ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

MATEMATICKÉ ÚLOHY Z ČASOPISU VĚDA A TECHNIKA MLÁDEŽI

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Markéta Cerhová

Učitelství pro základní školy, obor Ma - Ge

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2016

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 11. 4. 2016

....

vlastnoruční podpis

Poděkování

Tímto bych chtěla poděkovat panu doc. RNDr. Jaroslavu Horovi za pomoc při zpracování diplomové práce. Rodině a blízkým přátelům za podporu a pomoc.

Obsah

Úvod

Pro svoji práci jsem využívala příspěvky z časopisu Věda a technika mládeži. Časopis s tímto názvem byl vydáván od roku 1954 až do roku 1990. Během každého roku vydali 26 čísel, přičemž v každém čísle byla stránka nazvaná Zajímavé problémy. Nacházely se zde různé problémy z oboru matematiky, fyziky, přírodních věd apod. Řešení úloh se zveřejňovalo se zpožděním o dvě čísla, ale místo pro zveřejnění těchto výsledů bylo omezené, proto ne vždy byly v časopise všechny výsledky. Úplné řešení úloh se vyskytovalo jen u ojedinělých příkladů.

Moje práce spočívá v procházení, shromažďování matematických úloh a jejich řešení. V práci jsem se snažila většinu úloh obohatit obrázkem pro lepší představivost a lepší vysvětlení. K tvorbě obrázků a tabulek jsem využila program Geogebra, SmartNotebook a malování.

Práce může sloužit jako sbírka matematických úloh, které bych mohla využít nejen já, ale také moji kolegové k práci.

Úlohy

Sčítání, odčítání

Trochu přemýšlení

„Jeden úkol pro ty, kteří nemilují rovnice a složité počítání. Nuže, napište si vedle sebe číslice 9 8 7 6 5 4 3 2 1 a napište mezi ně tolik křížků (znamének sčítání +), aby konečný výsledek byl 99.

Až se vám to podaří, hned se pusťte do dalšího podobného problému. Tentokrát napište číslice v obráceném pořádku 1 2 3 4 5 6 7 a napište mezi ně křížky tak, aby výsledek byl 100. V žádném z obou případů nesmíte pořádek číslic měnit. Oba úkoly mají po dvou možných řešeních.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení:

• 1. varianta: Napíšeme si čísla od 9 k 1 vedle sebe s dostatečnou mezerou.

9 8 7 6 5 4 3 2 1

Zkoušíme různé kombinace tak, aby nám součet čísel dal 99.

1. řešení: 9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99

2. řešení: 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99

• 2. varianta: Napíšeme si čísla od 1 do 7 vedle sebe s dostatečnou mezerou.

1 2 3 4 5 6 7

Zkoušíme různé kombinace tak, aby nám součet čísel dal 100.

1. řešení: 1 + 2 + 34 + 56 + 7 = 100

2. řešení: 1 + 23 + 4 + 5 + 67 = 100

Zázračný počtář

„Vidíte před sebou sloupec osmi šestimístných čísel. Zpaměti sečtěte. Změřte si čas, jak dlouho vám výpočet trval a jak jste ho provedli.“ (VTM, 1954 – 1990)

328 645

491 221

816 304

117 586

671 355

508 779

183 696

882 414

Řešení: Očekáváme nějakou „fintu“, přece by nám nezadali příklad na bezduché sčítání. Povšimněme si, že poslední číslice tvoří dvojice, jejichž součet dává 10. Podíváme se např. na dvojice sčítanců končících číslicí 5 (vyznačenou žlutě).

328 645

491 221

816 304

117 586

671 355

508 779

183 696

882 414

Kdybychom tyto dva řádky sečetli, budou se rovnat rovnému 1 000 000.

328 645

671 355

1 000 000

Ostatní dvojice taktéž. Jen u dvou dvojic se musíme rozhodnout, které k sobě patří, protože končí obě stejným číslem.

816 304	a	882 414
183 696		117 586

V tomto případě se musíme podívat i na další čísla. Na desítky, jestli nám dají součet 10.

Výsledek tedy bude 4 000 000, protože jsou zde čtyři dvojice se součtem 1 000 000.

Obrázek 1

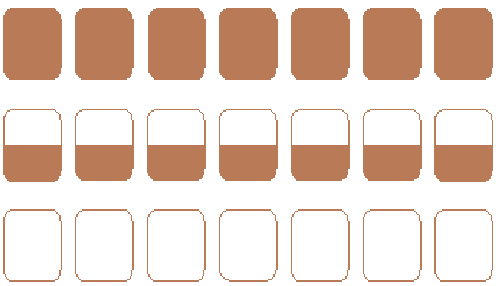
328 645
491 221
816 304
117 586
671 355
508 779
183 696
882 414
4 000 000

Umřel vinař…

„Umřel vinař a zanechal svým třem synům bohatý sklep se zásobami nejlepšího vína. Bylo v něm 7 sudů plných, 7 jen do poloviny naplněných a 7 prázdných. Ve své poslední vůli určil, aby se synové o dědictví rozdělili tak, že bude mít každý stejný počet sudů i stejné množství vína. Jak to udělali?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Můžeme použít nákres, který by nám při rozdělování sudů mohl pomoci.

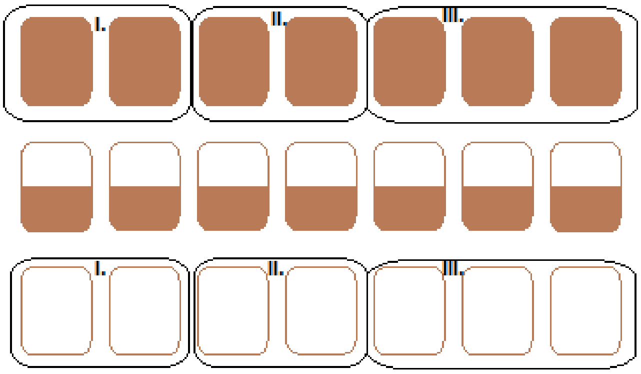
Obrázek 2



3 synové, každý má dostat 7 sudů a stejné množství vína.

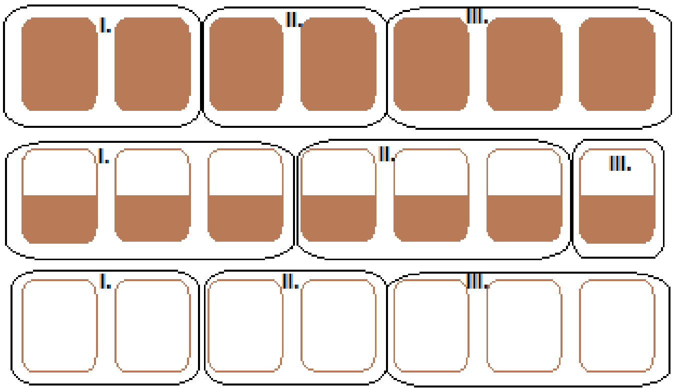
- Rozdělíme naplněné sudy, prázdné a nakonec napůl plné sudy.
- Chceme, aby každý syn měl všechny typy sudů.

Obrázek 3



- Teď už nám chybí jen rozdělit poloprázdné, podle toho, kolik každému synovi chybí kusů.

Obrázek 4



Přepočítáme, jestli každý má 7 sudů a jestli mají stejné množství vína:

• Počet sudů:

3 synové: I.: 2 plné + 3 poloprázdné + 2 prázdné = 7 sudů

II.: 2 plné + 3 poloprázdné + 2 prázdné = 7 sudů

III.: 3 plné + 1 poloprázdný + 3 prázdné = 7 sudů

• Množství vína:

Převedeme: Plný sud je jeden celek = 1

Poloprázdný sud je půlka celku = 0,5

3 synové: I.: 2 x 1 + 3 x 0,5 = 3,5

II.: 2 x 1 + 3 x 0,5 = 3,5

III.: 3 x 1 + 1 x 0,5 = 3,5

Synové si sudy rozdělili tak, že měl každý 7 sudů a stejné množství vína, 3,5 sudu.

Umíte anglicky?

„Jestli neumíte, tento úkol vás naučí aspoň třem anglickým číslovkám, jimiž si zopakujete početní úlohu: 40 + 10 + 10 = 60.

Jenže vy máte písmena nahradit číslicemi a pak vám ovšem vyjde něco jiného.“ (VTM, 1954 – 1990)

$$\begin{array}{r} \text{FORTY} \\ \text{TEN} \\ \underline{\text{TEN}} \\ \text{SIXTY} \end{array}$$

Řešení: Doplňujeme čísla tak, aby to bylo logicky správné.

Můžeme použít čísla 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Všimneme si, že Y na posledním místě zůstává stejné jako v první řádce, takže N musí být buď 0, nebo 5.
- Druhé písmenko zprava zůstává stejné, jako v první řádce. E bude buď 0, nebo 5. Kdyby ale N bylo 5, došlo by k přenosu čísla 1 do řádu desítek. V tomto sloupci by pak platilo: 1 + T + 2E ≡ T (mod 10), po odečtení T: 1 + 2E ≡ 0 (mod 10), ale liché

číslo nemůže při dělení deseti dávat zbytek nula. Je tedy N = 0, E = 5 jediná možnost.

FORTY	FORTY
TEN	T50
TEN	T50
SIXTY	SIXTY

- Postupně budeme získávat další čísla. Podíváme se na druhý sloupec zleva. Zde se mění číslice O v I, tudíž musí dojít k přesunu číslice 1 do prvního řádku zleva. Platí tedy: F = S + 1, čili S a F jsou po sobě jdoucí číslice. K přechodu přes desítku muselo dojít i ve druhém sloupci zleva, kdy z cifry značené O vzniklo I. Ale I není 0, takže zbývá možnost, že I = 1, 0 = 9 a ze třetího sloupce došlo k přenosu sčítance 2. Pro třetí sloupec to znamená, že došlo-li k přenosu dvojky, je výsledek sčítání v něm možné psát jako 20 + X. Při sčítání ve třetím sloupci došlo k přenosu jedničky z druhého sloupce. Získáváme tedy rovnici: R + 2T + 1 = 20 + X. Protože nejmenší cifra, kterou ještě nemáme nalezenou je 2, pak X $\geq$ 2 a odtud R + 2T $\geq$ 21. Obě cifry R a N nemohou být 7, čili jedna z nich musí být větší než 7, to znamená být rovna 8, protože O = 9 je již nalezeno.
- 1. Kdyby bylo R = 8, pak ze zjednodušené nerovnosti 2N $\geq$ 13 a z toho, že cifry 8 a 9 jsou již užity, vyjde N = 7 a X = 3. Jenomže, pohlédneme-li na již vyluštěné cifry, nenacházíme již možnost, jak volit po sobě jdoucí S a F.
- 2. Kdyby bylo T = 8, pak pro R platí R $\geq$ 5 a protože cifra 5 je již nalezena, je dokonce R $\geq$ 6. Je-li R = 6, vyjde X = 3 a opět nenajdeme možnost, jak zvolit po sobě jdoucí S a F. Je-li ale R=7, vyjde X = 4 a najdeme S = 3 a F = 2. Poslední volná cifra je Y = 6.

Výsledek:

FORTY	29786
TEN	850
TEN	850
SIXTY	31486

Jedná se o takzvaný algebrogram, který má v tomto případě jen jediné řešení.

I naši čtenáři…

Podobný příklad jako předchozí, kdy se mají písmena nahradit čísly tak, aby příklad dával smysl.

HOKUS
+ POKUS
PRESTO

Řešení: Začneme zleva dosazovat postupně číslice.

P musí být 1, ve výsledku máme P na prvním místě, zvyšuje se řád a jiné číslo tam nemůže být. Ať už bude H 8 či 9, nepřekročí součet 20, tudíž P může být jen 1. Kdyby bylo H=8, muselo by dojít k přenosu jedničky z druhého sloupce. Cifra O je sudá a kvůli zmíněnému přenosu ve druhém sloupci musí být O = 6. Dále ze sloupce jednotek vidíme, že S = 3. Pak je R = 0 a

86KU3
+16KU3
10E3T6

Dále by muselo být K = 1 a to není možné, máme již P = 1. H tedy nemůže být 8, zbývá jen H = 9.

9OKUS
+ 1OKUS
1RESTO

Pokusíme se určit cifru R. Ta musí být 0, protože kdyby mělo dojít k přenosu jedničky z předchozího sloupce, vyšla by 1 a to nelze, už máme P = 1. Tím se omezily možnosti pro O. Ze sloupce jednotek vidíme, že O je sudá cifra a podle předchozího nemá vyvolat přenos ve sloupci tisíců, tj. není to 6 ani 8. Zbývají možnosti O = 2 nebo O = 4.

Kdyby O = 4, mohlo by S být 2 nebo 7.

a) Kdyby S = 2, měli bychom

94KU2
+ 14KU2

10E2T4

a ve sloupci stovek nemáme jinou volbu než K = 1 či K = 6. Je ale již P = 1 a pro K = 6 vyjde E = 9 = H, což také nejde.

b) S = 7 dává

$$\begin{array}{r} 94KU7 \\ +\ 14KU7 \\ \hline 10E7T4 \end{array}$$

a zvolíme-li K = 3, bude E = 8 a pro (zjevně lichou) cifru T máme jen možnost 5. Pak ale U = 7 naráží na to, že již je S = 7. K = 8 také nemůže být, vyšlo by E = 9 = H. Tím jsme ukázali, že možnost O = 4 nepřináší žádné řešení.

Nechť tedy O = 2. Ve sloupci jednotek nejde volit S = 1, zbývá S = 6.

$$\begin{array}{r} 92KU6 \\ +\ 12KU6 \\ \hline 10E6T2 \end{array}$$

Opět připadají v úvahu dvě volby pro K, totiž K = 3 nebo K = 8. První z nich dává E = 4 a vede ke schématu

$$\begin{array}{r} 923U6 \\ +\ 123U6 \\ \hline 1046T2. \end{array}$$

Ve sloupci desítek má vyjít lichá cifra T a nemá pak dojít k přesunu jednotky. Snadno ověříme, že pro příslušné rovnice již není „volná“ správná cifra pro U.

Volba K = 8 dává E = 9 a vede ke schématu

$$\begin{array}{r} 923U6 \\ +\ 123U6 \\ \hline 1056T2. \end{array}$$

Pro liché T jsou volné cifry 3 a 7. Rovnice 2U + 1 = 3 naráží na obsazené P = 1. Zato rovnice 2U + 1 = 7 dává U = 3 a to je v pořádku.

Algebrogram má jediné řešení.

HOKUS	92836
+ POKUS	12836
PRESTO	105672

Násobení, dělení

Krátký karcer

„Vzpomínka na studentské časy. : „Utrhl si v ústavní zahradě „boží dřevec“. Přistihl ho profesor, předvedl k řediteli, a viník dostal karcer (byl po škole).

Třídní profesor byl matematik. Chtěl ho důkladně potrestat. Uložil mu tedy, aby sečetl všechna čísla od jedné do sta. Domníval se, že mu bude výpočet trvat několik hodin. Ale studentík přinesl výsledek za čtyři minuty. Profesor ho propustil domů a ještě pochválil za dobrý početní výkon.“ (VTM, 1954 – 1990)

Mohlo se jednat o známého matematika Carla Friedricha Gausse, který byl takto zaměstnán od učitele. Úloha, která se mohla zdát těžká, byla však pro mladého Gausse lehká a měl jí za chvíli hotovou. Víme, že Carl Gauss byl nadaný matematik. Jeho nadání se projevovalo už ve škole. Učitel si toho mohl všimnout právě při této úloze.

<u>Řešení</u>:

• 1. varianta:

- Sečteme dvojice čísel souměrně sdružených od obou konců číselné řady.

$$1 + 100 = 101$$

$$2 + 99 = 101$$

$$3 + 98 = 101$$

$$\vdots$$

$$49 + 51 = 101$$

- Těchto dvojic je 50. Proto můžeme napsat:

$$50 \times 101 = \underline{\underline{5050}}$$

• 2. varianta: Pomocí posloupnosti.

Kde: $a_1 = 1$

$a_2 = 2$

:

$a_{100} = 100$

Vzorec pro součet všech bodů posloupnosti je:

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

- Dosadíme do vzorce.

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$s_{100} = \frac{100}{2}(1 + 100)$$

$$s_{100} = 50 \times 101$$

$$\underline{\underline{s_{100} = 5050}}$$

5050 je výsledek, který jsme hledali.

Ještě falešné peníze

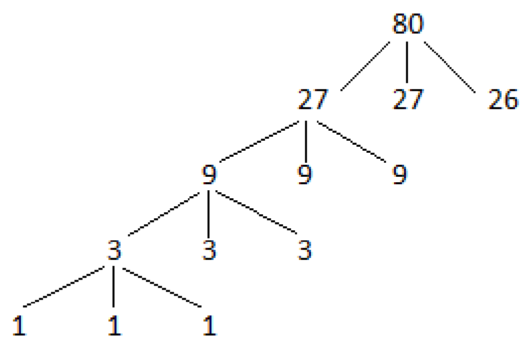
„Pokladník má 80 zlatých mincí, mezi nimiž je jedna falešná. Má po ruce váhy, ale bez závaží. Má na čtyři vážení zjistit falešnou minci a vyloučit ji.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Z vytvořených hromádek se stejným počtem mincí a pomocí váhy zjistíme, která hromádka mincí je lehčí. (Protože falešná mince je lehčí.)

Vytvoříme strom, kdy rozdělíme hodnotu vždy na tři díly.

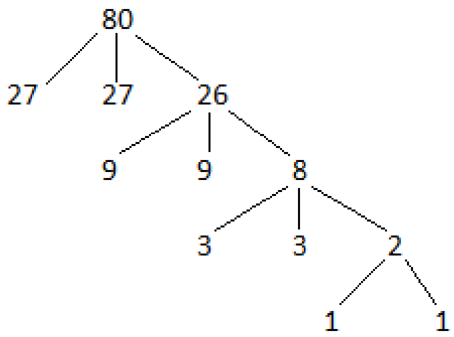
• 1. varianta:

Obrázek 5



• 2. varianta:

Obrázek 6



Splnili jsme podmínky a to, že jsme čtyřikrát vážili. Dvě varianty ukazují, že i kdyby dvě vážení po 27 kusech bylo stejně těžké, tak postup vážení u 26 mincí bude stejný.

Z polských úkolů

„Několik chlapců a děvčat – bylo jich dohromady méně než deset – přineslo starý papír a kovy do sběru. Dostali dohromady jednu bankovku - padesát zlatých.

Chlapci sbírali horlivěji než dívky, proto každý chlapec dostal o 1 zlatý víc než děvče. Aby si mohli peníze rozdělit, rozměnili bankovku na dvouzlatky a pětizlatky.

Otázka zní: Kolik bylo chlapců a kolik děvčat? Jak rozměnili bankovku?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>:

- Zápis: *x* chlapců, *y* děvčat ……………………………dohromady méně než 10: $x + y < 10$
  Dohromady dostali ………………………50 zlatých
  Chlapec ……………………………………..dostal o 1 zlatku více než děvče
  50 zlatých rozměnili na ………………2 zlatky a 5 zlatek
- Mohou nastat tyto kombinace, které splňují podmínky úlohy pro využití 50 zlatých. Rozměnili je na 2 a 5 zlatek, chlapci dostali o 1 více.
  - 4 zlatky a 5 zlatek X – součet nedá 50, tak aby dětí bylo méně než 10
  - 5 zlatek a 6 zlatek ✓– 5×4(dívky) + 6×5(chlapci) = 50

- 6 zlatek a 7 zlatek ✓ – 6 × 6 + 7 × 2 = 50
- 7 zlatek a 8 zlatek ✓ – 7 × 6 + 8 × 1 = 50
- 8 zlatek a 9 zlatek ✓ - 8 × 4 + 9 × 2 = 50
- 9 zlatek a 10 zlatek X – součet nedá 50
- 12 zlatek a 13 zlatek ✓ – 12 × 2 + 13 × 2 = 50
- 16 zlatek a 17 zlatek ✓ – 16 × 1 + 17 × 2 = 50

• Když budou mít dívky po 5 a chlapci po 6 zlatkách, skupinu dětí budou tvořit 4 dívky a 5 chlapců. Dohromady se jedná o 9 dětí, což je méně než 10.

• Když budou mít dívky po 6 a chlapci po 7 zlatkách, skupinu dětí bude tvořit 6 dívek a 2 chlapci. Dohromady se jedná o 8 dětí, což je méně než 10.

• Když budou mít dívky po 7 a chlapci po 8 zlatkách, skupinu dětí bude tvořit 6 dívek a 1 chlapec. Dohromady se jedná o 7 dětí, což je méně než 10.

• Když budou mít dívky po 8 a chlapci po 9 zlatkách, skupinu dětí budou tvořit 4 dívky a 2 chlapci. Dohromady se jedná o 6 dětí, což je méně než 10.

• Když budou mít dívky po 12 a chlapci po 13 zlatkách, skupinu dětí budou tvořit 2 dívky a 2 chlapci. Dohromady se jedná o 4 děti, což je méně než 10.

• Když budou mít dívky 16 a chlapci 17 zlatek, skupinu dětí bude tvořit 1 dívka a 2 chlapci. Dohromady se jedná o 3 děti, což je méně než 10.

Řezání klád

„Po skončení stavby dal vedoucí dvěma dělníkům rozřezat zbylé, poškozené trámy na palivové dříví. Dělnici se ptali, co jim za to zaplatí.

Vedoucí je nechal rozřezat jeden kratší trám na tři díly a sledoval jejich práci se stopkami v ruce. „Tak za tohle dostanete 60 haléřů.“ Řekl jim. „Ostatní mzdu tomu přizpůsobíme.“

Dělníci rozřezali celkem 5 trámů na tři kusy, 17 trámů na 4 kusy, 8 trámů na 5 kusů a dva dlouhé na 7 kusů.

Jakou mzdu nakonec za svou práci dostali?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Kládu rozřezali na 3 kusy, použili 2 řezy za 60 haléřů. Jeden řez stojí 0,3 Kč.

- 5 trámů na 3 ks → 2 řezy ………………. 5×2×0,3 = 3,-
- 17 trámů na 4 ks → 3 řezy ……………. 17×3×0,3 = 15,3,-
- 8 trámů na 5 ks → 4 řezy ………………. 8×4×0,3 = 9,6,-
- 2 trámy na 7 ks → 6 řezů ………………. 2×6×0,3 = 3,6,-

  Celkem …………………………. 3 + 15,3 + 9,6 + 3,6 = 31,5,-

Dostali 31,5 korun.

Zájmové kroužky

„Ve škole se vytvořilo pět kroužků: politický, matematický, fyzikální, literární a vlastivědný. Politický se schází obden, matematický každý třetí den, fyzikální každý čtvrtý den, literární každý pátý den a vlastivědný každý šestý den. Prvního ledna se sešlo ve škole pět kroužků, a pak se scházely podle uvedeného rozvrhu pravidelně, bez ohledu, byla-li neděle nebo svátek. Otázkou je, kolikrát se za první čtvrtletí sešlo všech pět kroužků najednou (byl to obyčejný rok, ne přestupný), a kolikrát za čtvrtletí se ve škole nesešel žádný kroužek?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení:

5 kroužků:

- Politický …………………….. obden/2. den ……………………….. černá
- Matematický ……………… každý 3. den ……………………….. modrá
- Fyzikální …………………….. každý 4. den ……………………….. zelená
- Literární …………………….. každý 5. den ……………………….. žlutá
- Vlastivědní ………………….. každý 6. den ……………………….. červená

Násobky jednotlivých dnů kroužku, můžeme znázornit do tabulky.

Tabulka 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90

Z tabulky můžeme vidět, že setkání všech kroužků za čtvrtletí (90 dní), nastane jednou od 1.1.

Pro zjištění, kdy se všechny kroužky setkají, bychom mohli použít nejmenší společný násobek.

$n(2) = 2$

$n(3) = 3$

$n(4) = 2 \times 2 = 2^2$

$n(5) = 5$

$n(6) = 2 \times 3$

$n(2, 3, 4, 5, 6) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60$

Nejmenší spolčený násobek čísel 2, 3, 4, 5, 6 je 60. Z toho vyplývá, že situace z 1. 1. se bude opakovat po 60 dnech.

Naopak, situace, kdy ve škole nikdo není, se stane čtyřiadvacetkrát.

Záhadné násobení

„Doplňte v tomto příkladu místa označená hvězdičkami příslušnými číslicemi.“ (VTM, 1954 – 1990)

$$
\begin{array}{r}
\underline{*\,1\,*\ \mathrm{x}\ 3\,*\,2} \\
\,2\,\,5 \\
3\,*\,2\,* \\
\underline{*\,3\,*} \\
1\,*\,8\,*\,3\,0
\end{array}
$$

<u>Řešení:</u> Převedeme si zápis na obvyklý tvar písemného násobení, které známe. Pak budeme postupně z pravé strany doplňovat čísla, tak aby zápis dávala smysl.

Začneme u poslední cifry v prvním činiteli. Hledáme takové číslo, které by po vynásobení číslem 2 dalo 0 – jediné takové je 5. (Nulu vzít nemůžeme, ta by „přinesla“ nulový řádek a ten mezi mezivýsledky násobení není). Kontrolu najdeme i v předposledním řádku, kde musíme 3 vynásobit posledním číslem vlevo (pro nás 5), vznikne nám 5. Násobek jiného čísla by nám nedalo 5.

Stejně tak víme, že v předposledním řádku na prvním místě bude 1. Je i ve výsledku. Z číslic nalevo víme, že nebudeme přičítat jedničku, takže se nám výsledek nezvýší.

$$
\begin{array}{r}
\,1\, \\
\times\,\underline{3\,*\,2} \\
\,3\, \\
3\,*\,2\,* \\
\underline{*\,2\,5} \\
1\,*\,8\,*\,3\,0
\end{array}
\quad \rightarrow \quad
\begin{array}{r}
4\mathbf{1}5 \\
\mathrm{x}\ \underline{\mathbf{3}8\mathbf{2}} \\
8\mathbf{3}0 \\
\mathbf{3}3\mathbf{2}0 \\
\underline{1\mathbf{2}4\mathbf{5}} \\
\mathbf{1}5\mathbf{8}5\mathbf{30}
\end{array}
$$

Ve spořitelně

„Do Státní spořitelny přiběhla prodavačka z protějšího obchodu.

„Můžete mi, prosím, rozměnit dvacet stokorunových bankovek? Potřebuji několik desetikorun, desateronásobný počet dvacetikorun a zbytek v padesátikorunách.“

Pokladník vzal tužku a papír a chvíli počítal. Potom prodavačce vyplatil požadované drobné.

Kolik dostala desetikorun, kolik dvacetikorun a kolik padesátikorun?“ (VTM, 1954 - 1990)

<u>Řešení</u>: Úlohu napíšeme do rovnice, kde počet desetikorun označíme *x*, počet dvacetikorun označíme 10*x* a počet padesátikorun označíme *y*.

Dvacet stokorun = 2000,-.

- Rovnice: $x \times 10$

  $10x \times 20$

  $y \times 50$

- Dostáváme rovnici $10x + 200x + 50y = 2\,000$, po úpravě a po vydělení deseti: $21x = 200 - 5y$.
- Pravá strana rovnice je dělitelná 5, tedy i levá strana musí být dělitelná 5. Můžeme volit jen $x = 5$, další možnost $x = 10$ již nevyhovuje. Ještě dopočítáme $y = 19$.
- Zkouška:

$x \times 10$		$5 \times 10 = 50$
$10x \times 20$	→	$50 \times 20 = 1000$
$y \times 50$		<u>$19 \times 50 = 950$</u>
		2000,-

Prodavačka dostane pět desetikorun, padesát dvacetikorun a devatenáct padesátikorun.

Prvočísla

Jak starý byl kapitán?

„Za první světové války se strhla nedaleko malého městečka bitva. Bylo to právě posledního dne v měsíci. V této bitvě byla rozbita socha bojovníka s píkou ze starých dob. Socha byla asi v životní velikosti.

Násobíme-li datum dne, kdy se bitva strhla, délkou píky ve stopách, polovičním stářím sochy a věkem velícího kapitána, dostaneme číslo 451066.

K tomu poznamenáváme, že se tehdy dělaly píky dlouhé asi 2 metry.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Datum × délka píky (ve stopách) × ½ stáří sochy × věk velícího kapitána = 451 066

Číslo 451 066 rozložíme na součin prvočísel, dostaneme tak jednotlivé hodnoty, které potřebujeme.

$$451\,066 = 2 \times 225\,533 = 2 \times 7 \times 32\,219 = 2 \times 7 \times 11 \times 2929 = 2 \times 7 \times 11 \times 29 \times 101$$

- Datum je 29. Přestupný rok za první světové války byl v roce 1916.
- Délka píky je 7 stop.
- ½ stáří sochy je 101 let, tudíž celkové stáří sochy je 202 let.
- Věk velícího kapitána je 2 × 11 = 22 let.

Hračka na celé odpoledne

„Povšimli jsme si, že každé sudé číslo (s výjimkou 2) lze vyjádřit ve tvaru součtu dvou prvočísel, například: 4 = 2 + 2,

6 = 3 + 3,

8 = 5 + 3,

10 = 5 + 5 = 3 + 7.

Není nám známo, platí-li toto pravidlo pro všechna sudá čísla. Zkuste vyzkoušet, zda tato pravidlo platí pro sudá čísla do 200.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Sudá čísla vyjádřena jakou součet dvou prvočísel:

4 = 2 + 2	16 = 11 + 5 = 13 + 3	28 = 17 + 11
6 = 3 + 3	18 = 11 + 7 = 13 + 5	30 = 17 + 13 = 19 + 11 =
8 = 5 + 3	20 = 13 + 7	= 23 + 7
10 = 5 + 5 = 3 + 7	22 = 11 + 11	32 = 19 + 13
12 = 5 + 7	24 = 13 + 11	34 = 17 + 17 = 23 + 11
14 = 7 + 7	26 = 13 + 13	36 = 23 + 13 = 19 + 17
:	:	:

- Mohli bychom pokračovat opravdu až do čísla 200.
- Tomuto problému se říká Goldbachův problém.

Goldbachův problém

V roce 1742 (což je více, jak 270 let), napsal Christian Goldbach známému matematiku Leonhardu Eulerovi dopis, ve kterém ho vybízel, aby se zamyslel nad důkazem pro jeho tvrzení: „Každé kladné sudé číslo větší než 2 je možné zapsat jako součet dvou prvočísel.“ Hypotézu se v uplynulých letech snažili lidé dokázat. Používali k tomu počítače a zatím dospěli komu, že hypotéza platí pro sudá čísla menší než 4×10^{13}. (Goldbachova hypotéza, 2004)

Goldbach přišel i s jinými hypotézami, a to:

„Každé přirozené číslo $n > 5$ je součtem nejvýše tří prvočísel.“

„Každé liché číslo $n > 7$ je součtem tří prvočísel.“

„Existuje číslo n_0 takové, že každé liché $n > n_0$ je součtem tří prvočísel.“

(Paenza, 2005)

Dělitelnost

Sadařovy potíže

„Sadař si chtěl vysadit na volný pozemek ovocné stromy. Odhadl si jen tak od oka, že se mu jich vejde něco přes šest set. Zašel si tedy do školky a stromky koupil.

Když však začal rozměřovat jámy k sázení, nevycházelo mu to. V jednom směru mohl udělat 13 řad, ale pak mu zbývalo 8 stromků. Zkusil to tedy rozměřovat na širší straně pozemku. Tam totiž mohl rozměřit šestnáct řad. Ale když to provedl a stromky skutečně zasadil, zase se mu 8 stromků nedostávalo.

To už nebylo tak nesnadné. Zašel si do školky a osm stromků přikoupil.

Vypočtěte, kolik stromků měl sadař původně?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Hledáme číslo větší než 600. Pokud odečteme 8, je dělitelné 13. Pokud přičteme 8, je dělitelné 16.

- Čísla větší než 600 a jsou dělitelná 13 a 16:
  - 611 : 13 = 47
    - 611 + 8 = 619
    - 619 + 8 = 627

    → 627 : 16 = není dělitelné
  - 624 : 13 = 48
    - 624 + 8 = **632**
    - 632 + 8 = 640

    → 640 : 16 = 40

632 je číslo, které hledáme, když odečteme 8, je dělitelné 13 a když přičteme 8, je dělitelné 16.

632 → 632 – 8 = 624 : 13 = 48

632 + 8 = 640 : 16 = 40

Košík vajec

„Jedna žena nesla na trh koš vajec. Nějaký nepozorný chodec do ní vrazil tak, že ji koš vypadl z ruky a všechna vejce se rozbila.

Viník litoval svého činu a chtěl jí nahradit škodu. Otázal se tedy: kolik vajec jste nesla v košíku? Žena odpověděla: přesně to nevím, ale pamatuji se, že když jsem vejce vybírala po dvou, po třech, po čtyřech, po pěti i po šesti, vždycky mi zbylo v koši jedno vejce. Ale když jsem brala po sedmi, nezbylo tam žádné.

Kolik vajec bylo v koši?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Počet vajec v košíku tvořilo takové číslo, které nebylo dělitelné 2, 3, 4, 5, 6 vždy zbyla 1. Počet vajec byl dělitelný 7.

- Dělitelné 7 jsou tato čísla: 7, 49, 77, 91, 119, 161, 203, 217, 259, 287, 301, …

Pokus X omyl: Budeme zkoušet postupně všechna čísla, která jsou dělitelná 7 a dalšími čísly.

49 : 7 = 7	**77 : 7 = 11**	**91 : 7 = 13**
2: 2 x 24 +1 = 49	2: 2 x 38 + 1 = 77	2: 2 x 45 + 1 = 91
3: 3 x 16 + 1 = 49	3: X	3: 3 x 30 + 1 = 91
4: 4 x 12 + 1 = 49		4: X
5: X		

119 : 7 = 17	**161 : 7 = 23**	**203 : 7 = 29**
2: X	2: 2 x 80 +1 = 161	2: 2 x 101 + 1 = 203
	3: X	3: X

301 : 7 = 43

2: 2 x 150 + 1 = 301

3: 3 x 100 + 1 = 301

4: 4 x 75 + 1 = 301

5: 5 x 60 + 1 = 301

6: 6 x 50 + 1 = 301

Z vyššího hlediska se tento problém dá také řešit pomocí tzv. čínské věty o zbytcích.

Výsledek pak lze získat i v programu Mathematica pomocí funkce Chinese Remainder.

$$\mathrm{ChineseRemainder}[\{1,1,1,1,1,0\},\{2,3,4,5,6,7\}]$$

Výsledek je 301.

Žena měla v košíku 301 vajec.

Nepozorný prodavač

„Karel Kyjovský byl vždy dobrým matematikem. Jednou ho poslala matka nakoupit zeleninu a ovoce. Karel si věci vybral a hlásil prodavači svůj nákup: dvě kila hroznů po 9 Kč, za 5,40 svazky zeleniny, tři kila jablek, šest kilo švestek. Po čem jsou jablka a švestky, nevím.

Prodavač si psal ceny na papírek, ale tak, že to Karel neviděl.

„Platíte 53,30 Kč," ohlásil Karlovi.

„To jste se musil zmýlit," namítl Karel.

Prodavač se znovu sklonil nad papírek – a skutečně. Omluvil se Karlovi, oznámil mu novou cenu, o něco vyšší. Karel bez váhání zaplatil a odešel.

Úkolem je zjistit, jak mohl Karel poznat, že se prodavač zmýlil?" (VTM, 1954 – 1990)

Řešení:

- 2 kg hroznů …………………… 9,-/1kg
- Svazky zeleniny ……………… 5,40,-
- 3 kg jablek
- 6 kg švestek

Celkem 53,30,-

Ceny jsou dělitelné 3. I když nevíme, kolik stojí jablka a švestky, máme je po třech a po šesti kilogramech. Jakoukoliv cenu vynásobenou množstvím třech či šesti kilogramů, bude dělitelná 3.

Cena 53,30,- není dělitelná 3, proto Karel věděl, že se prodavač zmýlil.

Zmýlil se Platón?

„Řecký filosof Platón v jednom svém pojednání udává, že nejvhodnější počet obyvatelstva ve městě je udán číslem, které je dělitelné 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10. Je prý to číslo 5040, nejmenší z čísel těchto vlastností. Zdá se však, že se filosof zmýlil.

Přesvědčte se, zda Platónovo číslo je skutečně dělitelné uvedeným čísly a také je-li opravdu jejich nejmenším společným násobkem.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Nejmenší společný násobek čísel 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10.

n(2) = 2	n(7) = 7
n(3) = 3	n(8) = 2 x 4 = 2 x 2 x 2= 2^3
n(4) = 2 x 2 = 2^2	n(9) = 3 x 3 = 3^2
n(6) = 2 x 3	n(10) = 2 x 5

n(2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10) = 2^3 x 3^2 x 5 x 7 = $\underline{\underline{2520}}$

2520 : 2 = 1260	2520 : 7 = 360
2520 : 3 = 840	2520 : 8 = 315
2520 : 4 = 630	2520 : 9 = 280
2520 : 6 = 420	2520 : 10 = 252

Nejmenší společný násobek čísel (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10) je číslo 2520, které je zároveň dělitelné čísly (2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10).

Mocniny

Jak starý byl návštěvník?

„Jeden návštěvník, který přišel, pronesl: „Bylo mi x let v roce x^2.“

Kolik návštěvníkovi bylo?“

Řešení: Bylo mi x let v roce x^2.

- Časopis je z roku 1954, tak odmocníme 1954.

$$\sqrt{1954} = 44{,}204$$

- Umocníme číslo nejblíže k výsledku odmocniny z 1954.

$$44^2 = 1936$$

- Zkusíme umocnit i číslo větší než je odmocnina z 1954.

$$45^2 = 2025$$

Návštěvníkovi bylo 44 let v roce 1936.

Rychlé mocnění

„Karel Kyjovský je jistě nejlepším počtářem ze třídy. Všichni jsme se mořili s postupem při mocnění, pletli jsme se, dělali jsme chyby. Jenom Karel povídá: „Vy s tím naděláte řeči. Takové příklady vám vypočítám zpaměti.“

Ohradili jsme se, aby se tolik nechlubil. Ale Karel řekl: „Dejte mi tedy nějaké dvojciferné číslo, o němž se právě dřete.“ Podíval se po našich sešitech a vybral si od Škváry, největšího mazala, 35^2.

„To je 1225.“ Prohodil s úsměvem. Škvára se potil, potil, a teprve za deset minut zjistil, že opravdu 35^2 je 1225.

„Tak ještě něco,“ usmál se Karel. „Víte co, aby to bylo lehčí, volte čísla s pětkou na konci.“ Vybrali jsme 85^2. Karel hned hlásil: „7225.“ Tak to šlo dále. Já jsem si myslil, že ho nachytám. Dal jsem mu 105, ačkoliv jsme mocnění trojciferných čísel ještě neprobírali.

„11025." Usmál se Karel.

Zkuste přijít na to, jak Karel Kyjovský dělá, že nám řekne hned výsledek, ještě dříve, než si to stačíme napsat na papír." (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Jedná se o mocnění přirozených čísel, která končí 5. Každé takové číslo lze zapsat ve tvaru $10a + 5$. Máme pak $(10a + 5)^2 = 100\,a^2 + 100\,a + 25 = 100a\,(a + 1) + 25$. Teď je dobře vidět, jak lze při výpočtu postupovat. Vypočteme součin čísla a a čísla $a + 1$. Měli bychom za něj napsat dvě nuly kvůli násobení stem, ale je možné rovnou připsat 25, čímž vlastně přičítáme třetí sčítanec.

35^2 = 4.3 a 5^2 = 12 a 25 = 1225

35^2 = 3^2 + 3 a 5^2 = 9 + 3 a 25 = 1225

85^2 = 8^2 + 8 a 5^2 = 64 + 8 a 25 = 7225

105^2 = 10^2 + 10 a 5^2 = 100 + 10 a 25 = 11025

MERRY XMAS TO ALL

„Slovo XMAS znamená Christmas, překlad tedy zní: Veselé Vánoce všem!

V tomto pozdravu máte písmena nahradit číslicemi, ale tak, aby každé slovo vyjadřovalo čtverec (druhou mocninu) celého čísla.

Úkol se dá dobře rozluštit prostým úsudkem. Pravděpodobně bude nejlepší začít řešení slůvkem ALL. Velmi pomůže i kratičké slůvko TO, které rovněž musí představovat druhou mocninu. I slovo MERRY se svými dvěma E hodně pomůže.

Problém má dvě řešení." (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Napíšeme si pod nadpis čísla, která by mohla znázorňovat jednotlivá písmena. Víme, že se jedná o mocniny. Práci by nám mohly urychlit školní tabulky druhých mocnin.

- U slabiky TO můžeme vypsat jen mocniny čísel 4, 5, 6, 7, 8, 9, protože ty jediné jsou v řádu desítek.
- U slova ALL získáme jen tři čísla. Hledáme takové druhé mocniny, které mají dvě poslední číslice stejné.
- Pomoc k zúžení čísel nám může i slovo MERRY, díky dvěma R vedle sebe, můžeme hned velkou škálu čísel vynechat. Budeme hledat mocniny větší než 100

MERRY XMAS TO ALL

12996	1024	16 144
13225	1089	25 400
18225	1296	36 900
20449	1369	49
24336	1764	64
27556	1849	81
27556	1936	
27889	2304	
34225	2401	
	2601	
	2704	
	2809	
	2916	
	3025	
	3249	
	3481	
	3721	
	4096	
	4356	
	4761	
	5041	
	5184	
	5329	
	5476	
	6084	
	6241	
	6724	
	7056	
	7396	
	7569	

7921

8649

9025

9216

9604

9801

• Pokud za ALL zvolíme 144:

<u>MERRY XMAS TO ALL</u>	<u>MERRY XMAS TO ALL</u>
25 144	36 144

- Pokud bychom zvolili 25, nemůžeme použít žádné z čísel, které máme napsané u MERRY, pokud bychom použili 36, tak kvůli výskytu číslic 3 a 6 a ze slova ALL 1 a 4, nemůžeme použít žádné z čísel napsané u MERRY, protože se tam vyskytují právě tyto číslice.

• Pokud za ALL zvolíme 400:

<u>MERRY XMAS TO ALL</u>	<u>MERRY XMAS TO ALL</u>
27889 ~~3249~~ 16 400	25 400
~~6241~~	

- Pokud vezmeme 16, jediné číslo, které by bylo vhodné dosadit za MERRY je – 27889. Tudíž ve slovu XMAS na druhém místě musí být 2 a na třetím 4. Taková čísla jsou dvě, ale ta obsahují na pozicích X a S čísla, která už jsou přidělená jiným.
- 25 to také nemůže být.

<u>MERRY XMAS TO ALL</u>

18225 36 400

27889

- Pro číslo 36 mohou být dvě vhodná čísla, která by vyjadřovala MERRY, a to – 18225 a 27889. Žádné číslo, které by se hodilo za slovo XMAS, které má mít na pozicích dva a tři čísla 1 a 4 není. A v druhé variantě čísla 2 a 4 existují čísla, ale opět pro nás nejsou vhodná.

MERRY XMAS TO ALL

28556   3429   81 400

~~6241~~

- Kombinace čísel za TO 81, ALL 400 je vhodné za MERRY jedno číslo – 27556 a díky tomu hledáme čísla pro XMAS, kde na druhé pozici je 2 a na třetí 4. Ty už z předešlých víme, že jsou dvě. Jen jedno nám ale vyhovuje.

  MERRY XMAS TO ALL

  27556   3249   81 400

• Pokud za ALL zvolíme 900:

- Budeme postupovat stejně jako v předchozích variantách až dojdeme k druhému řešení: MERRY XMAS TO ALL

  34225   7396   81 900

Rovnice

Stará indická úloha

„První slovní úlohou dávající kvadratickou rovnici je asi úloha, která je v učebnici Inda Bhaskara Acarya z dvanáctého století:

Počet opic, děleno osmi a umocněno dvěma udává ty, které poskakovaly v háji. Zbylých 12 opic zůstalo na pahorku a hašteřilo se. Kolik opic bylo celkem ve stádě?

Úlohu je možno řešit buď kvadratickou rovnicí, nebo zkusmo. Jsou možné dva správné výsledky.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>:

- Opice v háji ………………. $\left(\frac{x}{8}\right)^2$
- <u>Opice na pahorku ……… 12</u>

  Celkem opic ………………. x

$$\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$$

$$\left(\frac{x^2}{64}\right) + 12 = x \qquad /\times 64$$

$$x^2 + 768 = 64x$$

$$x^2 - 64x + 768 = 0$$

$D = b^2 - 4 \times ac$

$D = (-64)^2 - 4 \times 1 \times 768$

$D = 4096 - 3072$

$D = 1024$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{64 \pm \sqrt{1024}}{2} =$

$x_1 = \frac{64+32}{2} = \frac{96}{2} = 48$

$x_2 = \frac{69-32}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$$\underline{K = [48, 16]}$$

Zkouška: $L_{48} = \left(\frac{48}{8}\right)^2 + 12 = (6)^2 + 12 = 36 + 12 = 48$

$P_{48} = 48$

$$\underline{L_{48} = P_{48}}$$

$L_{16} = \left(\frac{16}{8}\right)^2 + 12 = (2)^2 + 12 = 4 + 12 = 16$

$P_{16} = 16$

$$\underline{L_{16} = P_{16}}$$

Opic bylo 48 nebo 16.

Jednoduchá matematická úloha

„Rovnice: $[3\,(230 + t)]^2 = 492\,a04$. Nahraďte příslušnými číslicemi písmena „*t*“ a „*a*“.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Máme zjistit „*t*“ a „*a*“ z rovnice: $[3\,(230 + t)]^2 = 492\,a04$

$[3\,(230 + t)]^2 = 492\,a04 \qquad /\sqrt{}$

$[3\,(230 + t)] = \sqrt{492\,a04}$

$690 + 3t = \sqrt{492\,a04}$

Zkusíme najít takové číslo, které po odmocnění je přirozené číslo.

- Zkusíme za „*a*“ dosadit 0 = $\sqrt{492\,004} = 701{,}429968$
- Umocníme 701: $701^2 = 491\,401$ → potřebujeme větší číslo
- Umocníme 702: $702^2 = 492\,804$ → číslo, které potřebujeme

⇒ <u>*a* = 8</u>

$690 + 3t = 702 \qquad /(-690)$

$3t = 12 \qquad /:3$

$\underline{t = 4}$

Zkouška: $L = [3(230 + 4)]^2 = [3(234)]^2 = (702)^2 = 492\,804$

$P = 492\,804$

$$\underline{L = P}$$

Jak spojit řetěz?

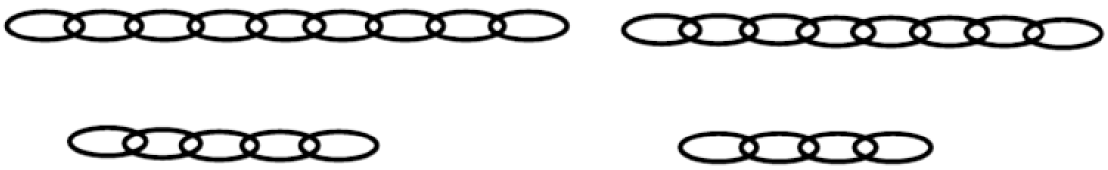
„Máte čtyři kusy řetězu: první má 9 článků, druhý 8 článků, třetí 5 článků a poslední 4 články. Chcete z nich sestavit jediný nekonečný, tj. do sebe uzavřený řetěz.

Přeseknutí jednoho článku stojí 50 haléřů, sváření článku stojí 1 korunu 50 haléřů. Zač nejlevněji si nekonečný řetěz pořídíte?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Úlohu můžeme vyřešit pomocí náčrtku a rovnice.

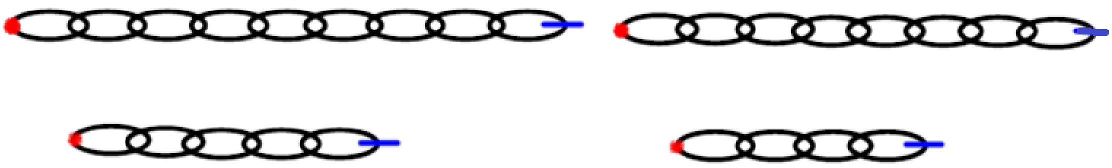
• Pomocí náčrtu: Nakreslíme si řetěz.

Obrázek 7



- Rozříznutí .... 0,5,-.......................... označíme modrou čarou
- Přivaření .... 1,5,- .... označíme červeným puntíkem

Obrázek 8



Z obrázku můžeme vidět, že potřebujeme 4× rozříznout řetězy a 4× je přivařit.

$$4 \times 0{,}5 + 4 \times 1{,}5 = 8,-$$

• Pomocí rovnice:

- Rozříznutí .... 0,5,- .... označíme *r*
- Přivaření .... 1,5,- .... označíme *p*

Podle náčrtku i podle počtu řetězů můžeme vidět, že budeme potřebovat 4× rozříznout řetěz a 4× ho přivařit.

$$4r + 4p = 4 \times 0{,}5 + 4 \times 1{,}5 = 2 + 6 = 8,-$$

Nejlevněji si pořídíme nekonečný řetěz za 8 korun.

Jak rozdělit číslo?

„Máte číslo 45 rozdělit na čtyři díly tak, abyste dostali stejný výsledek, jestliže k první části přidáte 2, od druhého čísla 2 odečtete, třetí 3 násobíte a čtvrté číslo 2 dělíte. Jistě vám nebude těžké tato čísla vyhledat nebo vypočítat.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>:

- 45 rozdělíme na 4 díly: $a + 2 = x$

  $b - 2 = x$

  $c \times 2 = x$

  $d \div 2 = x$

- Sestavíme rovnici.

$$(x + 2) + (x - 2) + (x \times 2) + (x \div 2) = 45$$

$$4x + \frac{x}{2} = 45 \qquad /\times 2$$

$$8x + x = 90$$

$$9x = 90$$

$$\underline{x = 10}$$

- Dopočítáme jednotlivé díly:

  $a + 2 = 10$ $\qquad$ $c \times 2 = 10$

  $\underline{a = 8}$ $\qquad$ $\underline{c = 5}$

  $b - 2 = 10$ $\qquad$ $d \div 2 = 10$

  $\underline{b = 12}$ $\qquad$ $\underline{d = 20}$

Hledaná čísla jsou 8, 12, 5 a 20.

Jak rozdělit stovku?

„Máte číslo 100 rozdělit na čtyři čísla, však musí mít tyto zajímavé vlastnosti: od prvního čísla odečtete 4, ke druhému přimetete 4, třetí násobíte 4 a čtvrté 4 dělíte. Při tom ve všech čtyřech případech dostanete stejný výsledek.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Úlohu budeme řešit stejně jako předchozí.

Sestavíme si rovnici:

$$(x-4)+(x+4)+4x+\frac{x}{4}=100$$

$$6x+\frac{x}{4}=100 \qquad /\times 4$$

$$24x+x=400$$

$$25x=400 \qquad /\div 25$$

$$\underline{x=16}$$

16 je hledané číslo. Když od něj odečteme 4, dostaneme číslo 12, když přičteme 4, dostaneme číslo 20, po vynásobení čísla se 4 dostaneme 64 a nakonec, když jej vydělíme, dostane 4.
Kontrolou po nás je sečtení získaných čísel 12, 20, 64 a 4 vznikne 100.

Číslo 100 rozdělíme na čísla 12, 20, 64 a 4.

Z dovolené

„Loni v létě jsem si na dovolenou zajel do chaty svého přítele Jana. Těšil jsem se na dlouhé procházky a na příjemné koupání a zatím …… pršelo a pršelo.

Protože jsme oba věřili, že se na nás sluníčko přece jen usměje, trpělivě jsme vysedávali na verandě chaty a za jednotvárného bubnování deště krátili si dlouhou chvíli ledasčím – tedy i hádankami.

Jednou mi Jan řekl: „Jestlipak víš, že zvířata pana Zvoníčka – to byl náš soused – mají 16 hlav a 100 nohou?“

Tak početný zvěřinec jsem u pana Zvoníčka jakživ neviděl. Ale Jan hned vysvětlil dál: „Víš přece, že má psa a slepice. Chudák pes má blech a slepice zase osminohá klíšťata.

– když teď tohle víš, jistě dokážeš vypočítat, kolik je kterých zvířat. Ještě ti prozradím, že blech je třikrát tolik co slepic, a klíšťat o jedno víc než blech.“

Dal jsem se do toho. Ale než jsem byl hotov, přestalo pršet – a tak jsem tenhle problém nedořešil.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Zvířata pana Zvoníčka mají 16 hlav a 100 nohou

- Má: psa ………………… 1hlavu/ 4 nohy ……………………………… 1
  Slepice …………… 1 hlava/ 2 nohy …………………………….. x
  Blechy ……………. 1 hlava/ 6 nohou
  Klíšťata ………….. 1 hlava/ 8 nohou
- Blech …………………… 3x více než slepic ………………………….. $3x$
- Klíšťat ………………….. o 1 více než blech ………………………….. $3x + 1$

Zapíšeme to do rovnice:

$$1 + x + 3x + (3x + 1) = 16$$
$$7x = 14$$
$$\underline{x = 2}$$

Pes ……………. 1

Slepice ………. $x = 2$

Blechy ……….. $3x = 3 \times 2 = 6$

Klíšťata ………. $3x + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$

Hlavy: $1 + 2 + 6 + 7 = 16$

Nohy: $1\times4 + 2\times2 + 6\times6 + 7\times8 = 4 + 4 + 36 + 56 = 100$

Pan Zvoníček má jednoho psa, který má šest blech a dvě slepice, které mají sedm klíšťat.

Matematika kolem Tomáška

„Přičteme-li ke stáří malého Tomáška tři roky, dostaneme číslo, jehož druhou odmocninou je číslo celé. Tato odmocnina se rovná Tomáškově věku, zmenšenému o tři roky.“

Řešení: Stáří Tomáška …………………… x let

Zapíšeme do rovnice:

$$\sqrt{x+3} = x - 3 \qquad /^2$$
$$x + 3 = x^2 - 6x + 9$$
$$-x^2 + 7x - 6 = 0$$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-6)$

$D = 49 - 24$

$D = 25$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{2 \times (-1)} =$

$x_1 = \frac{-7+5}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1$

$x_2 = \frac{-7-5}{-2} = \frac{-12}{-2} = 6$

Zkouška: $L_1 = \sqrt{1+6} = \sqrt{7}$

$P_1 = 1 - 3 = -2$

$$\underline{L_1 \neq P_1}$$

$L_2 = \sqrt{6+3} = \sqrt{9} = 3$

$P_2 = 6 - 3 = 3$

$$\underline{L_2 = P_2}$$
$$\underline{\underline{K = [6]}}$$

Tomáškovi je šest let.

Syn je pětkrát starší

„Syn je pětkrát starší než dcera, matka pětkrát starší než syn, otec je dvakrát starší než matka, babička, která je tak stará jako celá rodina dohromady, právě oslavila 81. narozeniny. Kolik je synovi, kolik dceři, kolik ostatním?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>:

- Stáří dcery ………………………. D let
- Stáří syna …………………………S let……………. 5D
- Stáří matky ……………………… M let…………. 5S = 5×5×D
- Stáří otce ………………………….. O let………….. 2M = 2×5×5×D
- Stáří babičky …………………….. B let……………. D + S + M + O = 81 let

Sestavíme rovnici:

$$D + 5D + 25D + 50D = 81$$

$$81D = 81$$

$$\underline{D = 1}$$

- Stáří dcery ………………. D = 1 rok
- Stáří syna ……………….. 5D = 5 let
- Stáří matky …………….. 25D = 25 let
- Stáří otce ………………… 50D = 50 let
- Stáří babičky ………….. D + S + M + O = 1 + 5 + 25 + 50 = 81 let

Dceři je rok, synovi pět let, matce dvacet pět, otci padesát a babičce osmdesát jedna.

Soustavy rovnic

Stěhování natřikrát

„Nedávno se stěhoval jeden můj přítel. Nevím, z jakého důvodu si objednal nákladní automobil a ne stěhovací vůz. Protože potřeboval odstěhovat dosti značné množství nábytku, muselo auto jet třikrát, než odvezlo i poslední kus.

Po prvé naložili 1 velký kus, 3 středně velké a 3 malé kusy. Při druhé jízdě vezli 2 velké kusy a 6 malých. Při třetí 4 středně velké kusy a 6 malých kusů.

Taky jsem pomáhal, a tak mě pochopitelně zajímalo, kolik se po každé vezlo. „To je zajímavé," odpověděl mi přítel, „ale vždycky to bylo stejně: 900 kilo. Jestlipak bys z toho uměl určit váhu jednotlivých kusů nábytku?" (VTM, 1954 – 1990)

Řešení:

- Velký kus ………………… x kg
- Středně velký kus …… y kg
- Malý kus ………………… z kg
- Každá cesta …………… 900 kg

Sestavíme soustavu rovnic o třech neznámých:

$$1x + 3y + 3z = 900$$
$$2x + 6z = 900$$
$$\underline{4y + 6z = 900}$$

- Z druhé rovnice vyjádříme x: $2x = 900 - 6z \qquad /\div 2$

$$x = 450 - 3z$$

- Využijeme dosazovací metodu.

$$450 - 3z + 3y + 3z = 900$$
$$\underline{4y + 6z = 900}$$
$$3y = 450$$
$$\underline{4y + 6z = 900}$$

- Z první rovnice vyjádříme y: $3y = 450 \quad /\div 3$

$\underline{y = 150}$

- Dosadíme do poslední rovnice.

$4 \times 150 + 6z = 900$

$6z = 300 \quad /\div 6$

$\underline{z = 50}$

- Dopočítáme x: $x = 450 - 3z$

$x = 450 - 3 \times 50$

$x = 450 - 150$

$\underline{x = 300}$

Zkouška: $L_1 = 1 \times 300 + 3 \times 150 + 3 \times 50 = 300 + 450 + 150 = 900$

$P_1 = 900$

$\underline{L_1 = P_1}$

$L_2 = 2 \times 300 + 6 \times 50 = 600 + 300 = 900$

$P_2 = 900$

$\underline{L_2 = P_2}$

$L_3 = 4 \times 150 + 6 \times 50 = 600 + 300 = 900$

$P_3 = 900$

$\underline{L_3 = P_3}$

Velký kus nábytku vážil 300 kg, střední kus 150 kg a malý jen 50 kg.

Úkol pro přemýšlivé hlavy

„Máme pětimístné číslo $a - b - c - d - e$. Vypočítejte toto pětimístné číslo.

Napovíme vám: součet číslic $b - c - d - e$ je 23, součet $c - d - e - a$ je 18, $d - e - a - b$ = 25, $e - a - b - c$ = 21 a součet číslic $a - b - c - d$ je 17.“

<u>Řešení</u>:

Sestavíme soustavu rovnic:

$$b + c + d + e = 23$$

$$c + d + e + a = 18$$
$$d + e + a + b = 25$$
$$e + a + b + c = 21$$
$$\underline{a + b + c + d = 17}$$
$$4a + 4b + 4c + 4d + 4e = 104 \qquad /\div 4$$
$$\underline{a + b + c + d + e = 26}$$

Jednotlivě od této rovnice odečteme součet číslic, které známe. Získáme vždy jednu číslici.

$$a + b + c + d + e = 26$$
$$\underline{-(b + c + d + e) = 23}$$
$$\underline{\underline{a = 3}}$$

$$a + b + c + d + e = 26$$
$$\underline{-(a + b + c + e) = 21}$$
$$\underline{\underline{d = 5}}$$

$$a + b + c + d + e = 26$$
$$\underline{-(a + c + d + e) = 18}$$
$$\underline{\underline{b = 8}}$$

$$a + b + c + d + e = 26$$
$$\underline{-(a + b + c + d) = 17}$$
$$\underline{\underline{e = 9}}$$

$$a + b + c + d + e = 26$$
$$\underline{-(a + b + d + e) = 25}$$
$$\underline{\underline{c = 1}}$$

Zkouška:

- $a + b + c + d + e = 3 + 8 + 1 + 5 + 9 = 26$
- $b + c + d + e = 8 + 1 + 5 + 9 = 23$
- $a + c + d + e = 3 + 1 + 5 + 9 = 18$
- $a + b + d + e = 3 + 8 + 5 + 9 = 25$
- $a + b + c + e = 3 + 8 + 1 + 9 = 21$
- $a + b + c + d = 3 + 8 + 1 + 5 = 17$

Pětimístné číslo *abcde* je 38159.

Košík ořechů

„Babička poslala třem vnukům košík ořechů. Dělení se ujali dva nejstarší, kteří uměli dobře počítat, protože chodili do osmiletky. Rozdělili celkový počet ořechů v poměru stáří všech tří.

Když byly ořechy rozděleny, zjistili, že Karel měl tolik co Zdeněk a ještě třetinu toho, co měl Vláďa. Vláďa měl tolik co Karel a třetinu Zdeňkova podílu. Zdeněk měl 20 ořechů a třetinu Karlova podílu.

Zjistěte, kolik bylo celkem ořechů, kolik dostal každý z chlapců a kolik bylo každému z nich let.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Karel ……………………… dostal *K* ořechů

Vláďa …………………….. dostal *V* ořechů

Zdeněk ………………….. dostal *Z* ořechů

• Vypočítáme pomocí soustavy rovnic o třech neznámých, jednotlivý počet ořechů:

$$K = Z + \frac{1}{3}V$$

$$V = K + \frac{1}{3}Z$$

$$\underline{Z = 20 + \frac{1}{3}K}$$

$$K - \frac{1}{3}V - Z = 0$$

$$-K + V - \frac{1}{3}Z = 0$$

$$\underline{-\frac{1}{3}K + Z = 20}$$

- Z poslední rovnice vyjádříme *Z*: $Z = 20 + \frac{1}{3}K$
- Využijeme dosazovací metodu:

$$K - \frac{1}{3}V - 20 - \frac{1}{3}K = 0$$

$$\underline{-K + V - \frac{1}{3}\left(20 + \frac{1}{3}K\right) = 0}$$

$$\frac{2}{3}K - \frac{1}{3}V = 20$$

$$-\frac{10}{9}K + V = \frac{20}{9} \qquad /\times\frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}K - \frac{1}{3}V = 20$$

$$-\frac{10}{27}K + \frac{1}{3}V = \frac{20}{9}$$

$$\frac{2}{3}K - \frac{10}{27}K = 20 + \frac{20}{9}$$

$$\frac{8}{27}K = \frac{200}{9}$$

$$K = \frac{200}{9} \times \frac{27}{8} = \frac{150}{2} = 75$$

- Dopočítáme zbylé neznámé:

$$Z = 20 + \frac{1}{3}K = 20 + \frac{1}{3} \times 75 = 20 + 25 = 45$$

$$V = K + \frac{1}{3}Z = 75 + \frac{1}{3} \times 45 = 75 + 15 = 90$$

Karel dostal 75 ořechů, Zdeněk 45 ořechů a Vláďa 90 ořechů.

• Celkem ořechů: 75 + 45 + 90 = 210 ořechů.

• Stáří chlapců zjistíme poměrem:

90 : 75 : 45 /÷7,5

12 : 10 : 6

Vláďovi je 12 let, Karlovi 10 let a Zdeňkovi 6 let.

Chlapci dostali celkem 210 ořechů, z toho 90 ořechů Vláďa, 75 ořechů Karel a 45 ořechů Zdeněk. Vláďovi je 12 let, Karlovi 10 a nejmladší je Zdeněk, kterému je 6 let.

Čísla doopravdy zvláštní

„Máte-li najít dvě čísla, jejichž součet činí 60 a rozdíl 12, znáte je dřív, než dočtete toto povídání do konce, protože je hned vidět, že to jsou čísla dělitelná dvanácti. Ale možná, že vám dá více práce najít taková čísla rovnicí.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Dvě čísla ……………………… *x, y*

Sestavíme rovnici:

$$x + y = 60$$
$$\underline{x - y = 12}$$

- Využijeme sčítací metodu:

$$2x = 72 \quad / \div 2$$
$$\underline{x = 36}$$

- Dopočítáme *y* z první rovnice:

$$y = 60 - x$$
$$y = 60 - 36$$
$$\underline{y = 24}$$
$$\underline{\underline{K = [36{,}24]}}$$

Čísla, jejichž součet činí 60 a rozdíl 12 jsou 36 a 24.

Známe dvě celá čísla

„Známe dvě celá čísla, jejichž součet je dvakrát velký, jako jejich rozdíl a součin třikrát tak veliký, jako jejich součet. Zjistěte, která čísla to jsou.“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Dvě celá čísla ………………………… *x, y*

Sestavíme soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$x + y = 2(x - y)$$
$$\underline{xy = 3(x + y)}$$
$$x + y = 2x - 2y$$
$$\underline{xy = 3x + 3y}$$
$$0 = x - 3y$$
$$\underline{xy = 3x + 3y}$$

- Vyjádříme z první rovnice *x*: $x = 3y$
- A dosadíme do druhé:

$$3y \times y = 3 \times 3y + 3y$$
$$3y^2 = 9y + 3y$$
$$3y^2 = 12y$$

$$3y^2 - 12 = 0$$

$$3y(y-4) = 0$$

$$\Rightarrow y - 4 = 0 \vee 3y = 0$$

$$y = 4 \qquad y = 0$$

- Dopočítáme *x*:

$$x = 3y$$

$$x = 3 \times 4$$

$$x = 12$$

$$\underline{\underline{K = [12{,}4]}}$$

Hledaná celá čísla jsou 4 a 12.

Známé zajímavé dvojciferné číslo

„Známe zajímavé dvojciferné číslo. Zaměníte-li pravou číslici levou a naopak, dostanete nové číslo. Odečtete-li je od původního čísla, zbude vám 18. Sečtete-li obě čísla, bude součet 88. Dokážete sestavit rovnici, kterou byste původní číslo vypočetli?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladě.

- Pravé číslo …………………….. *x*
- Levé číslo ……………………… *y*

Sestavíme soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$x - y = 18$$

$$\underline{x + y = 88}$$

- Využijeme sčítací metodu:

$$2x = 106 \qquad /\times 2$$

$$\underline{x = 53}$$

- Dopočítáme *y* z druhé rovnice:

$$y = 88 - x$$

$$y = 88 - 53$$

$$\underline{y = 35}$$

$$\underline{K = [53,35]}$$

Hledané dvojciferné číslo je 53, když obrátíme pořadí cifer, vznikne číslo 35.

Kolik bylo pionýrů?

„V oddíle bylo 38 pionýrů různého věku 10, 11, 12, 13, 14 let. Jedenáctiletých bylo stejně jako třináctiletých, desetiletých stejný počet jako čtrnáctiletých, dvanáctiletých bylo o tři více než jedenáctiletých a jedenáctiletých o pět více než desetiletých. Je to poněkud zamotaná úloha, že?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>:

38 pionýrů: Desetiletých je *x* ………………… stejně jako čtrnáctiletých (*v*).

Jedenáctiletých je *y* …………… stejně jako třináctiletých (*u*) ………… o 5 více než desetiletých.

Dvanáctiletých je *z* ……………… bylo o 3 více než jedenáctiletých.

Třináctiletých je *u*.

Čtrnáctiletých je *v*.

- $y = u$
- $x = v$
- $z = y + 3$
- $\underline{y = x + 5}$

  38 pionýrů

Sestavíme soustavu rovnic o dvou neznámých:

$$x + y + (y + 3) + y + x = 38$$
$$\underline{x + (x + 5) + (y + 3) + y + x = 38}$$
$$2x + 3y = 35 \qquad /\times(-3)$$
$$\underline{3x + 2y = 30 \qquad /\times 2}$$
$$-6x - 9y = -105$$
$$\underline{6x + 4y = 60}$$

- Využijeme sčítací metodu:

$$-5y = -45$$

$$\underline{y = 9}$$

- Dopočítáme *x*:

$$2x = 35 - 3y$$

$$2x = 35 - 3 \times 9$$

$$2x = 35 - 27$$

$$2x = 8$$

$$\underline{x = 4}$$

- Dopočítáme zbylé neznámé:

$x = 4$		desetiletých jsou 4
$y = 9$		jedenáctiletých je 9
$z = y + 3 = 9 + 3 = 12$	$\Rightarrow$	dvanáctiletých je 12
$u = y = 9$		třináctiletých je 9
$v = x = 4$		čtrnáctiletých jsou 4

$x + y + z + u + v = 4 + 9 + 12 + 9 + 4 = 38$

V oddíle, kde bylo 38 pionýrů, bylo 4 desetiletí, 9 jedenáctiletých, 12 dvanáctiletých, 9 třináctiletých a 4 čtrnáctiletí.

Úloha se dá řešit i jako rovnice o jedné neznámé.

Slovní úlohy o pohybu

Nešťastná vlaštovka

„V kůlně u stěny stál traktor a odpočíval přes zimu. Aby nepřekážel, postavili ho až těsně k trámu.

Vlaštovka si z jara stavěla hnízdo, a nešťastnou náhodou si zvolila příhodný prostor mezi trámem a střechou traktoru. Už vyseděla vajíčka a krmila mláďata, když se stala strašná věc. Traktor se dal do pohybu a hnízdo se roztrhlo na dvě části. V každé půlce zůstala nějaká holátka.

Nešťastná vlaštovka, když to spatřila, začala zděšeně létat od trámu k jedoucímu traktoru a hned zase nazpět. Šlo ji to z počátku dobře, protože traktor jel pouze rychlostí 12 km za hodinu, kdežto vlaštovka létala rychlostí šedesátikilometrovou.

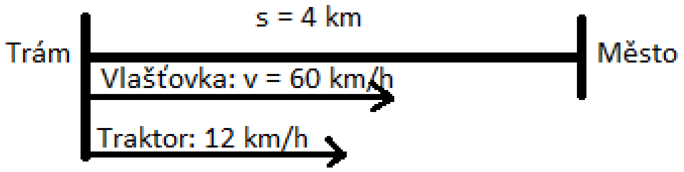
Ale jak se vzdálenost mezi traktorem a trámem zvětšovala, vlaštovka slábla, a když konečně traktor zastavil ve městě čtyři kilometry vzdáleném, klesla a nemohla dále.

Jakou dráhu nalétala svými střídavými lety mezi oběma půlkami hnízda? Vzdálenost mezi nimi se přece neustále zvětšovala.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Vzorec pro výpočet pohybu: $\boxed{s = v \times t}$

Nejdříve vytvoříme náčrt:

Obrázek 9



- Pomocí vzorce zjistíme, jak dlouho jel traktor do města.

$$t = \frac{s}{v}$$

$$t = \frac{4}{12}$$

$$\underline{t = \frac{1}{3}\ h = 20\ min}$$

- Nyní můžeme zjistit, kolik kilometrů nalétala vlaštovka, protože létala tak dlouho, jak jel traktor do města.

$$s = v \times t$$

$$s = 60 \times \frac{1}{3}$$

$$\underline{s = 20\ km}$$

Celkově vlašťovka nalétala 20 km.

Dva parníky

„Dva parníky vyjely z přístavu přes Středozemní moře z Evropy do Afriky. Oba pluly stejnou cestou, do stejného přístavu. Pobyly v africkém přístavu stejnou dobu a zase se vrátily zpět.

Jenže první parník vyjel s těžkým nákladem a mohl pokračovat jen pomalu, rychlostí 40 km za hodinu.

Druhý parník vyplul současně s ním, ale protože to byl osobní parník a plul rychlostí 50 km za hodinu, ztratil brzy nákladní loď z očí.

Ale nákladní parník vyložil na africkém pobřeží své zboží a vracel se prázdný nazpět. Protože se mu ulehčilo a topiči pospíchali domů, přikládali pilně pod kotle, takže loď nyní plula rychlostí 60 km za hodinu.

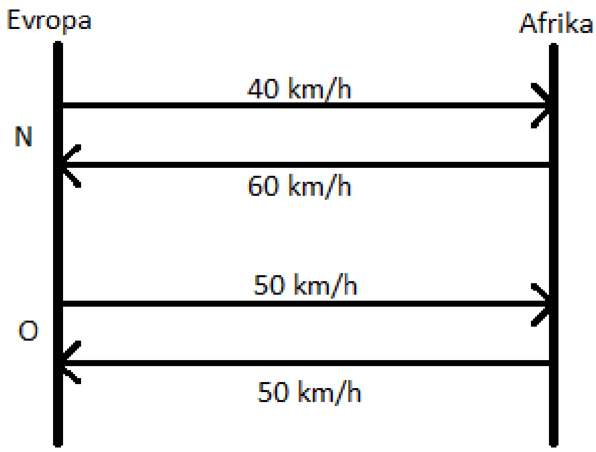
Který parník připlul nazpět do mateřského přístavu první? Pravděpodobně oba stejně, protože nákladní plul jednou 40, po druhé 60 km/h a osobní stále 50 km/h. Ale pro jistotu to raději vypočtěte.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Záleží nám na době, kterou jeli. $\boxed{s = v \times t}$

Vytvoříme si náčrt: N = Nákladní parník

O = osobní parník

Obrázek 10



- *s* si můžeme zvolit nebo najít, pro výpočet není rozhodující. *s* = 1200 km
- Pro výpočet celkového času, musíme vypočítat čas každé cesty a pak jej sečíst.

N: $t = t_1 + t_2$

$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{1200}{40} = 30\ h$

$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{1200}{60} = 20\ h$

$$t = t_1 + t_2 = 30 + 20 = 50\ h$$

O: $t = t_1 + t_2$

$t_1 = \frac{s}{v} = \frac{1200}{50} = 24\ h$

$t_2 = \frac{s}{v} = \frac{1200}{50} = 24\ h$

$$t = t_1 + t_2 = 24 + 24 = 48\ h$$

Osobní parník bude rychlejší.

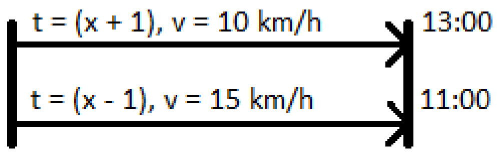
Běh na lyžích

„Lyžař si vypočítal, že poběží-li na lyžích rychlostí 10 km za hodinu, dorazí do chaty hodinu po poledni. To se mu nezamlouvalo. Chtěl být na chatě už při obědě. Přepočítal tedy svůj výkon a zjistil, že by při rychlosti 15 km za hodinu doběhl do chaty už hodinu před polednem. Jakou rychlostí by tedy měl běžet, aby dorazil k chatě právě v poledne?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Musíme vypočítat dráhu a čas, když by jel lyžař tak, aby přijel ve 12. $\boxed{s = v \times t}$

Vytvoříme si náčrt:

Obrázek 11



- Jednotlivé dráhy se rovnají.

$$s_1 = s_2$$
$$s_1 = v_1 \times t_1$$
$$s_2 = v_2 \times t_2$$
$$v_1 \times t_1 = v_2 \times t_2$$
$$10 \times (x+1) = 15 \times (x-1)$$
$$10x + 10 = 15x - 15$$
$$-5x = -25$$
$$\underline{x = 5h}$$

- Dopočítáme s_1 a s_2:

$$s_1 = 10 \times (x+1) = 10 \times (5+1) = 10 \times 6 = 60\ km$$
$$s_2 = 15 \times (x-1) = 15 \times (5-1) = 15 \times 4 = 60\ km$$
$$s = s_1 = s_2$$

- Můžeme dopočítat ideální rychlost:

$$v = \frac{s}{t}$$
$$v = \frac{60}{5}$$
$$\underline{v = 12\ km/h}$$

Lyžař by měl běžet rychlostí 12 km/h, aby v chatě byl přesně v poledne.

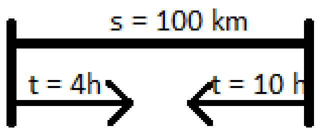
Motorový člun

„Motorový člun jezdí na řece mezi dvěma městy, vzdálenými od sebe 100 km. Po proudu urazí člun tuto vzdálenost za 4 hodiny, proti proudu za 10 hodin. Vypočtěte, jakou rychlostí by se pohyboval člun po klidné vodní hladině.

Řešení: Abychom vypočetli, jakou rychlostí by se pohyboval člun po klidné vodní hladině, musíme vypočítat jednotlivé rychlosti a z nich vypočítat průměr. $\boxed{s = v \times t}$

Vytvoříme náčrt:

Obrázek 12



- Pomocí vzorce vypočteme jednotlivé rychlosti:

$$v = \frac{s}{t}$$

$v_1 = \frac{100}{4} = 25\ km/h$ $v_2 = \frac{100}{10} = 10\ km/h$

- Vypočteme průměr rychlostí:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{25 + 10}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5\ km/h$$

Po klidné řece pojede motorový člun rychlostí 17,5 km/h.

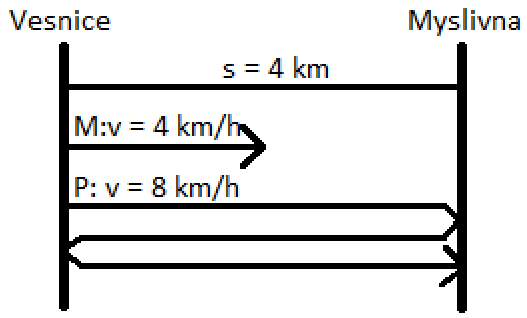
Myslivec se vrací

„Myslivec se vrací z vesnice do 4 km vzdálené myslivny. Jde rychlostí 4 km za hodinu. Jeho pes však běží dvakrát rychleji. Doběhne proto k myslivně, když je myslivec na půli cesty, obrátí se a běží mu vstříc. Když jej dostihne, opět se obrátí a běží k myslivně. Tak běhá stále mezi myslivcem a myslivnou, dokud myslivec nedojde domů. Jakou dráhu pes urazí celkem?

Řešení: Vytvoříme si nákres: M = myslivec

P = pes

Obrázek 13



- Pomocí vzorce nejprve vypočteme, jak dlouho myslivci trvalo dojít do myslivny.

$$t_m = \frac{s}{v} = \frac{4}{4} = 1\ h$$

- Teď můžeme zjistit, kolik kilometrů ušel pes.

$$s_p = v \times t = 8 \times 1 = 8\ km$$

Pes urazí 8 km.

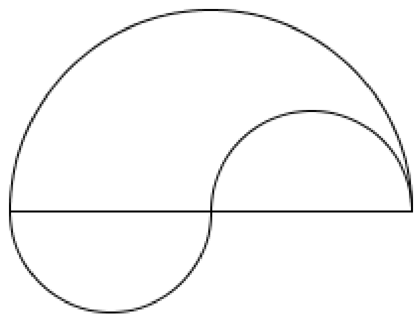
Geometrie

Geometrická úloha

„ Je na první pohled jasné, jak vznikla silně ohraničená plocha: z půlkruhu jsme na jedné straně malý polokroužek vyřízli a na druhé straně jej zase přidali.

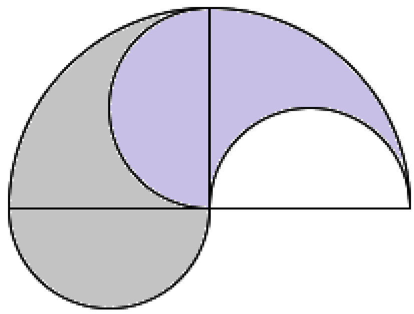
Snadno si tedy pomocí pravítka a kružítka podobný tvar narýsujete. Vzniklé kapce podobnou plochu rozdělíte přesně na dvě stejné poloviny."

Obrázek 14



<u>Řešení</u>:

Obrázek 15



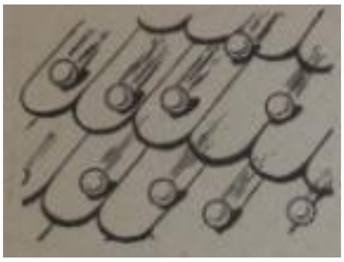
Jaká má být střecha?

„Po střeše, jak víte, za deště stékají kapky vody. Stékají tím rychleji, čím více je skloněná.

Vypočítejte, pod jakým úhlem je třeba střechu naklonit od vodorovného směru, aby se kapka, která na ni spadne svisle, co nejrychleji dostala dolů.

Pozor: myslíte si, čím větší úhel, tím rychleji se bude kapka pohybovat. Ale nezapomínejte, že jde o střechu, jejíž šikmá plocha se bude s rostoucím úhlem sklonu prodlužovat. Nespadne tudíž kapka nejrychleji ani ze střechy blízké vodorovné ploše (protože poteče pomalu), ani ze střechy blízké ploše svislé (protože bude tato plocha nesmírně dlouhá).“ (VTM, 1954 – 1990)

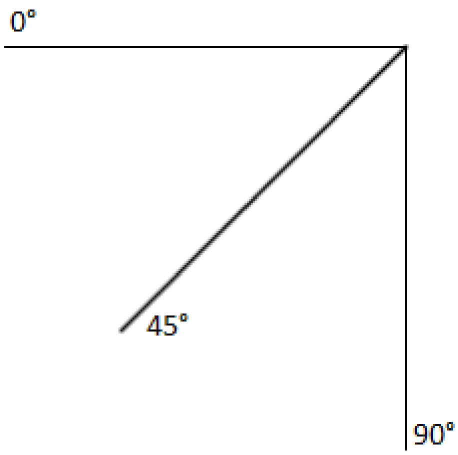
Obrázek 16



Zdroj: VTM, 1954 - 1990

<u>Řešení</u>:

Obrázek 17



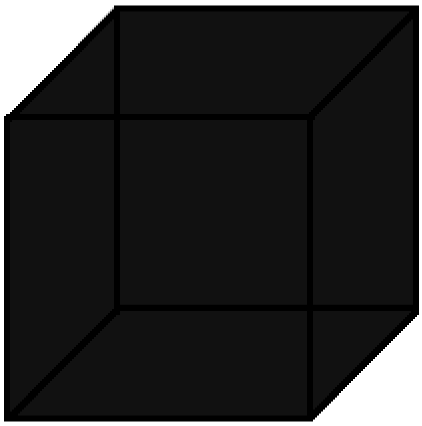
Střecha musí být ve sklonu 45° od vrcholu. Jedná se o prostřední možnost. Kdyby střecha měla větší sklon, protáhla by se. Kdyby měla menší sklon, kapce by trvalo delší dobu stéct. Takto uprostřed je to kompromis obou.

Pět minut na rozmyšlenou

„Příklad na představivost: myslete si, že máte v ruce dřevěnou krychli o straně 30 cm. Celou ji natřete černou barvou. A teď zodpovězte těchto sedm otázek:

1. Kolik řezů musíte vykonat, abyste krychli rozřízli na menší krychle o straně 1 dm?
2. Kolik takových krychlí dostanete?
3. Kolik jich bude mít 4 černé stěny?
4. Kolik jich bude mít 3 černé stěny?
5. Kolik jich bude mít 2 černé stěny?
6. Kolik jich bude mít 1 černou stěnu?
7. Kolik krychlí bude bez barvy?“ (VTM, 1954 – 1990)

Obrázek 18



<u>Řešení</u>: Odpovíme postupně na všechny otázky:

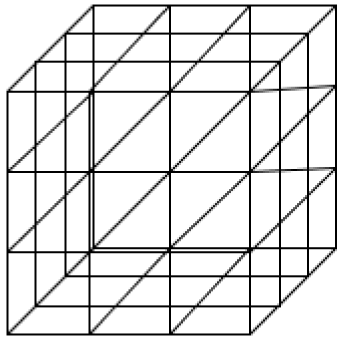
1. Kolik řezů musíte vykonat, abyste krychli rozřízli na menší krychle o straně 1 dm?

- 1 dm = 10 cm $\Rightarrow$ 2x uděláme řezy vodorovně, 2x svislé řezy z přední strany a 2x svislé řezy z boční strany $\Rightarrow$ <u>6 řezů</u>

2. Kolik takových krychlí dostanete?

- 3 řady po 9 krychlích = <u>27 krychliček</u>

Obrázek 19

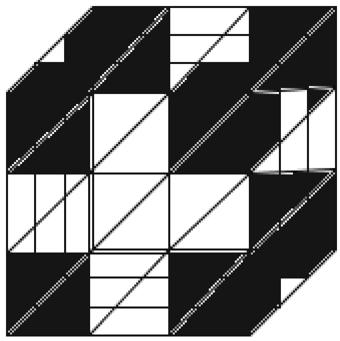


3. Kolik jich bude mít 4 černé stěny?

- Každá krychlička vznikla řezem, tudíž má alespoň jednu stěnu bílou (kvůli řezu) $\Rightarrow$ <u>0 krychliček</u>

4. Kolik jich bude mít 3 černé stěny?

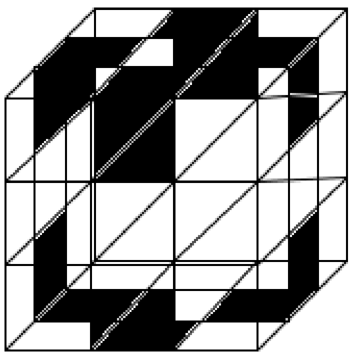
Obrázek 20



- To budou rohové krychličky $\Rightarrow$ <u>8 krychliček</u>

5. Kolik jich bude mít 2 černé stěny?

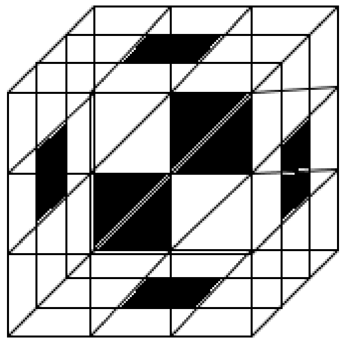
Obrázek 21



- Jedná se o krychličky na hraně uprostřed $\Rightarrow$ <u>12 krychliček</u>

6. Kolik jich bude mít 1 černou stěnu?

Obrázek 22



- Jedná se o krychličky uprostřed stěn $\Rightarrow$ <u>4 krychličky</u>

7. Kolik krychlí bude bez barvy?

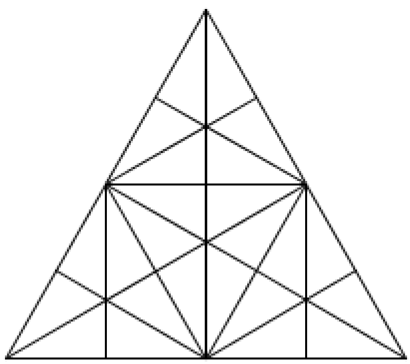
- Bude to jen jedna krychlička a to přímo uprostřed celé krychle $\Rightarrow$ <u>1 krychlička</u>

To si započítáte?

„Na obrázku vidíte docela nevinný rovnostranný trojúhelník, v němž jsou vztyčeny kolmo ke stranám tři výšky. Spojíme-li středy stran, dostaneme čtyři nové rovnoramenné trojúhelníky, v nichž opět spustíme z vrcholů kolmice na základny. Je to celkem jednoduchý a prostý nákres.

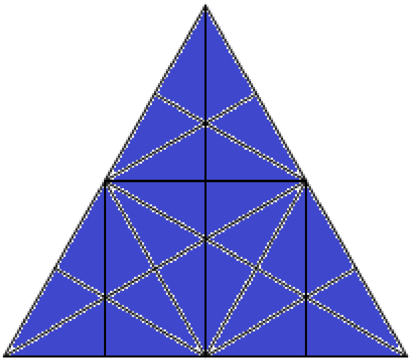
Spočítejte kolik je na obrázku trojúhelníků?“ (VTM, 1954 – 1990)

Obrázek 23



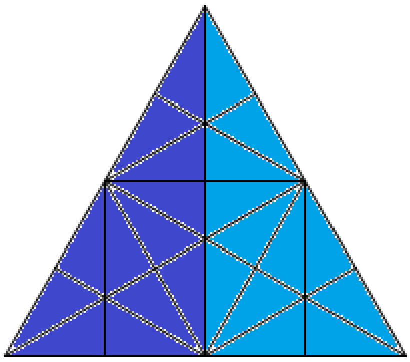
<u>Řešení</u>: Budeme počítat od největších po nejmenší trojúhelníky.

Obrázek 24



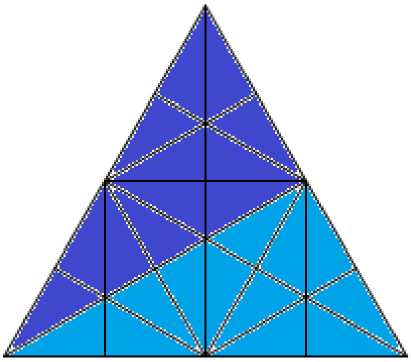
1 trojúhelník

Obrázek 25



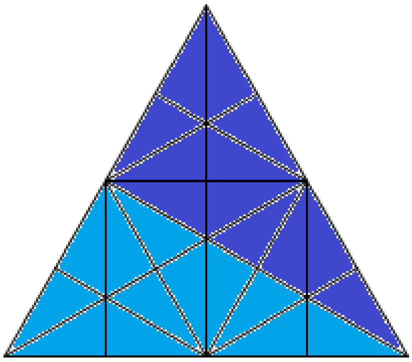
2 trojúhelníky

Obrázek 26



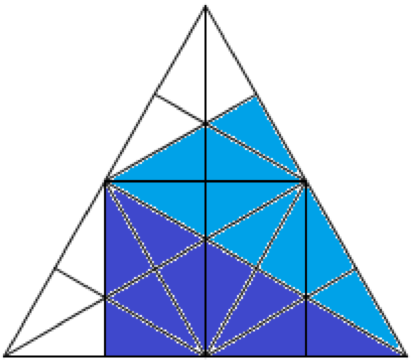
2 trojúhelníky

Obrázek 27



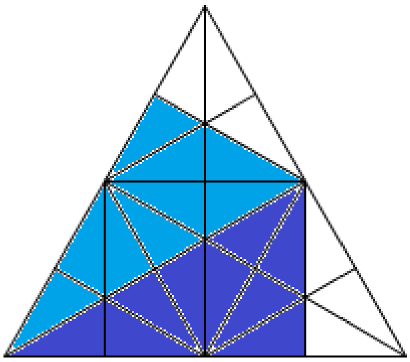
2 trojúhelníky

Obrázek 28



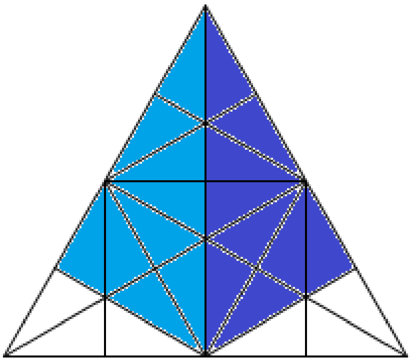
2 trojúhelníky

Obrázek 29



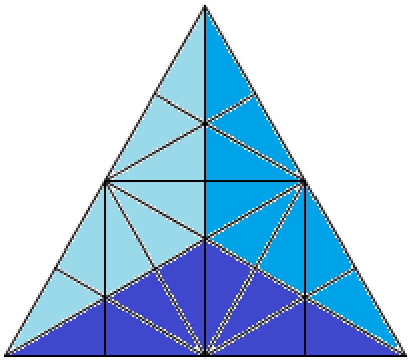
2 trojúhelníky

Obrázek 30



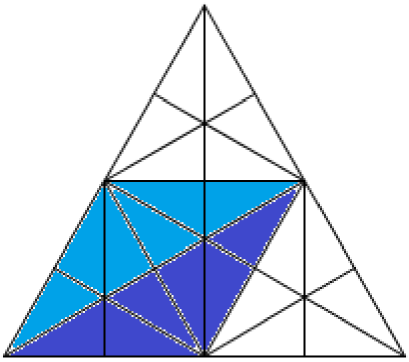
2 trojúhelníky

Obrázek 31



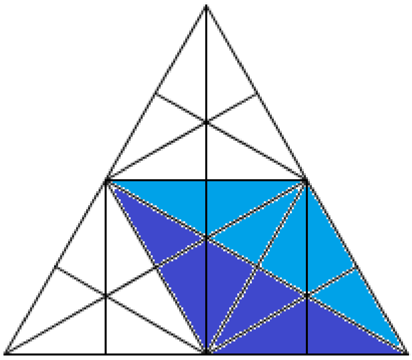
3 trojúhelníky

Obrázek 32



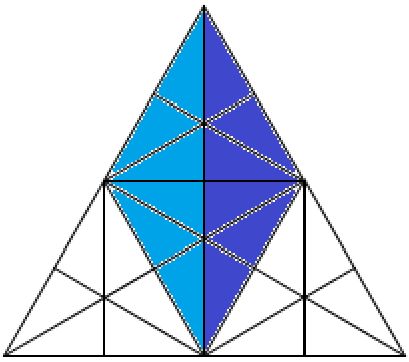
2 trojúhelníky

Obrázek 33



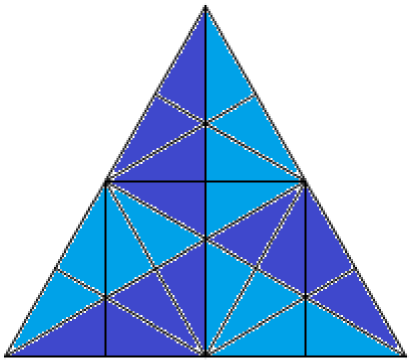
2 trojúhelníky

Obrázek 34



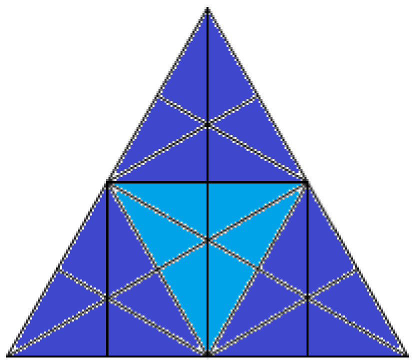
2 trojúhelníky

Obrázek 35



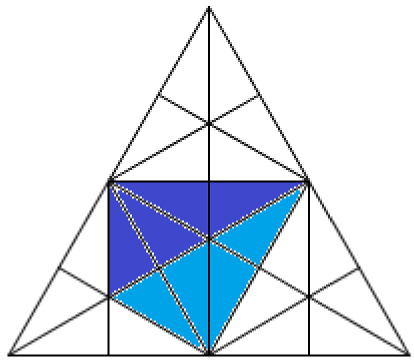
6 trojúhelníků

Obrázek 36



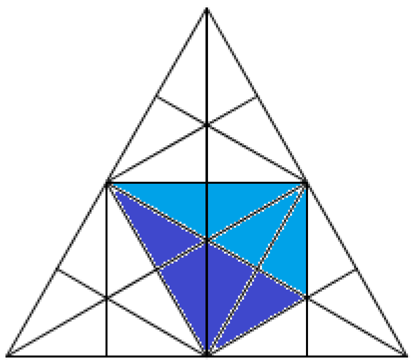
4 trojúhelníky

Obrázek 37



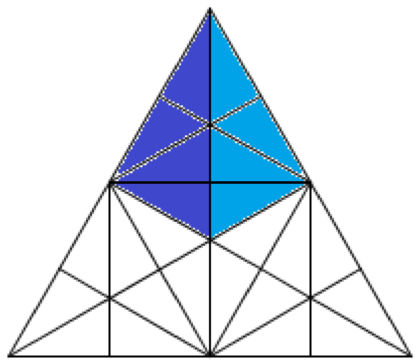
2 trojúhelníky

Obrázek 38



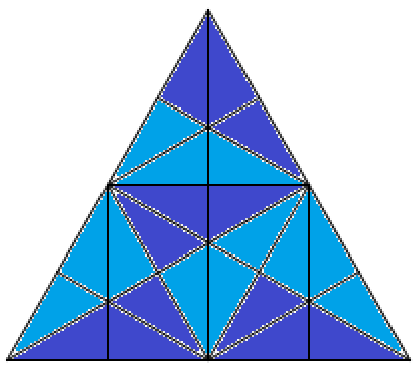
2 trojúhelníky

Obrázek 39



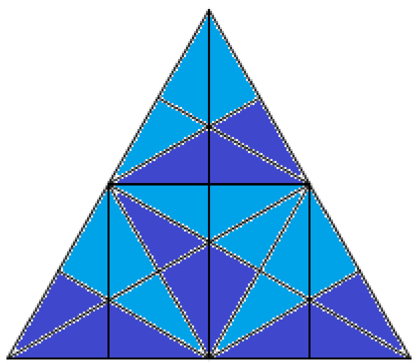
2 trojúhelníky

Obrázek 40



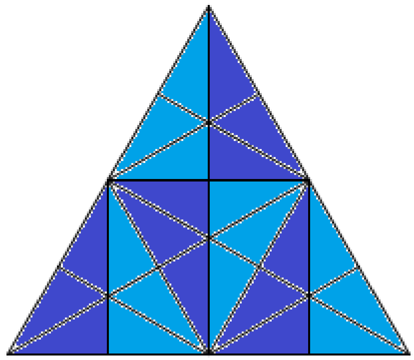
8 trojúhelníků

Obrázek 41



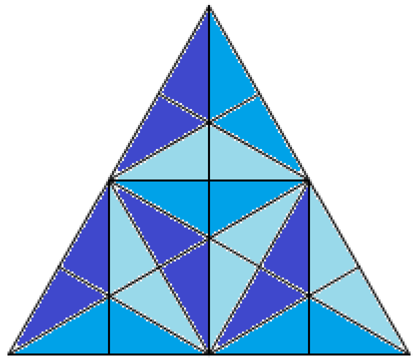
8 trojúhelníků

Obrázek 42



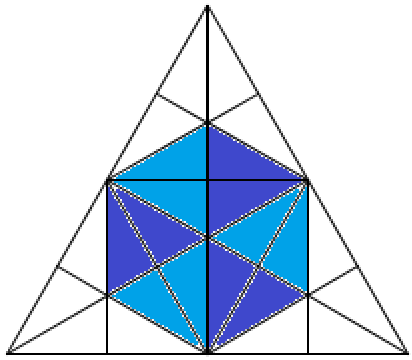
8 trojúhelníků

Obrázek 43



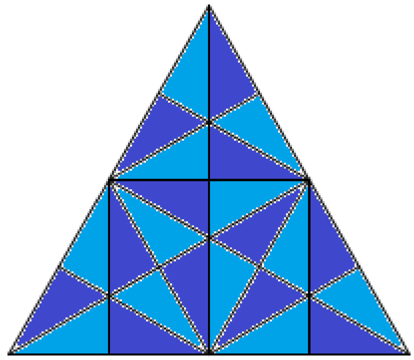
12 trojúhelníků

Obrázek 44



6 trojúhelníků

Obrázek 45



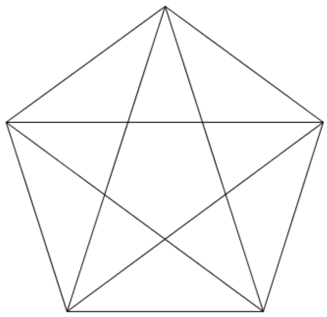
24 trojúhelníků

Dohromady máme 104 trojúhelníků.

Pojďte počítat!

„Podívejte se na obrázek a spočítejte, kolik je na něm trojúhelníků. Zkuste spočítat, kolik je na obrazci čtyřúhelníků.“

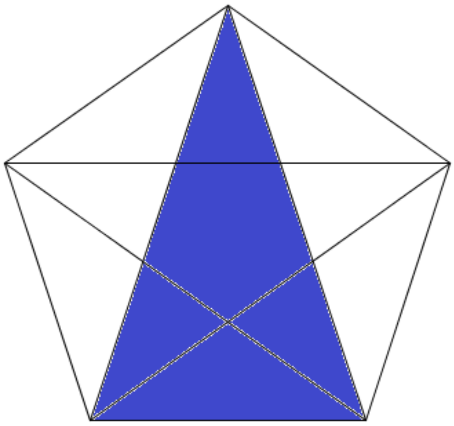
Obrázek 46



Řešení:

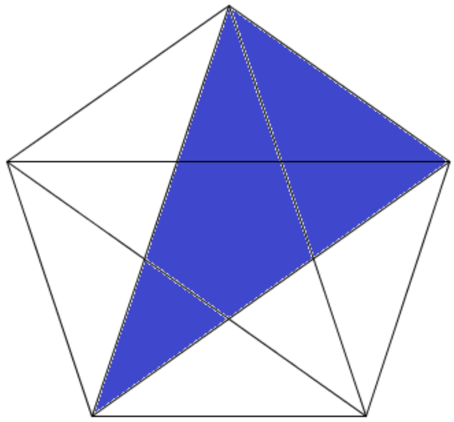
• Trojúhelníky: Budeme počítat trojúhelníky od největších po nejmenší.

Obrázek 47



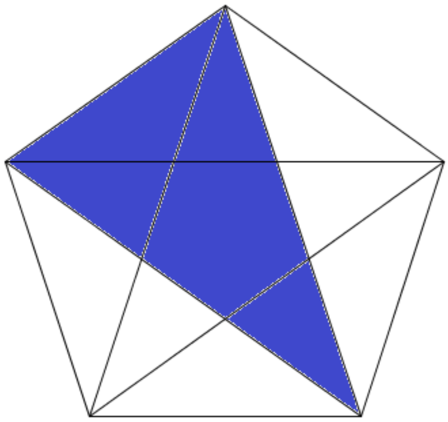
1 trojúhelník

Obrázek 48



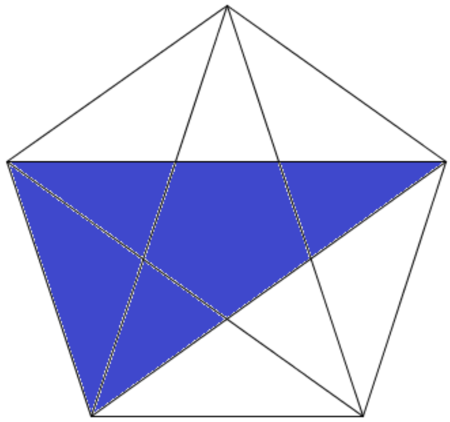
1 trojúhelník

Obrázek 49



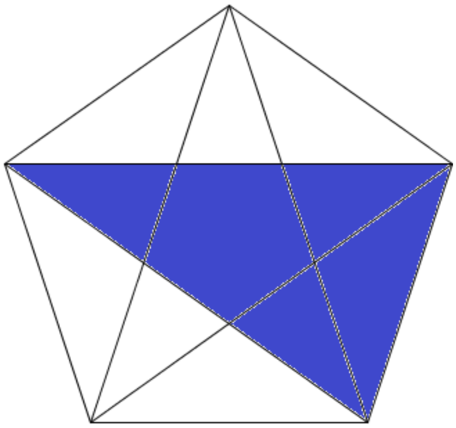
1 trojúhelník

Obrázek 50



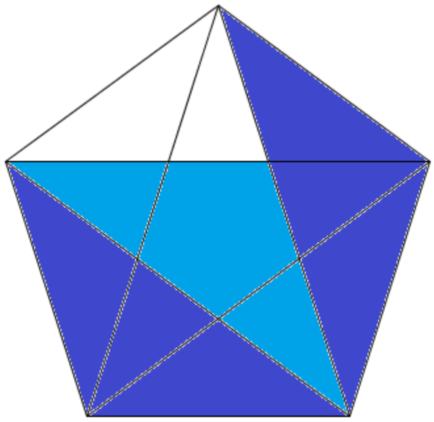
1 trojúhelník

Obrázek 51



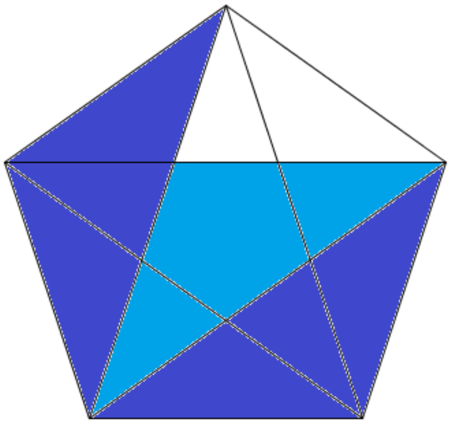
1 trojúhelník

Obrázek 52



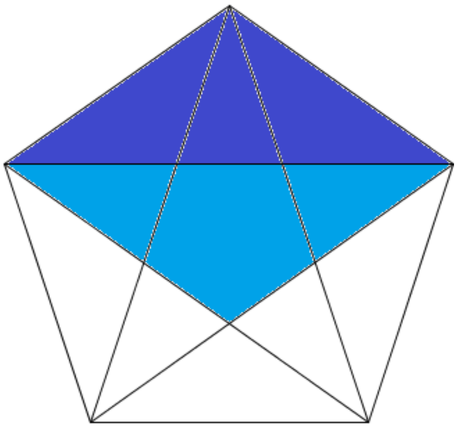
3 trojúhelníky

Obrázek 53



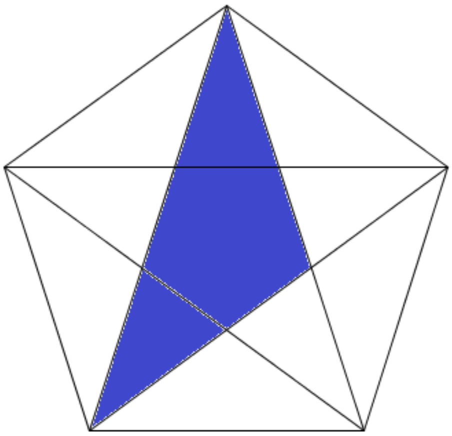
3 trojúhelníky

Obrázek 54



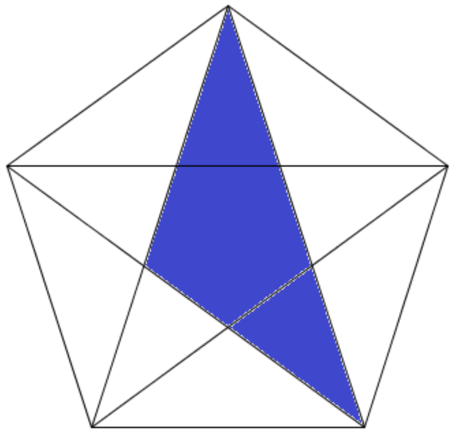
2 trojúhelníky

Obrázek 55



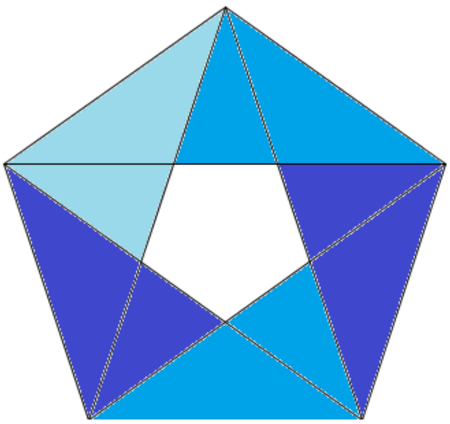
1 trojúhelník

Obrázek 56



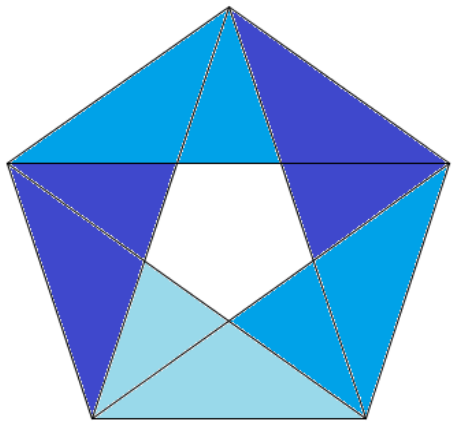
1 trojúhelník

Obrázek 57



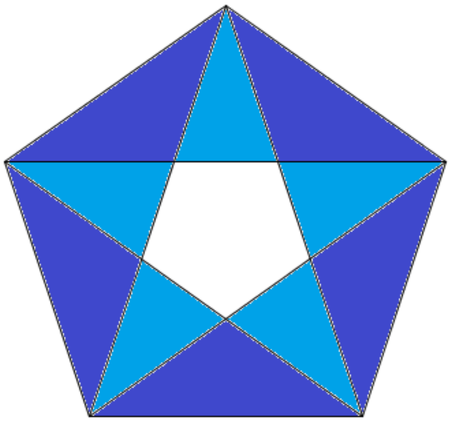
5 trojúhelníků

Obrázek 58



5 trojúhelníků

Obrázek 59

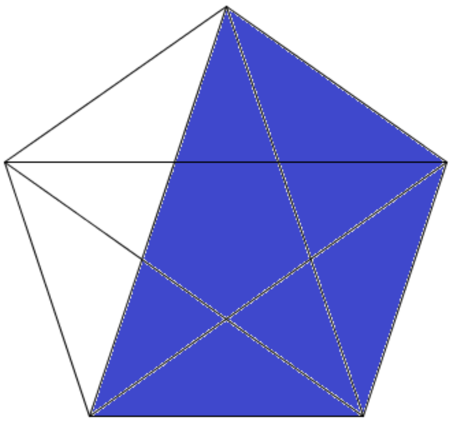


10 trojúhelníků

Dohromady máme 35 trojúhelníků.

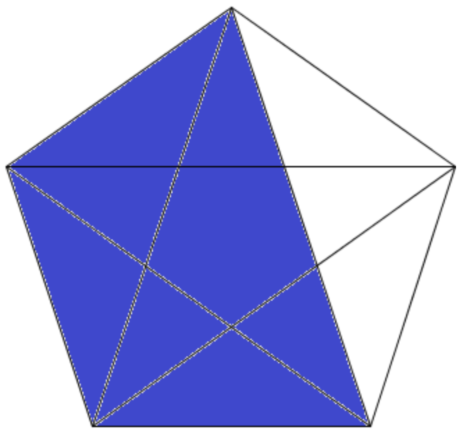
• Čtyřúhelníky: Budeme počítat čtyřúhelníky od největších po nejmenší.

Obrázek 60



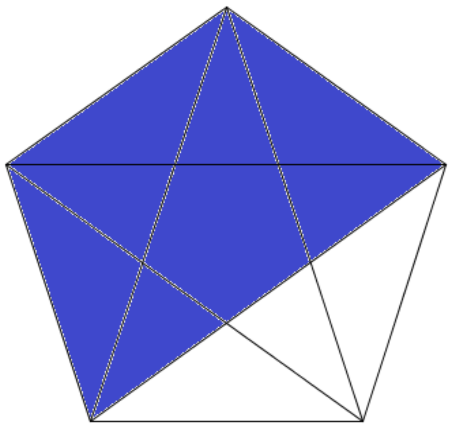
1 čtyřúhelník

Obrázek 61



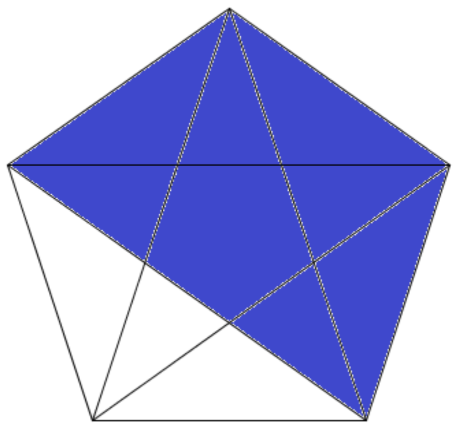
1 čtyřúhelník

Obrázek 62



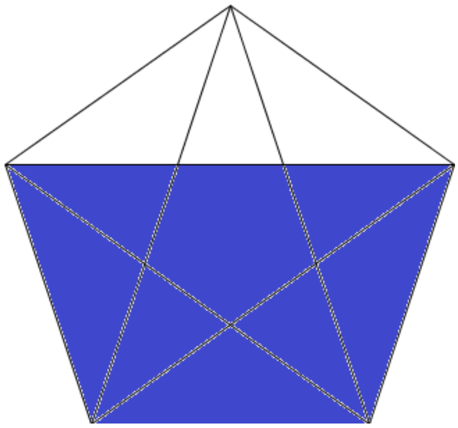
1 čtyřúhelník

Obrázek 63



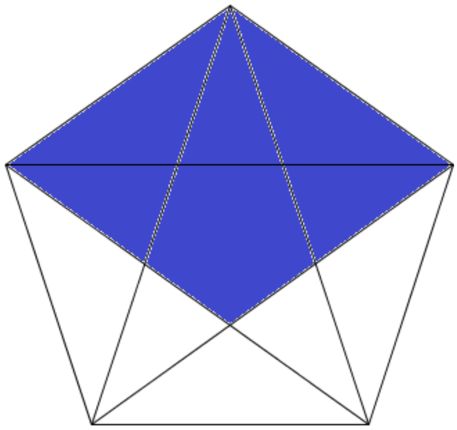
1 čtyřúhelník

Obrázek 64



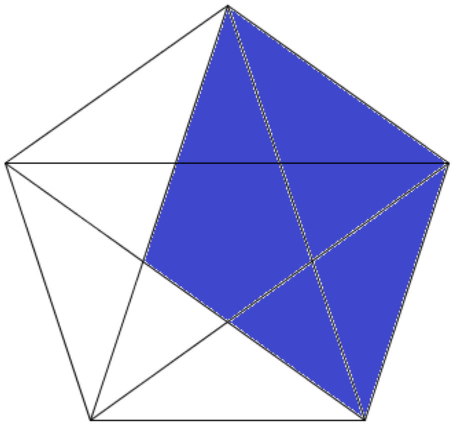
1 čtyřúhelník

Obrázek 65



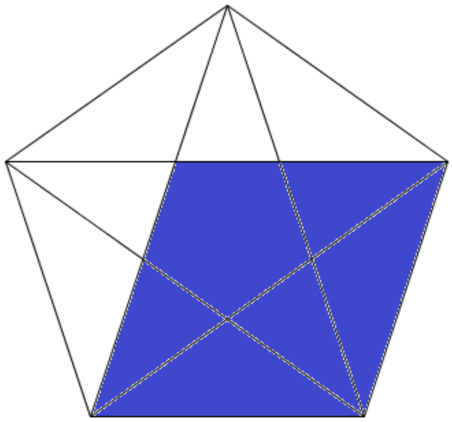
1 čtyřúhelník

Obrázek 66



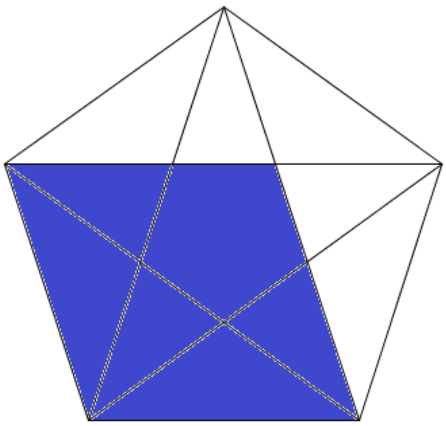
1 čtyřúhelník

Obrázek 67



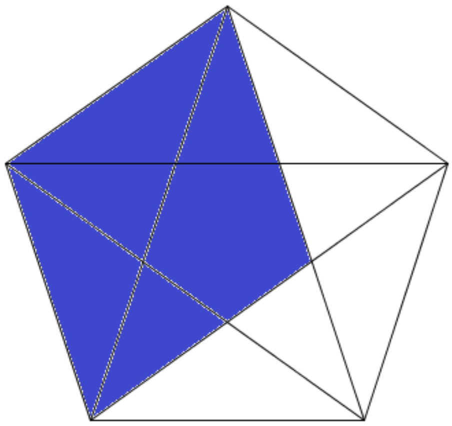
1 čtyřúhelník

Obrázek 68



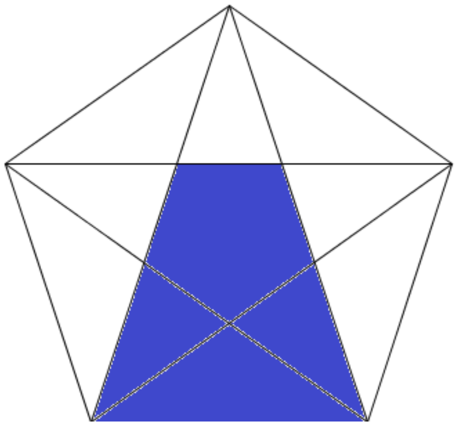
1 čtyřúhelník

Obrázek 69



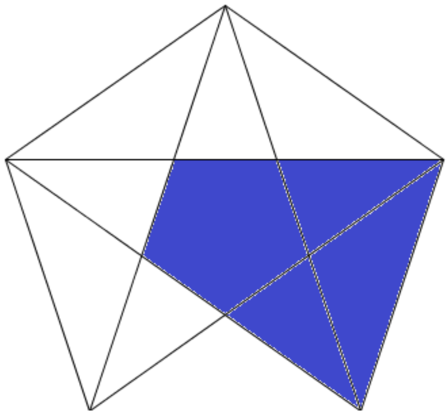
1 čtyřúhelník

Obrázek 70



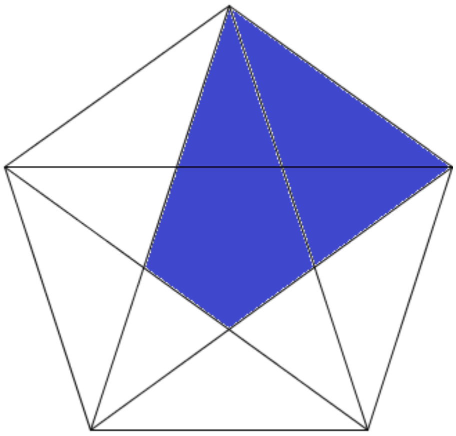
1 čtyřúhelník

Obrázek 71



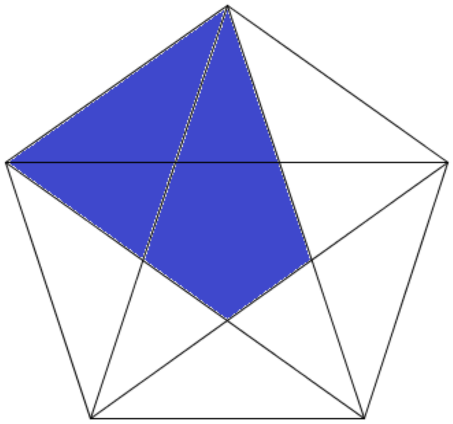
1 čtyřúhelník

Obrázek 72



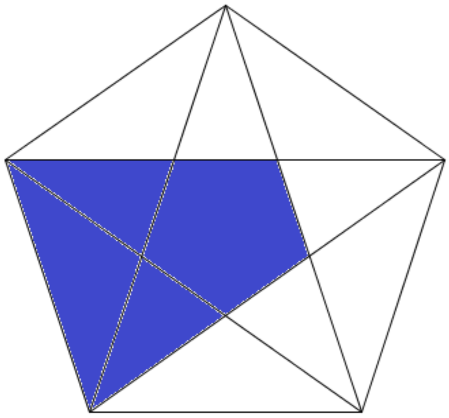
1 čtyřúhelník

Obrázek 73



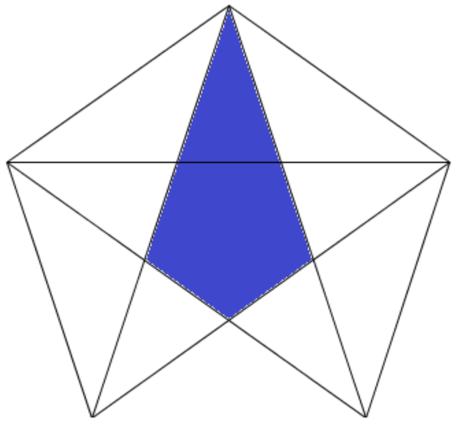
1 čtyřúhelník

Obrázek 74



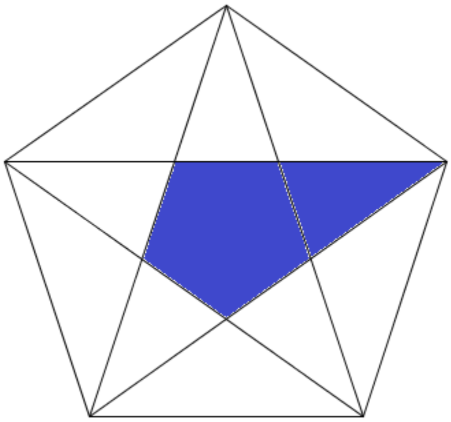
1 čtyřúhelník

Obrázek 75



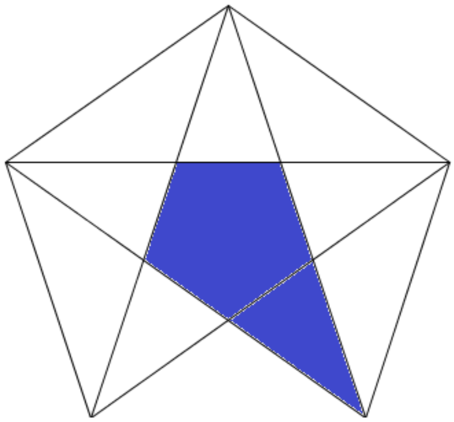
1 čtyřúhelník

Obrázek 76



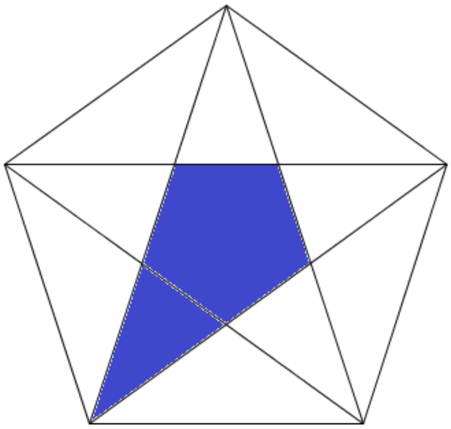
1 čtyřúhelník

Obrázek 77



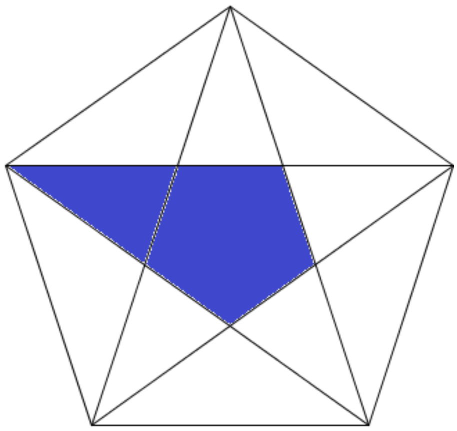
1 čtyřúhelník

Obrázek 78



1 čtyřúhelník

Obrázek 79



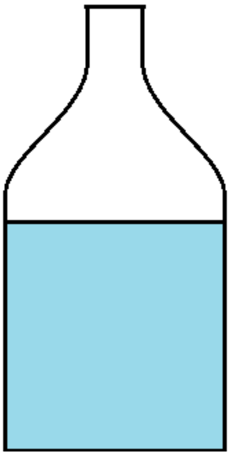
1 čtyřúhelník

Dohromady je 20 čtyřúhelníků. V řešení časopisu Věda a technika mládeži bylo napsáno 25 čtyřúhelníků. Může se jednat o chybu anebo se nám nepodařilo je nalézt.

Jak změříme obsah láhve?

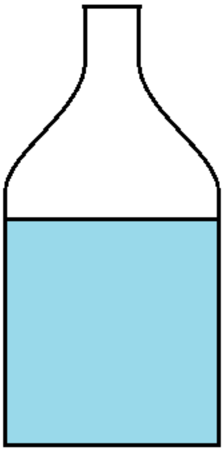
„Máme obyčejnou válcovitou láhev s rovným dnem. Je v ní trochu vody – jak vidíte na obrázku. Láhev je pevně zazátkována. Chceme zjistit, kolik kapaliny by se do láhve vešlo, ale nemáme po ruce nic jiného, než obyčejně rovné měřítko.“ (VTM, 1954 – 1990)

Obrázek 80



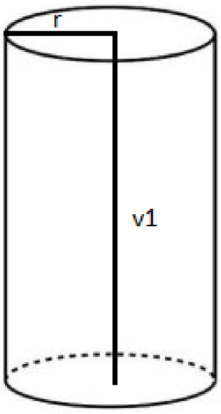
<u>Řešení</u>: Po ruce máme jen obyčejné měřítko, tak můžeme změřit výšku hladiny tekutiny v láhvi, díky které můžeme vypočítat objem tekutiny. Objem tekutiny vypočítáme snadno, protože je ve tvaru válce.

Obrázek 81



→

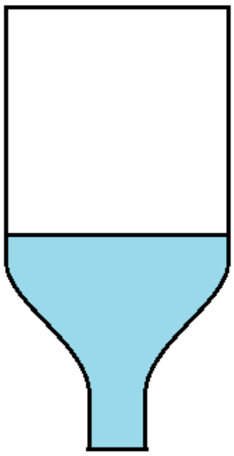
Obrázek 82



- Vzorec pro výpočet objemu válce: $V_1 = \pi r^2 v_1$

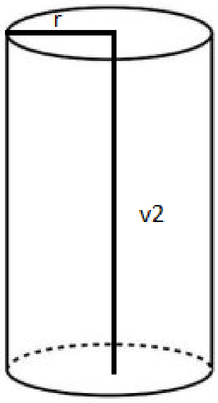
Otočíme láhev a vytvoří se nám další válec, tentokrát vzduchu.

Obrázek 83



→

Obrázek 84



- Vzorec pro výpočet objemu válce: $V_2 = \pi r^2 v_2$

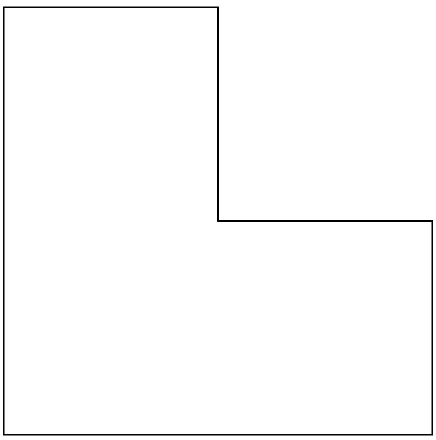
Když tyto dva objemy sloučíme, vznikne nám vzorec pro výpočet objemu láhve:

$$\underline{V = \pi r^2 (v_1 + v_2)}$$

Jak najít těžiště?

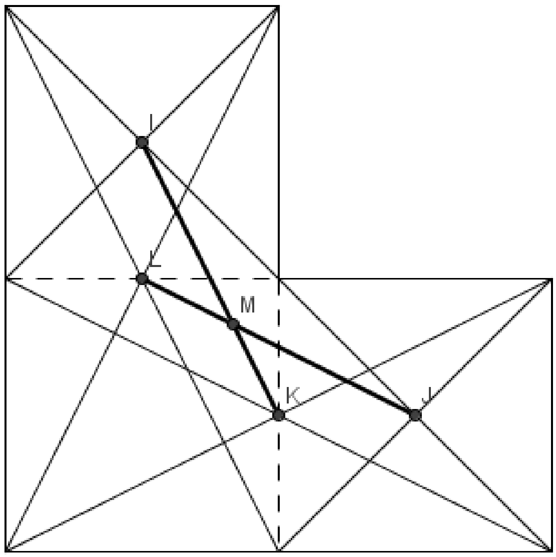
„Na obrázku vidíme obrazec, který se plošně skládá ze tří čtverců. Pomocí tužky a pravítka najděte těžiště této plochy.“

Obrázek 85



Řešení: Rozdělíme obrázek na tři čtverce. Narýsujeme těžnice jednotlivých čtverců a následně dvou obdélníků. Těžiště dle obrázku I, J, K, L spojíme, na průsečíku úseček IK a JL leží hledané těžiště M.

Obrázek 86



Zajímavé úlohy

Kolik devítek?

„Postavili nový hotel, ve kterém bylo 100 pokojů. Poslali zřízence, aby na dveře pokojů přibil patřičná čísla, složená z jednotlivých kovových číslic od nuly do devítky.

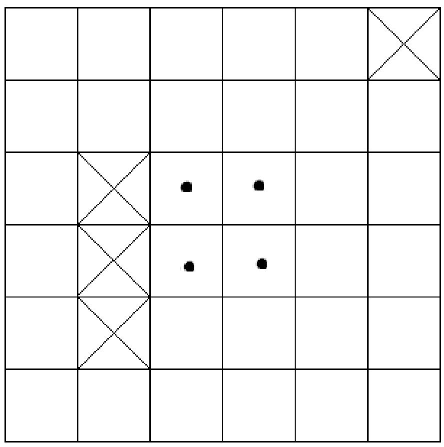
Kolik devítek mu dali?“ (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Je potřeba 20 devítek pro čísla od 1 do 100. A to 10 na místě jednotek, 10 na místě desítek.

Jak rozřezat čtverec

„Myslete si třeba, že jde o zahradu, na které jsou vysazeny čtyři jabloně a čtyři meruňky. Jsou rozděleny ve čtvercových záhonech, jak je vidíte na obrázku. Nyní se mají o zahradu rozdělit čtyři dědici rovným dílem tak, aby každý dostal kus zahrady stejného tvaru jako ostatní a při tom, aby měli na svém dílu jednu jabloň a jednu meruňku.“ (VTM, 1954 – 1990)

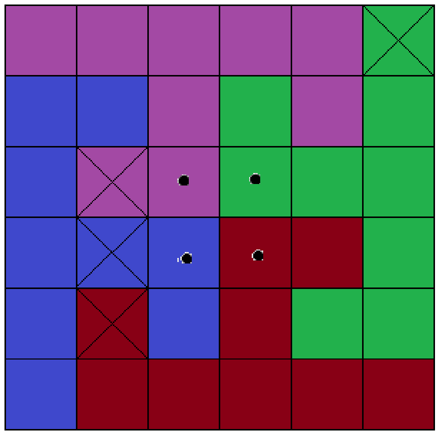
Obrázek 87



<u>Řešení</u>: Rozdělit 4 jabloně, 4 meruňky a 6 x 6 polí = 36. 36÷4 = 9 polí.

- Každý řez musí obsahovat 1 jabloň, 1 meruňku a 9 polí.

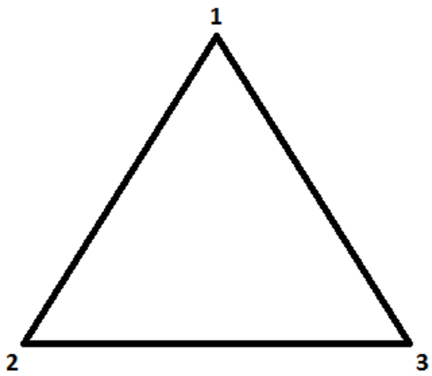
Obrázek 88



Počtářský trojúhelník

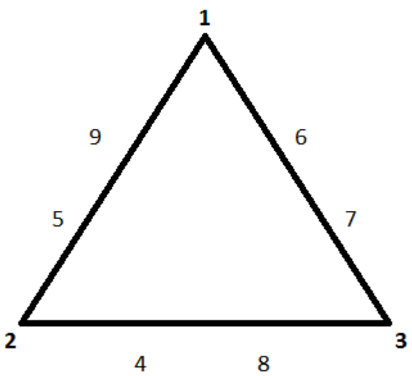
„Na obrázku vidíte trojúhelník, v jehož vrcholech jsou čísla 1, 2 a 3. Máte nyní ke stranám trojúhelníku připsat ještě další čísla 4, 5, 6, 7, 8 a 9 tak, aby součet čísel podél každé strany trojúhelníku dal 17.“ (VTM, 1954 – 1990)

Obrázek 89



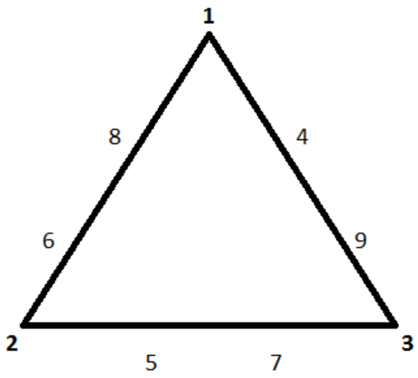
Řešení: • 1 varianta:

Obrázek 90



• 2 varianta:

Obrázek 91



Záhada tachometru

„Jel řidič autem a podíval se na tachometr. Ukazoval právě 15951 ujetý kilometr.

„To je náhoda," řekl si, „tohle číslo zůstane stejné, čtu-li je zpředu nebo zezadu. To se mi jistě hned tak nestane!"

Ale za dvě hodiny se podíval znovu na tachometr – a hle: zase na něm měl stejně podivné číslo, které při čtení zpředu nebo zezadu zůstává stejné. Vypočtěte, jakou průměrnou rychlostí řidič jel." (VTM, 1954 – 1990)

<u>Řešení</u>: Na tachometru měl 15951.

Další číslo musí splňovat tyto kritéria: musí začínat a končit 1, a druhým a předposledním číslem by mohla být 6. Budeme zvyšovat jen prostřední číslo.

- Pokud za prostřední číslo dáme 0, vznikne nám číslo 16061. To by znamenalo, že řidič ujel 110 km za 2h. Za jednu hodinu by ujel 55 km.
- Pokud bychom za prostřední číslo dosadili 1, vznikne nám číslo 16161. To by znamenalo, že řidič ujel 210 km za 2h. Za jednu hodinu by ujel 105 km. Rychlostí 105 km/h by mohl řidič jet pouze na dálnici.
- Pokud bychom za prostřední číslo dosadili 2, vznikne nám číslo 16261. To by znamenalo, že řidič ujel 310 km za 2h. Za jednu hodinu by ujel 155 km. Rychlostí 155 km/h nemůže řidič jet ani na dálnici.

Řidič mohl jet průměrnou rychlostí 55 km/h, pokud byl na dálnici, tak i rychlostí 105 km/h.

Velká rodina

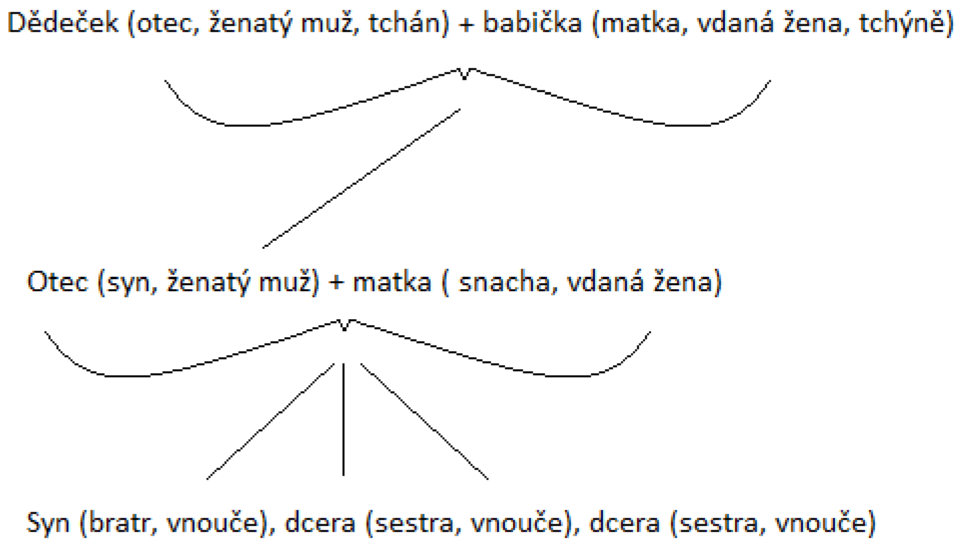
„Jak to na venkově bývá, sešli se ve vsi o posvícení příbuzní. Na stole voněla do zlatova pečená husa, knedlíky se zelím, na míse bylo plno koláčů. Všichni se měli dobře a vesele se bavili.

Kolem velikého stolu seděli dva otcové, dvě matky, dva synové, dvě dcery, dva ženatí muži, dvě vdané ženy, dvě sestry, jeden bratr, jeden tchán, jedna tchýně, jeden dědeček, jedna babička, jedna snacha a tři vnoučata.

Můžete nám spočítat, kolik osob vlastně bylo u stolu a v jakém byli příbuzenském vztahu?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: 2 otcové, 2 matky, 2 synové, 2 dcery, 2 ženatí muži, 2 vdané ženy, 2 sestry, 1 bratr, 1 tchán, 1 tchýně, 1 dědeček, 1 babička, 1 snacha, 3 vnoučata.

Obrázek 92



U stolu v příbuzenském vztahu sedělo 7 osob.

Topinky

„Jistě vám také chutnají topinky upražené na pánvičce na sádle nebo na másle. Tak je i v naší rodině. Maminka připravovala pro tři děti každému jednu topinku.

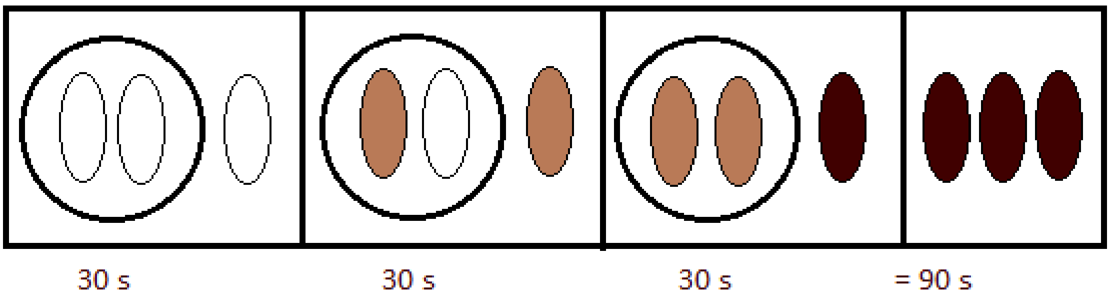
Měla však malou pánvičku, takže se na ni vešly nanejvýš dvě topinky současně. Ale děti byly netrpělivé, nemohly se už jídla dočkat.

Maminka vypočetla, že potřebuje na osmažení jedné strany krajíčku 30 vteřin. To znamená, že bude večeře hotová teprve za dvě minuty. Ale nejstarší syn, student, byl dobrým počtářem, zjistil, že by se daly tři topinky usmažit jen za půl druhé minuty. Poradil to matce, a skutečně děti se dočkaly topinek o půl minuty dříve.

Jak to matka provedla?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení:

Obrázek 93



3 topinky: 1. topinka ……………. A

2. topinka ……………. B

3. topinka ……………. C

Jedna strana opečení trvá 30 sekund a na pánev se vejdou jen dvě topinky.

- Nejdříve opečeme topinku A a B z jedné strany, následně vyměníme topinku B za C a topinku A obrátíme a opečeme. Na posledních 30 sekund vyndáme topinku A a vložíme zpět topinku B z druhé strany a topinku C obrátíme.

Obrázek 94

A + B 30 s	A + C 30s	B + C 30 s	= ABC 90 s

Zajímavé letopočty

„Jeden muž se zamyslil nad věkem různých členů své rodiny a řekl: „Letos, při svých narozeninách, jsem zjistil zajímavou věc. Bylo mi právě tolik let, kolik vyjadřují poslední dvě číslice letopočtu mého narození. Při té příležitosti jsem začal uvažovat i o datech narození ostatních příslušníků rodiny. Shledal jsem, že obdobně, jako u mne, bylo tomu i u dědy. To je zvláštní náhoda, že?

Ale přemýšlel jsem i dále. Mám syna. Tomu bylo letos tolik let, kolik vyjadřuje poslední číslice letopočtu jeho narození. Tím zatím rodinné letopisné zvláštnosti končí. Ale snad podle uvedených údajů zjistíte, kdy jsme se my tři narodili a jak jsme staří?“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Máme zjistit roky a stáří tří generací. Tento příspěvek byl v časopisu z roku 1960, bude se tedy jednat o roky menší než rok vydání časopisu.

- Otec se narodil v roce 1930. Je mu tedy 30 let. U jiného roku by nám nesouhlasilo vyjádření posledních dvou číslic a počet let.
- Děda se narodil v roce 1880. V roce 1960 je mu 80 let.
- Syn se narodil v roce 1955 a jemu je 5 let.

Jak Habešané násobí

„Matematicko-přírodovědecké rozhledy přinášejí zajímavou zprávu, jak Habešané provádějí násobení. Napíší obě čísla vedle sebe a nyní levé z nich stále postupně dělí dvěma, ale tak, že píši jen celá čísla. Např.: $25 \div 2$ je pro ně jen 12. Tak postupují, až posledním podílem je jednička. Druhé číslo zase neustále násobí dvěma a výsledky zapisují vedle výsledků v levém sloupci.

Když došli k jedničce, vyškrtnou v levém sloupci všechna sudá čísla a s nimi současně i příslušná čísla v pravém sloupci. Co v pravém sloupci zbylo, nyní sečtou. To je správný výsledek násobení.

Na příklad:

25 ×	53		25 ×	14
25	53		25	14
12	106		12	28
6	212		6	56
3	424		3	112
1	848		1	224
	1325			350

Odhadnete správně?

„Máte před sebou dva sloupce čísel:

1 2 3 4 5 6 7 8 9		0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 2 3 4 5 6 7 8 0		0 0 0 0 0 0 0 2 1
1 2 3 4 5 6 7 0 0		0 0 0 0 0 0 3 2 1
1 2 3 4 5 6 0 0 0	>	0 0 0 0 0 4 3 2 1
1 2 3 4 5 0 0 0 0	<	0 0 0 0 5 4 3 2 1
1 2 3 4 0 0 0 0 0	=	0 0 0 6 5 4 3 2 1
1 2 3 0 0 0 0 0 0		0 0 7 6 5 4 3 2 1
1 2 0 0 0 0 0 0 0		0 8 7 6 5 4 3 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0		9 8 7 6 5 4 3 2 1

Odhadněte, bude-li větší součet prvního nebo druhého sloupce. Poznamenej si svůj odhad a následně se přesvědčte o jeho správnosti pomocí úsudku a později teprve počítáním.“ (VTM, 1954 – 1990)

Řešení: Sloupce jsou stejné podle odhadu, teď to úsudkem a následně početně dokážeme.

• Úsudek: Vidíme, že v levém sloupci máme 9 jedniček a v pravém sloupci je na prvním místě 9, stejně tak souhlasí součet 2 na druhém místě v levém sloupci se součtem dvou 8 v pravém sloupci. Nemusíme kontrolovat každé místo, můžeme se přesunout až na předposlední místo, které je přesně opačné druhému místu. V levém sloupci je stejný součet 8 jako v pravém sloupci součet 2. Na posledním místě se nachází v levém sloupci číslice 9 a to je součet 1 v pravém sloupci na posledním místě.

• Početní kontrola: Sečteme oba sloupce.

1 2 3 4 5 6 7 8 9	0 0 0 0 0 0 0 0 1
1 2 3 4 5 6 7 8 0	0 0 0 0 0 0 0 2 1
1 2 3 4 5 6 7 0 0	0 0 0 0 0 0 3 2 1
1 2 3 4 5 6 0 0 0	0 0 0 0 0 4 3 2 1
1 2 3 4 5 0 0 0 0	0 0 0 0 5 4 3 2 1
1 2 3 4 0 0 0 0 0	0 0 0 6 5 4 3 2 1
1 2 3 0 0 0 0 0 0	0 0 7 6 5 4 3 2 1
1 2 0 0 0 0 0 0 0	0 8 7 6 5 4 3 2 1
1 0 0 0 0 0 0 0 0	9 8 7 6 5 4 3 2 1
1 083 676 269	1 083 676 269

Závěr

Cílem mé práce bylo shromáždění, vypočítání a vytvoření souboru matematických úloh, které byly vydávány v časopise Věda a technika mládeži. Příklady jsem vypočítala, roztřídila do jednotlivých skupin pro lepší orientaci a obohatila obrázky. Nemohla jsem zdaleka využít všechny příklady, které byly ve zmíněném časopisu vydány, protože jich je obrovské množství. Tyto příklady by se mohly hodit pro rozšíření této páce dalšími zájemci. Mnou zpracované příklady by se daly využít při výuce na základní škole či při práci s talentovanými žáky.

Resumé

The purpose of my thesis was to gather, calculate and create mathematical tasks, which were published in the Science and Technology magazine for young generation. I counted the examples and for better orientation I categorized them in the individual groups and I did enriched it with the pictures. I could not use all the examples which were published in the magazine, because there were plenty of them. These examples could be useful for expanding the work by other interested persons. The examples, what I counted could be used for teaching at primary school or for work with talented students.

Zdroje informací

Seznam literatury

VTM, 1954 – 1990: *Věda a technika mládeži*. Praha: Mladá fronta, 1954 – 1990.

HORA Jaroslav. *O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole I. díl.* Plzeň: Pedagogické centrum, 1998. ISBN 80 – 7020 – 037 – 5.

Elektronické zdroje

Goldbachova hypotéza, 2004: Goldbachova hypotéza. [online]. 2004. [cit. 21. 3. 2016]. Dostupné z:
http://web.math.muni.cz/~fuchs/Efuchs/historie_pdf/10gold.pdf

Paenza, 2005: PAENZA Adrian. *Matematiko jsi to ty?* Čísla, problémy, osobnosti a zvláštnosti. [online]. Vyd.: Kniha Zlín, 2010- ISBN 978 – 80 – 87497 – 18 – 0. [cit. 21. 3. 2016]. Dostupné z :
https://books.google.cz/books?id=41dYAgAAQBAJ&pg=PA104&lpg=PA104&dq=goldbach%C5%AFv+probl%C3%A9m&source=bl&ots=WyicPwVOyc&sig=kkfKv-XQNI2b7Mo-tm4kWm9McZY&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKEwiQ5r7U3qbLAhVBnnIKHbDeAHIQ6AEIJTAC#v=onepage&q=goldbach%C5%AFv%20probl%C3%A9m&f=false

Seznam obrázků

Vlastní zpracování v programu Geogebra a malování.

Seznam tabulek

Vlastní zpracování v programu SmartNotebook.