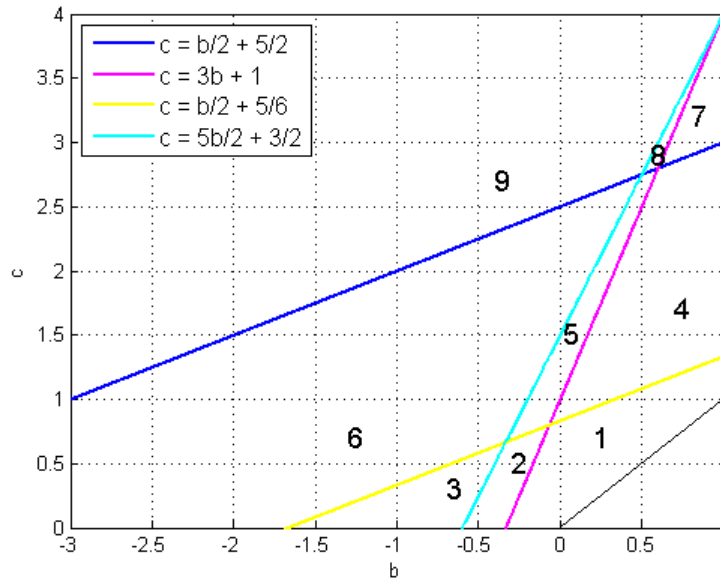
2b+2	2c	0	2c	2b+2	
2c	0	0	0	2c	3b+1
0	0	0	0	0	2c
2c	0	0	0	2c	3b+1
2b+2	2c	0	2c	2b+2	
	3b+1	2c	3b+1		

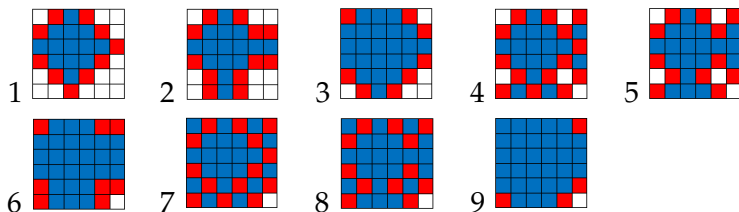
$h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{p,q} \in \{2b+2, 3b+1\}$ . Zde jsou dva typy hráčů s užítky  $2c$  – ti se dvěma Spolupracujícími sousedy s užítky  $2b+2$  a  $3b+1$  a ti s dvěma Spolupracujícími sousedy s užítky  $3b+1$ .

- pokud  $c < \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$ , kde  $h_{p,q} \in \rho_1^{k,l} : \pi_{p,q} \in \{2b+2, 3b+1\}$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c < 3b+1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$ , kde  $h_{p,q} \in \rho_1^{k,l} : \pi_{p,q} = 3b+1$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,

- pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j}$  :  $\pi_{p,q} = 2b + 2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j}$  :  $\pi_{p,q} = 3b + 1$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 23: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-3,s}^*)$



Obrázek 24:  $\varphi(A_{-3,s}^*)$ 


1.  $c < 3b + 1$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$ ,
2.  $c \geq 3b + 1$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$  a zároveň  $c < \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
3.  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
4.  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c < 3b + 1$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$ ,
5.  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$  a zároveň  $c < \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
6.  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{6}$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
7.  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c < 3b + 1$ ,
8.  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$  a zároveň  $c < \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
9.  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ .

Pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ , získáme  $A_{-2,s}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 4}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k, l) \in \rho_{\leq 4}^{i,j}$ .

 Obrázek 25: Konfigurace  $A_{-2,s}^*$  pro  $n = 6$ 

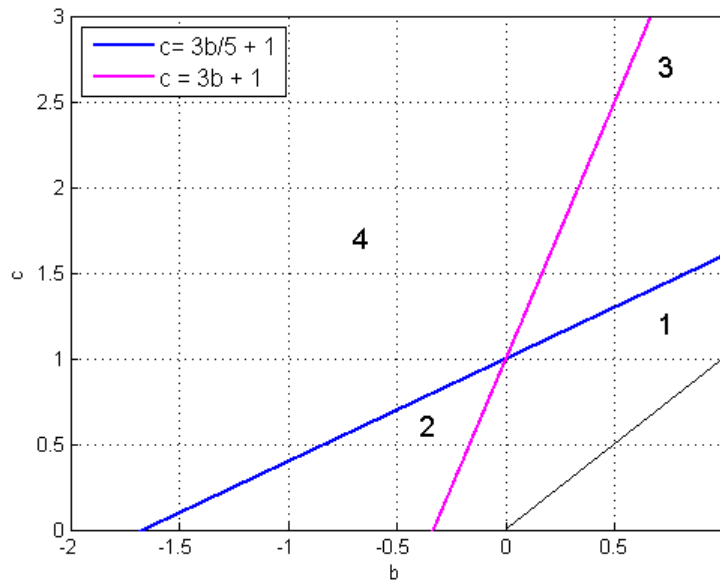
$2c$	$0$	$0$	$0$	$2c$	$3b+1$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$c$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$0$
$0$	$0$	$0$	$0$	$0$	$c$
$2c$	$0$	$0$	$0$	$2c$	$3b+1$
$3b+1$	$c$	$0$	$c$	$3b+1$	

$h_{k,l} \in \rho_{\leq 3}^{i,j}$  pro všechna  $(k, l) \in \rho_{\leq 3}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{k,l} \in \{c, 2c\}$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_5^{i,j} : \pi_{p,q} = 3b + 1$ .

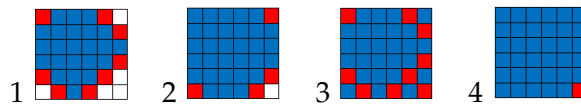
- pokud  $c < 3b + 1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{k,l} = c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,

- pokud  $c < 3b + 1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{3b}{5} + 1$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_5^{i,j} : \pi_{p,q} = 3b + 1$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 26: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-2,s}^*)$



Obrázek 27:  $\varphi(A_{-2,s}^*)$



1.  $c \leq \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c < 3b + 1$ ,
2.  $c \leq \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$ ,
3.  $c > \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c < 3b + 1$ ,
4.  $c > \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$ .

Pokud  $c > \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$ , získáme  $A_{-1,s}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 5}^{ij} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 5}^{ij}$ .

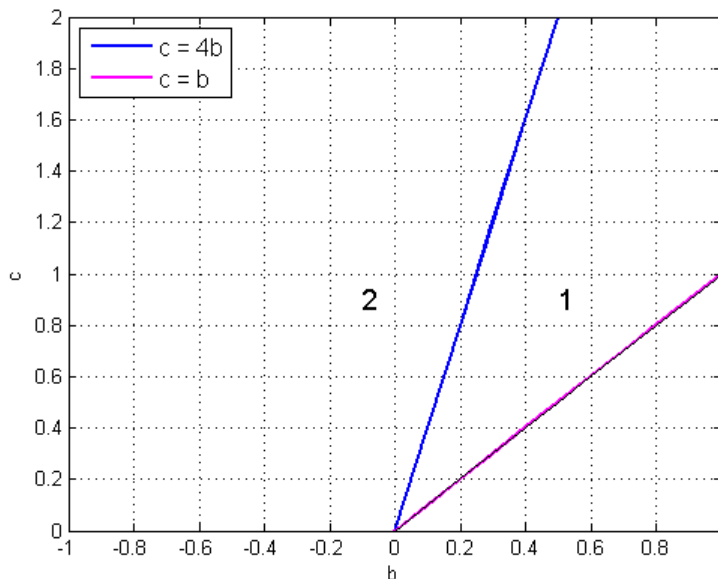
Obrázek 28: Konfigurace  $A_{-1,s}^*$  pro  $n = 6$

$o$	$o$	$o$	$o$	$o$	$c$
$o$	$o$	$o$	$o$	$o$	$o$
$o$	$o$	$o$	$o$	$o$	$o$
$o$	$o$	$o$	$o$	$o$	$o$
$o$	$o$	$o$	$o$	$o$	$c$
$c$	$o$	$o$	$o$	$c$	$4b$

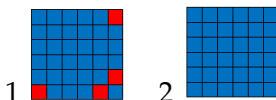
$h_{k,l} \in \rho_{\leq 4}^{ij}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 4}^{ij}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_5^{ij} : \pi_{k,l} = c$  a hráč  $h_{p,q} \in \rho_6^{ij} : \pi_{p,q} = 4b$ .

- pokud  $c < 4b$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_5^{ij} : \pi_{k,l} = c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > b$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_6^{ij} : \pi_{p,q} = 4b$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 29: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-1,s}^*)$



Obrázek 30:  $\varphi(A_{-1,s}^*)$



1.  $c < 4b$ ,
2.  $c \geq 4b$ .

**Definice 11.**  $\mathbb{1}$  je konfigurace nazývaná se **absolutní spolupráce**, kde každý hráč spolupracuje, tedy  $a_{i,j}^* = 1$  pro všechna  $i, j \in \Omega$ .

**Definice 12.**  $\mathbb{0}$  je konfigurace nazývaná se **absolutní defekce**, kde je každý hráč Nespolutracující, tedy  $a_{i,j}^* = 0$  pro všechna  $i, j \in \Omega$ .

Z  $A_{-1,s}^*$  vychází následující lemma.

**Lemma 1.** *Jeden Spolutracující v populaci Nespolutracujících nepřezije a vznikne absolutní defekce, tedy je-li v populaci v čase  $t$  právě jeden Spolutracující,  $A^*(t+1) = \mathbb{0}$ .*

*Důkaz.* Důkaz vyplývá z  $A_{-1,s}^*$ . Z Obrázku 30 je vidět, že Spolutracující hráč  $h_{p,q} \in \rho_6^{i,j} : \pi_{p,q} = 4b$ . Pro všechna  $h_{k,l} \in \rho_1^{p,q} : \pi_{k,l} = c$ . Spolutracující tedy nezmění strategii, za předpokladu, že  $4c \leq 4b$ , tudíž  $c \leq b$ . Z Kapitoly 2.3 víme, že  $c > b$ , tudíž tato situace nikdy nenastane a Spolutracující vždy změní svou strategii.  $\square$

#### 4.2.2 Populace s lichým počtem hráčů

Nyní uvažujme  $n$  liché, opět bez újmy na obecnosti uvažujme konkrétní  $n = 5$ . Hráčem  $h_{i,j}$  označme hráče na pozici  $(3,3)$  (obecně  $(\lceil \frac{n}{2} \rceil, \lceil \frac{n}{2} \rceil)$ ). Začneme opět v čase, kdy má každý Nespolutracující hráč ve 2-okolí více než tři Nespolutracující, tedy kdy  $t = 2$ . Mějme  $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$ .

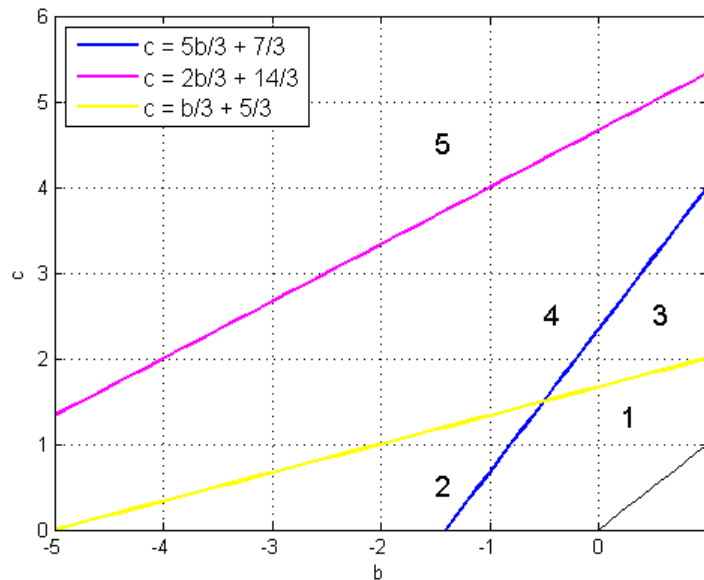
Obrázek 31: Konfigurace  $A_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l}^*$  pro  $n = 5$

		$b+3$		
	$2b+2$	$3c$	$2b+2$	
$b+3$	$3c$	$0$	$3c$	$b+3$
	$2b+2$	$3c$	$2b+2$	
		$b+3$		

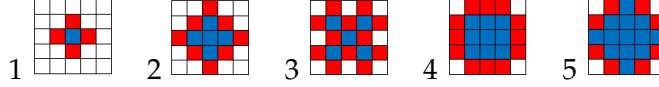
Tato konfigurace je velmi podobná konfiguraci  $A_2^*$ , ale Spolupracující hráči s užitky  $b + 3$  zde mění své strategie při jiných kombinacích užitku  $b$  a užitku  $c$ . Hráč  $h_{i,j}$  nebude měnit svou strategii, neboť má kolem sebe pouze Nespolupracující. Měnit užitky budou hráči  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} \in \{2b + 2, b + 3\}$ .

- pokud  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_5^{i,j} : \pi_{k,l} = 3c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_6^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ ,
- pokud  $c > \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_6^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 32: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l}^*)$





Obrázek 33:  $\varphi(A_{-\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, l}^*)$ 


1.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
2.  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
3.  $c < \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
4.  $c \geq \frac{5b}{3} + \frac{7}{3}$  a zároveň  $c \leq \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$  a zároveň  $c > \frac{b}{3} + \frac{5}{3}$ ,
5.  $c > \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$ .

Pokud  $c > \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$ , získáme  $A_{-2,l}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{ij} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{ij}$ .

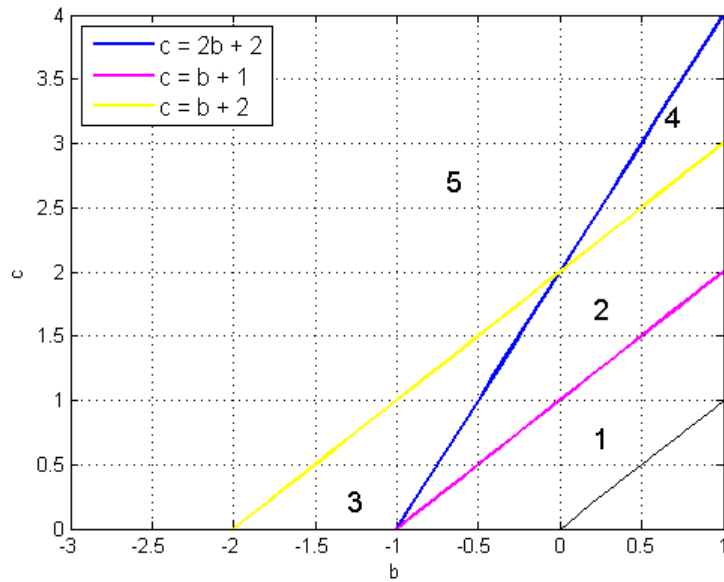
 Obrázek 34: Konfigurace  $A_{-2,l}^*$  pro  $n = 5$ 

	2b+2	2c	2b+2	
2b+2	2c	0	2c	2b+2
2c	0	0	0	2c
2b+2	2c	0	2c	2b+2
	2b+2	2c	2b+2	

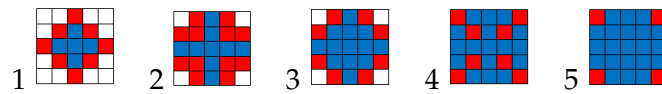
$h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{ij}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{ij}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_2^{ij} : \pi_{k,l} = 2c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_3^{ij} : \pi_{p,q} = 2b+2$ . Jsou zde dva typy Nespolupracujících s užitek 2c - jedni mají Nespolupracující sousedy s užitek 0 a 2c, druzí mají dva Nespolupracující sousedy s užitek 0.

- pokud  $c < 2b+2$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{ij} : \pi_{k,l} = 2c$  s jedním Nespolupracujícím sousedem s užitek 2c platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c < b+1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{ij} : \pi_{k,l} = 2c$  se dvěma Nespolupracujícími sousedy s užitek 0 platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > b+2$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{ij} : \pi_{p,q} = 2b+2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 35: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-2,l}^*)$



Obrázek 36:  $\varphi(A_{-2,l}^*)$



1.  $c < b + 1$ ,
2.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c \geq b + 1$  a zároveň  $c \leq b + 2$ ,
3.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c \leq b + 2$ ,
4.  $c < 2b + 2$  a zároveň  $c > b + 2$ ,
5.  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > b + 2$ .

Pokud  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > b + 2$ , získáme  $A_{-1,l}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 3}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k, l) \in \rho_{\leq 3}^{i,j}$ .

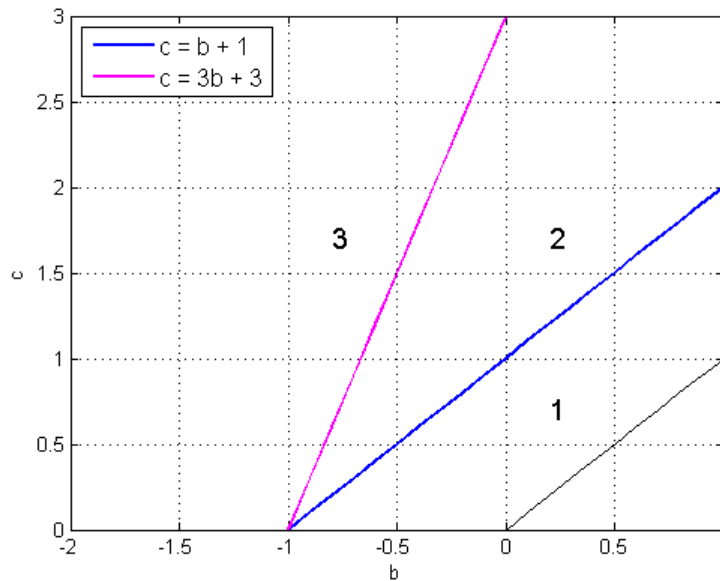
Obrázek 37: Konfigurace  $A_{-1,l}^*$  pro  $n = 5$

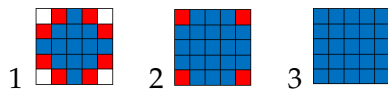
2b+2	c	0	c	2b+2
c	0	0	0	c
0	0	0	0	0
c	0	0	0	c
2b+2	c	0	c	2b+2

$h_{k,l} \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 2}^{i,j}$  nebudou měnit své strategie, neboť ve svém okolí nemají Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} = c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$ .

- pokud  $c < b+1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{k,l} = c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c > 3b+3$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_4^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b+2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t+1) = 0$ .

Obrázek 38: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-1,l}^*)$



Obrázek 39:  $\varphi(A_{-1,l}^*)$ 

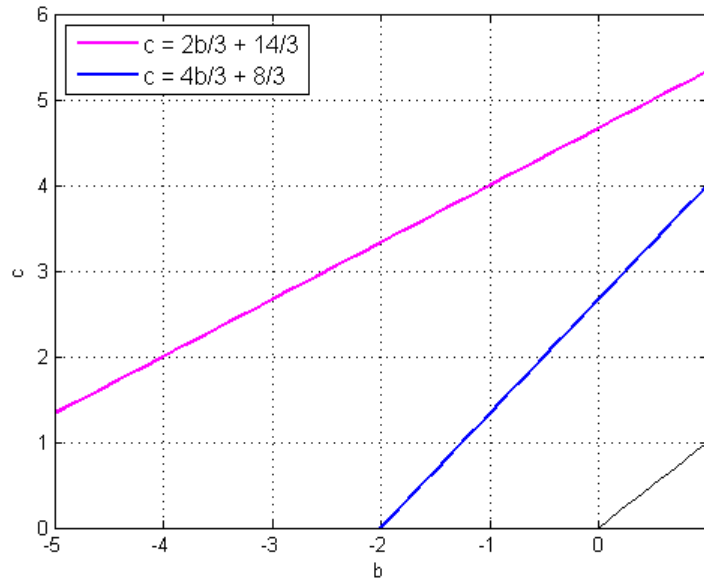
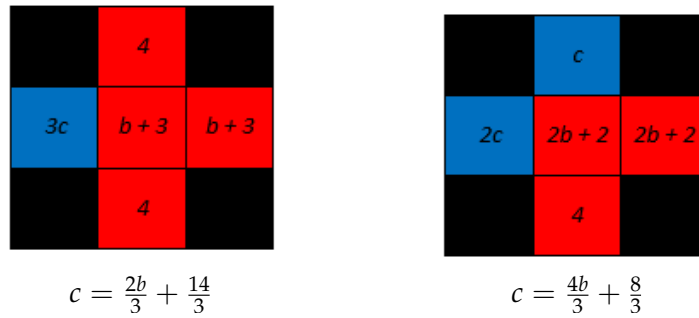
1.  $c < b + 1$ ,
2.  $c \geq b + 1$  a zároveň  $c \leq 3b + 3$ ,
3.  $c > 3b + 3$ .

**Poznámka 10.** Jako příklad pro liché  $n$  jsme použili  $n = 5$ . Pokud bychom použili vyšší liché číslo, v  $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ -okolí hráče  $h_{i,j}$  získáme navíc Spolupracující s užítky  $2b + 2$  a dvěma Nespolutracujícími sousedy s užítky  $2c$ . Tato možnost ale byla zkoumána v konfiguraci  $A_4^*$ , proto bylo při zkoumání populací s lichým  $n$  využita populace s  $n = 5$ .

Dále v čase  $t = \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$  získáme hráče s užítkem  $2b + 2$  se dvěma Spolupracujícími sousedy s užítky 4 a dvěma Nespolutracujícími sousedy s užítky  $2c$  a  $3c$ , tuto možnost jsme ale uvažovali už u konfigurace  $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$  (Obrázek 19).

Při vyšším lichém  $n$  ale navíc vznikají i hráči s užítky  $2b + 2$ , kteří mají jednoho Spolupracujícího souseda s užítkem  $2b + 2$ , jednoho Spolupracujícího souseda s užítkem 4, jednoho Nespolutracujícího souseda s užítkem  $2c$  a jednoho Nespolutracujícího souseda s užítkem  $c$ . Vzniká tak přímka  $c = \frac{4b}{3} + \frac{8}{3}$ , která může vytvořit další oblasti. Tuto možnost ale není třeba zkoumat, neboť v jednotlivých konfiguracích s lichým  $n$  je „silnější“ už například přímka  $c = \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$ . Porovnáme-li tyto dvě situace, v obou případech Spolupracujícího ovlivňují Nespolutracující se součtem užiteků  $3c$ . V případě, kde je jeden Nespolutracující s užítkem  $3c$ , porovnává svůj užitek se součtem užiteků Spolupracujících  $2b + 14$ , tam, kde jsou Nespolutracující dva, ale součet jejich užiteků je  $3c$ , porovnávají tento užitek s užítkem  $4b + 8$ .

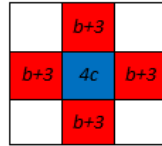
Obrázek 40: Silnější přímka



Pro sudé  $n$  je mezi konfigurací  $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$  a  $A_{-3,s}^*$  a pro liché  $n$  mezi konfiguracemi  $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$  a  $A_{-2,s}^*$  vždy  $k$  konfigurací navíc, kde pro sudé  $n = \{6, 8, 10, \dots\}$  je  $k = \{0, 1, 2, \dots\}$  a pro liché  $n = \{5, 7, 9, \dots\}$  je  $k = \{0, 1, 2, \dots\}$ . Odtud však neplynou žádné hranice, které by nebyly popsány již ve výše zmíněných konfiguracích či Poznámce 10. Jiné možnosti nemohou nastat.

Jako poslední příklad použijme  $n = 3$  a konfiguraci  $A_{-2,3}^*$  kde je v populaci jeden Nespolupracující hráč  $h_{i,j}$  a  $h_{p,q} \in \rho_1^{i,j} : a_{p,q}^*(t) = 1$  pro všechna  $(p, q) \in \rho_1^{i,j}$ . Jedná se pouze o příklad s  $n = 3$ , proto je zde poněkud jiné značení. Rozdíl oproti  $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$  je ten, že Spolupracující hráči s užítky  $b+3$  mají Nespolupracujícího souseda s užítkem  $4c$  a nikoliv  $3c$ , jako je tomu u konfigurace  $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$ .

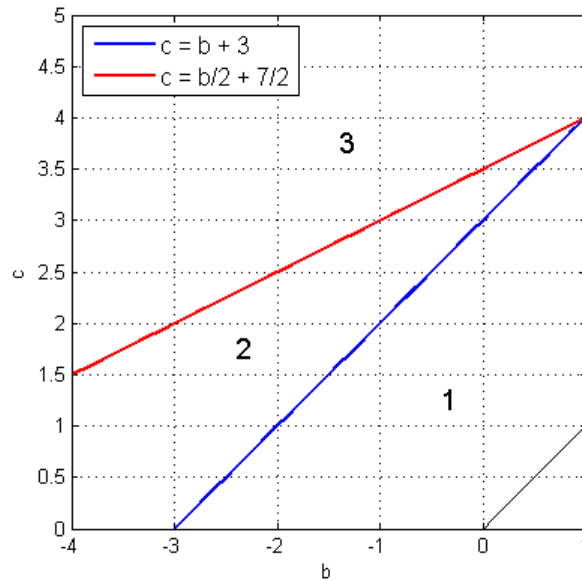
Obrázek 41: Konfigurace  $A_{-2,3}^*$



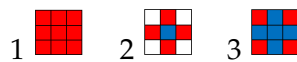
V tomto případě mohou měnit strategii dva typy hráčů – hráč  $h_{i,j} : \pi_{i,j} = 4c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$ .

- pokud  $c < b + 3$ , poté  $a_{i,j}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{7}{2}$ , poté  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 42: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-2,3}^*)$



Obrázek 43:  $\varphi(A_{-2,3}^*)$



1.  $c < b + 3$ ,
2.  $c \leq \frac{b}{2} + \frac{7}{2}$  a zároveň  $c \geq b + 3$ ,
3.  $c > \frac{b}{2} + \frac{7}{2}$ .

Pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{7}{2}$ , získáme  $A_{-1,3}^*$  s  $h_{k,l} \in \rho_{\leq 1}^{i,j} : a_{k,l}^*(t) = 0$  pro všechna  $(k,l) \in \rho_{\leq 1}^{i,j}$ .

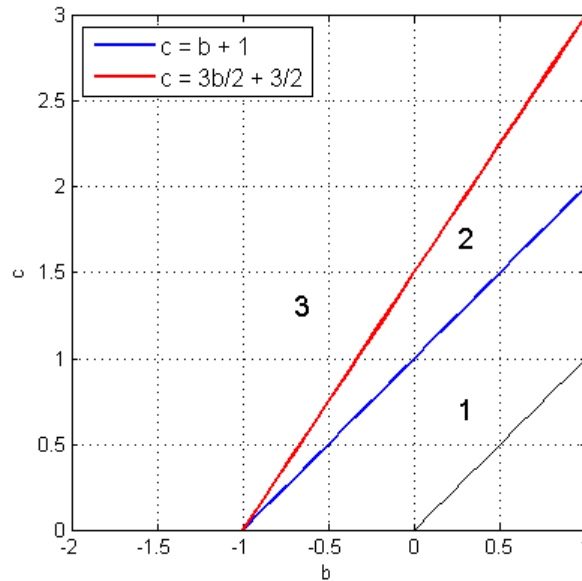
Obrázek 44: Konfigurace  $A_{-1,3}^*$

2b+2	2c	2b+2
2c	0	2c
2b+2	2c	2b+2

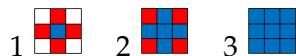
Hráč  $h_{i,j}$  nebude měnit svou strategii, neboť ve svém okolí nemá Spolupracující. Měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  a hráči  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$ .

- pokud  $c < b + 1$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t + 1) = 1$ ,
- pokud  $c > \frac{3b}{2} + \frac{3}{2}$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = 2b + 2$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 45: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_{-1,3}^*)$



Obrázek 46:  $\varphi(A_{-1,3}^*)$



1.  $c < b + 1$ ,
2.  $c \geq b + 1$  a zároveň  $c \leq \frac{3b}{2} + \frac{3}{2}$ ,
3.  $c > \frac{3b}{2} + \frac{3}{2}$ .

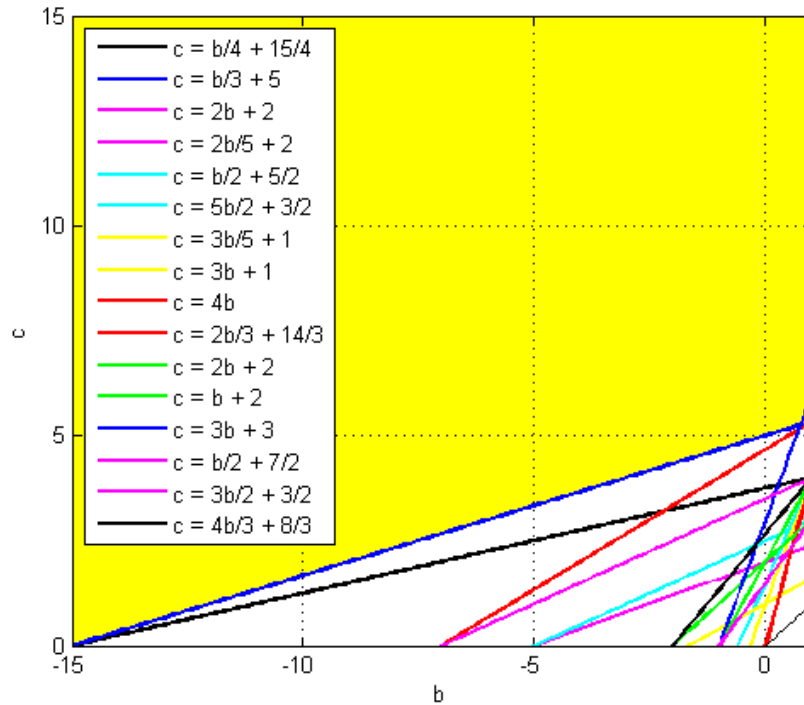
Z poznatků výše vyplývá následující lemma.

**Lemma 2.** *Pokud platí  $c > \frac{b}{3} + 5$  a zároveň  $c > 3b + 3$  a v symetrické čtvercové počáteční konfiguraci  $A^*(0)$  je právě jeden Nespolupracující, dojde k absolutní defekci, tj. existuje  $t_0 \in \mathbb{N}$  tak, že pro všechna  $t > t_0$   $A^*(t) = \mathbf{O}$ .*

*Důkaz.* Pro konfiguraci  $A_1^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$ , pro  $A_2^*$ ,  $A_3^*$  a  $A_4^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{b}{3} + 5$ . U  $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$  se defekce šíří, pokud  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > \frac{2b}{5} + 2$ , u konfigurace  $A_{-3,s}^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{5}{2}$  a zároveň  $c \geq \frac{5b}{2} + \frac{3}{2}$ , u  $A_{-2,s}^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{3b}{5} + 1$  a zároveň  $c \geq 3b + 1$ , u  $A_{-1,s}^*$  se defekce šíří, pokud  $c \geq 4b$ . U konfigurace  $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{2b}{3} + \frac{14}{3}$ , u  $A_{-2,l}^*$  se defekce šíří, pokud  $c \geq 2b + 2$  a zároveň  $c > b + 2$  a u konfigurace  $A_{-1,l}^*$  se defekce šíří, pokud  $c > 3b + 3$ . Nakonec pro konfiguraci  $A_{-2,3}^*$  se defekce šíří, pokud  $c > \frac{b}{2} + \frac{7}{2}$  a pro konfiguraci  $A_{-1,3}^*$  dojde k šíření při  $c > \frac{3b}{2} + \frac{3}{2}$ . Najdeme-li průnik těchto oblastí, získáme finální oblast  $c > \frac{b}{3} + 5$  a zároveň  $c > 3b + 3$ .  $\square$



Obrázek 47: Invaze Nespolutracujících



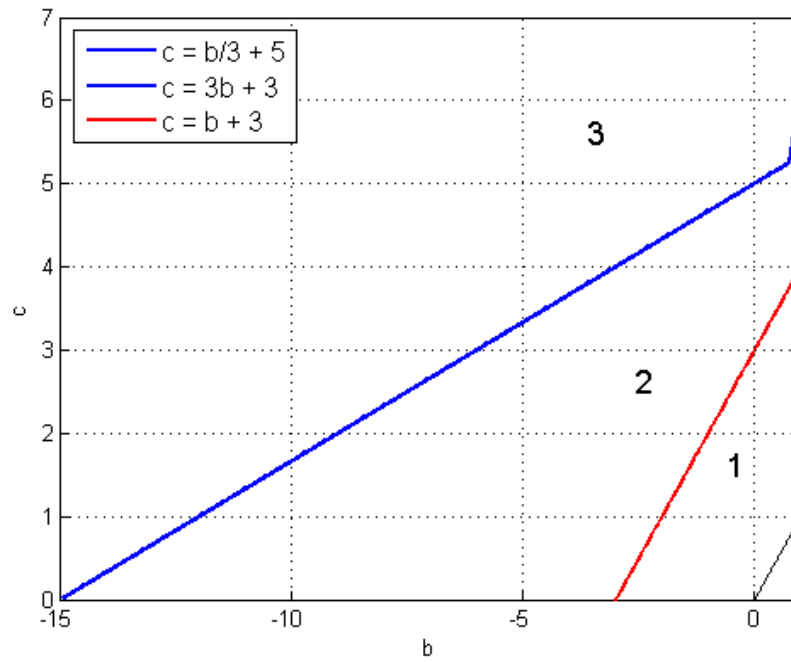
**Poznámka 11.** Z důkazu Lemma 2 vyplývá, že k absolutní defekci jistě dojde pro konfigurace se sudým  $n$  při užitečích  $c > \frac{b}{3} + 5$  v čase  $t = n$ . Pro konfigurace s lichým  $n$  při užitečích  $c > \frac{b}{3} + 5$  a zároveň  $c > 3b + 3$  dojde k absolutní defekci v čase  $t = n - 1$ .

**Poznámka 12.** Vzhledem k tomu, že jako šíření defekce bylo bráno rozšíření do celého okolí viz Definice 10, je Lemma 2 postačující podmínkou absolutní defekce při jednom Nespolutracujícím, nikoliv podmínkou nutnou.

**Lemma 3.** Pokud  $c < b + 3$  a v symetrické počáteční konfiguraci  $A^*(0)$ , kde symetrie je dána z Definice 9 je jeden Nespolutracující, tento Nespolutracující zanikne, tj.  $\varphi(A^*(0)) = \mathbb{1}$ .

*Důkaz.* Důkaz vyplývá z konfigurací  $A_1^*$  a  $A_{-2,3}^*$ . Zde má Nespolutracující hráč  $h_{i,j}$  vždy 4 Spolutracující sousedy tak, že  $h_{p,q} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$ . Je tedy zřejmé, že pokud  $c < b + 3$ ,  $a_{i,j}^*(t + 1) = 1$ .  $\square$

Z Lemma 2 a 3 získáváme 3 oblasti. Oblast, kdy jeden Nespolutracující vždy zanikne (1), oblast, kdy jeden Nespolutracující vždy způsobí absolutní defekci populace (3) a oblast, kterou budeme dále simulačně zkoumat (2).

Obrázek 48: Tři oblasti - rozdílná dynamika  $\varphi(A_1^*)$ 

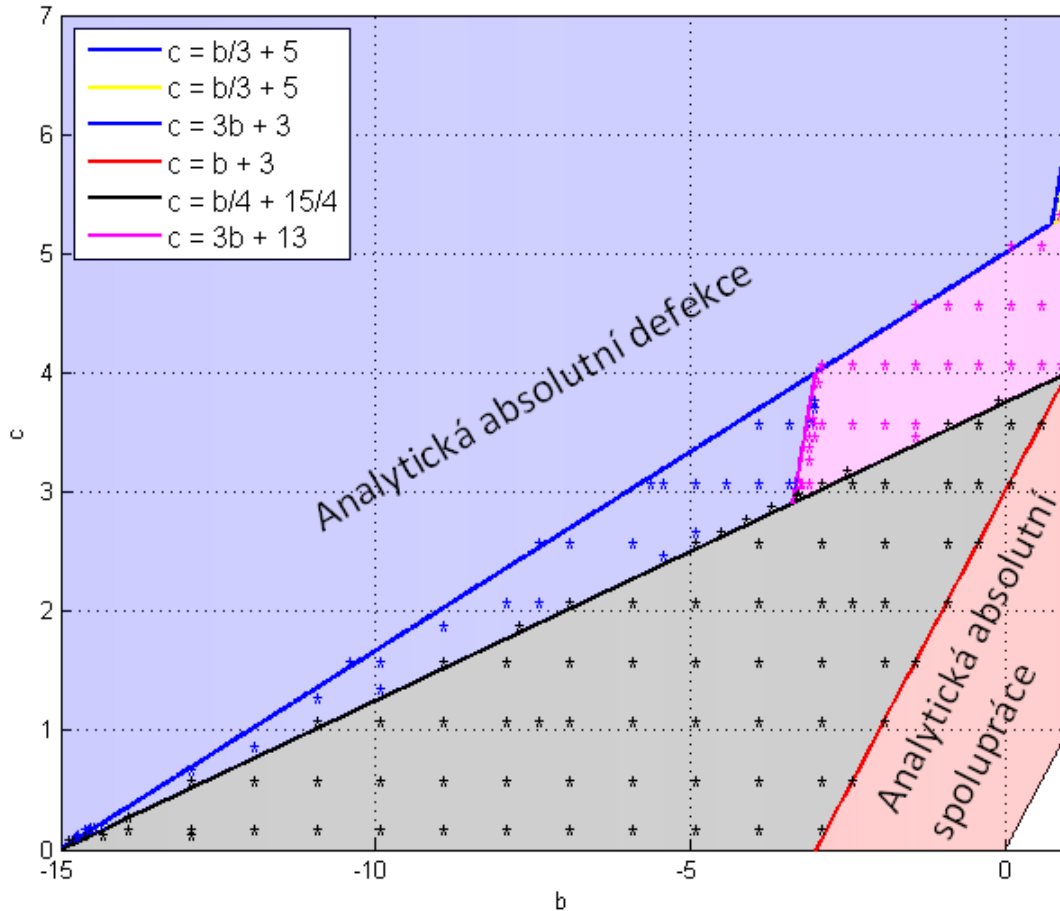
### 4.3 Koexistence Spolupracujících a Nespolupracujících

V předchozích kapitolách bylo analyticky spočteno, kdy je jeden Nespolupracující schopen ovlivnit populaci jinak Spolupracujících hráčů ke změně strategie. Stejně tak jsme se dozvěděli, kdy tento Nespolupracující změní svou strategii a začne spolupracovat. Tím jsme zjistili, co se se systémem děje ve dvou oblastech a nyní se budeme zabývat tou třetí.

Bylo by složité a náročné zkoumat analyticky všechny možné kombinace užitků při různých velikých populacích a konfiguracích. Proto budou tyto výpočty zrealizovány numericky za pomoci skriptu v Matlabu.

V oblasti 2 z Obrázku 48 byly zkoumány kombinace užitků  $b$  a  $c$  tak, že byla tato oblast nejprve rozdělena mřížkou a v jednotlivých menších oblastech byly voleny kombinace těchto užitků. Tyto užitky byly vkládány jako parametry do předem připraveného skriptu v softwaru Matlab, kde dalším parametrem bylo  $n$  zvoleno jako  $n = 11$  a také konfigurace  $A^*(0)$  jako matice řádu  $n$ , kde jeden Nespolupracující hráč byl na pozici  $(6, 6)$  (v tomto programu hodnota 0), ostatní hráči byli Spolupracující (hodnota 1). Za předpokladu, že  $A^*(t+1) = A^*(t)$ , byl tento program zastaven a bylo vyhodnoceno, jak tato „finální“ konfigurace vypadá.

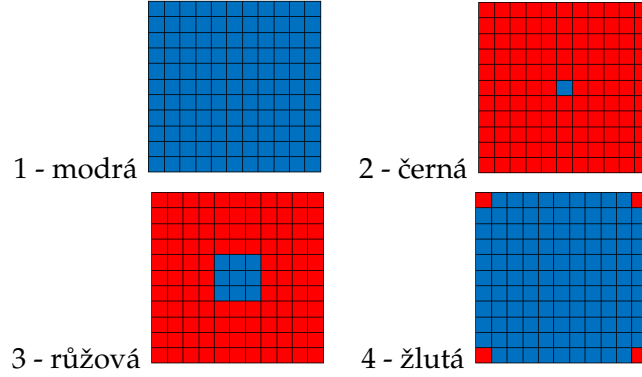
Použité kombinace užitků jsou zobrazeny hvězdičkami, přičemž různé finální konfigurace jsou odlišeny barevně. Na hranici, kde se finální konfigurace mění, došlo ke zjemnění sítě, aby bylo možné zkoumat, jak tato hranice vypadá a co se děje přímo na ní.

Obrázek 49: Koexistence strategií pro  $n$  liché

Výsledky experimentu na Obrázku 49 napovídají, že získáváme 4 možnosti, kam se bude systém ubírat, pokud  $c \leq \frac{b}{3} + 5$  a zároveň  $c \leq 3b + 3$  a zároveň  $c \geq b + 3$ .

Modré hvězdičky značí absolutní defekci pro sudé i liché  $n$  (1), v oblasti s černými hvězdičkami přežije právě jeden Nespolupracující, který „nepřiměje“ Spolupracující změnit strategii (2), v oblasti s růžovými hvězdičkami vznikne shluk devíti Nespolupracujících (3), ovšem počítejme zde s  $n \geq 6$ , jinak se systém může chovat odlišně (dojde k absolutní defekci). V oblasti se žlutými hvězdičkami se defekce šíří, ale nedosáhnou jí čtyři hráči, tedy vlastně zůstane shluk čtyř Spolupracujících (4). To platí ale pouze pro liché  $n$ , pro sudé  $n$  dojde v této oblasti k absolutní defekci. Na Obrázku 50 jsou tyto možnosti zobrazeny v populaci, kde  $n = 11$  a v populaci v čase  $t = 0$  je právě jeden Nespolupracující na pozici (6,6).

Obrázek 50: Rozdílné dynamiky



Hranice  $c = \frac{b}{3} + 5$  zobrazena žlutě vyplývá již z Lemma 2. Hranice  $c = \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$  zobrazena černě je rovněž zřejmá, neboť byla popsána již v konfiguraci  $A_1^*$  na Obrázku 7. Hranici  $c = 3b + 13$  si zde popíšme.

Uvažujme konfiguraci  $A_5^*$ , kterou též můžeme nazvat jako „Shluk Nespolupracujících“, znázorněnou na Obrázku 51.

Obrázek 51: Konfigurace  $A_5^*$

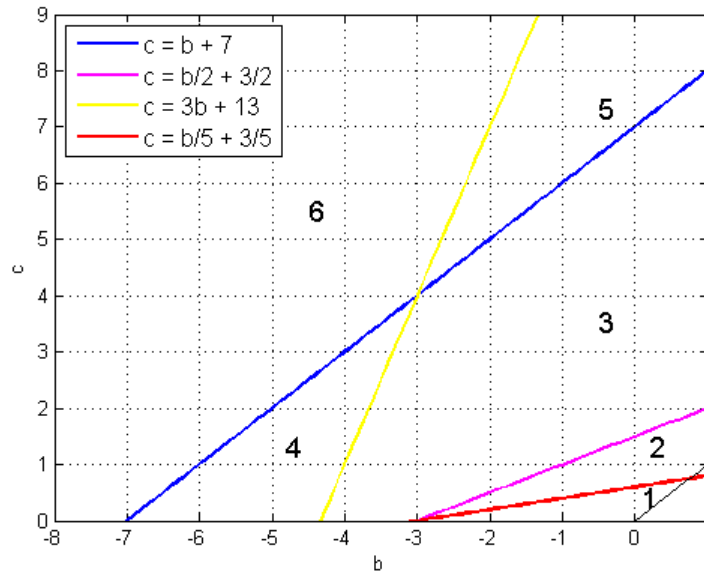
		$b+3$	$b+3$	$b+3$		
	$b+3$	$2c$	$c$	$2c$	$b+3$	
	$b+3$	$c$	$0$	$c$	$b+3$	
	$b+3$	$2c$	$c$	$2c$	$b+3$	
		$b+3$	$b+3$	$b+3$		

V této konfiguraci mohou změnit strategii 4 typy hráčů. Uvažujme-li jako hráče  $h_{i,j}$  Nespolupracujícího s užitkem 0, měnit strategie mohou hráči  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = c$ , hráči  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$ , hráči  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = b+3$ , a hráči  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = b+3$ .

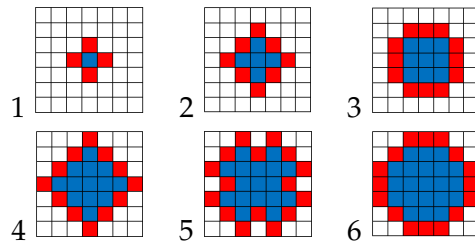
- pokud  $c < \frac{b}{2} + \frac{3}{2}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{k,l} = 2c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,
- pokud  $c < \frac{b}{5} + \frac{3}{5}$ , poté pro hráče  $h_{k,l} \in \rho_1^{i,j} : \pi_{k,l} = c$  platí, že  $a_{k,l}^*(t+1) = 1$ ,

- pokud  $c > b + 7$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_3^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ ,
- pokud  $c > 3b + 13$ , poté pro hráče  $h_{p,q} \in \rho_2^{i,j} : \pi_{p,q} = b + 3$  platí, že  $a_{p,q}^*(t + 1) = 0$ .

Obrázek 52: Grafické znázornění rozdílné dynamiky  $\varphi(A_5^*)$



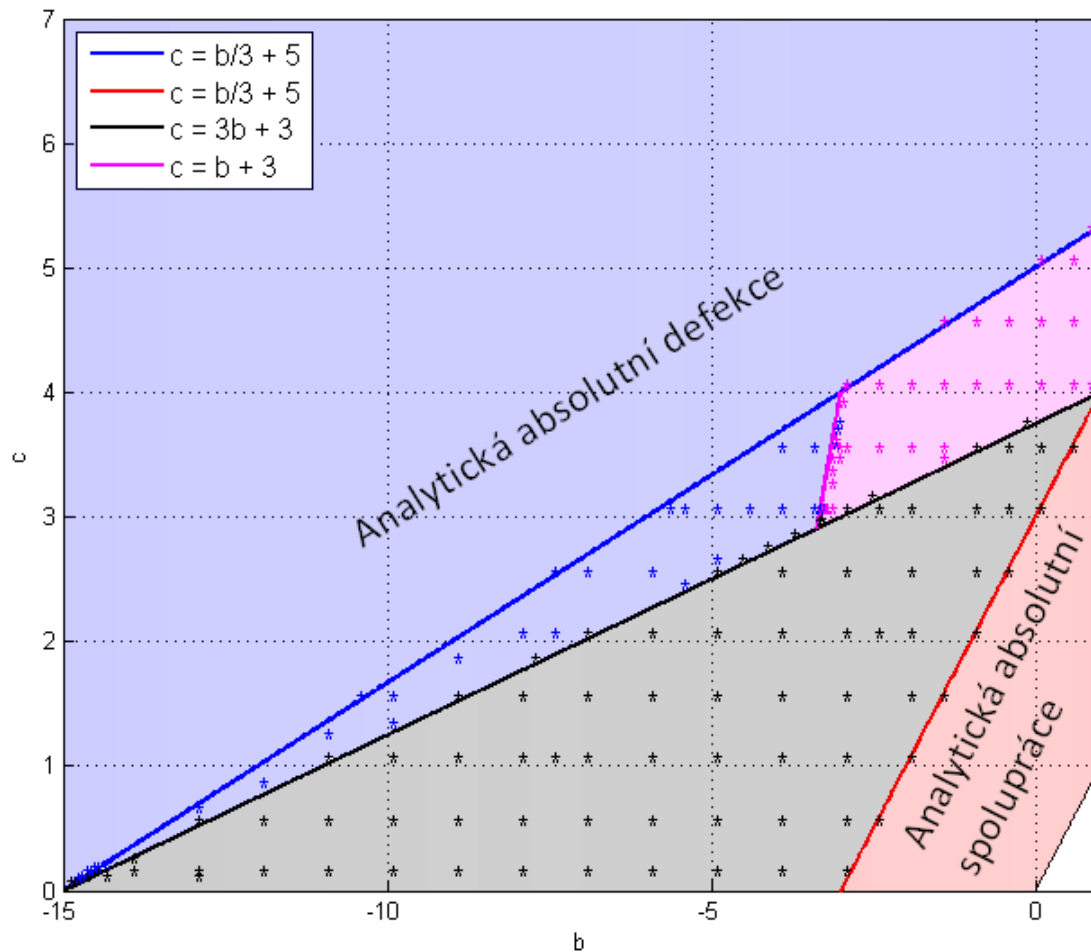
Obrázek 53:  $\varphi(A_5^*)$



1.  $c < \frac{b}{5} + \frac{3}{5}$ ,
2.  $c < \frac{b}{2} + \frac{3}{2}$  a zároveň  $c \geq \frac{b}{5} + \frac{3}{5}$ ,
3.  $c \leq b + 7$  a zároveň  $c \geq \frac{b}{2} + \frac{3}{2}$  a zároveň  $c \leq 3b + 13$ ,
4.  $c \leq b + 7$  a zároveň  $c > 3b + 13$ ,
5.  $c > b + 7$  a zároveň  $c \leq 3b + 13$ ,
6.  $c > b + 7$  a zároveň  $c > 3b + 13$ .

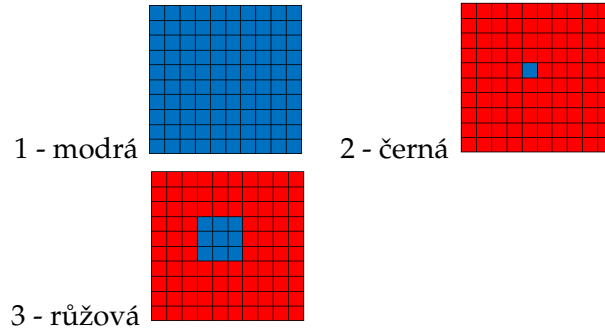
Z Obrázku 53 je vidět, že shluk Nespolupracujících, tedy konfigurace  $A_5^*$  je stabilní, pokud  $c \leq b + 7$  a zároveň  $c \geq \frac{b}{2} + \frac{3}{2}$  a zároveň  $c \leq 3b + 13$ . Pokud tuto oblast „vložíme“ do oblasti z Obrázku 49, zjistíme, že právě oblast ohraničená přímkami  $c = 3b + 13$ ,  $c = \frac{b}{4} + \frac{15}{4}$  a  $c = \frac{b}{3} + 5$  je tou oblastí, kde je konfigurace  $A_5^*$  stabilní.

Již z Lemma 2 vyplývá, že hranice  $c = 3b + 3$  je pro absolutní defekci zásadní pouze pro konfigurace s lichým  $n$ . Pro konfigurace se sudým  $n$  tedy oblast 2 z Obrázku 48 vypadá jako na Obrázku 54.

Obrázek 54: Koexistence strategií pro  $n$  sudé

Z Obrázku 54 je vidět, že získáváme 3 možnosti, kam se bude systém ubírat, pokud  $c \leq \frac{b}{3} + 5$  a  $n$  je sudé. Modré hvězdičky značí absolutní defekci pro sudé i liché  $n$  (1), v oblasti s černými hvězdičkami přežije právě jeden Nespolupracující, který „nepřiměje“ Spolupracující změnit strategii (2), v oblasti s růžovými hvězdičkami vznikne shluk devíti Nespolupracujících (3), ovšem počítejme zde s  $n \geq 6$ , jinak se systém může chovat odlišně (dojde k absolutní defekci). Na Obrázku 55 jsou tyto možnosti zobrazeny v populaci, kde  $n = 10$  a v populaci v čase  $t = 0$  je právě jeden Nespolupracující na pozici (5,5).

Obrázek 55: Rozdílné dynamiky



Z tohoto šetření je nejzajímavější to, že v populaci mohou koexistovat dvě naprosto odlišné strategie a systém je stabilní.

## 5 Závěr

Hlavním přínosem této práce je vytvoření a studium modelu Součtová evoluční dynamika na mřížkách, kde hráči měnili svou strategii na základě jiného principu, než v modelu Evoluční dynamika na mřížkách. Zde byl zkoumán Nespolutracující v jinak spolupracující populaci. Analyticky se nám podařilo najít oblast, ve které je kombinace teoretickoherních parametrů taková, že systém vždy dospěje k absolutní defekci. V této oblasti leží některé kombinace užiteků splňující vzájemný vztah jako v kooperačních hrách Věžňovo dilema, Jestřábi a holubice a Lov jelena. Stejně tak byla nalezena oblast, kde Nespolutracující zanikne a vzniká tak absolutní spolupráce. V této oblasti leží užiteků splňující předpoklady her Plná spolupráce, Lov jelena, Jestřábi a holubice, velkým překvapením je, že za určitých užiteků dojde k absolutní spolupráci i při hře Věžňovo dilema, kde ve statických hrách spolupráce není Nashovo rovnováhou.

Dále byla numericky zkoumána oblast, kde jsme nebyli schopni analyticky vypočítat, jak se bude systém vyvíjet. Zde vznikly čtyři možnosti pro populace s lichou velikostí mřížky a tři možnosti pro populace se sudou velikostí mřížky. V jedné z těchto oblastí dojde rovněž k absolutní defekci (na Obrázcích 49 a 54 znázorněna modře) – tato oblast splňuje kombinaci užiteků her Věžňovo dilema a Lov jelena. Oblast, která je na Obrázcích 49 a 54 znázorněna černě, představuje konfiguraci, kde daný Nespolutracující přežije, ale není schopen přimět Spolutracující ke změně strategie. V této oblasti leží kombinace užiteků zastupující hry Věžňovo dilema, Lov jelena a Jestřábi a holubice, což je zajímavé, protože v evolučních hrách je koexistence spolupráce a nespolutráce pro hry Věžňovo dilema a Lov jelena nestabilní. Růžová oblast z Obrázků 49 a 54 představuje shluk devíti Nespolutracujících v jinak spolupracující populaci. Opět se jedná o koexistenci dvou strategií, a to pro hry Věžňovo dilema a Jestřábi a holubice. Pro lichou velikost mřížky vzniká také oblast znázorněná na Obrázku 49 žlutě, kde zůstává v populaci už Nespolutracujících hráčů shluk čtyř Spolutracujících a tyto dvě strategie jsou tak rovněž stabilní. Tuto oblast zastupuje kombinace užiteků pouze ze hry Jestřábi a holubice.

Nabízí se otázky, jak by se systém vyvíjel, pokud bychom uvažovali libovolnou počáteční konfiguraci, případně pokud bychom například při změně strategie neuvažovali hráče samotného, ale pouze jeho sousedy. Pro odpovědi na tyto otázky však v této práci nebyl prostor, mohou být ale předmětem dalšího zkoumání.



## Reference

- [1] CLUTTON-BROCK, Tim. *Cooperation between non-kin in animal societies*. Nature. 2009-11-5, 462(7269), 51-57. DOI: 10.1038/nature08366. ISSN 0028-0836. Dostupné také z: <<http://www.nature.com/doi/10.1038/nature08366>>
- [2] ČERNÝ, Jakub. *Základní grafové algoritmy* [online]. Praha, 2010 [cit. 2016-05-03]. Dostupné z: <<http://kam.mff.cuni.cz/~kuba/ka/ka.pdf>. KAM, MFF UK>.
- [3] DIXIT, Avinash K. a Susan SKEATH. *Games of strategy*. 2nd ed. New York: W.W. Norton, c2004. ISBN 03-939-2499-8.
- [4] EPPERLEIN, Jeremias, Stefan SIEGMUND a Petr STEHLÍK. *Evolutionary games on graphs and discrete dynamical systems*. Journal of Difference Equations and Applications. 2014, 21(2), 72-95. DOI: 10.1080/10236198.2014.988618. ISSN 1023-6198. Dostupné také z: <<http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10236198.2014.988618>>
- [5] FUDENBERG, Drew a Jean TIROLE. *Game theory*. Cambridge, Mass.: MIT Press, c1991. ISBN 02-620-6141-4.
- [6] KELLEY, Walter G. a Allan C. PETERSON. *The theory of differential equations: classical and qualitative*. 2nd ed. New York: Springer, c2010. Universitext. ISBN 978-1-4419-5782-5.
- [7] NASH, John. *Two-Person Cooperative Games*. *Econometrica*. 1953, 21(1), 128-. DOI: 10.2307/1906951. ISSN 00129682. Dostupné také z: <<http://www.jstor.org/stable/1906951?origin=crossref>>
- [8] NOWAK, Martin. *Evolutionary dynamics: exploring the equations of life*. Cambridge, Mass.: Belknap Press of Harvard University Press, 2006. ISBN 978-0-674-02338-3.
- [9] PERC, Matjaž a Attila SZOLNOKI. *Coevolutionary games—A mini review*. Biosystems [online]. 2010, 99(2), 109-125 [cit. 2016-05-05]. DOI: 10.1016/j.biosystems.2009.10.003. ISSN 03032647. Dostupné z: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0303264709001646>>
- [10] SHOR, Mikhael. *Hicks Optimal*, *Dictionary of Game Theory Terms*, *Game Theory .net* [online], [cit. 2016-05-03] <<http://www.gametheory.net/dictionary/HicksOptimal.html>>
- [11] WEBB, James N. *Game theory decision, interaction, and evolution*. London: Springer, 2007. ISBN 978-184-6286-360.

## Seznam obrázků

1	Reakční funkce pro Věžňovo dilema . . . . .	11
2	Reakční funkce pro Plnou spolupráci . . . . .	12
3	Reakční funkce pro Lov jelena . . . . .	13
4	Reakční funkce pro Jestřábi a holubice . . . . .	14
5	Moorovo okolí . . . . .	19
6	Von Neumannovo okolí . . . . .	21
7	Konfigurace $A_1^*$ . . . . .	24
8	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_1^*)$ . . . . .	25
9	$\varphi(A_1^*)$ . . . . .	25
10	Konfigurace $A_2^*$ . . . . .	25
11	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_2^*)$ . . . . .	26
12	$\varphi(A_2^*)$ . . . . .	26
13	Konfigurace $A_3^*$ . . . . .	27
14	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_3^*)$ . . . . .	28
15	$\varphi(A_3^*)$ . . . . .	28
16	Konfigurace $A_4^*$ . . . . .	29
17	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_4^*)$ . . . . .	30
18	$\varphi(A_4^*)$ . . . . .	31
19	Konfigurace $A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*$ pro $n = 6$ . . . . .	31
20	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*)$ . . . . .	32
21	$\varphi(A_{-\frac{n}{2}-1,s}^*)$ . . . . .	33
22	Konfigurace $A_{-3,s}^*$ pro $n = 6$ . . . . .	33
23	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-3,s}^*)$ . . . . .	34
24	$\varphi(A_{-3,s}^*)$ . . . . .	35
25	Konfigurace $A_{-2,s}^*$ pro $n = 6$ . . . . .	35
26	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-2,s}^*)$ . . . . .	36
27	$\varphi(A_{-2,s}^*)$ . . . . .	36
28	Konfigurace $A_{-1,s}^*$ pro $n = 6$ . . . . .	37
29	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-1,s}^*)$ . . . . .	37
30	$\varphi(A_{-1,s}^*)$ . . . . .	38
31	Konfigurace $A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*$ pro $n = 5$ . . . . .	39
32	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*)$ . . . . .	39
33	$\varphi(A_{-\lceil \frac{n}{2} \rceil, l}^*)$ . . . . .	40
34	Konfigurace $A_{-2, l}^*$ pro $n = 5$ . . . . .	40
35	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-2, l}^*)$ . . . . .	41
36	$\varphi(A_{-2, l}^*)$ . . . . .	41
37	Konfigurace $A_{-1, l}^*$ pro $n = 5$ . . . . .	42
38	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-1, l}^*)$ . . . . .	42
39	$\varphi(A_{-1, l}^*)$ . . . . .	43
40	Silnější přímka . . . . .	44
41	Konfigurace $A_{-2,3}^*$ . . . . .	45
42	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-2,3}^*)$ . . . . .	45
43	$\varphi(A_{-2,3}^*)$ . . . . .	45
44	Konfigurace $A_{-1,3}^*$ . . . . .	46

45	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_{-1,3}^*)$ . . . . .	46
46	$\varphi(A_{-1,3}^*)$ . . . . .	47
47	Invaze Nespolutracujících . . . . .	48
48	Tři oblasti - rozdílná dynamika $\varphi(A_1^*)$ . . . . .	49
49	Koexistence strategií pro $n$ liché . . . . .	50
50	Rozdílné dynamiky . . . . .	51
51	Konfigurace $A_5^*$ . . . . .	51
52	Grafické znázornění rozdílné dynamiky $\varphi(A_5^*)$ . . . . .	52
53	$\varphi(A_5^*)$ . . . . .	52
54	Koexistence strategií pro $n$ sudé . . . . .	53
55	Rozdílné dynamiky . . . . .	54

## Seznam tabulek

1	Užitková matice (zdroj: [5]) . . . . .	8
2	Užitková matice kooperačních her . . . . .	9
3	Věžňovo dilema . . . . .	10
4	Plná spolupráce . . . . .	11
5	Lov jelena . . . . .	12
6	Jestřábi a holubice . . . . .	13
7	Symetrická užitková matice ([8, str. 49]) . . . . .	16
8	Symetrická užitková matice kooperačních her ([8, p. 62]) . . . . .	23
9	Užitková matice Součtové evoluční dynamiky na mřížkách . . . . .	23

## Obsah přílohy

V příloze je program v softwaru Matlab, skládající se z několika skriptů, který slouží ke znázornění vývoje systému, a byl použit při numerických výpočtech. Skript *bakalarka\_spusteni\_Soucet* slouží ke spuštění programu. Zde je možné nastavit velikost populace, počet iterací i užítky, případně také změnit počáteční konfiguraci  $A^*(0)$ , která je v tomto skriptu znázorněná maticí *Pocatecni*. Z tohoto skriptu se také vykreslují jednotlivé konfigurace, kde jsou červeně znázorněni Spolupracující (hodnota 1) a modře Nespolutracujících (hodnota 0) a je zde také zobrazen užitek každého hráče. Uvnitř tohoto skriptu je odkaz na skript *vypocet\_uzitku\_Soucet*, kde jsou na základě strategií sousedů počítány a zapisovány do pomocné matice *Matice* užítky jednotlivých hráčů v čase  $t$ . Ve skriptu *zmena\_strategie\_Soucet* je na základě dynamiky popsané v Definicí 8 vytvořena matice *Nova*, kde se pomocí hodnot  $\{0,1\}$  zapisují strategie hráčů v kroku  $t + 1$ .