ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

CANTOR-BERSTEINOVA VĚTA

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Oldřich Kříž

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.

Plzeň, 2016

Prohlašuji tímto, že jsem zadanou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod vedením doc. RNDr. Jaroslava Hory, CSc. a uvedl v seznamu literatury veškerou použitou literaturu a další zdroje.

V Plzni dne ___________________________________

Poděkování

Chtěl bych poděkovat vedoucímu mé bakalářské práce panu doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc. za odborné vedení, pomoc a rady při zpracování této práce

OBSAH……………………………………………………………………………………………7

Úvod

Jako téma své bakalářské práce jsem si vybral Cantor-Bernsteinovu větu. Podle mého je tato věta širší veřejnosti poměrně neznámá, protože nebyla předmětem studia na střední škole ani na gymnáziích. Někteří studenti se s větou seznámí až při svém vysokoškolském studiu, někteří se s ní neseznámí nikdy navzdory tomu, že je základním pilířem všudypřítomné teorie množin. Přímo na Cantor-Bernsteinovu větu se zaměřuje sedmá kapitola, která je pro tuto práci stěžejní.

Bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol, přičemž první kapitola popisuje cestu historií vedoucí k výstavbě teorie množin.

Ve druhé kapitole je rozebrána problematika Cantorovy naivní teorie množin a kardinálních čísel.

Třetí kapitola je věnována Cantorově-Bernsteinově větě. Jsou zde uvedena některá ekvivalentní znění a některé typy důkazů, které vedou k potvrzení věty. Důkazy jsem volil tak, aby každý větu potvrzoval pomocí prostředků z různých odvětví matematiky.

Poslední, čtvrtá kapitola se věnuje možnostem analogie Cantor-Bernsteinovy věty v teorii Abelových grup. Převážná část je věnována budování teorie Abelových grup.

Tato bakalářská práce by se i přes některé odborné termíny snažit popularizovat matematiku a v historické části ukázat nesmírnou práci matematiků historie.

1 Historický vývoj teorie množin

1.1 Problém nekonečna v antice

Teorii množin jak jí známe, můžeme považovat za základní kámen mnoha matematických disciplín, které na ní staví. Je zajímavé, že teorie množin se v jakési podobě projevuje už na základních školách.

Žáci nemají problémy pochopit, že přímka je nekonečná a nijak se nad touto skutečností nepozastavují. Stejně tak jim nečiní potíže vstřebat myšlenku, že vesmír je nekonečný. Ovšem principy, které dnes učíme již malé děti, se začaly rozvíjet až v druhé polovině devatenáctého století. Než se ovšem tato teorie dostala do dnešní podoby, museli matematici, kteří se jí zabývali, překonat mnoho překážek.

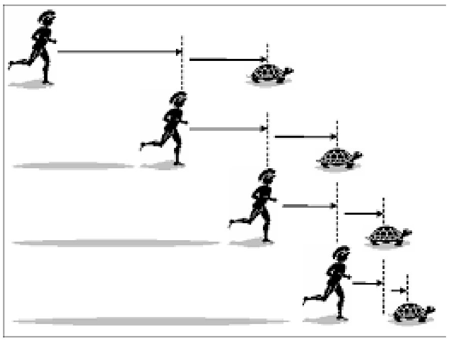
Tyto překážky nejsou pouze charakteru matematického, ale mnoho matematiků se potýkalo také s otázkou víry. K pochopení vzniku teorie množin se musíme vrátit až do doby antiky.

Již řečtí filosofové a učenci naráželi na problém nekonečna. Již oni si dobře uvědomovali, že například množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je nekonečná. Nedokázali se ovšem smířit s myšlenkou, která je jistě paradoxní, že i toto nekonečno se dá uchopit jako „hotový“ objekt.

Aby se vyhnuli těmto paradoxům, obcházeli pojem nekonečno jednoduchým vyjádřením, že přirozených čísel je více, než může kdokoli vymyslet. Ilustrace této myšlenky je snadná. Pokud někdo řekne libovolně velké přirozené číslo n, dokáži mu říci číslo větší a to prostým přičtením jedničky tj. $n+1$. On moje číslo může napadnout dalším o jednu zvětšeným tj. $n+2$ a takto můžeme pokračovat nekonečně dlouho. Tato ilustrace může tedy být interpretována i tak, že nejsme schopni vypsat všechna přirozená čísla n. Tento proces, kdy nejsme schopni dosáhnout nějaké meze, popisuje tzv. ***potenciální nekonečno***.

Jedním z příkladů boje antických učenců s problémem nekonečna je známá Zenonova[1] aporie s názvem „Achilles a želva“. Achilles, který je nejrychlejším běžcem dá pomalé želvě náskok. Když Achilles doběhne do bodu B, ze kterého startovala želva, ta se již posunula o kousek dál do bodu C. Když Achilles doběhne do bodu C, želva je již o kousek dál a takto se situace opakuje a Achilles nikdy želvu nepředběhne.

Problém, který Zenón předkládá, by znamenal, že Achilles by musel v konečném čase urazit nekonečně úseků.



1-Achilles a želva

Vysvětlení této úlohy spočívá v tom, co Zenón odmítal připustit, a sice že i s nekonečnem se dá počítat. Tuto úlohu by zajisté vyřešili již studenti na středních školách se znalostmi základů teorie nekonečných řad. Nejedná se totiž o nic jiného než o součet geometrické řady.

My v dnešní době chápeme toto nekonečno jako „završené“, ve své definitivní formě. Takovému nekonečnu potom říkáme ***aktuální*** nebo ***faktické***.

Potenciální nekonečno se projevuje i v antických představách o nekonečnosti vesmíru. Staří myslitelé totiž vesmír považovali za jakousi konečnou sféru. A stejně jako u příkladu s přirozenými čísly nikdo nemohl říci, jaký má tato sféra poloměr.

[1] Zenón z Eleje (cca. 490 př. n. l. – cca. 430 př. n. l.) byl předsokratovský řecký filosof; náleží k jihoitalské tzv. elejské škole, jejíž vůdčí postavou byl Zénónův učitel a přítel Parmenidés. Již od antiky je znám především díky svým paradoxům, které měly podpořit Parmenidovo učení a popřít učení Pythagorovo.

1.2 Smýšlení o nekonečnech ve středověku

V 13. století se spory o nekonečnech jaksi přenášely na Boží jsoucnost a moc. Zde je myšlen Bůh křesťanský, kterého se soudobí myslitelé pokoušeli vynést nad všechny možnosti chápání nebo jako je tomu v případě Tomáše Akvinského[2] jej přiblížit lidským bytostem a uchopit, případně svázat jeho nekonečnou moc.

Zastáncem prvního tábora byl sv. Augustin[3], který ve své knize **O městě Božím** přiřazuje Bohu schopnost nahlížet na potenciální nekonečna jako na konečné věci. Odkazuje se zde na paradox o stvoření světa, který by nastal, pokud by tomu tak nebylo.

Pokud Bůh stvořil každé stvoření, potom je nutné říci, že i přes početnost druhů je nekonečné množství jedinců od sebe různých v každém takovém druhu. Bůh tedy nekonečné počty ovládá a tím je jeho moc neomezená. Tedy při stvoření světa mohlo dojít k tomu, že ***Všechny věci jsi míře a počtu uspořádal.***

Tomáš Akvinský na druhou stranu možnosti Boha a tím i jeho nekonečné moci a vědění svázal a píše, co Bůh podle rozumových sporů může a nemůže. Uzavřel tedy jeho moc do jakési sféry rozumu a nabízí se otázka, zda je v moci Boží obsaženo nekonečno aktuální.

Tento problém vyřešil Tomáš Akvinský tak, že Bohu dal schopnost nahlížet na nekonečno aktuální jako na celek. Ne tedy k němu přecházel od nekonečna aktuálního, jak tomu v té době bylo. Bůh tedy vidí nekonečno podobně, jako člověk vidí všechna okna na domě naráz, aniž by musel každé z nich zkoumat postupně. Akvinský tedy aktuální nekonečno připisoval pouze Bohu a v reálném světě ho vyloučil. Připustil pouze nekonečno potenciální jako jakousi možnost dotýkat se Božího majestátu.

[2]Sv. Tomáš Akvinský je jedním z nejproslulejších představitelů středověké teologie a scholastiky.
[3]Augustinus, zvaný též „učitel Západu“, je jeden z nejvýznamnějších raně křesťanských filozofů a teologů, představitel latinské platónsky orientované patristiky.

1.3 GALILEŮV PARADOX A DRUHÁ KRIZE MATEMATIKY

Chápaní nekonečna, které bylo zavedeno v antice, přetrvávalo dlouhá staletí a nikdo si netroufl oprostit se od potenciálního nekonečna a pokusit se zkoumat nekonečno aktuální.

1.3.1 GALILEŮV PARADOX

Na problém nekonečna narazil i Galileo Galilei[4] ve své knize nazvané *Matematické rozpravy a pokusy týkající se dvou nových věd* (*Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno a duenuove scienze,* Holandsko 1638). Překládá zde problém, zda je více celých čísel nebo jejich druhých mocnin. Představme si řadu kladných celých čísel $1,2,3,4...$ a s ní řadu jejich kvadrátů $1,4,9,16...$ Je zřejmé, že ne všechny druhé mocniny vyplní množinu kladných celých čísel. Proto by kvadrátů mělo být méně (mnohem méně pokud vezmeme do úvahy rychlost růstu druhé mocniny). Ovšem každému kladnému celému číslu náleží jeho druhá mocnina. Proto by měla množina celých kladných čísel a jejich čtverců stejně velká.

A zde se dostáváme do paradoxní situace, která popírá 8. Euklidův[5] axiom, který říká, že celek je větší než jeho část. Tento problém Galilei nastínil v rozhovorech se svým přítelem Salviatinim, který dialog uzavírá prohlášením, že *„Vlastnosti rovnost, většina, menšina, platící mezi konečnými veličinami, nemají místo tam, kde se uvažuje nekonečno."*

1.3.2 DRUHÁ KRIZE MATEMATIKY A JEJÍ ŘEŠENÍ

Takový byl tedy vývoj představ na počátku 17. století. Problematika se ovšem měla záhy zkomplikovat, když na scénu přichází diferenciální počet. I když byla tato teorie nezávisle na sobě sestavena pány Newtonem a Leibnitzem, oba vycházejí z pojmu nekonečně malého úseku nebo veličiny. Nejasnosti v samých základech této vědní disciplíny vedli posléze k situaci, kterou dnes popisujeme jakou druhou krizi matematiky.

[4]Galileo Galilei (1564-1642) byl toskánský astronom, filosof a fyzik těsně spjatý s vědeckou revolucí. Mezi jeho úspěchy řadíme vylepšení dalekohledu, rozmanitá astronomická pozorování, první z Newtonových zákonů pohybu a účinnou podporu Koperníka.

5Euklidés byl vynikající antický matematik. Zabýval se snad všemi oblastmi matematiky. Nejvíce ho proslavilo 13 knih základů matematiky Stoicheia(latinsky Elementa), ve kterých shrnul veškeré poznatky tehdejší matematiky. Snažil se o systematickou výstavbu matematiky pomocí axiómů a definic, z nichž by se deduktivně odvozovaly další poznatky.

Do této doby nebyl nikým objasněn pojem nekonečně malý, ovšem soudobí matematikové a jiní vědci se spokojili s tím, že výsledky získané touto metodou jsou aplikovatelné.

Řešení problému nastínil d´Alembert[6], který odmítá pojem nekonečně malý jakožto nejednoznačný přechod mezi něčím a ničím, ve své práci, která je zařazena do díla Encyklopedie, jejímž hlavním vydavatelem byl Denis Diderot. Zde přetváří Newtonův zápis $x+dx$, kde dx je onen nekonečně malý přírůstek ve formulaci $x+\Delta x$, kde Δx je konečný přírůstek nazývaný h. Ve svých pracích d´Alembert zásadně mluví o limitě konečných veličin. Proto diferenciální koeficient chápal nikoliv jako podíl nekonečně malých částí, ale jako limitu poměru konečných veličin.

---

[6] Jean BaptisteLe Rond d'Alembert (1717-1783) byl francouzský matematik a fyzik, osvícenský filosof, člen francouzské, berlínské a petrohradské akademie věd.

1.4 Bernard Bolzano, praotec teorie množin

2-Bolzanův portrét

1.4.1 Život B. Bolzana

Celým jménem Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano je znám především jako německy mluvící český matematik, teolog a revolucionář.
Český národ, jež jeho přínos světové matematice poněkud opomíjí, respektive zapomíná, zná Bolzana především jako osvíceného reformního myslitele. Zbytek světa paradoxně tento jeho přínos odsunuje a Bolzano je pro něj především vynikajícím matematikem a skvělým logikem.

1.4.1.1 Mládí a studia

Bernard Bolzano se narodil 5. října 1781 v Praze. Rok 1781 je nevíce spojován se zrušením nevolnictví a jakýmsi mezníkem mezi hrubě religionistickým barokem a nově příchozím osvícenstvím.
Bolzanovými rodiči byli jeho otec Bernard, který se narodil v Itálii, ovšem už od dětství žil v Čechách a byl obchodníkem s uměleckými předměty. Pravým opakem Bernardova otce-obchodníka byla jeho matka Cecilie, jež většinu svého mládí strávila v klášteře a za Bernardova otce se provdala pouze z povinnosti.

Pokud vezmeme do úvahy už samotnou náboženskou a názorovou rozdílnost obou rodičů, nepřekvapí nás rozpolcená Bolzanova osobnost. O to více byla tato osobnost formována v dětství, kdy spolu se svým bratrem přežili jako jediní dva z dvanácti sourozenců. Ani Bolzanovi se nevyhnuly zdravotní komplikace.

Od raného mládí trpěl silnými bolestmi hlavy a o pár let později se u něj projevila tuberkulóza. S touto zrádnou nemocí zápasil celý život.

Po ukončení gymnázia na Příkopech nastoupil Bolzano v patnácti letech na tříletý filosofický kurz, který absolvoval s vynikajícími výsledky. Po ukončení kurzu ovšem Bolzano váhal, kam by se měla ubírat jeho budoucnost.

Jeho otec chtěl, aby převzal obchod, ale to Bolzana, který se natolik zamiloval do vědy, bylo nepřípustné. O to pozoruhodněji působí jeho rozhodnutí věnovat se teologii. I toto rozhodnutí ovšem doprovázela nejistota, která pramenila z nesouhlasu otce a vlastního přemýšlení, které povolání by bylo pro „nejvyšší blaho společnosti“. Na studiích již od počátku zmítal mezi rozumem a vírou. Odmítal slepě poslouchat náboženská dogmata a pravdám bez bližšího ověření. Proto celou víru katolického křesťanství chápal spíše jako jakousi mravní nauku, jež zušlechťuje člověka. Paradoxně se tímto stal kacířem, jelikož víra v Boha samotného pro něj byla nepodstatná a bral jí jako morální kodex, jež zušlechťuje evropské obyvatelstvo.

Promoval v roce 1805 a téhož roku byl uveden jako profesor náboženské vědy na filosofii. Nikdo v té době jistě netušil, jak se Bolzanova kariéra vhledem k jeho smýšlení bude ubírat. Bolzano, jen o pár let starší než jeho posluchači, nebyl mezi studenty od začátku oblíbený. Bylo to také jistě pro to, že tříletý kurz teologie byl pro studenty povinný. Nově nastupující generace již byla silně ovlivněna světovými encyklopedisty (zejména Voltairem a Holbachem) a otázka víry jim přišla přežitá, možná i směšná.

Bolzano s nulovými pedagogickými a řečnickými zkušenostmi si ovšem posluchače dokázal získat tématy, o kterých mluvil a zejména svými názory. Jeho jedinou povinností nebyly tyto přednášky, ale i zároveň náboženské promluvy, které nahrazovaly bohoslužby. Na těchto promluvách, které jsou nazývané exhorty, oslovoval Bolzano širší veřejnost.

Hlavním úkolem, jež sám sobě zadal, bylo získávání vzdělané vrstvy pro katolickou církev. Tohoto úkolu se ovšem zhostil způsobem sobě vlastním a upadl v nemilost císaře.

Přesněji řečeno v jednoho strážce pořádku, jímž byl císařův osobní lékař dr. Stifft. Tento spor se táhl až do roku 1819, kdy císař František I. sesadil Bolzana z jeho pozice. O rok později, kdy se uvažuje o Bolzanově uvěznění v klášteře, do sporu vstupuje Josef Dobrovský a svými ostrými dopisy hájí Bolzana[7]. Tomu bylo v roce 1820 zakázáno učit a ponechána renta.

Od roku 1820 žije Bolzano spíše v ústraní a věnuje se vědecké práci. Ani jeho odchod z akademické obce nezastavil stíhání za jeho názory. Proto většina jeho prací zůstala pouze v rukopisech. O těchto dílech blíže pojednává další podkapitola. Valnou část svých prací vytvořených mimo akademickou obec píše Bolzano v Těchobuzi, kde bydlel u svých přátel Anny a Josefa Hoffmanových. Zejména Anna se stala výraznou osobou jeho zbývajícího života, když Bolzanovi v jistém smyslu nahrazovala matku.

Bolzano si na „vyhnanství“ nikdy nestěžoval. Právě naopak byl rád, že se může soustředit na práci. V Těchobuzi napsal mimo jiné i své monumentální dílo Vědosloví, utopické dílo Knížka o nejlepším státě a pro budoucí matematiky dílo asi nejvýznamnější Paradoxy nekonečna.

1.4.2 DÍLO B. BOLZANA

V této podkapitole rozebereme trochu důkladněji stěžejní díla Bolzanova. Jak již bylo zmíněno, byl Bolzano stíhán i po zbavení profesury a většina jeho díla skončila v rukopisech. To je také hlavní důvod, proč byl soudobými matematiky tolik přehlížen a nedoceněn.

1.4.2.1 Vědosloví-Pokus o zevrubný a převážně nový výklad logiky se stálým zřetelem k dřívějším zpracovatelům

Spis Vědosloví vydal Bolzano v roce 1837 a rozsahově se jedná o 2400 stran rozčleněných do pěti dílů: Fundamentální nauka, Elementární nauka, Teorie poznání, Heuristika a Vlastní Vědosloví. Bolzanovi byla jasná náročnost a délka spisu, proto celý text rozdělil do 718 paragrafů a z těchto hvězdou označil podle něho ty nejdůležitější.

[7]Zde si můžeme všimnout paradoxu, který vzniká, když Bolzana hájí čeští nacionalisté v čele s Dobrovským. Ty totiž Bolzano kritizoval ve svých exhortách a dohady o jazyku považoval za překážku na cestě k rovnosti lidí.

Zajímavostí je, že první český překlad obsahuje 139 paragrafů a část z nich je Bolzanem neoznačená. Je to především proto, že tyto paragrafy získaly na vážnosti až postupem matematiky a jejich genialitu můžeme docenit až zpětně.

Podívejme se nyní na myšlenku pravd o sobě, kde se poprvé setkáváme s nekonečnými množinami.

Pravda o sobě -- libovolná věta, vypovídající něco tak, jak to skutečně jest, bez ohledu na to, zda byla tato věta někým myšlena nebo vyslovena; věta je pravdou o sobě, když předmětu, o kterém pojednává, skutečně přísluší to, co mu přisuzuje. (1)

1.4.2.1.1 Věta: Existuje nekonečně mnoho pravd

Důkaz:

Bolzano vychází z jakési parafráze Descartova výroku: „Myslím, tedy jsem“. Touto myšlenkou je dokázáno, že existuje alespoň jedna pravda o sobě. Další pravda je výsledkem výroku „kromě pravdy, že existuje jedna pravda o sobě, neexistuje žádná jiná pravda“. Toto tvrzení nám přidává druhou pravdu. Obdobným způsobem se dostane k tomu, že existuje nekonečně mnoho pravd o sobě.

Tímto Bolzano dokázal, že množství pravd o sobě je minimálně potenciálně nekonečné.

Obdobný důkaz byl předveden v posmrtném vydání jeho stěžejního díla *Paradoxy nekonečna*, ovšem i zde je důkaz pouze teologický a žádný ryze matematický se nedochoval.

1.4.2.2 Paradoxy nekonečna

V tomto spise vymezuje Bolzano pojmy nekonečna a konečna i za pomoci definic svých současníků a zabývá se vztahy nekonečných množin. Tento spis byl vydán až po Bolzanově smrti jeho žákem Františkem Příhonským a stal se hlavní inspirací pro Georga Cantora, tvůrce teorie množin.

Hlavní myšlenky díla bychom mohli charakterizovat takto:

1)zdůvodnění, proč je v matematice nutno pracovat i s aktuálním nekonečnem

2)analýza chyb, kterých se vědci dopouštějí při úvahách o nekonečnu (2)

Celá práce je rozdělena do 70 paragrafů. V prvních deseti paragrafech vykládá Bolzano, jak je nutno chápat pojem „nekonečný souhrn“. Dále se zabývá výkladem tohoto pojmu jeho soudobými kolegy. Zásadní myšlenka přichází ve chvíli, kdy Bolzano uvádí pojem mezi aktuálním a potenciálním nekonečnem a oba dva typy přisuzuje Bohu. Další paragrafy mluví o možnosti porovnávání nekonečných množin a způsobu provedení tohoto porovnávání. Hlavním důvodem, proč Bolzano nemůže být považován za zakladatele teorie množin je skutečnost, že se nedokázal přenést přes tvrzení, že *celek musí být větší než jeho část*.

BERNARD BOLZANO

PARADOXIEN DES UNENDLICHEN

MIT UNTERSTÜTZUNG
DER GESELLSCHAFT ZUR FÖRDERUNG DEUTSCHER
WISSENSCHAFT, KUNST UND LITERATUR IN BÖHMEN
ERAUSGEGEBEN VON DER PHILOSOPHISCHEN GESELLSCHAFT
AN DER UNIVERSITÄT WIEN
DURCH
ALOIS HÖFLER

MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN VON
HANS HAHN
PROFESSOR DER MATHEMATIK IN BONN

DER PHILOSOPHISCHEN BIBLIOTHEK BAND 99

3-Paradoxy nekonečna-obálka

1.4.2.3 Exhorty a Knížka o nejlepším státě

Jelikož tyto díla nejsou matematicky založená, dovolím si pouze upozornit na zajímavosti, které přinášejí.

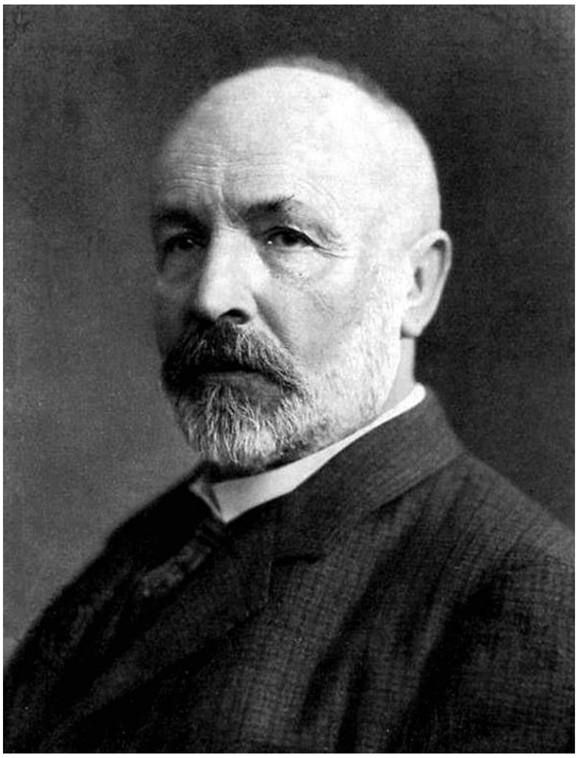
Jak již bylo uvedeno, dostal se Bolzano do sporu s úřady zejména díky svým exhortám. Nebylo téma, které by na popud svých posluchačů Bolzano nepodrobil svému výkladu. Proto se mezi exhortami objevují i témata O bibli, O víře, O modlitbě, která velmi pobuřovala církev a samotného císaře. Ve svých exhortách Bolzano ovšem kritizuje i české nacionalisty a uvádí, že *„jazyk je pouze nástroj sociální komunikace*(3)“.

O utopickém díle Knížka o nejlepším státě, lze konstatovat, že o dvacet až třicet let předběhlo svojí dobu. Stát, jenž je v díle prezentován, je utopicky komunistický a předchází v myšlenkách Karla Marxe.

4-Pamětní deska v Celetné ulici v Praze

5-Bolzano na československé známce

1.5 GEORG CANTOR – ZAKLADATEL TEORIE MNOŽIN



6-Georg Cantor-portrét

1.5.1 ŽIVOT A PRÁCE GEORGA CANTORA

1.5.1.1 Mládí Georga Cantora

Georg Cantor se narodil 3. 3. 1845 v Petrohradě do rodiny, která se svojí zájmovou i náboženskou diverzifikací podílela na tvoření Cantorovy nevyrovnané osobnosti v obou těchto hlediscích. O jedenáct let později se rodina přestěhovala do Frankfurtu nad Mohanem, kde mladý Cantor začal navštěvovat soukromé školy, ale posléze i gymnázia a vyšší odborné školy. Jeho studium bylo již od počátku technicky zaměřené a mělo vyústit v povolání lodního inženýra.

Po smrti svého otce se odebral na univerzitu v Berlíně, kde mohl studovat pod vedením takových matematiků, jakými byli Karl Weierstrass nebo Leopold Kronecker.

1.5.1.2 Vědecká činnost do roku 1874

Na základě práce De aequationibussecundi gradus indeterminatis (Diofantické rovnice druhého stupně), ve které navazoval na řešení otázek v teorii čísel, byl Cantor promován. Po sérii krátkých zaměstnání se usídlil jako soukromý docent na univerzitě v Halle, kde setrval celý život.

Ihned po svém nástupu na univerzitu se společně s profesorem Heinrichem Heinem pouští do problematiky trigonometrických řad. Vyústěním této spolupráce byla například definice iracionálního čísla jako limity posloupností čísel racionálních. Ve svých pracích Cantor zavádí a používá slova Wertmenge (množina hodnot) a Punktmenge (množina bodů). Díky vytvoření nového názvosloví mohl ve svých úvahách a výpočtech dojít rozšíření již známých vět na řady s větší množinou singulárních hodnot. Z těchto úvah vzešel pojem transfinitní ordinální číslo.

V roce 1873 se Cantorova pozornost upoutává k problému aktuálních nekonečen a objevuje se pojem kardinální číslo.

1.5.1.3 Práce G. Cantora v letech 1874-1884

V roce 1874 vyšla možná průlomová práce G. Cantora s názvem „O jedné vlastnosti všech reálných algebraických čísel“. V této práci porovnával mohutnost množiny všech přirozených čísel □ a množiny všech reálných algebraických čísel ω [8]. Zajímavé ovšem je, že Cantor nepoužil pojmy „množina“ a „mohutnost“. Dále dokázal, že pokud máme nekonečné množství hodnot ω, pak na libovolné intervalu (a,b) lze najít číslo η, které se v množině ω nevyskytuje. Řečí dnešní matematiky dokázal Cantor, že množina všech přirozených čísel je stejně mohutná jako množina všech racionálních čísel, čili její spočetnost a následně nespočetnost libovolného intervalu.

V dalších čtyřech letech pracoval na zobecnění svých teorií a především se propracovával k abstrakci veškerých myšlenek.

Průlomový je rok 1877, kdy odesílá do Crelleova časopisu svůj článek s názvem „Příspěvek k teorii množin“. Setkává se ovšem s velikým odporem jeho současníků a zejména jeho bývalý učitel L. Kronecker jeho úvahy odmítá.

---

[8] Algebraickým reálným číslem ω je rozuměno číslo, které je kořenem mnohočlenu ve tvaru $a_0\omega^n + a_1\omega^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, kde $a_0, \ldots, a_n \in$ □

Hlavního myšlenkou onoho článku je vztah mezi mohutností n-rozměrné množiny a její podmnožiny. Nejvíce kritiky ovšem Cantor sklízí za svůj důkaz, že n-rozměrné kontinuum je ekvivalentní s jednorozměrným kontinuem. Důsledkem toho by byla například ekvivalence množiny všech bodů třídimenzionálního eukleidovského prostoru s množinou všech bodů přímky. Sám Cantor si nebyl jistý správností svým výpočtů, a proto poslal důkaz ke kontrole svému příteli Dedekindovi. Ten poukázal na drobný nedostatek důkazu, který Cantor před finálním otištěním poupravil. V samotném závěru článku se Cantor poprvé pokusil definovat pojem kontinua. Tento problém znamenal jakousi brzdu v Cantorově práci, protože poté vydal články, které pouze upravovaly jeho práce předešlé, nebo odpovídal na články jiných autorů, kteří z jeho prací citovali.

Důležitým aspektem celého Cantorova života byl fakt, že Cantor byl věřící. Debatoval proto s teology různých náboženství, jestli jeho smýšlení o nekonečnech neodporuje víře. Cantor byl také velmi citlivý na to, jak ho vnímá společnost. Proto také po sporech s Kroneckerem opustil Crelleův časopis.

1.5.1.4 Kritický rok 1884

Označení kritický rok je spíše poukázáním na psychické rozpoložení G. Cantora, který nedokázal unést zavržení svých teorií. Dostal se znovu do sporu s Kroneckerem a Schwartzem, kteří ve svých přednáškách na Berlínské univerzitě zlehčovali výsledky jeho prací. Neméně ho ovšem popuzovala netečnost jiných jeho současníků, kteří mlčeli o jeho objevech.

V roce 1883 se Cantor ve snaze své působení rozšířit i za hranice dostal do švédského časopisu Acta mathematica. V něm Cantor sliboval uveřejnit důkaz hypotéza kontinua. Tento důkaz, jakkoli na začátku slibný, se sesypal již od základů, což vedlo k ještě větší Cantorově sklíčenosti.

Přes všechny tyto skutečnosti se nakonec Cantor rozhodl omluvit svému příteli Kroneckerovi a dále pokračovat ve snahách o důkaz své hypotézy. Bohužel se ve svých úvahách nedokázal již dostat dále a začat uvažovat o ukončení svých snah a přednášení filosofie místo matematiky.

1.5.1.5 Další Cantorovo působení

Je smutným faktem, že právě po Cantorově zhroucení docházejí jeho současníci ke skvělým výsledkům na základě jeho teorií.

Na kongresu v roce 1897 se Cantorovi dostalo uznání od jeho pokračovatelů Poincarého, Borela, Hilberta a dalších.

Je až s podivem, že natolik popudlivý Cantor se dokázal smířit s takzvanou krizí teorie množin. Sám Cantor působil až do roku 1913 na univerzitě v Halle a o pět let později, přesněji 6. ledna 1918 umírá.

7-Georg Cantor r. 1870

2 NAIVNÍ TEORIE MNOŽIN A NĚKTERÉ JEJÍ PARADOXY

V této kapitole se budeme blíže zabývat Cantorovou prací v oblasti teorie množin. Bude zde uvedena naivní teorie, tak jak ji navrhl Cantor. Později zjistíme, že jakkoli je jeho teorie množin postačující pro různá odvětví, jistě není bezchybná a objevují se zde známé paradoxy, o kterých také bude řeč.

V Cantorově době docházelo po publikování mnoha prací k separaci jednotlivých odvětví matematiky. Cantor tomu chtěl svojí teorií množin zabránit a matematiku opět sjednotit. Teorie množin měla být základem, na kterém budou ostatní odvětví budovat své teorie.

Cantorovu teorii množin nazýváme naivní především proto, že jí Cantor nevystavěl na axiomatických základech. Jeho definice množiny je tedy čistě intuitivní. Cantor nepředpokládal, že sama teorie má nedostatky již v základech, tj. v samotné definici množiny případně definici přirozeného čísla.

V následujícím textu se odvoláváme na čtenářovu znalost symboliky teorie množin.

2.1.1.1 Definice: Množina podle Cantora

„Množinou rozumíme každé shrnutí určitých a navzájem různých předmětů m našeho nazírání nebo myšlení (které nazýváme prvky) do jediného celku M. (4)“.

V rámci naivní teorie množin je hlavním faktorem to, jestli objekty (prvky) do množiny náleží. To, že prvek a náleží (je prvkem) množiny A označuje symbolicky $a \in A$.

2.2 NEJZNÁMĚJŠÍ PARADOXY PLYNOUCÍ Z NAIVNÍ TEORIE MNOŽIN:

2.2.1 RUSSELŮV[9] PARADOX

Označme S množinu všech množin, jež nejsou svým vlastním prvkem, tedy $S = \{X \mid X \notin X\}$

Podle Cantorovy definice množiny tedy jednoduše dokáže určit, zda jiná množina M je prvkem množiny S. Pokud ovšem zvolíme za množinu M samu množinu S, dojdeme k vnitřnímu sporu.

[9]Bertrand Arthur Wiliam Russell 3. hrabě Russell byl významný anglický matematik, filosof a spisovatel. Proslul jako matematik, jako jeden z těch, kdo usilovali o nové založení tohoto předmětu jako vědecké disciplíny. Spolu s Alfredem NorthWhiteheadem (který se později jako filosof vydal vlastní a diametrálně odlišnou cestou) vytvořili spis PrincipiaMathematica

Pokud množina S neobsahuje množinu S jako svůj prvek, můžeme tvrdit, že S je podmnožinou S. To se ovšem dostáváme do sporu, protože v tu chvíli množina S bude obsahovat sama sebe jako svůj prvek. Chtělo by se říci, že $S \in S \wedge S \notin S$, což je jistě paradox.

2.2.1.1 Snadněji představitelná obdoba Russelova paradoxu

Holič ze Sevilly holí právě ty ze sevillských mužů, kteří se neholí sami. Pokusíme-li se odpovědět na otázku, zda holič holí sám sebe, dostaneme se do bludného kruhu. Pokud se sám neholí, tak se musí holit, protože holí ty, co se sami neholí. A naopak holí-li se sám, tak se holit nemůže, protože holí jen ty, kteří se sami neholí.

2.2.2 RICHARDŮV PARADOX

Buď n nejmenší číslo (přirozené), které nejde definovat méně než sto znaky české abecedy.

Tento paradox si přiblížíme pomocí psacího stoje, který má sto znaků včetně mezer na své klávesnici. Necháme někoho náhodně mačkat tlačítka a po namačkání sta znaků text odebereme. Tento postup budeme dále opakovat. Většina těchto stoznakových textů bude jistě nesmyslná, ovšem nastane situace, kdy takový text bude dávat smysl. Pokud budeme texty odebírat konečně dlouho, najdeme v textu například všechna existující i neexistující česká jména a příjmení, protože nejspíše není jméno, které by mělo více než sto znaků. Kombinací znaků v našem případě je konečně mnoho. Přesněji řečeno 100^{100}, protože na první místo můžeme zvolit libovolné ze sta písmen, na druhé místo nezávisle také jedno ze sta. Mezi texty se najde sekvence popisující přirozená čísla (například pět a 97 mezer). Ovšem přirozených čísel je nekonečně mnoho (přesněji spočetně mnoho), proto bychom neměli být schopni popsat všechny. Tedy musí být první přirozené číslo, jež nejde popsat 100 znaky.

Předchozí větou jsme toto číslo ovšem popsali 45 znaky české abecedy. V případě stroje bychom doplnili příslušný počet mezer.

Závěr Richardova paradoxu je ten, že podezřelé se zdají být věty, které mluví samy o sobě.

2.3 KARDINÁLNÍ ČÍSLA

2.3.1 OBECNÝ NÁSTIN

Kardinálním číslem rozumíme jakési zobecnění čísel přirozených. Uvědomme si, že přirozená čísla udávají v podstatě počet prvků. Tedy někde se vyskytuje n objektů, kde $n \in \mathbb{N}$. Zobecněním tohoto pojmu dojdeme ke kardinálním číslům. Tedy k tomu, kdy má množina stejný počet prvků.

Počet prvků nějaké množiny, o nějž v tomto případě jde, je nesen toliko její mohutností (to znamená, že je lhostejné, jakou povahu mají její prvky a v jakých vztazích jsou zasazeny), a je tedy z dané množiny odečitatelný, aniž by bylo nutno (a někdy dokonce vůbec možno) její prvky přepočítat. (1)

Mějme tedy množiny, které mají stejnou mohutnost právě tehdy, když je lze vzájemně jednoznačně na sebe zobrazit. Odloučíme-li z nějaké množiny její mohutnost a tuto mohutnost vyložíme jako objekt, dostaneme kardinální číslo. Pak základní počet prvků množiny, z níž jsme odloučili mohutnost, udává kardinální číslo. Takto zavedl Cantor kardinální číslo taktéž pro nekonečné množiny.

2.3.2 STEJNÝ POČET PRVKŮ MNOŽINY

Pro určení, kdy mají množiny stejný počet prvků budeme uvažovat funkci $f: A \to B$, tedy přiřazení, které prvku z množiny A ($a \in A$) přiřazuje prvek $f(a) \in B$, který je z množiny B.

O funkci f budeme říkat, že je prostá, pokud při různých vzorech dostaneme různé obrazy, tedy pokud $a_1 \neq a_2$ pak $f(a_1) \neq f(a_2)$, kde $a_1, a_2 \in A$ a $f(a_1), f(a_2) \in \mathrm{B}$.

O funkci f budeme říkat, že je bijekcí, pokud je prostá a zároveň surjektivní neboli „na“. Tedy, že pro každé $f(a) \in B$ existuje $a \in A$.

Pokud existuje prosté zobrazení $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ řekneme, že množina A má nejvýše tolik prvků jako množina B. Značíme $A \prec= B$.

Pokud existuje bijektivní zobrazení $f: A \to B$, řekneme, že množiny A, B mají stejný počet prvků. Značíme $A \approx B$ a říkáme, že A je ekvivalentní s B. Všimněme si, že relace „být ekvivalentní“ je skutečně ekvivalencí. To znamená, že na to relace je reflexivní[10], symetrická a tranzitivní.

Je-li relace mezi množinami relací ekvivalence, potom se tyto množiny rozpadají do tříd navzájem ekvivalentních množin.

Cantor každé takové třídě přiřadil písmeno a nazval je čísly kardinálními.

2.3.3 KONEČNÉ MNOŽINY

Kardinálním číslem konečné množiny A nazveme počet prvků $a \in A$ a značíme ho $cardA = |A|$.

Lze snadno nahlédnout, že když A je konečná množina a B je konečná množina, potom $A \approx B$ tehdy a jen tehdy pokud mají A i B stejný počet prvků.

Příklad:

Množiny $A = \{1,2,3\}$ a $B = \{4,5,6\}$ nejsou stejné, ale mají stejnou kardinalitu $cardA = 3$.

2.3.4 SPOČETNÉ MNOŽINY

2.3.4.1 Definice: Spočetná množina

Řekneme, že množina je *spočetná*, je-li ekvivalentní s množinou všech přirozených čísel . Množina, která je konečná nebo spočetná se nazývá *nejvýšespočetná*. (2)

Množina A je spočetná pokud, lze její prvky uspořádat do posloupnosti.

Kardinál spočetných množin označujeme jako $\aleph_0$ (alef nula)

[10] Relace o je reflexivní na množině A, pokud platí pro všechna $a \in A$, že aoa.
Relace o je symetrická na množině A, pokud platí pro všechna $a,b \in A$, je- li $aob \Rightarrow boa$.
Relace o je tranzitivní na množině A, pokud pro všechna $a,b,c \in A$ platí, je-li
$((aob) \wedge (\mathrm{b}o\mathrm{c})) \Rightarrow (\mathrm{a}o\mathrm{c})$

Příklad:

Množina všech přirozených čísel $\mathbb{N}$ je stejně mohutná jako množina $\mathbb{N}_S$, která obsahuje všechna přirozená čísla sudá. Na první pohled a za použití selského rozumu bychom mohli říci, že množina $\mathbb{N}$ je dvakrát větší než množina $\mathbb{N}_S$. Pokud si ovšem uvědomíme, že každému přirozenému číslu n lze přiřadit sudé přirozené číslo $2n$, zjistíme, že toto přiřazení je bijekcí, tedy obě množiny jsou stejně mohutné.

V tomto příkladu lze samozřejmě zacházet do větších extrémů. Například by se dalo snadno ukázat, že množina kvadrátů přirozených čísel má stejnou mohutnost jako množina všech celých čísel $\mathbb{Z}$.

2.3.4.2 Definice: Alef, nekonečný kardinál

Řekneme, že $\aleph$ je kardinální číslo, jestliže je ordinál, který nelze prostě zobrazit na žádné menší ordinální číslo. Třídu všech kardinálních čísel označíme C_n, tedy $C_n = \{\aleph \in O_n : (\forall \alpha < \aleph)(\alpha \neq \aleph\}$, kde α je ordinální číslo. Řekneme také, že kardinální číslo $\aleph$ je mohutnost množiny x, a píšeme $|x| = \aleph$, jestliže existuje prosté zobrazení množiny x na $\aleph$. (3)

Lze tedy říci, že kardinální čísla určují mohutnosti dobře uspořádaných množin.

První nekonečný kardinál byl již výše zmíněn. Je to kardinál $\aleph_0 = |\mathbb{N}|$, tedy mohutnost množiny všech přirozených čísel. Dalšími nejbližšími kardinály jsou $\aleph_1, \aleph_2, \aleph_3 \ldots$

2.3.4.3 Tvrzení: Hypotéza kontinua

Hypotéza kontinua byla poprvé vyslovena Georgem Cantorem v roce 1882. Týká se otázky, zda je nějaká mohutnost mezi mohutností přirozených čísel a kontinua nebo jsou tyto na sebe přímo navazující.

Mohutnost množiny všech reálných čísel (takzvaná mohutnost kontinua) je nejmenší nespočetnou mohutností.

Tato hypotéza dlouho odolával pokusům soudobých matematiků o její potvrzení či vyvrácení. Až dvojice Kurt Gödel, Paul Cohen tento problém vyřešila a ukázala, že hypotézu kontinua nelze ani dokázat ani vyvrátit, neboť není závislá na axiomech Zermelo-Fraenkelově teorii množin.

Důsledek hypotézy kontinua je takový, že mohutnost množiny reálných čísel nelze označovat jako $\aleph_1$, tedy jako přímého nástupce prvního nekonečného kardinálu, protože díky nezávislosti hypotézy kontinua může tato mohutnost být stejně tak dobře $\aleph_9, \aleph_{15} \ldots$

Počet reálných čísel je proto značen ϑ.

2.3.4.4 Tvrzení:

Reálných čísel je více než přirozených

V předchozím odstavci jsem se zaobíral hypotézou kontinua, respektive jestli je něco mezi mohutností přirozených čísel a čísel reálných. Toto tvrzení by si jistě zasloužilo důkaz, neboť je jedním ze základních pilířů teorie kardinálních čísel

2.3.4.4.1 Důkaz:

V důkazu tohoto tvrzení se omezíme pouze na interval $(0,1)$. Důkaz bude veden sporem, tedy, že na intervalu $(0,1)$ je stejný počet čísel jako je čísel přirozených. Důkaz bude veden Cantorovou diagonální metodou.

Pokud předpokládáme, že přirozených čísel je stejně jako čísel mezi 0 a 1, lze tyto jistě napsat do tabulky vedle sebe a utvořit tak bijektivní zobrazení. Vizualizace by mohla vypadat takto:

Přirozené číslo	Reálné číslo
1	0,614987…
2	0,198872…
3	0,732194…
…	…
6	0,263184…

1-Možná bijekce

Podle našeho předpokladu máme v tabulce obsažena jak všechna čísla přirozená, tak i čísla reálná. Ke sporu by došlo, pokud bychom našli číslo takové, které v tabulce jistě být nemůže. Nalezení takové čísla není žádný problém. Označíme-li si desetinná místa rozvoje reálných čísel postupně $a_1, a_2, a_3, \ldots$ nalezneme takové číslo X, které se liší číslem na n-tém místě svého rozvoje od n-tého čísla desetinného rozvoje n-tého čísla. Tedy u takové čísla v naší adaptaci nemůže na místě desetin figurovat šestka, na místě setin devítka a tak dále. Vizualizace této metody by mohla vypadat následovně:

Přirozené číslo	Reálné číslo
1	0,**6**14987…
2	0,1**9**8872…
3	0,73**2**194…
…	…
6	0,26318**4**…

2-Diagonální metoda

Čísla, jež jsou v tabulce tučná a podtržená budou u našeho čísla X na příslušných místech desetinného rozvoje jiná. Číslo X tedy může vypadat následovně $X = 0{,}123\ldots9\ldots$. Tímto způsobem můžeme projet celou nekonečnou tabulku a zjistíme, že číslo X se od každého liší minimálně na jednom desetinném místě. A takových čísel je samozřejmě nekonečně mnoho. A to je spor s naším výchozím tvrzením. Dokázali jsme tedy, že čísel reálných na intervalu $(0,1)$ je více než čísel přirozených, tedy bez újmy na obecnosti reálných čísel je více než přirozených, jelikož $(0,1) \in$ □ .

2.3.5 OPERACE S KARDINÁLNÍMI ČÍSLY

2.3.5.1 Sčítání a násobení dvou kardinálních čísel

Nechť α, β jsou kardinálními čísly, potom definuje jejich součet jako

$\alpha + \beta = \left|\left(\{0\} \times a\right) \cup \left(\{1\} \times b\right)\right|$

a jejich součin jako

$\alpha \cdot \beta = |a \times \beta|$, kde operace $\times$ je operací kartézského součinu

Jinak formulováno je součet dvou kardinálních čísel mohutnost sjednocení množin majících mohutnost α, β. Součinem dvou kardinálních čísel potom rozumíme mohutnost jejich kartézského součinu.

2.3.5.2 Vlastnosti aritmetických operací s kardinálními čísly

Pro každá tři kardinální čísla a, b, c platí

1) $a + b = b + a$
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$
3) $a \cdot b = b \cdot a$
4) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
5) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ a $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

Z těchto vlastností plyne

1) $\aleph_0 + n = \aleph_0$, pokud n je konečné kardinální číslo
2) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0$ protože součet spočetně mnoha spočetných množin je opět spočetná množina
3) | $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$, protože tento součin si můžeme představit jako součet $\aleph_0$ opakujících se $\aleph_0 - krát$

3 CANTOROVA-BERSTEINOVA-SCHRÖDEROVA VĚTA

Tuto větu, jež dovoluje porovnávat mohutnosti nekonečných množin, vyslovil Cantor bez jejího důkazu. Nicméně o její platnosti byl přesvědčen. Vycházel ve svých úvahách z tvrzení, že každou množinu lze dobře uspořádat. Množinu nazveme dobře uspořádanou, pokud její libovolná neprázdná podmnožina má nejmenší prvek.

S důkazem této věty přišli 1896 a 1897 nezávisle na sobě F. W. K. E. Schröder a Felix Bernstein. Tyto důkazy nebyly závislé na axiomu výběru Zermelovy-Fraenkelovy axiomatické teorii množin, která bude zmíněna v poslední kapitole.

3.1 VĚTA CANTOR-SCHRÖDER-BERNSTEINOVA

Buďte A, B *libovolné množiny. Existují-li množiny* $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ *takové, že* $A \approx B_1, B \approx A_1$ *, platí* $A \approx B$ (2).

Analogické, jinak formulované tvrzení:

Nechť množina A *má menší nebo stejnou mohutnost jako množina* B *a nechť také množina* B *má stejnou nebo menší mohutnost než množina* A. *Potom množiny* A, B *mají stejnou mohutnost*(8).

3.2 DŮKAZY C-B-S VĚTY

3.2.1 DŮKAZ POMOCÍ OBARVOVÁNÍ MNOŽIN

Nechť $f : A \to B$ a $g : B \to A$ jsou prostá zobrazení. Naším úkolem je sestrojit bijekci $h : A \to B$.

Problém může nastat, když zobrazení f nebude surjektivní. Potom nám v množině B budou zbývat „liché“ prvky, jež nejsou obrazem žádného $a \in A$. Nyní obarvíme prvky množiny A dvěma barvami. Černě obarvíme prvky, které jsou obrazem „lichého“ prvku z množiny B, při střídání zobrazení. Tedy takové prvky, jež dokážeme zapsat následujícím tvarem: $a = g(f(g(f(...(g(b))))))$. Ostatní prvky ponecháme bílé.

Nyní definujme zobrazení h, které každému bílému prvku přiřazuje $h(a) = f(a)$ a každému černému $h(a) = g^{-1}(a)$. Jeden vzor prvku a je zaručen zadáním, a sice že zobrazení $g: B \to A$ je prosté.

Je zobrazení h prosté?

Vyberme dva prvky $a_1, a_2 \in A$. Pokud jsou prvky obarveny oba černě nebo oba modře, potom je injektivnost zaručena v případě dvou bílých injektivností zobrazení f a v případě dvou černých existencí jednoho vzoru zobrazení g^{-1}.

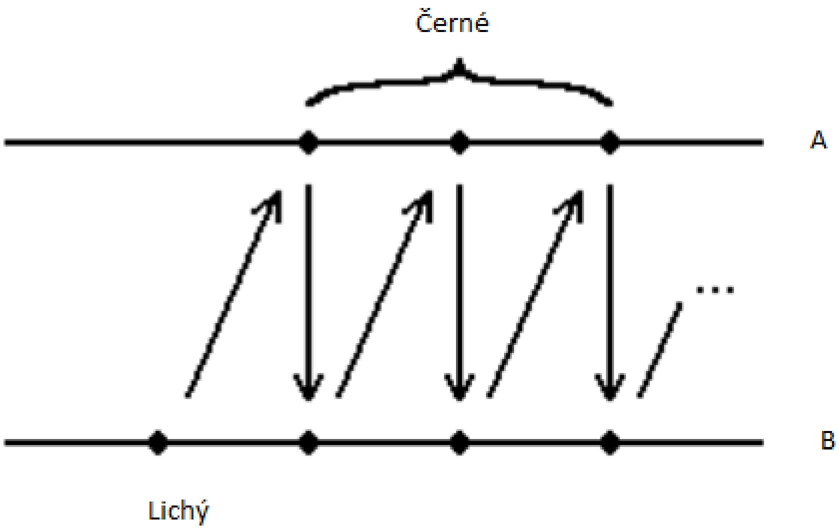
V případě, že prvek a_1 je černý a prvek a_2 bílý a $h(a_1) = h(a_2)$.Potom ale $h(a_1) = g^{-1}(a_1) = h(a_2) = f(a_2)$, tudíž platí, že $a_1 = f(g(a_2))$. Tedy i prvek a_2 je obrazem „lichého“ prvku při střídání zobrazení. Prvek a_2 je tedy také černý. To je ovšem spor s výchozím tvrzením. Zobrazení h je prosté.

Je zobrazení h surjektivní?

Chceme najít $a \in A$ takové, že $h(a) = b, b \in B$. Pokud budeme mít bíle označený prvek, můžeme pro něj psát $h(a) = f(a) = b$. Případě černého prvku se dostáváme k $h(g(b)) = g^{-1}(g(b)) = b$. To platí pro $\forall a \in A$. Zobrazení h je tedy surjektivní.

Zobrazení h je injektivní i surjektivní, je tedy bijektivní.

Q. E. D



8-Grafická interpretace důkazu

3.2.2 DŮKAZ VEDENÝ POMOCÍ TEORIE GRAFŮ

Tento důkaz Cantorovy věty bude odvozen na základě úvah o vhodných nekonečných grafech.

Nechť A, B jsou množiny a zároveň platí $A \cap B = \varnothing$.

Sestrojme graf G, který bude definován jako sjednocení obou množin. Hrany grafu obarvíme černě nebo bíle na základě zobrazení f, g.

Nechť $x = g(y)$, potom bude mezi prvky $x, y \in (A \cup B)$ bílá hrana.

Nechť $y = f(x)$, potom bude mezi prvky hrana černá.

Potom bude platit, že $\forall x \in A$ je spojeno s právě jednou bílou hranou a maximálně s jednou černou hranou. To platí, protože zobrazení f je definováno na celé množině A a zároveň zobrazení g je prosté, ale nemusí být surjektivní. Dále platí, že $\forall y \in B$ je spojeno s jednou černou hranou a maximálně jednou bílou. Tedy všechny vrcholy grafu mají stupeň 1 nebo 2.

Rozborem všech možných vzniklých komponent zjistíme, že na grafu se stupni vrcholů 1 nebo 2 mohou vznikat:

1) Konečné kružnice

V konečných kružnicích má každý vrchol stupeň 2. Pokud z vrcholu vychází dvě hrany, potom tyto hrany musí mít různou barvu. Toto je zajištěno u všech vrcholů a při střídání barev, máme zajištěno střídání x, y a tedy i perfektní párování.

2) Oboustranně nekonečné cesty

Zde platí stejné podmínky jako u konečných kružnic a párování je tedy také zaručeno.

3) Jednostranně nekonečné cesty

Opět stejný argument střídání barev. Jediným rozdílem je, že si musíme vybrat, jakou barvou bude cesta začínat, aby bylo zaručeno párování při zobrazení h.

Spojením těchto párování je zaručeno párování v celém grafu a tím i to, že zobrazení h je bijekcí.

Q. E. D.

3.2.3 DŮKAZ POMOCÍ ČÍSLOVÁNÍ MNOŽIN A MATEMATICKÉ INDUKCE

Zde se nám bude hodit trochu jiná formulace Cantor- Bernsteinovy věty:

Je-li každá ze dvou množin M, K ekvivalentní s podmnožinou druhé, pak jsou i M, K ekvivalentní.

K samotnému důkazu budeme potřebovat dokázat pomocné lemma.
Lemma:
Nechť $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2$ a zobrazení $f : A_0 \to A_2$ je bijekcí. Potom A_0, A_1 jsou ekvivalentní množiny.

Nadefinujme další množiny $A_n, n \in \mathbb{N}$ pomocí matematické indukce následovně: $A_{n+2} = f(A_n)$ a dále prvek, který zůstává stejný po libovolném množství zobrazení $D = \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n$.

Jelikož f je bijekcí, potom je bijekcí i zobrazení množiny $A_0 \setminus A_1$ na množinu $A_2 \setminus A_3$ a dále obecně $A_n \setminus A_{n+1}$ na $A_{n+2} \setminus A_{n+3}$. Potom lze množinu A_0 zapsat následovně:

$A_0 = \left[D \cup \left(A_1 \setminus A_2 \right) \cup \left(A_3 \setminus A_4 \right) \cup ... \right] \cup \left[\left(A_0 \setminus A_1 \right) \cup \left(A_2 \setminus A_3 \right) \cup \left(A_4 \setminus A_5 \right) ... \right]$ a množinu A_1:

$A_1 = \left[D \cup \left(A_1 \setminus A_2 \right) \cup \left(A_3 \setminus A_4 \right) \cup ... \right] \cup \left[\left(A_2 \setminus A_3 \right) \cup \left(A_4 \setminus A_5 \right) \cup \left(A_6 \setminus A_7 \right) ... \right].$

Jak si můžeme všimnout první části závorek jsou identické a z druhé části první závorky zobrazením f získáme druhou část druhé závorky.

Definujme další zobrazení $g : A_0 \to A_1$ takové, že g je identitou na první části hranatých závorek a splývá se zobrazením f na druhé části hranatých závorek.

Zobrazení g je bijekcí A_0 na A_1. Tím je tedy lemma dokázáno.

Nyní je samotný důkaz Cantor-Bernsteinovy věty značně zjednodušen.

Mějme nyní dvě množiny K, M. Zobrazení f buď bijektivní zobrazení množiny M na K_1, kde $K_1 \subseteq K$. Dále buď g bijektivním zobrazením z množiny K na podmnožinu M_1 množiny M.

Nyní udělejme restrikci množiny K_1. Potom $g\left(K_1\right) = M_2 \subseteq M_1$. Nyní se nám pomocí skládání zobrazení podařilo zobrazit množinu M na množinu M_2. Složením bijektivních zobrazení dostáváme opět bijektivní zobrazení tedy $h \circ f\left(M\right) = M_2$ je bijekci a podle výše dokázané lemmatu platí, že $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \to M_1 \approx M$ a jelikož M_1 je ekvivalentní s K, pak i $M \approx K$.

Q. E. D.

Příklad:

Pomocí Cantor- Bernsteinovy věty dokažte, že □ $\approx$ □ . Pro korespondenci s důkazem označme □ jako M a množinu □ jako K.

Mějme zobrazení $g(n) = 2n$ a zobrazení $f\begin{cases} 2z & z\rangle 0 \\ -2z+1 & z \leq 0 \end{cases}$,kde $n \in M, z \in K$. Potom množina K_1 jsou sudá kladná celá čísla a množina M_1 jsou celá přirozená čísla □ . Potom restrikcí množiny K na množinu K_1 a zobrazením $h(k_1) = 4k_1, k_1 \in K$ získáme podmnožinu M_2 a můžeme psát, že $M \supseteq M_1 \supseteq M_2$ a všechna zobrazení jsou bijekcemi. Podle výše dokázaného lemma tedy můžeme psát $M \approx K,$□ $\approx$□ .

Q. E. D

4 Platnost analogie Cantor-Bernsteinovy věty v teorii Abelových grup

Je zřejmé, že bychom mohli přemýšlet i nad tím, dna nějaká analogie Cantor-Bernsteinovy věty neplatí i pro některé algebraické struktury, například pro Abelovy grupy.
Zde musíme ovšem pouhou bijekci (vzájemné, jednoznačné zobrazení) nahradit izomorfismem.

4.1.1.1 Definice: Grupa

Řekneme, že $(G, \circ)$ je grupa, jestliže G je neprázdná množina, na níž je definována binární operace $\circ$, která je asociativní, v níž existuje neutrální prvek $e \in G$ takový, že pro všechna $a \in G$ je $a \circ e = e \circ a = a$ a konečně ke každému $a \in G$ existuje prvek $a^{-1} \in G$ tak, že $a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$.
Jestliže je operace $\circ$ navíc komutativní, říkáme, že G je komutativní čí Abelova grupa.
Pro komutativní grupy užíváme obvykle aditivního zápisu, tj. grupovou operaci značíme $+$ a neutrální prvek 0. Hovoříme často ne o inverzním, ale o opačném prvku.
Známe některé Abelovy grupy: $(\mathbb{Z}, +)$je aditivní grupa celých čísel s operací násobení, též $(\mathbb{Q}, +), (\mathbb{R}, +), (\mathbb{C}, +)$ jsou nekonečné grupy ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ jsou zde všechny množiny čísel racionálních, reálných a komplexních).
Připomeňme, že $(Z_n, +)$ je grupa zbytkových tříd modulo n s operací sčítání.
Příklad:
Volme například $n = 4$. Zbytkové třídy modulo 4 budeme značit $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}$ a vzhledem k jejich sčítání je daná grupa dána tabulkou:

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$

3-Operace sčítání

Je patrné, že $\bar{1} \oplus \bar{1} = \bar{2}, \bar{1} \oplus \bar{2} = \bar{3}, \bar{1} \oplus \bar{3} = \bar{0}$ a tedy grupa $(Z_4, \oplus)$ je grupou cyklickou (má jednoprvkovou množinu generátorů). Jiným generátorem této grupy je zřejmě prvek $\bar{3}$. Prvky $\bar{1}$ i $\bar{3}$ mají řád 4 (píšeme $o(\bar{1}) = o(\bar{3}) = 4$). Dále $o(\bar{0}) = 1$ a $o(\bar{2}) = 2$.

Povšimněme, že grupa $(Z_4, \oplus)$ má jako podgrupy samu sebe a podgrupu $(\bar{0}, \oplus)$ tvořenou jen neutrálním prvkem grupy. Tyto grupy se nazývají nevlastní.

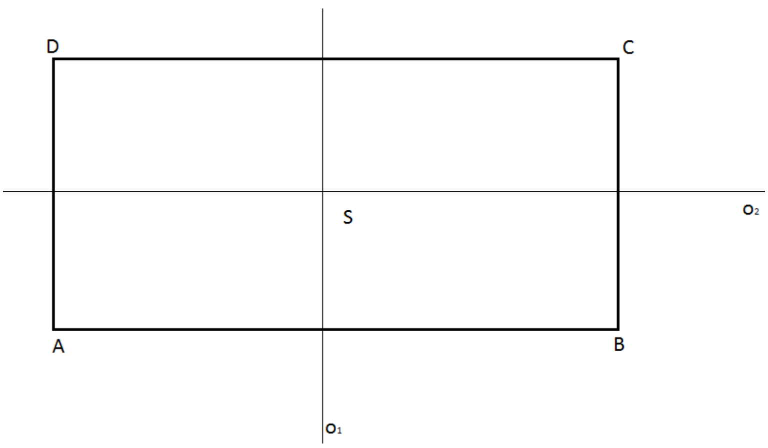
Dále má $(Z_4, \oplus)$ jednu vlastní podgrupu, a to $H = (Z_2, \oplus) = (\{\bar{0}, \bar{2}\}, \oplus)$. Tato grupa je dvouprvková, má řád 2. Grupa $(Z_4, \oplus)$ je čtyř prvková a $2|4$. To je jeden z projevů Langrangeovy věty.

4.1.1.2 Věta: Řád podgrupy dělí řád grupy

Nechť G je libovolná konečná grupa a H její podgrupa. Pak $|H|\,\big|\,|G|$, čili řád (=počet prvků) podgrupy H dělí vždy řád konečné grupy G.

Příklad:

Je dán obdélník $ABCD$. Je patrné, že existují právě čtyři shodnosti v rovině, které tento obdélník zobrazují na sebe. Jde o identitu I, osovou souměrnost $O_1(O_2)$ s osou o_1 respektive o_2 a středovou souměrnost S.



9-Shodná zobrazení obdélníka

Tyto shodnosti spolu s operací skládání shodností $\circ$ tvoří grupu K s následující operační tabulkou.

$\circ$	I	O_1	O_2	S
I	I	O_1	O_2	S
O_1	O_1	I	S	O_2
O_2	O_2	S	I	O_1
S	S	O_2	O_1	I

4-Skládání zobrazení

Povšimněme si, že grupa $(K,\circ)$ má jeden prvek řádu 1, kterým je identita a tři prvky řádu 2.

Grupy $(Z_4,\oplus)$ a $(K,\circ)$ nejsou „stejné“, vždyť mají různé prvky. V teorii grup se užívá pojem izomorfismus a homomorfismus.

4.1.1.3 Definice: Homomorfismus

Buďte $(G,\circ)$ a $(G',*)$ dvě grupy. Zobrazení $f:G\to G'$ se nazývá homomorfismus, jestliže pro všechna $a,b\in G$ platí $f(a\circ b)=f(a)*f(b)$.

Homomorfismus, který je prostým zobrazením a zobrazením na G, se nazývá izomorfismus (bijekce s vlastností homomorfismu).

Příklad:

Grupy $(Z_4,\oplus)$ a $(K,\circ)$ nejsou izomorfní. Nosiče těchto grup jsou čtyř prvkové množiny a mezi těmito množinami lze jistě najít bijekci (dokonce 4! bijekcí). Žádná z nich však není izomorfismem. Ten musí mít navíc vlastnost homomorfismu a ovšem i řadu důsledků, které z ní plynou (například zachovávat řád prvku). To se ale nemůže podařit, protože prvek $\bar{1}$ má v Z_4 řád čtyři a v K žádný prvek s řádem čtyři neexistuje.

Izomorfismus jakoby identifikuje grupy, na nichž grupová operace „funguje stejně“, jen prvky grupy „si převlékly kabáty“, mají „jiné názvy“.

Jestliže chceme hledat analogii Cantor-Bernsteinovy věty v teorii grup, pak musíme zkoušet hledat mezi „velikými“ grupami, pro konečné grupy nemáme šanci.

Uveďme tedy postup, jak lze z „malých“ grup konstruovat „větší“.

4.1.1.4 Definice: Direktní součin grup

Nechť $(H,\circ)$ a $(K,*)$ jsou dvě grupy. Na množině $G = H \times K$ definujeme binární operaci $\square$ takto: $(h_1,h_1)\square(h_2,h_2) = (h_1 \circ h_2, h_1 * h_2)$. Množina G spolu s operací $\square$ je zřejmě grupou. Jedná se o takzvaný direktní součin množin.

Důsledky direktního součinu:

1) Grupa G má počet prvků roven součinu počtů prvků grup H a K.
2) Lze zavést direktní součin n grup tak, že

$(G_1,\circ_1)\times\ldots\times(G_n,\circ_n) = (G_1\times\ldots\times G_n,\circ) = (x_1 \circ_1 y_1,\ldots,x_n \circ_n y_n)$,kde $x_n, y_n \in (G_1\times\ldots\times G_n), n \in \square$.

Nyní již můžeme nastolit problém. Je-li G isomorfní s direktním součinem grupy H a zároveň je-li H isomorfní s direktním součinem grupy G jsou nutně G,H isomorfní?

Vezměme například grupu $G = Z_2 \oplus Z_4 \oplus Z_4 \oplus \ldots$ a grupu $H = Z_4 \oplus Z_4 \oplus Z_4 \oplus \ldots$

Pokud bychom chtěli uplatnit analogii Cantor-Bernsteinovy věty, museli bychom najít izomorfismus grupy H na podgrupu grupy G. To je ovšem triviální. První člen z H zobrazíme na druhý člen G a tak dále. Snadno nahlédneme, že se jedná o identitu. Tedy první polovina je splněna. Zobrazení grupy G na podgrupu grupy H také není velký problém, pokud si uvědomíme, že $Z_4 = Z_2 \oplus Z_2$. Potom je jasné, že grupu G lze zobrazit na podgrupu grupy H.

V takovém případě jsou předpoklady analogie Cantor-Bernsteinovy věty splněny a mohli bychom se domnívat, že i grupy G,H jsou izomorfní. Možná překvapivě tomu tak ale není. Jelikož jsme opustili konečné grupy, přestává platit všechna teorie výše vybudovaná (např. Langrangeova věta).

Pokud by nás zajímalo, jak se dobrat výsledku museli bychom využít Ulmovy věty, který ve své teorii ovšem využívá ordinální čísla σ a to bychom se doslali daleko za rámec této práce. Proto zde není nová teorie budována a nám na tento případ zbyde jakási intuice, která nám říká, že grupy nejsou izomorfní.

Závěrem této kapitoly bych rád porovnal užití Cantor-Bernsteinovy věty a její analogie. Pokud se pohybujeme v oblasti množin, nemáme tolik problémů, protože hledáme bijekce a těch je „poměrně hodně“. Pokud je ovšem dostaneme na půdu algebry v našem případě Abelových grup musíme hledat izomorfismy mezi grupami a zde máme „svázané ruce“ podmínkami, jež izomorfismus zaručují.

ZÁVĚR

Jako cíle mé bakalářské práce jsem si vytyčil sumarizaci cesty starověkých myslitelů až po zrod teorie množin. Dále potom přednesení Cantor-Bernsteinovy věty a některé její důkazy, jež jsou psány i pro nematematiky.

Ve své práci jsem se snažil psát v popularizační formě a přiblížit svět matematiky i nezasvěcenému laikovi. V tomto směru bych zejména poukázal na fakta z historie matematiky, na kterých je myslím moje snažení patrné. Málokoho by totiž jistě napadlo, jak spletitá byla cesta k teorii množin, dnes využívané prakticky ve všech odvětvích.

Na druhou stranu Cantor-Bernsteinova věta může být pro někoho nezajívamá kvůli její těžké představitelnosti, ale myslím si, že hloubavý čtenář závoj nekonečen jistě prohlédne.

Doufám, že se moje bakalářská práce bude líbit a pomůže k popularizaci matematiky.

RESUMÉ

The main purpose of my bachelor thesis was to create technical text, which deals with Set Theory, especially with Cantor-Bernstein Theorem. This thesis should popularise mathematics to non-mathematician. The bachelor thesis is divided into three chapters. The first chapter is focused on historical development which leads to Set Theory. Chapter two is about Naive Set Theory which includes Cardinal Numbers and paradoxes of Naive Set Theory. The last chapter concentrated on Cantor- Bernstein Theorem and proofs of this theorem.

SEZNAM POUŽITÉ LITERATURY

1. **Bolzano, Bernard a překlad Bayerlová, Loužil.** *Vědosloví (výbor).* Praha : ACADEMIA, 1981.

2. **Fuchs, Eduard.** *Teorie množin pro učitele.* Brno : Masarykova univerzita, 1999. ISBN 80-210-2201-9.

3. **Hora-Hořejš, Petr.** *Toulky českou minulostí- Šestý díl.* Český Těšín : BARONET AND VIA FACTI, 1997.

4. **Velebil, Jiří.** Naivní teorie množin. *Naivní teorie množin.* [Online] 27. únor 2008. [Citace: 15. červen 2016.] ftp://math.feld.cvut.cz/pub/velebil/yd01mlo/handout01.pdf.

5. **Vopěnka, Petr.** *Úvod do klasické teorie množin.* Plzeň : Vydavatelství Západočeské univerzity v Plzni, 2011. ISBN 978-80-7043-986-9.

6. **Fuchs, Eduard.** *Teorie množin pro učitele.* Brno : autor neznámý, 1999. ISBN 80-210-2201-9.

7. **Štěpánek, Bohuslav Belcar a Petr.** *Teorie množin.* Praha : Academia, 1986. ISBN 21-022-86.

8. **Vopěnka, Petr.** *Vyprávění o kráse novobarokní matematiky.* Brno : Práh, 2004. ISBN: 80-7252-103-9.

9. **Jaroslav Drábek, Pavlína Medunová.** *Kategorie nekonečen v matematice.* Plzeň : Pedagogické centrum Plzeň, 2004. ISBN 80-702-0138-X.

10. **Tibor Šalát, Jaroslav Smítal.** *Teória množín.* Praha : Alfa, 1986. ISBN 63-568-86.

11. **Vopěnka, Petr.** *Prolegomena k nové infinitní matematice.* Praha : Karolinum, 2014. ISBN 9788024625669.

12. **Fakulta elektrotechniky a informatiky, Technická univerzita Ostrava.** Naivní teorie množin. [Online] [Citace: 3. Březen 2016.] http://www.cs.vsb.cz/duzi/okruh5.pdf.

13. **Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity.** Seriál-Nekonečno. *Nekonečné množiny.* [Online] [Citace: 15. Červen 2016.] https://mks.mff.cuni.cz/archive/21/10.pdf.

14. **Mareš, Martin.** Kombinatorické drobnosti. *The Home Page of Martin Mareš.* [Online] [Citace: 24. Květen 2016.] https://mj.ucw.cz/papers/kg1.pdf.

15. Proof of Cantor-Bernstein theorem. *MathPath.* [Online] [Citace: 15. Červen 2016.] http://www.mathpath.org/proof/Sch-Bern/proofofS-B.htm.

16. **Melka, Jakub.** *Teorie množin.* [Online] 17. Únor 2007. [Citace: 18. Červen 2016.] http://mff.lokiware.info/TeorieMnozin/files?get=ail063.pdf.

17. **Kořínek, Vladimír.** Pokroky matematiky, fyziky a astronomie. *Teorie množin, její vznik a vývoj.* [Online] [Citace: 16. Červen 2016.] http://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/138238/PokrokyMFA_10-1965-3_2.pdf.

18. **Dupré, Ben.** *Filozofie, 50 myšlenek, které musíte znát.* místo neznámé : Slovart, 2011. ISBN: 978-80-7391-410-3.

19. Wikipedie. *Zénón z Eleje.* [Online] 3. 4 2016. [Citace: 15. 6 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Z%C3%A9n%C3%B3n_z_Eleje.

20. Wikipedie. *Tomáš Akvinský.* [Online] 30. 1 2016. [Citace: 1. 4 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Tom%C3%A1%C5%A1_Akvinsk%C3%BD.

21. Wikipedie. *Galileo Galilei.* [Online] 5. 3 2016. [Citace: 20. 5 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Galileo_Galilei.

22. Wikipedie. *Eukleidés.* [Online] 17. 3 2016. [Citace: 22. 6 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Eukleid%C3%A9s.

23. Wikipedie. *Jean le Rond d'Alembert.* [Online] 18. 5 2016. [Citace: 21. 3 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Jean_le_Rond_d%27Alembert.

24. Wikipedie. *Bertrand Russell.* [Online] 16. 6 2016. [Citace: 1. 6 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell.

SEZNAM INTERNETOVÝCH ZDROJŮ OBRÁZKŮ

1-Achilles a želva
[Online], [Citace: 1. 6 2016.] www.eprojekt.gjs.cz.
2-Bolzanův portrét
Wikipédia. *Bernard Bolzano.* [Online] 15. 4 2016. [Citace: 1. 6 2016.] https://cs.wikipedia.org/wiki/Bertrand_Russell.
3-Paradoxy nekonečna-obálka
California Digital Library. [Online]. [Citace: 15. 6 2016.] https://archive.org/details/paradoxiendesune00bolz
4-Pamětní deska v Celetné ulici v Praze
Wikipedia Commons. *Bernard Bolzano.* [Online] 26. 2 2016. [Citace: 15. 6 2016.] https://commons.wikimedia.org/wiki/Bernard_Bolzano#/media/File:Pametni_cedule_Bernard_Bolzano.jpg
5-Bolzano na československé známce
JOC/EFR. *Bernard Bolzano.* [Online] 10. 4 2015. [Citace: 15. 6 2016.] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/PictDisplay/Bolzano.html.
6-Georg Cantor-portrét
Wikipedia. *Georg Cantor.* [Online] 24. 6 2016. [Citace: 15. 6 2016.] https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
7-Georg Cantor r. 1870
Wikipedia. *Georg Cantor.* [Online] 24. 6 2016. [Citace: 15. 6 2016.] https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

Seznam obrázků a tabulek

Obrázky

Tabulky