

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

**Možnosti validace družicových měření mise GRACE
s využitím integrálních transformací**

Autor: Jiří Petrš

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Michal Šprlák, Ph.D.

Plzeň 2016

Prohlášení:

Předkládám tímto k posouzení a následné obhajobě diplomovou práci zpracovanou na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem zadanou diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené odborné literatury a zdrojů informací, které jsou uvedené v diplomové práci.

V Plzni dne 24. května 2016

Poděkování:

Chtěl bych poděkovat zejména vedoucímu mé diplomové práce Ing. Michalu Šprlákovi, Ph.D. za jeho rady a ochotu, s kterou mi je podával. Dále poděkování patří i mým rodičům, kteří všeobecně podporují mé studium.

Abstrakt

V této práci jsou formulovány, zkoumány a aplikovány integrální transformace poruchového potenciálu, které mohou být odvozeny z družicové altimetrie, na data typu GRACE observací. Nejprve jsou aplikovány odpovídající diferenciální operátory, které dávají do souvislosti poruchový potenciál a rozdíl poruchových potenciálů (RPP) nebo rozdíl gradientů poruchových potenciálů (RGPP). Z toho vyplývají dvě integrální transformace, jejichž integrální jádro je dáno v prostorovém a spektrálním tvaru. Za druhé jsou formulovány praktické odhady pro výpočet RPP a RGPP. Ty rozdělují integrační oblast na omezenou integraci a vliv vzdálených zón. Za třetí je zkoumána přesnost praktických odhadů pro družicovou misi GRACE. Jinými slovy je zkoumáno šíření chyb v omezené integraci a chyby ze zanedbání vlivu vzdálených zón nad maximálním stupněm harmonického rozvoje (angl. *omission error*) a vliv chyb sférických harmonických koeficientů při výpočtu vzdálených zón (angl. *commission error*).

Klíčová slova

GRACE, poruchový potenciál, rozdělení integrační oblasti, SST, validace družicových dat

Abstract

Integral transforms of the disturbing potential, that would eventually be derived from altimetry data are formulated, onto satellite-to-satellite (SST) tracking data are formulated investigated and applied in this paper. First, corresponding differential operators, that relate the disturbing potential differences (DPDs) and line-of-sight (LOS) gravity disturbances (LGDs) to the disturbing potential, are applied to the spherical form of the Abel-Poisson integral. This gives two integral transforms for which respective kernel functions are given in the spatial and spectral form. Second, practical integral estimators for evaluation of the DPDs and LGDs are formulated. These decompose the original integral transforms into the limited integration (near zones) and distant zones. Third, expected accuracy of the estimators is investigated for GRACE satellite mission. In particular, we investigate the error propagation through the limited integration, and the omission and commission errors, which are related to the evaluation of the distant zones.

Key words

GRACE, disturbing potential, Decomposition of integral transforms, SST, validation of satellite data

OBSAH

ÚVOD	7
1. DRUŽICOVÁ MĚŘENÍ	9
1.1. Měření družice na družici	9
1.2. Družicová mise GRACE	9
2. MATEMATICKÉ A FYZIKÁLNÍ ZÁKLADY	13
2.1. Data typu GRACE a jejich vztah ke gravitačnímu potenciálu	13
2.2. Veličiny pro popis polohy	14
2.3. Základní vztahy pro výpočty v gravitačním poli	16
3. PROBLÉM 1: URČENÍ ROZDÍLU PORUCHOVÝCH POTENCIÁLŮ	19
3.1. Vliv vzdálené zóny	21
4. PROBLÉM 2: URČENÍ ROZDÍLU GRADIENTŮ PORUCHOVÝCH POTENCIÁLŮ	25
4.1. Odvození integrálních transformací pro určení RGPP	25
4.1.1. Vliv vzdálené zóny	26
5. NUMERICKÝ EXPERIMENT	32
5.1. Výběr dat	32
5.2. Výběr oblasti a drah	32
5.3. Testování přesnosti praktických odhadů	34
ZÁVĚR	46
SEZNAM ZKRATEK	47
SEZNAM LITERATURY	48
PŘÍLOHY	50

Úvod

Přesný popis gravitačního pole Země je významný pro velké množství různých vědních oborů. Mezi takovéto obory patří např. geofyzika, v níž se gravitační pole využívá při poznávání struktury zemského tělesa. Dalším příkladem je geodézie, kde je znalost gravitačního pole potřebná pro realizaci lokálních a globálních výškových souřadnicových systémů. Modely gravitačního pole se také velmi intenzivně využívají při popisu drah družic, přičemž přesný popis gravitačního pole významně zvyšuje přesnost měření globálních družicových navigačních systémů (GNSS). Skutečností, že gravitační pole je obrazem hmot, je možno také využít v oceánografii při studiu oceánských proudů, v glaciologii pro lepší pochopení tání ledovců a v hydrologii při studiu zavodnění velkých vodních toků.

Gravitační pole je možné popsat pomocí pozemních, leteckých nebo družicových gravimetrických dat. Pro modelování globálního gravitačního pole jsou používána především měření těch družicových metod, které poskytují data pro celou Zemi [11]. Mezi družicová měření poskytující takováto data patří především družicové mise CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload), GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer), GRACE (Gravity Recovery And Climate Experiment) a plánovaná GRACE-FO (GRACE Follow-On). V současné době se na oběžné dráze nachází pouze satelity mise GRACE, které je věnována tato práce.

Validační metody jsou potřebné pro správnou interpretaci a využití družicových dat [7]. Validace dat družicové mise GRACE může být provedena pomocí jakýchkoliv dostupných gravimetrických dat, která dostatečně přesně popisují gravitační pole Země. V tomto textu je odvozena úloha, která je využitelná pro validaci GRACE družicových dat před dalším využitím v geovědách. Za prvé jsou na sférický tvar Abel-Poissonova integrálu [8] aplikovány diferenciální operátory, které dávají do souvislosti poruchový potenciál s rozdíly poruchových potenciálů (RPP) nebo rozdíly gradientů poruchových potenciálů

(RGPP). Tím jsou získány dvě integrální transformace, k jejichž výpočtu je nezbytná globální znalost poruchového potenciálu. Za druhé jsou formulovány praktické odhady (angl. *practical estimators*) rozdělením integrálních transformací na blízkou a vzdálenou zónu [14]. Za třetí byla zkoumána přesnost praktických odhadů, a to: šíření chyb v omezené integraci, chyby ze zanedbání vlivu vzdálených zón nad maximálním stupněm harmonického rozvoje (angl. *omission error*; dále jen chyba ze zanedbání) a vliv chyb sférických harmonických koeficientů při výpočtu vlivu vzdálených zón (angl. *commission error*, dále jen vliv chyb harmonických koeficientů).

Veličiny RPP a RGPP mohou být také využity ve formulaci a řešení tzv. inverzní úlohy [9]. Inverzní úlohu lze odvodit pro každou z veličin RPP a RGPP a tím vytvořit odhad poruchového potenciálu na povrchu Země dvěma odlišnými postupy.

Text předkládané práce je rozdělen do šesti kapitol. V kapitole 1 jsou popsány techniky měření družice na družici (SST, angl. *satellite-to-satellite tracking*) a měření družicové mise GRACE. V druhé kapitole jsou zavedena značení používaná v práci a jsou zde popsány vztahy pro výpočet potřebných veličin pro určení RPP a RGPP. V kapitole 3 je odvozen nový aparát pro výpočet RPP z družic mise GRACE. Ve čtvrté kapitole jsou odvozeny vztahy pro výpočet RGPP. V kapitole 5 jsou popsány všechny numerické experimenty, které byly provedeny. V šesté kapitole je shrnuta celá práce a její výsledky.

1. Družicová měření

1.1. Měření družice na družici

Metody SST mají velký význam ve fyzikální geodézii, poskytují, kromě jiných informací, gravimetrická data, či data pro zpřesnění popisu oběžných drah družic. Měření probíhá pomocí sledování satelitu jiným satelitem (příp. více satelity). Měřenými veličinami mohou být např. vzájemná vzdálenost satelitů či poloha jednoho ze satelitů [11].

Metody SST se obvykle rozdělují podle konfigurace družic. První konfigurací je konfigurace vysoko-nízko (*high-low*), která se skládá z jednoho či více satelitů s vysokou oběžnou drahou (např. satelity GNSS) a z družice s nízkou oběžnou drahou. Nízko obíhající satelity se pohybují ve výšce přibližně od 200 do 500 km [11]. V této konfiguraci fungovala např. mise CHAMP, která byla určena pro zkoumání atmosféry a modelování tíhového a magnetického pole Země¹.

Druhá konfigurace SST se nazývá nízko-nízko (*low-low*) a tvoří ji dvě družice, které obíhají na téměř stejné oběžné dráze a měří vzájemnou vzdálenost. Velikost této vzdálenosti se pohybuje v řádech několika stovek kilometrů [11]. Metody SST určené pro mapování gravitačního pole, které operují v módu nízko-nízko, mapují toto pole pomocí orbitálních změn vyvolaných změnami v gravitačním poli.

Poslední důležitou konfigurací může být kombinace módů vysoko-nízko a nízko-nízko. Takto pracuje družicová mise GRACE², která je podrobněji popsána v následující sekci.

1.2. Družicová mise GRACE

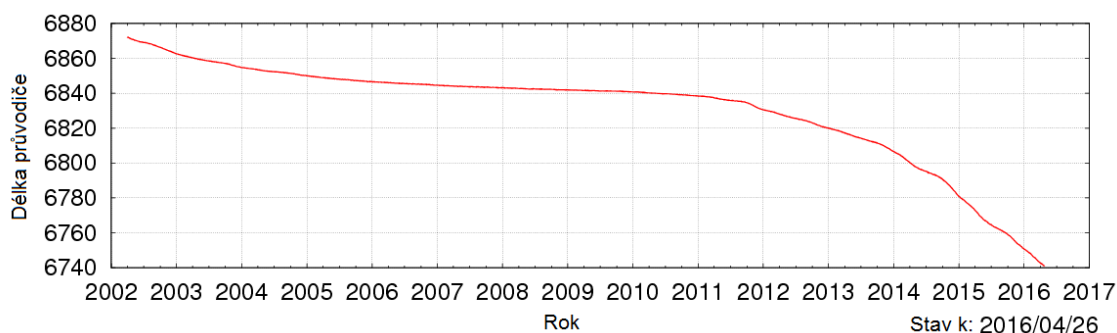
Družicová mise GRACE je druhou misí programu NASA (National Aeronautics and Space

¹ Podrobnější informace o misi CHAMP je možné nalézt na <http://www.gfz-potsdam.de/champ/>

² Zdroj: http://nasa.gov/mission_pages/Grace/overview/index.html

Administration) ESSP (Earth System Science Pathfinder), jehož úkolem je přinášet inovativní přístupy ke zkoumání Země. Mise GRACE je společný projekt NASA, GFZ (Geoforschungs Zentrum) a DLR (Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt) a byla vypuštěna v březnu roku 2002³.

Družicovou misi GRACE tvoří dva téměř identické vzájemně se sledující satelity, které v současné době obíhají ve výšce přibližně 360 km nad povrchem Země, viz Obr. 1. Obvykle se jednotlivé satelity značí GRACE A a GRACE B. Družice obíhají po téměř kruhové polární dráze (inklinace je přibližně 89°). Důležitou vlastností takovýchto drah je to, že protínají rovinu rovníku v různých zeměpisných délkách, to znamená, že satelity na těchto drahách je možné použít k mapování celé Země. Vzájemně se sledující satelity mise GRACE jsou od sebe vzdáleny 220±50 km³.



Obrázek 1 Změna délky průvodiče družice GRACE B⁴

V současné době je mise na oběžné dráze více než 14 let, přičemž očekávaná životnost byla pouze 5 let. Odhaduje se, že mise GRACE bude operovat přibližně do poloviny roku 2017⁵. V současné době se plánuje spuštění nástupce mise GRACE. Tím by měla být mise GRACE-FO, jejíž vypuštění na oběžnou dráhu je naplánováno na rok 2017.

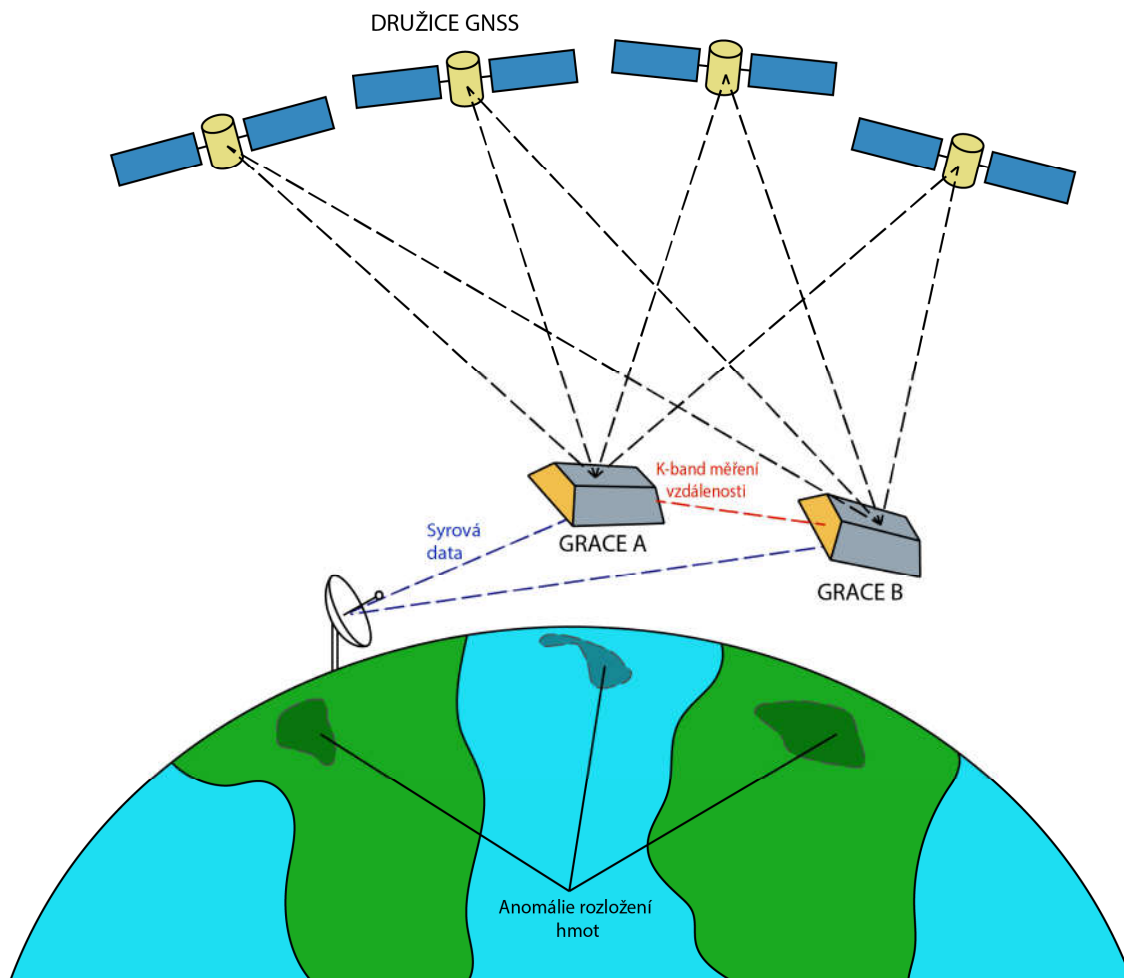
Nejdůležitější měřenou veličinou je vzájemná vzdálenost mezi satelity, která je měřena pomocí velmi přesných radiových měřičů (konfigurace nízko-nízko). Dále je měřena poloha na oběžné dráze pomocí metod GNSS (konfigurace vysoko-nízko) a zrychlení pomocí velmi přesných akcelerometrů. Měření jsou prováděna každých 5 sekund.

³ Zdroj: http://nasa.gov/mission_pages/Grace/overview/index.html

⁴ Zdroj: <http://www.csr.utexas.edu/grace/operations/configuration.html>

⁵ Zdroj: http://eospsa.nasa.gov/sites/default/files/eo_pdfs/Mar_Apr_2016_508_color.pdf

Konfigurace satelitů při měření je zobrazena na Obr. 2.



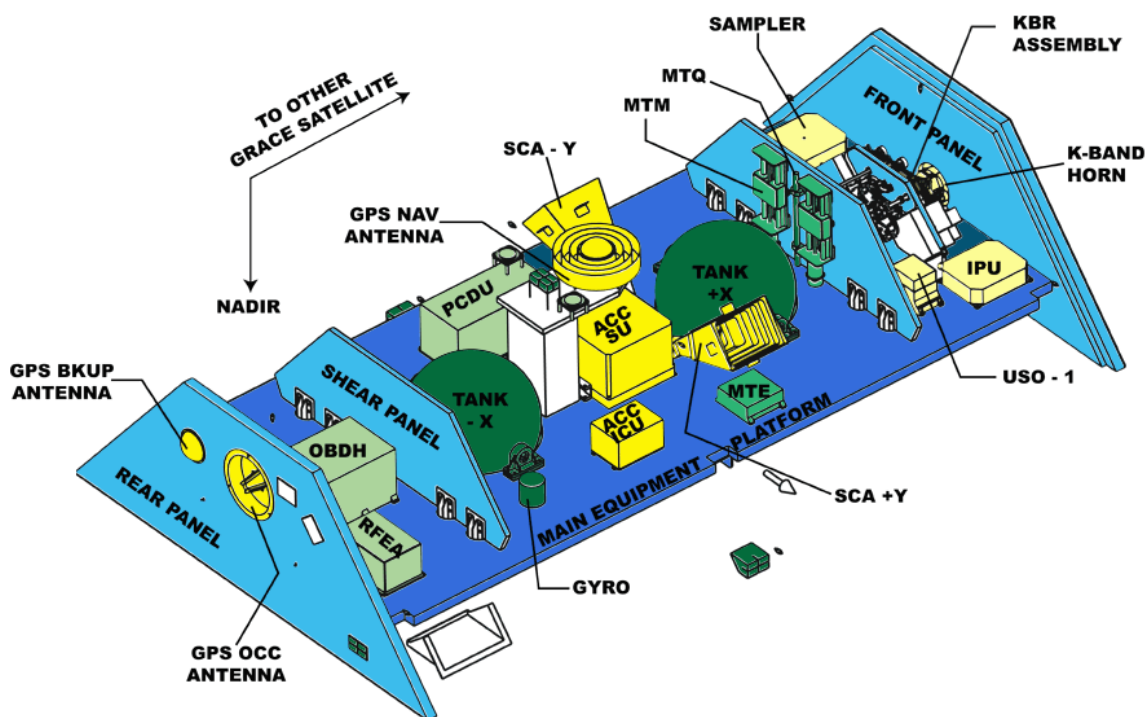
Obrázek 2 Systém měření družicové mise GRACE

Nejdůležitější částí družic je měřicí systém K-band (běžově na Obr. 3), měřící vzdálenost mezi satelity s přesností 10 μm . Dále se na palubě nachází akcelerometr SuperSTAR (zkratka ACC SU na Obr. 3) měřící zrychlení satelitu s přesností $1 \cdot 10^{-10} \text{ms}^{-2}$, přijímač signálu GPS BlackJack (na Obr. 3: GPS OCC ANTENNA, GPS BKUP ANTENNA, GPS NAV ANTENNA) pro určení polohy na orbitu a další zařízení, která se různým způsobem podílejí na měření.⁶

Změny v gravitačním poli studované družicovou misí GRACE mohou být

⁶ Podrobnější popis je k nalezení na <http://op.gfz-potsdam.de/grace/payload/payload.html> nebo na <http://www.csr.utexas.edu/grace/spacecraft/colorcode.html>

způsobovány např. variacemi v mořských proudech, a to buď povrchových nebo hlubinných, pohybem podzemních zdrojů vody [5], výměnou vody mezi ledovci a oceány a změnami rozložení hmoty na povrchu a vevnitř Země [16]. Výsledky mise GRACE tvoří velký příspěvek k dosahování cílů Ředitelství vědeckých misí (angl. *Science Mission Directorate*) americké NASA, zpřesňování Systému pozorování Země (angl. *Earth Observation System*) a pozorování globálních klimatických změn⁷.



Obrázek 3 Vybavení satelitu družicové mise GRACE⁸

⁷ Zdroj: nasa.gov/mission_pages/Grace/overview/index.html

⁸ Zdroj: <http://op.gfz-potsdam.de/grace/satellite/satellite.html>

2. Matematické a fyzikální základy

Tato kapitola obsahuje následující části: Sekce 2.1 popisuje značení jednotlivých veličin, které jsou odvozeny z dat poskytovaných družicovou misí GRACE a navíc je popsána vazba uvedených dat a gravitačního potenciálu. V sekci 2.2 je zavedeno značení pro udání polohy jednotlivých objektů či prvků. V sekci 2.3 jsou stručně popsány nejdůležitější vztahy, používané při práci s poruchovým potenciálem.

2.1. Data typu GRACE a jejich vztah ke gravitačnímu potenciálu

Pro pozici, rychlost a zrychlení satelitů mise GRACE získané měřením GNSS v konfiguraci vysoko-nízko je použito značení:

$$\mathbf{x} = [x \quad y \quad z]^T, \quad \dot{\mathbf{x}} = [\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}]^T, \quad \ddot{\mathbf{x}} = [\ddot{x} \quad \ddot{y} \quad \ddot{z}]^T. \quad (1)$$

Protože je GRACE tvořena dvojicí družic, je nutné v textu obě družice odlišit. Veličiny odpovídající vedoucí družici (GRACE A) jsou indexovány číslem 1, zatímco veličiny odpovídající sledující družici (GRACE B) jsou indexovány číslem 2.

Dále jsou zavedeny rozdíly veličin unevedených v rovnici (1). Jedná se o rozdíl mezi polohami druhé a první družice, resp. rozdíl mezi složkami rychlostí a zrychlení:

$$\delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad \delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_2 - \dot{\mathbf{x}}_1, \quad \delta \ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{x}}_2 - \ddot{\mathbf{x}}_1. \quad (2)$$

Symbol δ je používán v celém textu jako operátor pro rozdíl veličin mezi druhou a první družicí.

Pro vzájemnou vzdálenost satelitů platí:

$$\rho = |\delta \mathbf{x}| = \sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}. \quad (3)$$

A pro jednotkový vektor ve směru spojnice satelitů (LOS, angl. *Line-of-sight*) je:

$$\mathbf{e} = [e_x \quad e_y \quad e_z]^T = \frac{\delta \mathbf{x}}{\rho}. \quad (4)$$

Výše definované veličiny jsou graficky znázorněny na Obr. 4.

Data typu nízko-nízko poskytované misí GRACE umožňují určit první časovou derivaci proměnné ρ , která představuje vzájemnou rychlost obou satelitů:

$$\dot{\rho} = \delta \dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}. \quad (5)$$

Druhá časová derivace proměnné ρ vyjadřuje rozdíl ve zrychlení obou satelitů:

$$\ddot{\rho} = \delta \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e} + \frac{|\delta \ddot{\mathbf{x}}|^2 - \dot{\rho}^2}{\rho}. \quad (6)$$

Pro modelování gravitačního pole mohou být SST data matematicky vztažena k určitým veličinám, které je modelují. Rychlosti $\dot{\mathbf{x}}_1$ a $\dot{\rho}$ lze uvést do souvislosti s rozdíly gravitačního potenciálu V mezi dvojicí satelitů:

$$\delta V(\mathbf{x}) = |\dot{\mathbf{x}}_1| \dot{\rho}. \quad (7)$$

Nutné je zmínit, že rovnice (7) platí pouze přibližně [6]. Rigorózní model pro výpočet rozdílu gravitačních potenciálů je podrobně diskutován v [16]. Alternativně je možné kombinovat SST data typu vysoko-nízko a nízko-nízko tak, že může být vytvořen rigorózní model rozdílu gradientů gravitačních potenciálů promítnutých do jednotkového vektoru ve směru LOS [6]:

$$\mathbf{e} \cdot \delta \nabla V(\mathbf{x}) = \frac{\delta \mathbf{x} \cdot \delta \nabla V(\mathbf{x})}{\rho} = \frac{|\delta \ddot{\mathbf{x}}|^2 - \dot{\rho}^2 - \rho \ddot{\rho}}{\rho}. \quad (8)$$

2.2. Veličiny pro popis polohy

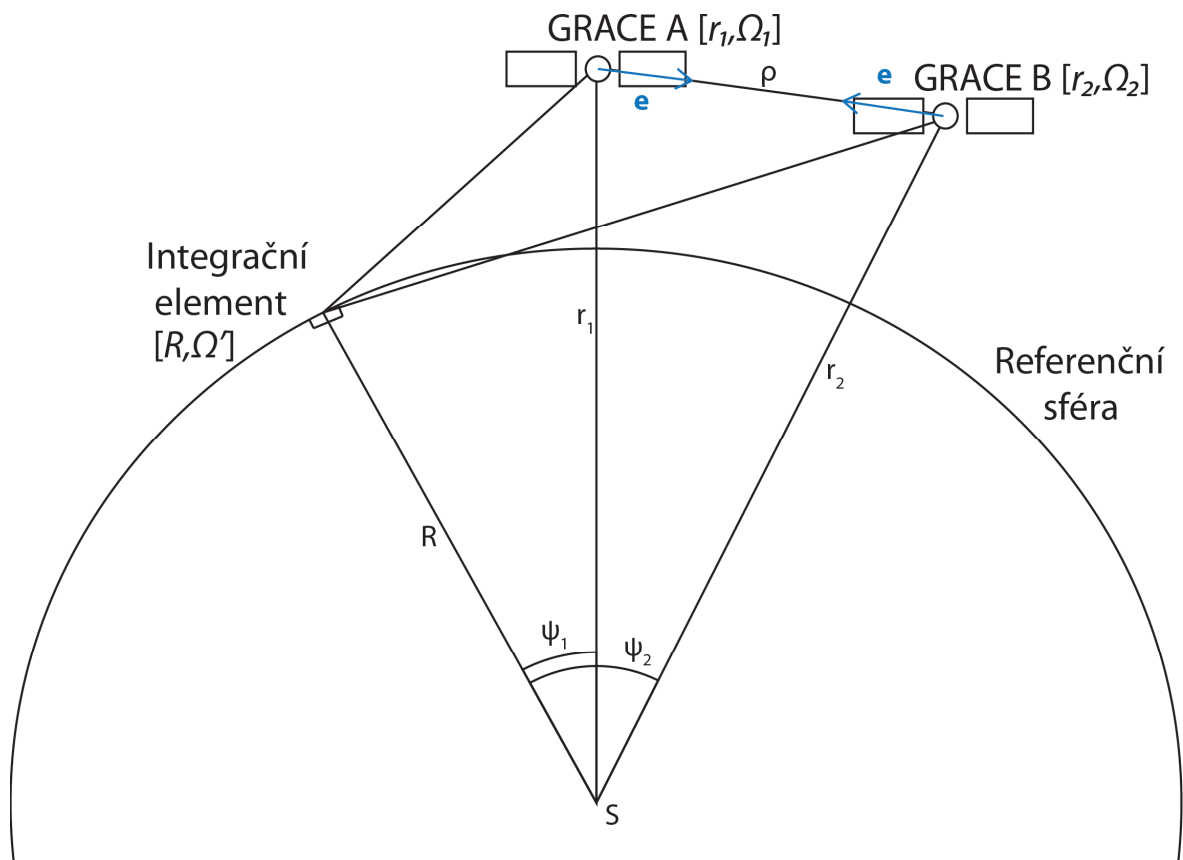
Pro popis polohy jednotlivých prvků jsou v práci používány sférické souřadnice. Transformace geocentrických souřadnic z rovnice (1) do sférických je popsána následujícími vztahy:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (9)$$

$$\tan \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad (10)$$

$$\tan \lambda = \frac{y}{x}, \quad (11)$$

kde r je délka průvodiče (vzdálenost bodu od středu sféry), φ je zeměpisná šířka a λ je zeměpisná délka. Souřadnice φ a λ dohromady vyjadřují úhlovou polohu bodu a budou v dalším textu označovány souhrnně symbolem Ω . Prostorovou polohu výpočtového bodu budeme značit (r, Ω) a polohu integračního elementu ve sférických souřadnicích (R, Ω') , kde R značí velikost poloměru referenční sféry. Symbol Ω' označuje úhlovou polohu integračního elementu. V dalším textu všechny čárkované souřadnice značí veličiny vztažené k integračnímu elementu, viz Obr. 4.



Obrázek 4 Veličiny pro popis polohy

Nyní zavedeme veličiny které dávají do souvislosti výpočtový bod a integrační element: Sférická vzdálenost je veličina, která vyjadřuje nejkratší vzdálenost mezi dvěma body na sféře měřená po povrchu jednotkové sféry. Alternativně lze sférickou vzdálenost mezi dvěma body na referenční sféře definovat jako středový úhel, který svírají tyto body. Matematicky může být vyjádřena následovně:

$$\cos \psi = (\cos \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda') + \sin \varphi \sin \varphi'). \quad (12)$$

Pro zjednodušení zápisů zavedeme proměnnou:

$$u = \cos \psi. \quad (13)$$

Přímý azimut v bodě je úhel, který svírá rovina poledníku procházející tímto bodem s rovinou obsahující spojnicí dvou bodů vedenou po sféře. Matematicky pro přímý azimut platí:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \varphi \sin(\lambda - \lambda')}{\cos \varphi \sin \varphi' - \sin \varphi \cos \varphi' \cos(\lambda - \lambda')}. \quad (14)$$

Také budeme používat normovanou euklidovskou vzdálenost mezi výpočtovým bodem a integračním elementem:

$$g = g(t, u) = \sqrt{1 - 2tu - t^2}, \quad (15)$$

kde t v této rovnici je tzv. útlumový faktor:

$$t = \frac{R}{r}, \quad R \leq r. \quad (16)$$

2.3. Základní vztahy pro výpočty v gravitačním poli

Pro výpočty v gravitačním poli pracujeme často s poruchovým potenciálem. Poruchový potenciál T je zaveden jako rozdíl mezi skutečným gravitačním potenciálem W a normálním gravitačním potenciálem U [8]. Poruchový potenciál je jednou z

nejdůležitějších veličin určených ve fyzikální geodézii, protože může být převeden na výšku geoidu nebo výškovou anomálii.

Poruchový potenciál splňuje stejně jako gravitační potenciál tzv. Laplaceovu rovnici:

$$\nabla^2 T = 0 . \quad (17)$$

kde ∇^2 je tzv. Laplaceův operátor, který má v pravoúhlých souřadnicích tvar:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \quad (18)$$

Pro výpočty na sféře je však výhodnější Laplaceův operátor převést do sférických souřadnic, ve kterých nabývá následující tvar :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} . \quad (19)$$

Řešení Laplaceovy rovnice (17) můžeme vyjádřit následovně [4]:

$$T(r, \Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} Y_n(\Omega), \quad r \geq R . \quad (20)$$

kde, funkce $Y_n(\Omega)$ jsou tzv. povrchové sférické harmonické funkce (angl. *surface spherical harmonics*). Důležité je, že každá harmonická funkce může být napsána rovnicí (20).

Povrchové sférické harmonické funkce mohou být přepsány do tvaru:

$$Y_n(\Omega) = \sum_{m=0}^n a_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) \cos(m\lambda) + b_{nm} P_{nm}(\sin \varphi) \sin(m\lambda), \quad (21)$$

kde a_{nm} a b_{nm} jsou libovolné konstanty. Funkce $P_{nm}(\sin \varphi)$ v rovnici (21) jsou nazývány (přidružené) Legendreovy funkce 1. druhu stupně n a řádu m . Tyto funkce jsou řešením Legendreovy diferenciální rovnice [4] a je možné je psát pomocí tzv. Rodriguezova vzorce:

$$P_{nm}(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial u^{m+n}} (1-u^2)^{\frac{m}{2}} (u^2-1)^n . \quad (22)$$

Nutno zmínit, že v praktických výpočtech jsou však používány pro výpočet

Legendreových funkcí rekurentní vzorce, viz Přílohy.

Normováním a_{nm} a b_{nm} v rovnici (21) obdržíme geopotenciální koeficienty $\Delta\bar{C}_{nm}$ a rovnici (20) lze psát ve tvaru:

$$T(r, \Omega) = \frac{GM}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \Delta\bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega), \quad (23)$$

kde $\bar{Y}_{nm}(\Omega)$ jsou plně normované harmonické funkce, ve kterých se vyskytují plně normované Legendreovy funkce:

$$\bar{P}_{nm}(u) = P_{nm}(u) \begin{cases} \sqrt{2n+1} & \text{pro } m = 0 \\ \sqrt{2(2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & \text{pro } m \geq 1. \end{cases} \quad (24)$$

Výše popsaný postup je nazýván sférickou harmonickou syntézou a ukazuje využití sférických harmonických funkcí v geodézii.

3. Problém 1: Určení rozdílu poruchových potenciálů

Tato kapitola je věnována vysvětlení a odvození rovnic pro výpočet RPP. RPP je veličina, pomocí které je možné dát do souvislosti měření mise GRACE a nezávisle získané hodnoty poruchového potenciálu na povrchu Země. Veličinu RPP je možné zapsat následovně:

$$\delta T(r, \Omega) = T(r_2, \Omega_2) - T(r_1, \Omega_1). \quad (25)$$

Pro další odvozování využijeme skutečnosti, že vztahy pro výpočet poruchového potenciálu $T(r_i, \Omega_i)$, kde i značí index družice, jsou pro obě družice totožné. Proto mohou být pro odvození uvažovány pouze vztahy pro poruchový potenciál v jednom z výpočtových bodů. Je tedy možné při odvození vztahů uvedených v této části začít u Abel-Poissonova integrálu [8]:

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') K(t, u) d\Omega', \quad (26)$$

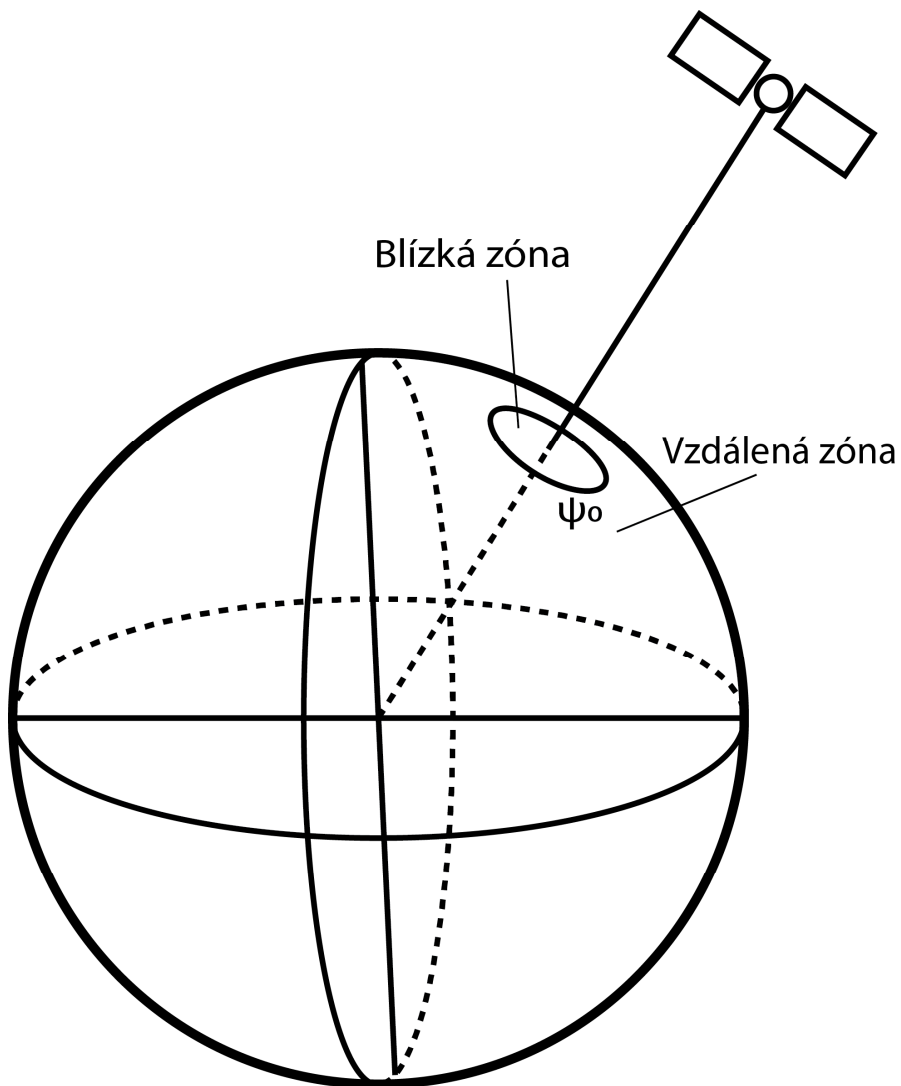
kde symbol $K(t, u)$ je Greenova funkce nebo integrační jádro Abel-Poissonova integrálu ve sférických souřadnicích. A matematicky je definován:

$$K(t, u) = \sum_{n=0}^{\infty} t^{n+1} (2n+1) P_{n,0}(u) = \frac{t(1-t^2)}{g^3}. \quad (27)$$

Poruchový potenciál na povrchu Země $T(R, \Omega')$ v rovnici (26) je počítán sférickou harmonickou syntézou dat globálního gravitačního modelu pomocí rovnice (23), pro $R = r$. Celkově lze rovnici (26) označit jako vztah pro určení poruchového potenciálu globální integrací.

Praktické výpočty poruchového potenciálu jsou však často formulovány ve tvaru integrace v jistém okolí výpočtového bodu [15]. A to proto, že je ve vhodně zvoleném okolí bodu vliv vstupních dat $T(R, \Omega')$ na výslednou hodnotu poruchového potenciálu výrazně větší než mimo tuto oblast. Takováto omezená integrace je v dalším textu

označována jako vliv blízkých zón v oblasti Ω'_0 . Zanedbáním vlivu dat vně blízké zóny vzniká chyba, kterou nazýváme vliv vzdálených zón [12].



Obrázek 5. Blízké a vzdálené zóny

Rozdělení integrační oblasti na blízké a vzdálené zóny naznačuje Obr. 5. Toto prostorové rozdělení lze matematicky zapsat následujícím způsobem:

$$T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'_0} T(R, \Omega') K(t, u) d\Omega' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega - \Omega'_0} T(R, \Omega') K(t, u) d\Omega', \quad (28)$$

kde první člen představuje vliv blízké zóny Ω'_0 . V této zóně se nacházejí pouze body, které se od výpočtového bodu nacházejí ve vzdálenosti $\psi \leq \psi_0$, kde vzdálenost ψ_0 je označována jako integrační poloměr. Druhý člen rovnice (28) vyjadřuje vliv vzdálené zóny, jíž se

věnuje následující sekce.

3.1. Vliv vzdálené zóny

V této části je odvozen vztah pro výpočet druhého členu rovnice (28). Tento člen zapíšeme jako:

$$T_{vzd}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega' - \Omega'_0} T(R, \Omega') K(t, u) d\Omega' . \quad (29)$$

Dále zadefinujeme tzv. chybové integrační jádro ve tvaru [14]:

$$\Delta K(t, u, u_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(t, u) P_{n,0}(u) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u_0 \leq u \leq 1 \\ K(t, u) & \text{pro } -1 \leq u \leq u_0 \end{cases} , \quad (30)$$

kde $Q_n(t, u_0)$ jsou spektrální váhy, které nazýváme koeficienty vzdálených zón (angl. *truncation error coefficients*).

Dále odvodíme z rovnice (30) tvar koeficientů vzdálených zón $Q_n(t, u_0)$ následujícím postupem. Nejprve jsou obě strany rovnice (30) vynásobeny hodnotou $P_{k,0}(u)$ a poté zintegrovány v mezích $u = [-1, 1]$:

$$\int_{-1}^1 \Delta K(t, u, u_0) P_{k,0}(u) du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(t, u_0) \int_{-1}^1 P_{n,0}(u) P_{k,0}(u) du. \quad (31)$$

Posléze z ortogonality Legendreových polynomů, kterou lze vyjádřit následovně [4]:

$$\int_{-1}^1 P_{n,0}(u) P_{k,0}(u) du = \begin{cases} 0 & \text{pro } n \neq k \\ 2/(2n+1) & \text{pro } n = k \end{cases} , \quad (32)$$

vyplývá následující rovnice:

$$Q_n(t, u) = \int_{-1}^1 \Delta K(t, u, u_0) P_{n,0}(u) du = \int_{-1}^{u_0} K(t, u, u_0) P_{n,0}(u) du . \quad (33)$$

Druhá rovnost v (33) se získá zpětným dosazením za $\Delta K(t, u, u_0)$ z rovnice (30)

Finální tvar rovnice pro výpočet vlivu vzdálených zón v daném výpočtovém bodě odvodíme následovně. Nejprve dosadíme $\Delta K(t, u, u_0)$ z rovnice (30) za chybové jádro v (29) a obdržíme:

$$T_{vzd}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(t, u_0) P_{n,0}(u) d\Omega' . \quad (34)$$

Následovným dosazením $T(R, \Omega')$ z rovnice (23) do (34) se obdrží:

$$T_{vzd}(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'} \frac{GM}{R} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \Delta \bar{C}_{n'm'} \bar{Y}_{n'm'}(\Omega') \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n(t, u_0) P_{n,0}(u) d\Omega' . \quad (35)$$

A dále s využitím adičního teorému pro sférické harmonické funkce, který popisuje vztah mezi povrchovými sférickými harmonickými funkcemi a Legendreovými polynomy [2]:

$$(2n+1)P_{n,0}(u) = \sum_{m=-n}^n \bar{Y}_{nm}(\Omega) \bar{Y}_{nm}(\Omega') , \quad (36)$$

je možné po úpravách dále psát:

$$T_{vzd}(r, \Omega) = \frac{GM}{2R} \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=-n'}^n \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{C}_{n'm'} Q_n(t, u_0) \left[\frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'} \bar{Y}_{n'm'}(\Omega') \bar{Y}_{nm}(\Omega') d\Omega' \right] \bar{Y}_{nm}(\Omega) \quad (37)$$

a na základě ortonormality $\bar{Y}_{n'm'}(\Omega')$ a $\bar{Y}_{nm}(\Omega')$ [2] obdržíme výslednou podobu rovnice pro výpočet vlivu vzdálené zóny:

$$T_{vzd}(r, \Omega) = \frac{GM}{2R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n Q_n(t, u_0) \Delta \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(t, u_0) T_n(\Omega) , \quad (38)$$

kde:

$$T_n = \frac{GM}{R} \sum_{m=-n}^n \Delta \bar{C}_{nm} \bar{Y}_{nm}(\Omega) . \quad (39)$$

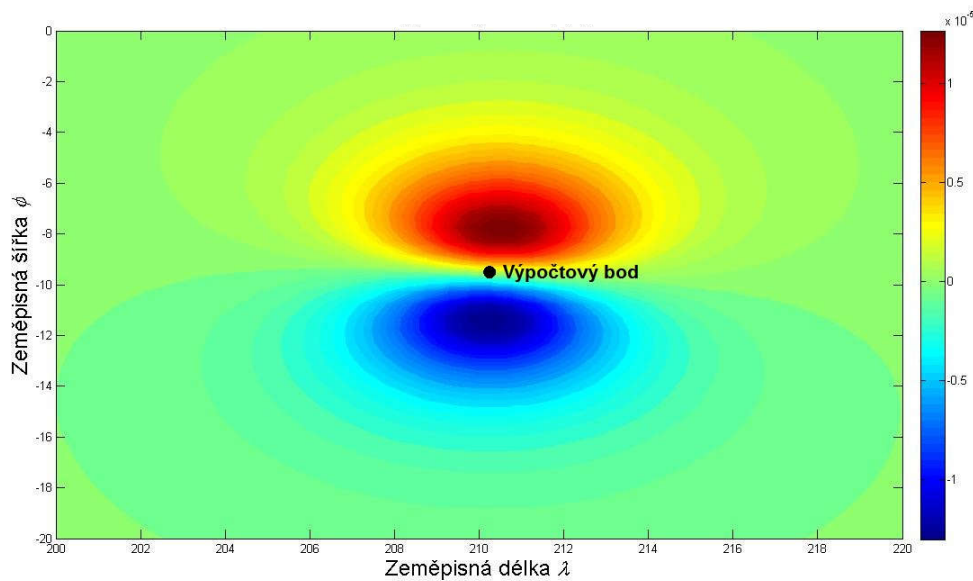
Nutné je zmínit, že v praktických výpočtech není možné používat rovnici (38) ve tvaru nekonečné řady a počet jejích členů je nutné omezit nějakou konečnou hodnotou.

Výsledný vztah pro výpočet RPP se obdrží dosazením všech odvozených veličin do rovnice (29):

$$\delta T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega_0} T(R, \Omega') \delta K(t, u) d\Omega' + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N_{max}} Q_n(t, u_0) \delta T_n(\Omega), \quad (40)$$

kde N_{max} je hodnota, kterou omezujeme počet členů řady. Rozbor chyb způsobených zanedbáním členů nekonečné řady stupně vyššího než N_{max} je uveden v kapitole 5.3.1.

Pro zjištění, jak se chová první člen v rovnici (40) je vhodné určit hodnoty integrálního jádra $\delta K(t, u)$ v prostorové oblasti. Hodnoty jádra jsou zakresleny na Obr. 6.

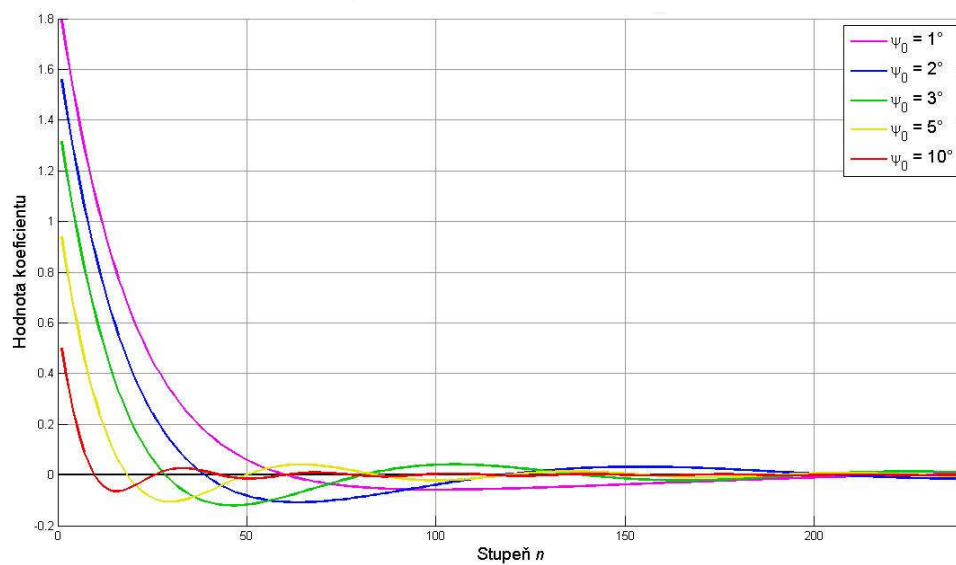


Obrázek 6. Integrální jádro pro RPP

Z Obr. 6. lze vidět, že integrální jádro nabývá nejvýznamnějších hodnot v okolí výpočtového bodu, naopak jeho hodnoty v bodech které jsou ve vzdálenosti $\psi \geq 10^\circ$ se blíží nule. Těto skutečnosti lze využít při konstrukci praktických odhadů.

Dále pro naznačení chování druhého členu rovnice (40) byl zjištěn průběh spektrálních vah $Q_n(t, u_0)$, který je zobrazen na Obr. 7. Z tohoto obrázku lze zjistit, že hodnoty $Q_n(t, u_0)$ mají pro nižší hodnoty integračního poloměru ψ_0 větší amplitudy a oscilují pomaleji než hodnoty koeficientů pro větší integrační poloměry. Dále spektrální váhy $Q_n(t, u_0)$ pro vyšší hodnoty ψ_0 konvergují rychleji a jejich použití je tedy vhodnější. Také je potřebné zmínit, že pro stupeň $n > 400$ je výpočet koeficientů $Q_n(t, u_0)$ numericky

nestabilní, ale jak je ukázáno v sekci 4.3.1, tak nestabilita pro vysoké stupně n neovlivní výsledek.



Obrázek 7. Spektrální váhy $Q_n(t, u_0)$ pro hodnotu $t=0,95$, která přibližně odpovídá měření GRACE

4. Problém 2: Určení rozdílu gradientů poruchových potenciálů

4.1. Odvození integrálních transformací pro určení RGPP

Rovnici pro výpočet RGPP lze vyjádřit ve tvaru:

$$\mathbf{e} \cdot \delta \nabla T(r, \Omega) = \mathbf{e} \cdot [\nabla T(r_2, \Omega_2) - \nabla T(r_1, \Omega_1)]. \quad (41)$$

V dalším postupu můžeme pro odvození integrálních transformací uvažovat pouze člen odpovídající jedné družici. A vztah pro výpočet gradientů poruchového potenciálu ∇T v rovnici (41) lze psát ve tvaru [3]:

$$\nabla T(r, \Omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \left[\frac{\partial K(t, u)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial K(t, u)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial K(t, u)}{\partial \lambda} \right] d\Omega', \quad (42)$$

kde členy uvnitř integrálu lze přepsat:

$$\frac{\partial K(t, u)}{\partial r} = \frac{1}{R} K'(t, u) = -\frac{t^2}{R} \frac{3ut^3 + ut - 5t^2 + 1}{g^5}, \quad (43)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial K(t, u)}{\partial \varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial K(t, u)}{\partial \psi} \cos \alpha = \frac{1}{R} K''(t, u) \cos \alpha = \frac{1}{R} \frac{3t^2(1-t^2)}{g^5} \cos \alpha, \quad (44)$$

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial K(t, u)}{\partial \lambda} = \frac{\partial K(t, u)}{\partial \psi} \sin \alpha = \frac{1}{R} K''(t, u) \sin \alpha = \frac{1}{R} \frac{3t^2(1-t^2)}{g^5} \sin \alpha. \quad (45)$$

S využitím rovnic (42)-(45) lze vyjádřit vztah pro výpočet gradientu poruchového potenciálu ve směru spojnice družic :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot [\nabla T(r, \Omega)] &= \\ &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') [-e_x \cos \alpha K''(t, u) - e_y \sin \alpha K''(t, u) + e_z K'(t, u)] d\Omega'. \end{aligned} \quad (46)$$

A následně tuto rovnici, která vyjadřuje gradient poruchového potenciálu ve směru

spojnice družic pomocí globální integrace, rozdělíme na blízkou zónu Ω'_0 a vzdálenou zónu $\Omega' - \Omega'_0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot [\nabla T(r, \Omega)] &= \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Omega'_0} T(R, \Omega') [-e_x \cos \alpha K^u(t, u) - e_y \sin \alpha K^u(t, u) + e_z K^t(u, t)] d\Omega' + \\ &+ \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Omega' - \Omega'_0} T(R, \Omega') [-e_x \cos \alpha K^u(t, u) - e_y \sin \alpha K^u(t, u) + e_z K^t(u, t)] d\Omega'. \end{aligned} \quad (47)$$

4.1.1. Vliv vzdálené zóny

Pro výpočet vlivu vzdálené zóny na gradient poruchového potenciálu ve směru spojnice družic, který vyjadřuje druhý člen rovnice (47) je možné rozdělit integrál po jednotlivých složkách jednotkového vektoru \mathbf{e} :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot [\nabla T(r, \Omega)]_{vzd} &= \frac{-e_x}{4\pi R} \iint_{\Omega' - \Omega'_0} T(R, \Omega') \cos \alpha K^u(t, u) d\Omega' + \\ &- \frac{e_y}{4\pi R} \iint_{\Omega' - \Omega'_0} T(R, \Omega') \sin \alpha K^u(t, u) d\Omega' + \\ &+ \frac{e_z}{4\pi R} \iint_{\Omega' - \Omega'_0} T(R, \Omega') K^t(t, u) d\Omega'. \end{aligned} \quad (48)$$

Dále je integrální jádro $K^t(t, u)$ ve třetím členu rovnice (48) přepsáno tak, aby mohlo být použito v globální integraci. Konkrétně lze toto jádro vyjádřit ve tvaru [15]:

$$\Delta K^t(t, u, u_0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u_0 < u \leq 1 \\ K^t(t, u) & \text{pro } -1 \leq u \leq u_0 \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n^t(t, u_0) P_{n,0}(u). \quad (49)$$

A podobným postupem jako v rovnicích (30)-(34) lze z rovnice (49) vyjádřit spektrální váhy $Q_n^t(t, u_0)$:

$$Q_n^t(t, u_0) = \int_{-1}^1 \Delta K^t(t, u, u_0) P_{n,0}(u) du = \int_{-1}^{u_0} K^t(t, u) P_{n,0}(u) du. \quad (50)$$

Při formulaci chybového jádra $K^u(t, u)$ postupujeme obdobně:

$$\Delta K^u(t, u, u_0) = \begin{cases} 0 & \text{pro } u_0 < u \leq 1 \\ K^u(t, u) & \text{pro } -1 \leq u \leq u_0. \end{cases} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Q_n^u(t, u_0) P_{n,1}(u) \quad (51)$$

Dále je z rovnice (51) vyjádřena hodnota koeficientů vzdálené zóny $Q_n^u(t, u_0)$:

$$Q_n^u(t, u_0) = \int_{-1}^{u_0} \Delta K^u(t, u, u_0) P_{n,1}(u) du, \quad (52)$$

kde $P_{n,1}(u)$ jsou přidružené Legendreovy funkce prvního řádu a stupně n .

Po dosazení chybových jader $\Delta K^u(t, u, u_0)$ a $\Delta K^t(t, u, u_0)$, viz rovnice (53) a (55) do rovnice (48) a úpravách dostáváme vztah pro výpočet gradientů poruchových potenciálů globální integrací:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot [\nabla T(r, \Omega)]_{\text{vzd}} = & -\frac{e_x}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Q_n^u(t, u_0) \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \cos \alpha P_{n,1}(u) d\Omega' + \\ & -\frac{e_y}{4\pi R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Q_n^u(t, u_0) \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \sin \alpha P_{n,1}(u) d\Omega' + \\ & +\frac{e_z}{4\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} Q_n^t(t, u_0) \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') P_{n,0}(u) d\Omega'. \end{aligned} \quad (53)$$

A s využitím vztahů [13]:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') P_{n,0}(u) d\Omega' = T_n(R, \Omega), \quad (54)$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \cos \alpha P_{n,1}(u) d\Omega' = \frac{\partial}{\partial \varphi} T_n(R, \Omega), \quad (55)$$

$$\frac{2n+1}{4\pi} \iint_{\Omega'} T(R, \Omega') \sin \alpha P_{n,1}(u) d\Omega' = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} T_n(R, \Omega), \quad (56)$$

je možné psát:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e} \cdot [\nabla T(r, \Omega)]_{\text{vzd}} = & -\frac{e_x}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} Q_n^u(t, u_0) \frac{\partial}{\partial \varphi} T_n(R, \Omega) + \\
& -\frac{e_y}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} Q_n^u(t, u_0) \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} T_n(R, \Omega) + \\
& + \frac{e_z}{R} \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} Q_n^t(t, u_0) T_n(R, \Omega),
\end{aligned} \tag{57}$$

kde $T_n(R, \Omega)$ vyjadřuje složky poruchového potenciálu pro jednotlivé stupně n , viz rovnici (39)

Dále je nutné zmínit, že v praktických výpočtech není možné používat rovnici (57) ve tvaru nekonečné řady. Počet členů řady je v této rovnici nutné omezit nějakou hodnotou N_{max} . Rozbor chyb způsobených zanedbáním členů vysokého stupně je uveden v kapitole 5.3.2. Pro dokončení odvození výpočtu gradientů poruchového potenciálu zbývá určit tvar spektrálních vah $Q_n^t(t, u_0)$ a $Q_n^u(t, u_0)$. Pro výpočet $Q_n^t(t, u_0)$ dostaneme úpravou rovnice (50) a využitím rovnice (33) vztah:

$$Q_n^t(t, u_0) = \int_{-1}^{u_0} K^t(t, u) P_{n,0}(u) du = t^2 \frac{\partial}{\partial t} \int_{-1}^{u_0} K(t, u) P_{n,0}(u) du = t^2 \frac{\partial}{\partial t} Q_n(t, u_0). \tag{58}$$

Dále odvodíme vztah pro výpočet spektrálních vah $Q_n^u(t, u_0)$, který obdržíme pomocí následujících úprav:

$$Q_n^u(t, u_0) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{u_0} K^u(t, u) P_{n,1}(u) du. \tag{59}$$

Přepsáním K^u obdržíme:

$$Q_n^u(t, u_0) = -\frac{t}{2} \int_{-1}^{u_0} \sqrt{1-u^2} \frac{\partial}{\partial u} K(t, u) P_{n,1}(u) du. \tag{60}$$

Pomocí integrace per-partes je možné přepsat rovnici (60) do tvaru:

$$Q_n^u = -\frac{t}{2} \left\{ \left[\sqrt{1-u^2} K(t, u) P_{n,1}(u) \right]_{-1}^{u_0} - \int_{-1}^{u_0} K(t, u) \frac{\partial}{\partial u} \left[\sqrt{1-u^2} P_{n,1} \right] du \right\}. \tag{61}$$

Dále je možné s využitím znalosti vztahu [4]:

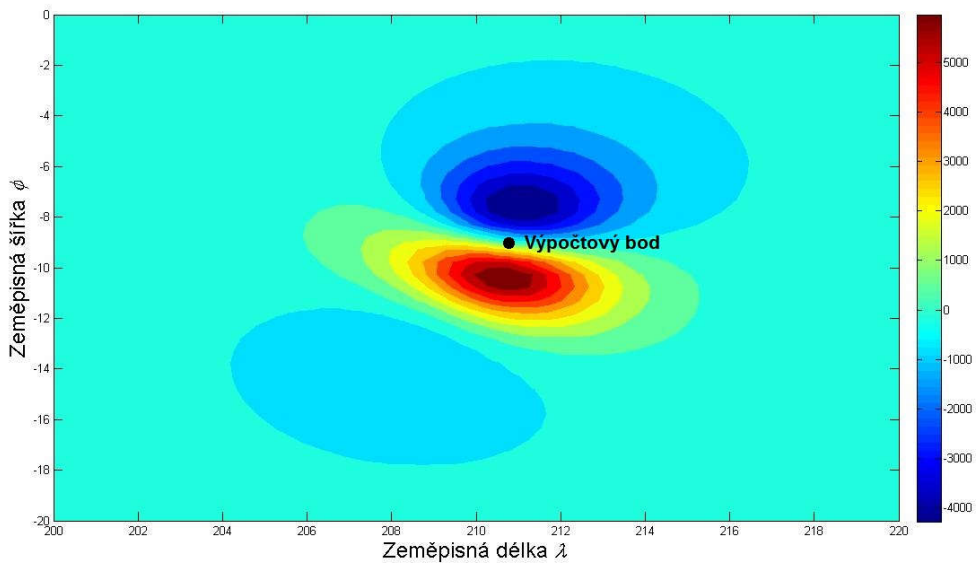
$$\frac{\partial}{\partial u} \left[\sqrt{1-u^2} P_{n,1}(u) \right] = -n(n+1) P_{n,0}(u), \quad (62)$$

psát:

$$Q_n^u = -\frac{t}{2} \left[n(n+1) Q_n(t, u_0) + \sqrt{1-u_0^2} P_{n,1}(u_0) K(t, u_0) \right]. \quad (63)$$

Po dosazení výše odvozených rovnic do (47) lze psát praktický odhad pro výpočet RGPP:

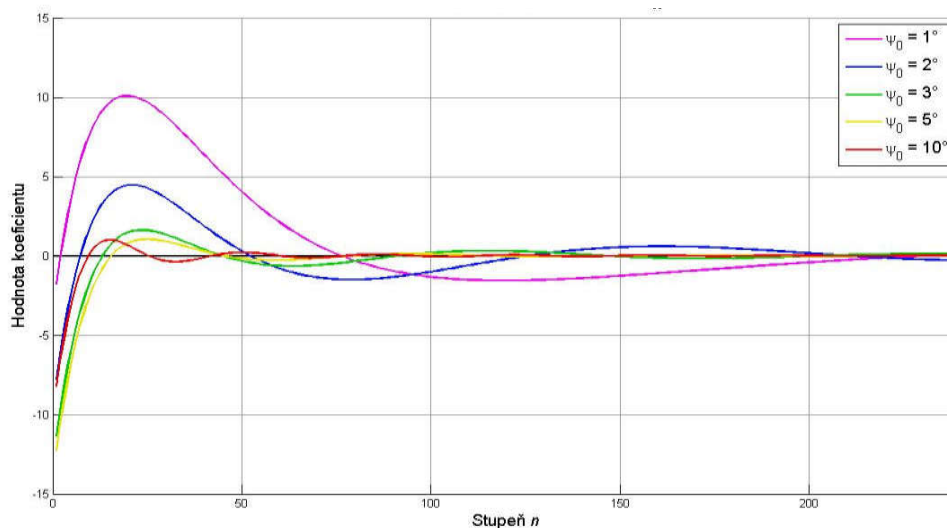
$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \delta[\nabla T(r, \Omega)] = & \\ = \frac{1}{4\pi R} \iint_{\Omega'_0} T(R, \Omega') \delta \left[-e_x \cos \alpha K^u(t, u) - e_y \sin \alpha K^u(t, u) + e_z K^t(u, t) \right] d\Omega' + & \\ - \frac{e_x}{R} \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{1}{n(n+1)} \delta Q_n^u(t, u_0) \frac{\partial}{\partial \varphi} T_n(R, \Omega) + & \\ - \frac{e_y}{R} \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{1}{n(n+1)} \delta Q_n^u(t, u_0) \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} T_n(R, \Omega) + & \\ + \frac{e_z}{R} \sum_{n=1}^{N_{\max}} \frac{1}{2} \delta Q_n^t(t, u_0) T_n(R, \Omega). & \end{aligned} \quad (64)$$



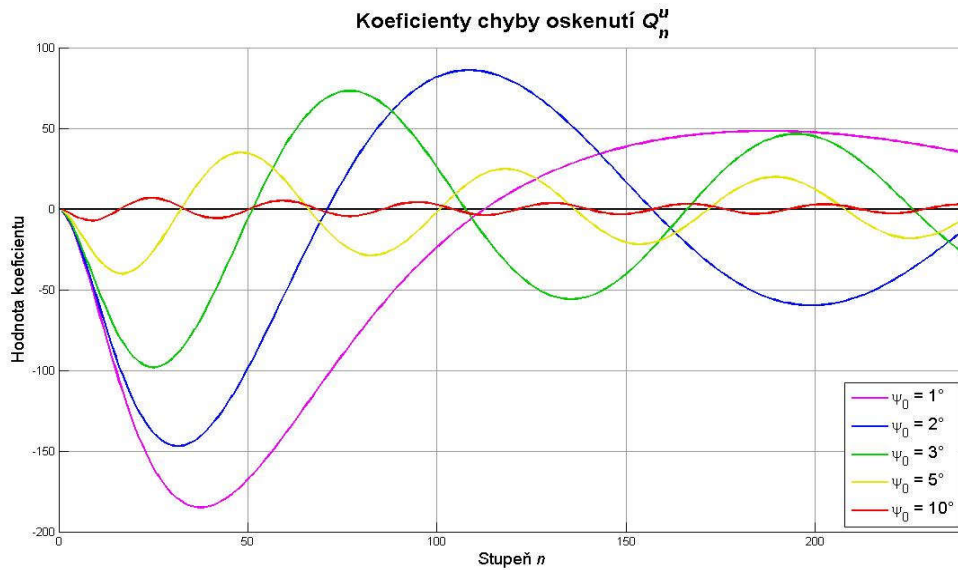
Obrázek 8 Tvar jádra integrální transformace pro výpočet RGPP v prostorové oblasti

Pro lepší představu o chování prvního členu v rovnici (64) je vhodné zjistit, jak vypadá integrální jádro v prostorové oblasti. To je zakresleno na Obr. 8. Z Obr. 8 lze číst, že jádro pro RGPP není izotropní a dále, což je důležité, že hodnoty jádra se rychle blíží nule se vzdáleností od výpočtového bodu.

Pro dokončení představy o chování celé rovnice (68) se podíváme na chování koeficientů $Q_n^t(t, u_0)$ a $Q_n^u(t, u_0)$ ve zbylých členech této rovnice. Hodnoty koeficientů a jejich srovnání pro různé integrační poloměry ψ_0 ukazují Obr. 9 a Obr. 10.



Obrázek 9. Spektrální váhy $Q_n^t(t, u_0)$, pro hodnotu $t=0,95$, která přibližně odpovídá měření GRACE



Obrázek 10. Spektrální váhy $Q_n^u(t, u_0)$ pro hodnotu $t=0,95$, která přibližně odpovídá měření GRACE

Na Obr. 9 vidět, že koeficienty $Q_n^t(t, u_0)$ pro nižší hodnoty integračního poloměru ψ_0 mají větší amplitudy a oscilují pomaleji. Dále se hodnoty spektrálních vah $Q_n^t(t, u_0)$ blíží rychleji nule pro větší velikosti integračního poloměru ψ_0 . Nutno zmínit, že přibližně pro stupeň $n > 400$ je výpočet koeficientů $Q_n^t(t, u_0)$ numericky nestabilní.

Na Obr. 10, který naznačuje chování koeficientů $Q_n^u(t, u_0)$, je vidět, že tyto koeficienty konvergují pomaleji než koeficienty $Q_n^t(t, u_0)$ či $Q_n(t, u_0)$. Dále platí, že pro vyšší hodnoty integračního poloměru koeficienty konvergují rychleji k nulové hodnotě. Opět je nutné poznamenat, že výpočet hodnot $Q_n^u(t, u_0)$ je přibližně pro stupeň $n > 400$ numericky nestabilní. Podrobnější popis chyb související s koeficienty $Q_n^t(t, u_0)$ a $Q_n^u(t, u_0)$ je uveden v sekci 4.3.2.

5. Numerický experiment

V této kapitole je uvedeno jaká byla zvolena data, v jaké oblasti a s jakým rozlišením jsme pracovali. Dále jsou popsány parametry s jakými byly konkrétní experimenty provedeny. Výsledky numerických experimentů jsou na konci této kapitoly zhodnoceny jejich přesností, která je uvedena ve formě statistiky vztažené k referenčním datům.

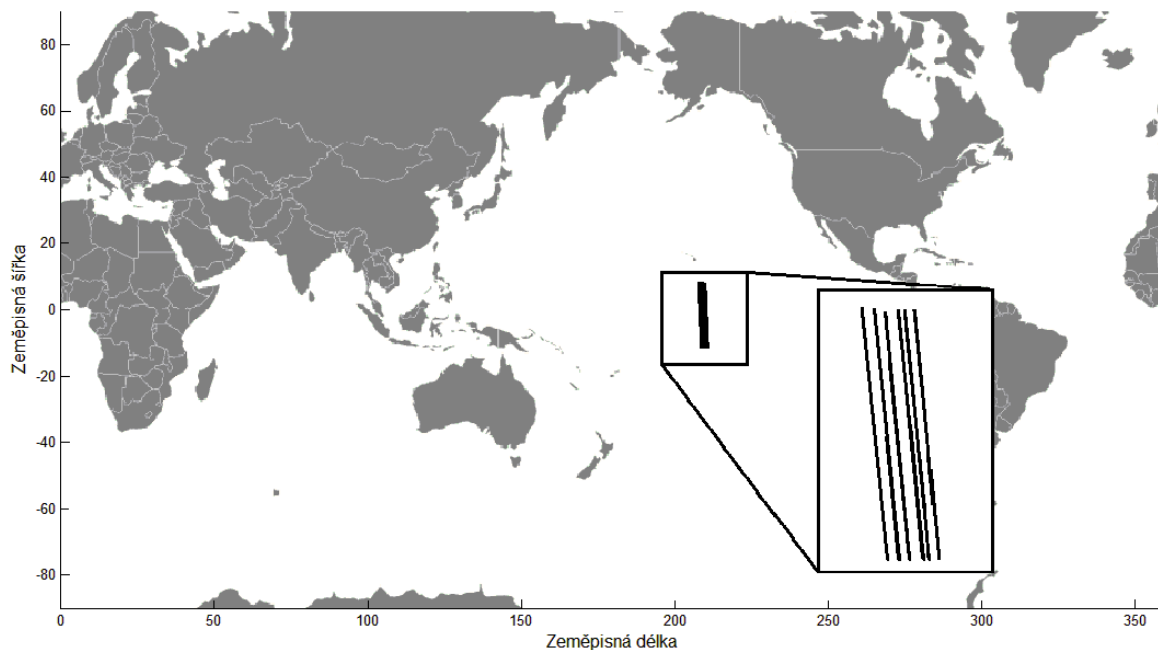
5.1. Výběr dat

Pro experiment byla vybrána data družicové mise GRACE z roku 2015 z měsíců leden až červen. Tato data jsou poskytována NASA a jsou volně dostupná na webových stránkách⁹. Data jsou strukturována po jednotlivých dnech a jsou distribuována v komprimovaném formátu typu GNU zip (tar.gz). Pro rozbalení a přečtení dat je poskytován software na čtení dat na webových stránkách⁷. K dalšímu zpracování byl použit speciální algoritmus, pomocí kterého byla data zformátována do tabulky, která obsahuje sloupce s geocentrickými kartézskými souřadnicemi první a druhé družice.

5.2. Výběr oblasti a drah

Neméně důležitý je pro provedení experimentu výběr prostorové oblasti, ve které je experiment proveden. Oblast musí být vybrána tak, aby byla vstupní data, pokud možno, co nejméně zatížena chybami. Vstupní data ve formě poruchového potenciálu jsou získána z družicové altimetrie, jejíž měření je zatíženo určitými nejistotami v blízkosti pobřeží [15]. Proto je nutné vybrat oblast, která leží daleko od pobřeží. Vybrané území se nachází v rovníkové oblasti v Tichém oceánu a výpočtové body se nachází v intervalu $\varphi \in \langle -10^\circ, 10^\circ \rangle$, $\lambda \in \langle -152^\circ, -148^\circ \rangle$, viz Obr. 11.

⁹ <ftp://podaac.jpl.nasa.gov/allData>



Obrázek 11. Výběr drah pro provedení experimentu

Pro další postup byla data ve formátu popsaném v sekci 5.1 omezena na výše popsanou oblast včetně okolí, ve kterém bude probíhat omezená integrace (tzn. včetně blízkých zón). Všechna družicová data odpovídající této oblasti byla vizualizována, aby mohl být proveden výběr jednotlivých přeletů dvojice satelitů nad tímto územím. V dalším textu je takový přelet označován jako dráha.

Pro samotný experiment bylo z této vizualizace vybráno šest drah, které se nacházejí v blízkosti 210. poledníku a zároveň jsou stoupající (angl. *ascending*), jinými slovy se družice na těchto drahách pohybují ve směru z jihu na sever. Data byla vybrána tak, aby každá dráha odpovídala průletu družic v jiném kalendářním měsíci. Dále byl výběr prováděn tak, aby se jednotlivé dráhy nepřekrývaly a také, aby vzdálenost dvou sousedních drah byla vždy, pokud možno, stejná. Výběr jednotlivých drah tvoří profily, které jsou zobrazeny na Obr. 15.

5.3. Testování přesnosti praktických odhadů

5.3.1. Rozdíl poruchových potenciálů

Experiment 1

Prvním experimentem, který byl proveden je výpočet RPP podle rovnice (25) pro různé velikosti integračního elementu $d\Omega'$. Velikostí integračního elementu je myšlena diskretizace povrchu referenční sféry tak, aby mohla být provedena numerická integrace. Nejprve byla zvolena velikost elementu $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ a takto vytvořená síť byla dále zjemňována na $0,25^\circ \times 0,25^\circ$, $0,125^\circ \times 0,125^\circ$ a nakonec na $5' \times 5'$. Další zjemňování již nebylo možné prakticky provést pro vysoké požadavky na výpočtový čas.

K provedení výpočtu byly nejprve určeny hodnoty poruchového potenciálu na povrchu referenční sféry $T(R, \Omega')$ pro různé velikosti integračního elementu $d\Omega'$ pomocí rovnice (23). Tyto hodnoty je možné dosadit do rovnice (26), která diskretizací přejde na tvar

$$T(r, \Omega) = \frac{\Delta\varphi' \Delta\lambda'}{4\pi} \sum_{\varphi'} \sum_{\lambda'} T(R, \Omega') K(t, u) \cos \varphi', \quad (65)$$

kde $\Delta\varphi'$ a $\Delta\lambda'$ jsou velikosti integračního kroku v numerické integraci.

Pro obdržení výsledné hodnoty RPP se tento vztah dosadí do rovnice (25) a přechází v tvar:

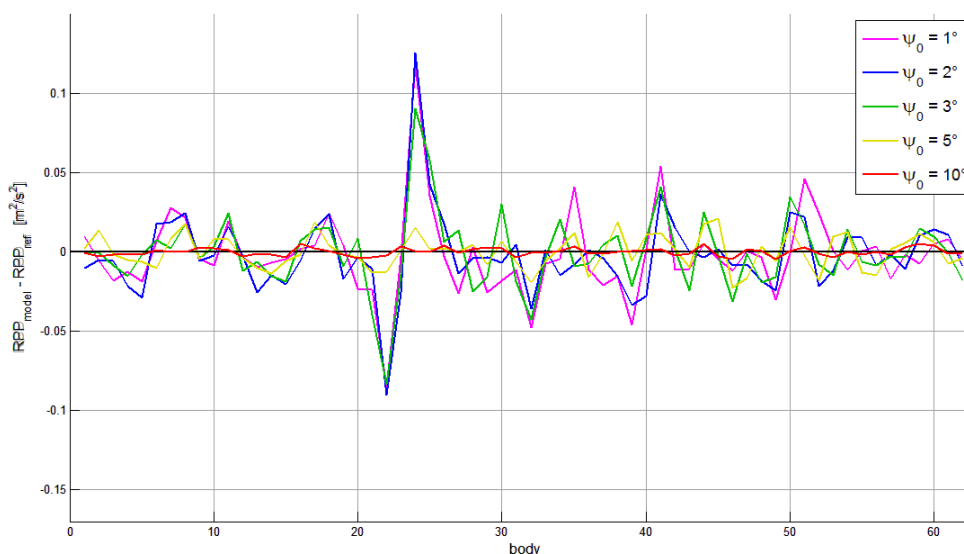
$$\delta T(r, \Omega) = \frac{\Delta\varphi' \Delta\lambda'}{4\pi} \sum_{\varphi'} \sum_{\lambda'} T(R, \Omega') \delta K(t, u) \cos \varphi'. \quad (66)$$

Srovnáním hodnot RPP pro různé velikosti integračního elementu lze dojít k závěru, že se pro velikost rozdílu mezi odhadem RPP globální integrací a jeho referenčními hodnotami získanými z družicové altimetrie snižuje. Například pro nejhrubší sledovanou síť $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ je rozdíl v řádu $10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, což odpovídá desetitisícinám hodnot signálu RPP. Pro velikost elementu $0,125^\circ$ je tento rozdíl ještě o řád nižší, a pro grid $5' \times 5'$, na kterém byly prováděny veškeré experimenty je rozdíl hodnot RPP s jejich referenčními hodnotami roven řádově $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$.

Experiment 2

V tomto experimentu byl proveden praktický odhad RPP podle rovnice (40) pro různé integrační poloměry ψ_0 . Hodnoty těchto poloměrů byly zvoleny následovně: 1° , 2° , 3° , 5° a 10° .

Výsledky výpočtů RPP při diskretizaci $5' \times 5'$ pro různé integrační poloměry ψ_0 jsou porovnávány s referenčními hodnotami, které jsme získali syntézou dat globálního gravitačního modelu EGM2008 [10]. Porovnání je ukázáno na Obr. 12 a v Tab. 1 (viz přílohy).



Obrázek 12. Porovnání rozdílů hodnot RPP v nejzápadnějším profilu pro různé velikosti integračního poloměru ψ_0 a referenčních hodnot počítaných syntézou z modelu EGM2008

Z Obr. 12 lze vidět, že se hodnoty RPP, které jsou počítané postupem uvedeným v kapitole 3, s rostoucí velikostí integračního poloměru blíží k referenční hodnotě počítané z modelu EGM2008. Přičemž rozdíl mezi odhady pro $\psi_0 \leq 3^\circ$ dosahuje $1/200$ z hodnoty signálu. Naopak pro integrační poloměr $\psi_0 = 10^\circ$ se jedná o méně než $1/2000$ z hodnoty signálu. Větší chyby pro malé integrační poloměry jsou způsobeny vyššími amplitudami

koeficientů $Q_n(t, u_0)$, viz Obr. 7 pro tyto integrační poloměry. Mimo to lze vidět i jistou korelaci mezi velikostmi chyby v konkrétním bodě pro různé integrační poloměry. To potvrzuje, že software, který byl vytvořen pro provedení experimentu, pracuje správně.

Experiment 3 - určení přesnosti praktických odhadů

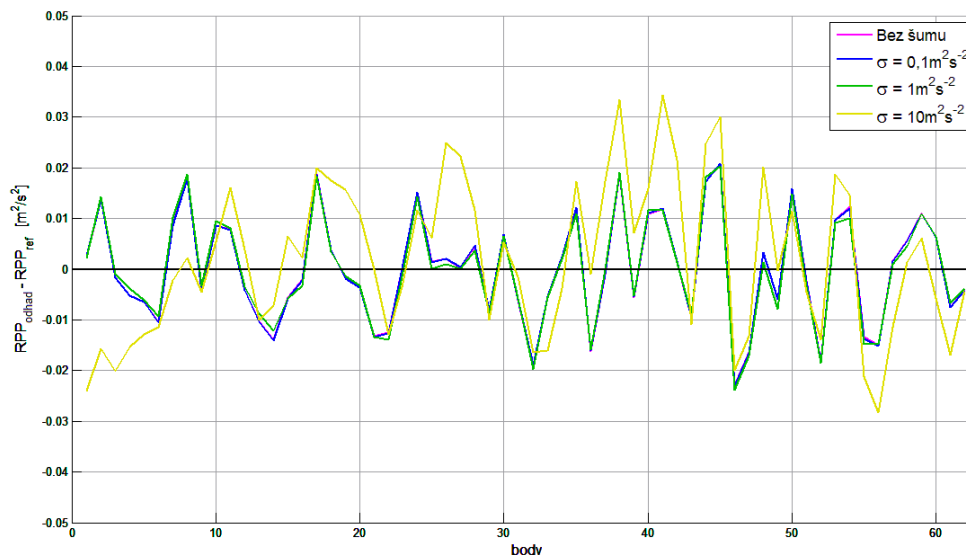
Vliv kontaminace vstupních dat bílým šumem na RPP

V tomto experimentu je zkoumán vliv chyb ve vstupních hodnotách poruchového potenciálu na povrchu Země $T(R, \Omega')$ na výsledné hodnoty RPP. Vstupní hodnoty, které jsou získány transformací dat z družicové altimetrie, byly kontaminovány přidáním bílého šumu. Bílý šum je signál tvořený náhodně generovanými hodnotami, které mají jako celek definovanou směrodatnou odchylkou. Zašuměný poruchový potenciál byl vytvořen přičtením bílého šumu k původním hodnotám $T(R, \Omega')$.

Experiment byl proveden pro tři různé hodnoty směrodatné odchylky bílého šumu $\sigma = 0,1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, $1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ a $10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Tyto hodnoty odpovídají přibližně chybám 0,01 m, 0,1 m, a 1 m v datech družicové altimetrie, tedy ve smyslu výšky geoidu. Pozorování bylo provedeno pro různé integrační poloměry a jeho výsledky byly porovnány s nezašuměnými daty s předchozího experimentu. Výsledky experimentu ukazuje Obr. 13 a Tab. 3 (viz přílohy).

Z Obr. 13 a Tab. 2 vyplývá, že šum se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ovlivní výslednou hodnotu RPP pouze zanedbatelně. Pro směrodatnou odchylku $\sigma = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$, která odpovídá deseticentimetrové chybě ve smyslu výšky geoidu a přesnosti družicové altimetrie jsou určité rozdíly patrné, dosahují maximální velikosti v řádu $0,001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$. Nakonec pro hodnoty bílého šumu se směrodatnou odchylkou $\sigma = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ jsou viditelné znatelné rozdíly o řádu $0,01 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ a dále lze pohledem na Tab.2 konstatovat, že vstupní data s $\sigma = 10 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ způsobují příliš velkou chybu ve výsledném RPP a pro validaci dat

mise GRACE by již nebyla vhodná.



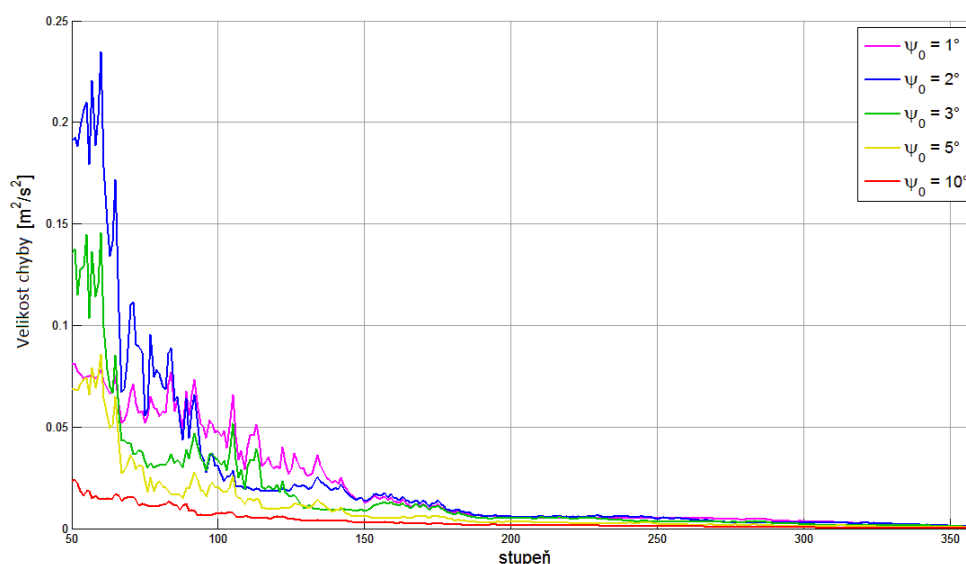
Obrázek 13. Velikost chyby výpočtu RPP v nejzápadnějším profilu pro vstupní hodnoty poruchového potenciálu $T(R, \Omega')$ zatížená různými hodnotami bílého šumu, pro hodnotu $\psi_0 = 5^\circ$

Chyba ze zanedbání vlivu vzdálených zón nad maximálním stupněm harmonického rozvoje

Chyba ze zanedbání vyjadřuje vliv oseknutí sférických harmonických řad v nějakém konečném stupni N_{max} . Velikost této chyby je pro RPP určena ve vzdálené zóně ze všech 370 výpočtových bodů. Velikost chyby byla zjišťována pro stupně $n = 0, \dots, 360$ a pro integrační poloměry $\psi_0 = 1, 2, 3, 5$ a 10° . Směrodatné odchylky chyby v jednotlivých stupních n jsou zobrazeny na Obr.14.

Z Obr. 14 je vidět, že hodnota chyby klesá se zvyšujícím se stupněm n . Dále je patrné, že hodnota směrodatné odchylky je pro stupeň $n = 50$ a $\psi_0 = 10^\circ$ menší než $0,03 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Pro $n = 100$ je hodnota směrodatné odchylky pro $\psi_0 = 10^\circ$ menší dokonce než $0,01 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Zatímco přesnost měření GRACE, které chceme validovat se pohybuje okolo $0,1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$.

Pro nižší hodnoty integračního poloměru ψ_0 je velikost chyb větší. Je možno říci, že pro vhodně zvolené hodnoty ψ_0 a N_{max} může být odhad RPP proveden, aniž by byly výsledné hodnoty degradovány oseknutím harmonických řad.

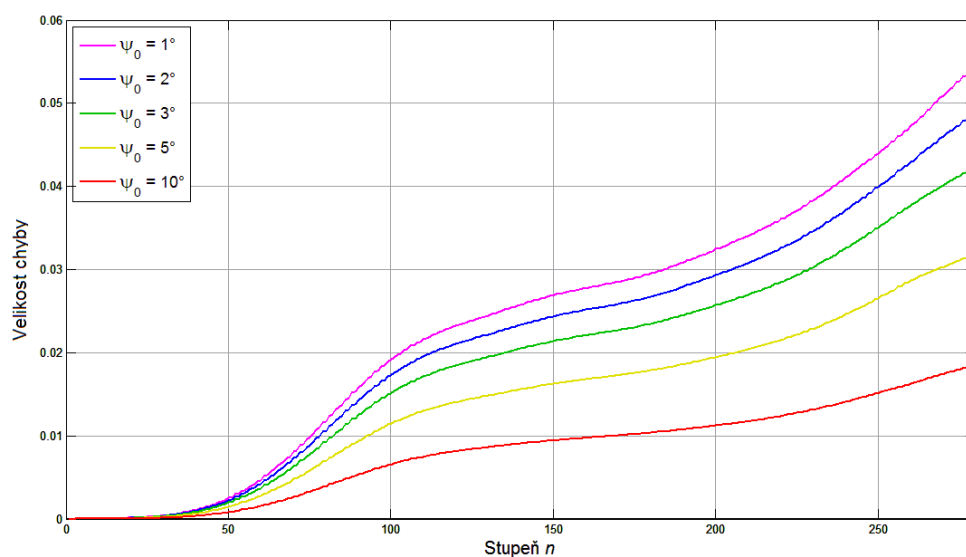


Obrázek 14. Chyba ze zanedbání pro RPP a různé integrační poloměry

Vliv chyb harmonických koeficientů

Tato chyba vzniká z nepřesného určení geopotenciálních koeficientů z EGM2008. Pro její určení je nutné aplikovat zákon o hromadění chyb na druhý člen rovnice (40). Vliv chyb harmonických koeficientů byl určen pouze v jednom výpočtovém bodu, jelikož její chování se liší ve všech výpočtových bodech, které se nacházejí ve vybrané oblasti, jen velmi nepatrně. Velikost této chyby se určuje pro jednotlivé stupně n a její hodnoty jsou dále vypočteny pro různé integrační poloměry $\psi_0 = 1, 2, 3, 5$ a 10° .

Pro samotné určení velikosti této chyby byly použity střední chyby koeficientů z modelu GOCE_TIM_R5 [1], který je vytvořen z měření družicové mise GOCE. Hodnoty chyby v nejjízňějším výpočtovém bodě pro $n=0, \dots, 280$ a různé integrační poloměry jsou zobrazeny na Obr.15.



Obrázek 15 Vliv chyb sférických harmonických koeficientů při výpočtu vzdálených zón pro RPP v nejjižnějším výpočtovém bodě

Z Obr. 15 plyne, že hodnoty chyby pro RPP stoupají při zvyšování stupně n . To je způsobeno faktem, že koeficienty sférických harmonických funkcí jsou pro vyšší stupně n méně přesné. Pro stupeň $n=50$ a integrační poloměr $\psi_0 = 10^\circ$ je chyba menší než $0,002 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ zatímco pro stupeň $n=100$ při uvažování stejného integračního poloměru velikost chyby vzroste přibližně na $0,007 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Nutno říci, že velikost chyby je pro menší integrační poloměr vyšší, což je způsobeno vyššími amplitudami spektrálních vah pro malé integrační poloměry.

Zhodnocení přesnosti

Vezmou-li se v úvahu tři chyby určené v experimentu 3, tak lze odbržet hrubý odhad celkové chyby uvedeného postupu pro výpočet RPP použitím L^2 -normy. Odhadovaná přesnost pro hodnoty $n = 60$, $\psi_0 = 10^\circ$ a velikost diskretizace $5' \times 5'$ je přibližně $0,02 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$.

Dále například pro hodnoty $n = 80$, $\psi_0 = 5^\circ$ při stejné velikosti gridu dosáhneme přesnosti přibližně $0,03 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$. Z pozorování výše uvedených chyb lze zjistit, že se při zmenšování integračního poloměru odhadovaná přesnost snižuje a při zvyšování stupně N_{max} se přesnost zvyšuje, a to až přibližně do stupně 120. Přesnost měření mise GRACE

odpovídá pro RPP hodnotě $0,1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ [7], tedy praktický odhad RPP podle rovnice (40) lze při vhodně zvolených parametrech použít pro validaci měření mise GRACE.

5.3.2. Rozdíl gradientů poruchových potenciálů

Experiment 4

Následující experiment je obdobou experimentu 1 aplikovanou na výpočet RGPP. Diskretizace referenční sféry byla vytvořena obdobně jako v experimentu 1 tzn. velikosti integračního elementu jsou $0,5^\circ \times 0,5^\circ$, $0,25^\circ \times 0,25^\circ$, $0,125^\circ \times 0,125^\circ$ a $0,5' \times 0,5'$. S využitím dříve vypočteného poruchového potenciálu na povrchu referenční sféry $T(R, \Omega')$ v sekci 5.3.1 byly vypočteny diskrétní integrací hodnoty RGPP pomocí:

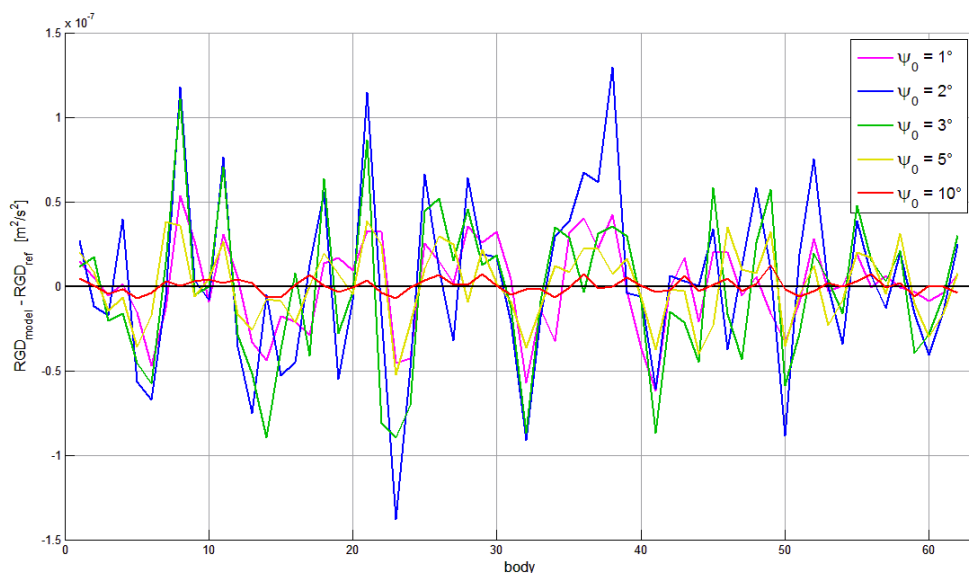
$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \delta[\nabla T(r, \Omega)] = \\ = \frac{\Delta\varphi' \Delta\lambda'}{4\pi} \sum_{\varphi} \sum_{\lambda} T(R, \Omega) \delta[-e_x \cos\alpha K^u(t, u) - e_y \sin\alpha K^u(t, u) + e_z K^t(t, u)] \cos\varphi'. \end{aligned} \quad (67)$$

Srovnáním hodnot RGPP pro různé velikosti integračního elementu lze dojít k závěru, že se velikost rozdílu mezi hodnotami RGPP podle rovnice (67) a referenčními hodnotami získanými z modelu EGM2008 snižuje při zmenšování velikosti integračního elementu. Pro síť s velikostí elementu $0,5^\circ \times 0,5^\circ$ se velikost rozdílu RGPP s referenčními hodnotami pohybuje v řádu $1.10^{-11} \text{ m s}^{-2}$. Pro zjemněnou síť s elementem o velikosti $0,125^\circ \times 0,125^\circ$ je velikost chyby o půl řádu nižší, přičemž pro pětiminutový grid je velikost rozdílu řádově rovna $1.10^{-12} \text{ m s}^{-2}$.

Experiment 5

V tomto experimentu jsou počítány hodnoty RGPP pomocí praktického odhadu (64). Podobně jako v experimentu 2 byly zvoleny hodnoty integračních poloměrů $\psi_0 = 1, 2, 3, 5$ a 10° a s diskretizací $5' \times 5'$. Praktické odhady pro různé velikosti blízké zóny byly

porovnány s referenčními hodnotami, které byly získány syntézou dat modelu EGM2008. Rozdíly mezi odhady a referenčními hodnotami jsou uvedeny na Obr. 16 a v Tab. 2 (viz přílohy).



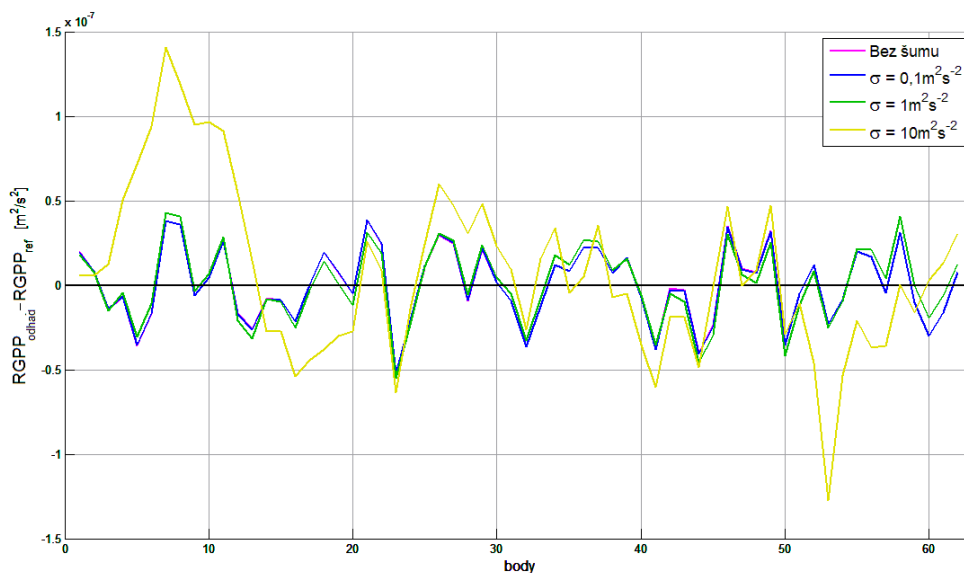
Obrázek 16. Srovnání hodnot RGPP počítané s různými integračními poloměry s referenčními hodnotami pro nejzápadnější profil

Při pohledu na Obr. 16 lze zjistit, že velikost rozdílu praktických odhadů a referenčních hodnot klesá s rostoucí velikostí integračního poloměru, což je způsobeno vyššími amplitudami koeficientů $Q_n^u(t, u_0)$ a $Q_n^l(t, u_0)$ pro menší integrační poloměry, viz Obr. 9 a Obr.10. Přičemž rozdíl mezi odhady pro $\psi_0 \leq 3^\circ$ dosahuje 1/100 z hodnoty signálu. Naopak pro integrační poloměr $\psi_0 = 10^\circ$ se jedná o méně než 1/1000 z hodnoty signálu. Dále lze vidět jistou korelaci mezi velikostmi chyby v konkrétním bodě pro různé integrační poloměry. Provedením tohoto experimentu jsme ověřili správnost vytvořeného výpočetního softwaru.

Experiment 6 - určení přesnosti odhadů

Vliv kontaminace vstupních dat bílým šumem na RGPP

V tomto experimentu byl zkoumán vliv chyb ve vstupních datech z družicové altimetrie na výsledné hodnoty praktických odhadů RGPP. Chyba ve vstupních datech byla vytvořena umělým přidáním chyby v datech, tzv. bílého šumu. Pozorování bylo provedeno pro tři hodnoty směrodatné odchylky bílého šumu $\sigma = 0,1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, $1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ a $10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ a pro různé hodnoty integračního poloměru ψ_0 . Srovnání chyb hodnot RGPP z dat, které jsou zatíženy bílým šumem, s RGPP z nekontaminovaných dat zobrazuje Obr. 17 a je shrnuto v Tab. 4, viz přílohy



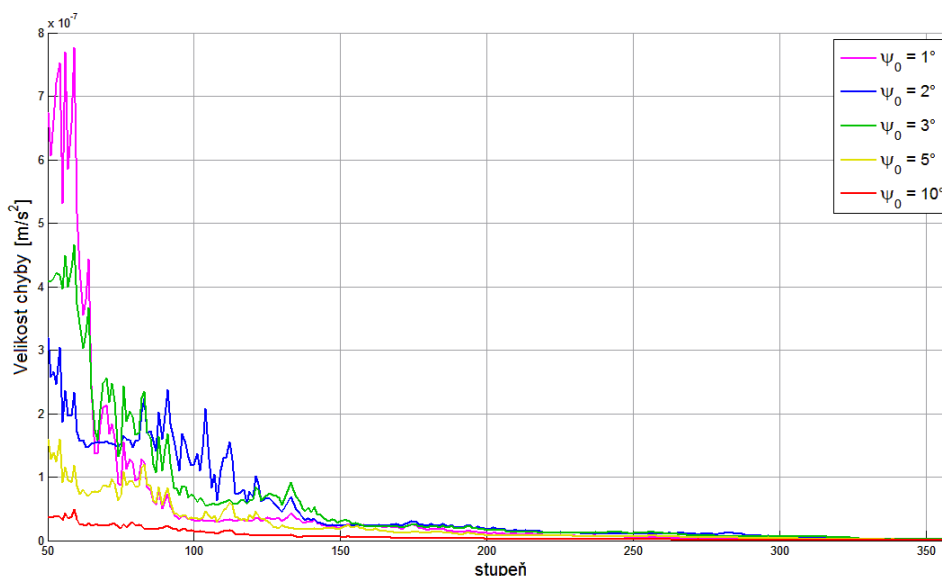
Obrázek 17. Srovnání chyb pro výpočet RGPP pro vstupní data zatížená různými hodnotami bílého šumu pro nejzápadnější profil, integrační poloměr $\psi_0 = 5^\circ$

Z Obr. 17 a Tab. 4 vyplývá, že přidání šumu se směrodatnou odchylkou $\sigma = 0,1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ovlivní výslednou hodnotu RGPP zanedbatelně. Pro směrodatnou odchylku $\sigma = 1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, která odpovídá přesnosti družicové altimetrie, rozdíly dosahují velikosti o přibližně pět řádů menší než jsou hodnoty RGPP. Nakonec pro hodnotu $\sigma = 10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ jsou viditelné

znatelné rozdíly, a to až v řádu procent z hodnot RGPP. Tedy data s $\sigma = 10 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ způsobují příliš velkou chybu ve výsledném RGPP a pro validaci dat mise GRACE by byla nepoužitelná.

Chyba ze zanedbání vlivu vzdálených zón nad maximálním stupněm harmonického rozvoje

V této části je zkoumána první z chyb spojená s výpočtem vzdálených zón, která je způsobená oseknutím sférických harmonických řad v nějakém konečném stupni N_{max} . Velikost této chyby je určena pro RGPP z modelu EGM2008. Syntéza byla provedena pro stupně $n = 0, \dots, 360$ a pro integrační poloměry $\psi_0 = 1, 2, 3, 5$ a 10° . Směrodatné odchylky chyby pro jednotlivé stupně n určené ze všech výpočtových bodů jsou zobrazeny na Obr. 18.



Obrázek 18 Chyba ze zanedbání vlivu vzdálených zón nad maximálním stupněm harmonického rozvoje pro RGPP

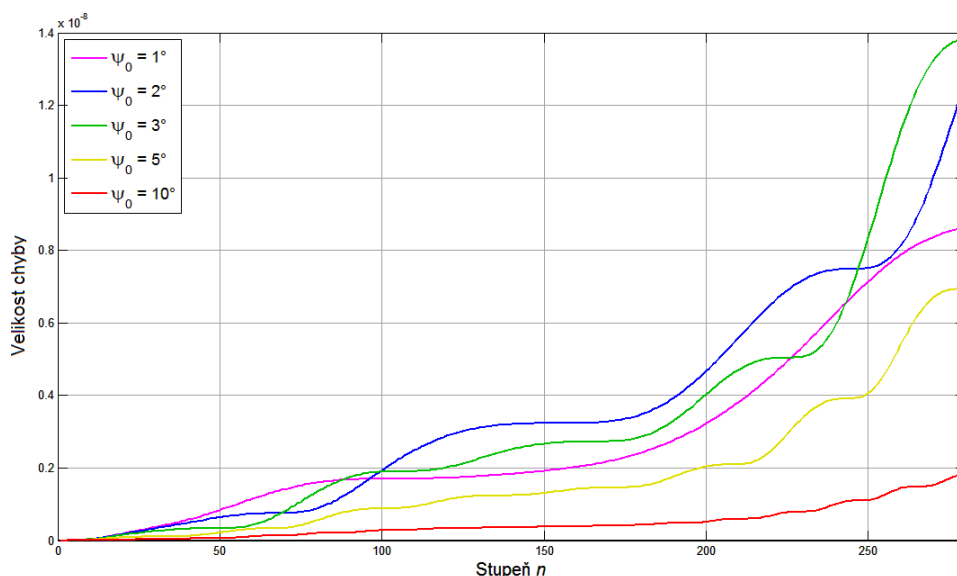
Na Obr. 18 lze pozorovat, že hodnota chyby ze zanedbání klesá se zvyšujícím se stupněm n . Dále je patrné, že hodnota směrodatné odchylky je pro stupeň $n = 50$ a $\psi_0 = 10^\circ$ menší než $5 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$. Pro $n = 100$ a $\psi_0 = 10^\circ$ je hodnota směrodatné odchylky

menší dokonce než $2 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$. Je nutné zmínit, že pro menší hodnoty integračního poloměru ψ_0 jsou hodnoty směrodatných odchylek pro tuto chybu vyšší. Což je způsobeno vyšším amplitudami spektrálních vah pro malé integrační poloměry.

Vliv chyb harmonických koeficientů

Hodnota vlivu chyb geopotenciálních koeficientů byla určena pouze v jednom výpočtovém bodu, jelikož její chování je velmi podobné ve všech výpočtových bodech. Hodnota byla určena aplikací zákona o hromadění chyb na druhý, třetí a čtvrtý člen rovnice (64). Hodnoty této chyby byly určeny pro různé integrační poloměry $\psi_0 = 1, 2, 3, 5$ a 10° .

Pro samotný výpočet této chyby byly použity střední chyby koeficientů z modelu GOCE_TIM_R5. Syntéza byla provedena pro stupně $n=0, \dots, 280$. Experiment je znázorněn na Obr. 19.



Obrázek 19. Vliv chyb sférických harmonických koeficientů při výpočtu vzdálených zón pro RPP

Z Obr. 19 je patrné, že hodnoty této chyby pro RGPP stoupají při zvyšování stupně n , a to proto že vyjadřují hromadění chyb ve vzdálené zóně. Dále je možné z tvaru křivek odečíst, že koeficienty sférických harmonických funkcí jsou pro vyšší stupně n méně přesné. Hodnota této chyby pro $n=50$ a $\psi_0 = 10^\circ$ je menší než $2 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$, pro stejný

integrační poloměr a stupeň $n=100$ je velikost chyby přibližně $3 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. Je tedy patrné, že pro RGPP je tento vliv o více než řád menší než chyba ze zanedbání.

Zhodnocení přesnosti

Dosaženou přesnost praktického odhadu (68) je možné zhruba odhadnout pomocí L^2 normy z jednotlivých chyb: chyba ze zanedbání, vliv chyb harmonických koeficientů a vliv chyb ve vstupních datech. Přesnost je závislá na velikosti integračního elementu, maximálním stupni sférických harmonických řad a velikosti integračního poloměru. Pro volbu $n = 60$, $\psi_0 = 10^\circ$ a velikost diskretizace $5' \times 5'$ je dosažená přesnost rovna přibližně $2 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$, pro $n = 80$, $\psi_0 = 5^\circ$ je přesnost $6 \cdot 10^{-8} \text{ m s}^{-2}$. Empirickým pozorováním lze zjistit, že při zvyšování stupně N_{max} (až do stupně 200) se přesnost zvyšuje, stejně tak jako zvětšováním poloměru. Přesnost veličiny dosažitelná misí GRACE nábývá řádově velikosti $1 \cdot 10^{-7} \text{ m s}^{-2}$ [7]. Na základě toho lze vyjádřit tvrzení, že představená metoda pro výpočet RGPP je použitelná pro validaci dat mise GRACE.

Závěr

Cílem této práce bylo vytvořit a otestovat nový postup pro validaci dat družicové mise GRACE a zhodnotit jeho použitelnost. Podstatou tohoto přístupu je rozdělení integrační oblasti v integrálních transformacích pro výpočet poruchového potenciálu na blízkou a vzdálenou zónu. V blízké zóně je provedena omezená integrace a ve vzdálené zóně je proveden výpočet sférickou harmonickou syntézou.

Výsledkem práce je určení hodnot veličin rozdíl poruchových potenciálů a rozdíl gradientů poruchových potenciálů ve směru spojnice satelitů ve vybraných výpočtových bodech, které se nacházejí na dráze družic GRACE v oblasti Tichého oceánu. Pro vytvoření praktických odhadů těchto veličin byl vytvořen výpočetní software, jehož správnost byla ověřena a může tak být použit pro provedení experimentů.

Přesnost praktických odhadů byla zkoumána pomocí šíření chyb v omezené integraci a také pomocí chyb spojených se sférickou harmonickou syntézou ve vzdálených zónách. Celková chyba byla odhadována pomocí L^2 normy a porovnána s předpokládanou přesností měření mise GRACE. Srovnání je provedeno v kapitole 5 a potvrzuje, že validace dat pomocí nově vyvinutého postupu je možná.

Náplní budoucí práce bude provedení validace družicové mise GRACE s reálnými daty a formulace tzv. inverzní úlohy pro výpočet poruchového potenciálu, kterou je možné získat hodnoty poruchového potenciálu na povrchu referenční sféry z družicových dat mise GRACE.

Seznam zkratk

GNSS - globální navigační satelitní systémy

GOCE - Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer

GRACE - Gravity Recovery and Climate Experiment

CHAMP - Challenging Mini-satellite Payload

LOS - směr spojnice satelitů

RPP - rozdíl poruchových potenciálů

RGPP - rozdíl gradientů poruchových potenciálů ve směru LOS

SST - systém měření družice na družice

Seznam literatury

- [1] Brockmann J.M., Zehentner N., Höck E., Pail R., Loth I., Tosten M.G., Schuh W. 2014. EGM_TIM_RL05: An independent geoid with centimeter accuracy purely based on the GOCE mission. *Geophysical Research Letters*, 41(22):8089-8099
- [2] Edmonds A.R. 1974 *Angular momentum in quantum mechanics*. Princeton University Press, Princeton N.J.
- [3] Garcia R.V. 2002. *Local geoid determination from GRACE mission*, Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science. The Ohio State University, Columbus
- [4] Heiskanen W.A., Moritz H., 1967. *Physical geodesy*. Freeman and Co., San Francisco.
- [5] Chen Y. 2007. *Recovery of terrestrial water storage change from low-low satellite-to-satellite tracking*. Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Science. The Ohio State University, Columbus
- [6] Jekeli C. 1999. *The determination of gravitational potential differences from satellite-to-satellite Tracking, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, 75(2):85-101, Kluwer Academic Publishers
- [7] Jekeli C. 2000. *Calibration/validation methods for GRACE*. Schwarz KP *Geodesy beyond 2000*. IAG symposia 121:83-88. Springer-Verlag, Berlin
- [8] Kellogg O.D. 1929. *Foundations of potential theory*. Dover Publications, New York
- [9] Novák P. 2007. *Integral inversion of SST data of type GRACE*. *Stud. Geophys. Geod.* 51:351-367. Springer-Verlag, Berlin
- [10] Pavlis N.K., Holmes S.A., Kenyon S.C., Factor J.K. 2008 *An Earth Gravitational Model to degree 2160: EGM2008*, EGU General Assembly, Vienna
- [11] Seeber G. 2003. *Satellite Geodesy*. Walter de Gruyter. Berlin
- [12] Šprlák M., Hamáčková E., Novák P. 2015. *Alternative validation of satellite gradiometric data by integral transform of satellite altimetry data*. *Journal of Geodesy*.

89:757-773. Springer-Verlag, Berlin

[13] Thalhammer M. 1994. The geopotential truncation error in satellite gravity gradiometer measurements. *Manuser Geod* 19:45-54

[14] Vaníček P., Janák, Featherstone W.E., 2003. Truncation of spherical convolution integrals with isotropic kernel. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 47:455-465

[15] Vossepoel F.C. 2007, Uncertainties in the mean dynamic topography before the launch of the Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer (GOCE). *Journal of Geophysical Research Ocean* 112:20

[16] Wolff M. 1969. Direct measurements of the Earth's gravitational potential using a satellite pair. *Journal of Geophysical Research Atmospheres* 75(11):2142-2143

Přílohy

Rekurzivní vztahy pro spektrální váhy

V této části jsou přeformulovány vztahy používané pro výpočet poruchového potenciálu ve vzdálené zóně, tak aby mohly být výsledné hodnoty $Q_n(t, u_0)$, $Q_n'(t, u_0)$ a $Q_n''(t, u_0)$ vypočítány co nejefektivněji pomocí výpočetní techniky.

Pro výpočet hodnot spektrálních vah $Q_n(t, u_0)$ jsou použity rekurentní vztahy. Nejprve byly následující koeficienty pro nultý a první řád:

$$I_0 = 1 + u_0, \quad (68)$$

$$I_1 = \frac{1}{2}(u_0^2 - 1), \quad (69)$$

$$K_0(t, u) = \frac{1}{t} \left(\frac{1}{g} - \frac{1}{1+t} \right), \quad (70)$$

$$K_1(t, u) = \frac{1}{t^2} \left(\frac{1 - tu_0 + t^2}{g} - \frac{t^2}{1+t} - 1 \right). \quad (71)$$

Tyto hodnoty byly dosazeny do následujících vzorců:

$$I_n = \frac{1}{n}(2n-1)u_0 I_{n-1} - (n-2)I_{n-2}, \quad (72)$$

$$K_n(t, u) = \frac{1+t^2}{t} K_{n-1}(t, u) - K_{n-2}(t, u) - \frac{I_{n-1}}{t g}, \quad (73)$$

S jejichž znalostí může být vypočtena hodnota koeficientů $Q_n(t, u_0)$:

$$Q_n(t, u) = t(1-t^2) \cdot K_n(t, u). \quad (74)$$

Vztahy pro $Q_n'(t, u_0)$ a $Q_n''(t, u_0)$ jsou odvozeny z rekurentních vztahů pro výpočet koeficientů $Q_n(t, u_0)$. Pro určení koeficientů $Q_n'(t, u_0)$ rekurentními vztahy je nejprve nutné definovat koeficienty:

$$K_0^t(t, u) = t^2(1-t) \left(\frac{1+t}{g} - 1 \right), \quad (75)$$

$$K_2^t(t, u) = t(t-1) \left((1-(t+1)) \left(g - t + \frac{tu_0}{g} \right) \right), \quad (76)$$

$$K_n^t(t, u) = \frac{1+t^2}{t} K_{n-1}(t, u) - K_{n-2}(t, u) - \frac{I_{n-1}}{g} \left(g - t + \frac{tu_0}{g} \right), \quad (77)$$

keré jsou používány v samotných rekurzích pro určení $Q_n^t(t, u_0)$. Rovnice pro rekurzi pak nabývají podoby:

$$Q_0^t(t, u) = \frac{t^2(u_0 - 3t + 3t^2u_0 - t^3 + g^3)}{g^3}, \quad (78)$$

$$Q_1^t(t, u) = \frac{t^2}{g^3} \left(\frac{2t^3 + 1}{t^2} - 2(t^4 + 1) + 3u_0(t + 1t^3) - 3t^2 + u_0^2 + 3t^2u_0^2 \right) + \frac{3t u_0 - 1}{t^2 g^3}, \quad (79)$$

$$Q_n^t(t, u) = \frac{t^2 - 1}{t^2} K_{n-1}(t, u) - Q_{n-2}^t(t, u) + \frac{1+t^2}{t} Q_{n-1}^t(t, u) - \frac{3u_0t^2 - t^3 - 3t + u_0}{g^3} I_{n-1}. \quad (80)$$

Pro $Q_n^u(t, u_0)$ lze rekurzi psát ve tvaru:

$$Q_n^u(t, u) = -\frac{t}{2}(n(n+1))Q_{n+1}(t, u) + \sqrt{1-u_0^2} P_{n,1}(u)K(t, u), \quad (81)$$

kde $Q_n(t, u)$ je počítáno rovnicí (74), $K(t, u)$ je počítáno rovnicí (30) a $P_{n,1}(u)$ je počítáno rekurzí, která je uvedena v následující části.

Rekurzivní vztahy pro Legendreovy funkce

Nejprve jsou uvedeny vztahy pro praktický výpočet Legendreových polynomů, které lze zapsat pomocí trojice rovnic:

$$P_0(u) = 1 \quad 82$$

$$P_1(u) = u \quad 83$$

$$P_{n+1}(u) = \frac{2n+1}{n+1} u P_n(u) - n P_{n-1}(u) \quad 84$$

Vztah může být zobecněn pro výpočet Legendreových funkcí prvního druhu. Nultý a první řád přidružených funkcí je vypočítán rovnicí (22), n -tý řád je možné psát ve tvaru¹⁰:

$$P_{m,n+1}(u) = \frac{2n+1}{n-m+1} u P_{m,n}(u) - (n+m) P_{m,n-1}(u) \quad 85$$

Tabulky

Statistika RPP při omezené integraci s vlivem vzdálených zón ($\Delta\phi = \Delta\lambda = 5'$)				
ψ_0	Min.	Max.	Stř. hodnota	Směr. odch.
hodnoty signálu	-20,064	15,216	-2,8221	8,943
1°	-0,150	0,118	-0,0012	0,026
2°	-0,152	0,125	-0,0001	0,025
3°	-0,083	0,090	0,0004	0,020
5°	-0,034	0,038	0,0005	0,011
10°	-0,008	0,007	$3 \cdot 10^{-5}$	0,003

Tabulka 1 Srovnání velikostí chyb RPP pro různé integrační poloměry

Statistika RGPP při omezené integraci s vlivem vzdálených zón ($\Delta\phi = \Delta\lambda = 5'$)				
ψ_0	Min.	Max.	Stř. hodnota	Směr. odch.
hodnoty signálu	-2,8315	6,3875	-1,0696	8,7624
1°	-0,091	0,117	-0,0004	0,031
2°	-0,185	0,169	-0,0005	0,051
3°	-0,118	0,133	-0,0003	0,049
5°	-0,065	0,063	0,0010	0,024
10°	-0,011	0,0124	$7 \cdot 10^{-5}$	0,004

Tabulka 2. Srovnání velikosti chyby RGPP počítané s různými integračními poloměry s referenčními hodnotami

¹⁰ <http://mathworld.wolfram.com/AssociatedLegendrePolynomial.html>

Statistika RPP při omezené integraci s vlivem vzdálených zón ($\Delta\phi = \Delta\lambda = 5'$), vstupní hodnoty poruchového potenciálu kontaminované bílým šumem o směrodatné odchylce σ					
ψ_0	σ	Min	Max	Stř. hodnota	Směr. odch.
Hodnoty signálu	0.1	-20,064	15,216	-2,8221	8,943
	1	-20,079	15,193	-2,8235	8,944
	10	-20,096	15,206	-2,8226	8,944
1°	0.1	-0,150	0,118	-0,0012	0,0256
	1	-0,145	0,116	-0,0013	0,0254
	10	-0,161	0,127	-0,0005	0,0339
2°	0.1	-0,152	0,125	-0,0001	0,0248
	1	-0,156	0,124	-0,0002	0,0247
	10	-0,105	0,133	0,0012	0,0387
3°	0.1	-0,083	0,090	0,0004	0,0205
	1	-0,084	0,091	0,0003	0,0207
	10	-0,085	0,110	0,0015	0,0328
5°	0.1	-0,034	0,038	0,0005	0,0107
	1	-0,033	0,039	0,0004	0,0109
	10	-0,055	0,071	0,0047	0,0233
10°	0.1	-0,008	0,007	3 10^{-5}	0,0029
	1	-0,011	0,009	5 10^{-5}	0,0033
	10	-0,048	0,047	0,0049	0,0211

Tabulka 3 Srovnání velikostí chyb RPP pro různé integ. poloměry a data zatížená bílým šumem

Statistika RGPP při omezené integraci s vlivem vzdálených zón ($\Delta\phi = \Delta\lambda = 5'$), vstupní hodnoty poruchového potenciálu kontaminované bílým šumem o směrodatné odchylce σ					
ψ_0	σ	Min.	Max.	Stř. hodnota	Směr. odch.
Hodnoty signálu	0.1	-28,278	6,392	-10,696	8,764
	1	-28,282	6,392	-10,696	8,764
	10	-28,287	6,346	-10,696	8,766
1°	0.1	-0,091	0,118	-0,00050	0,0316
	1	-0,093	0,114	0,00047	0,0317
	10	-0,120	0,145	0,00040	0,0409
2°	0.1	-0,185	0,169	-0,00051	0,0540
	1	-0,179	0,174	0,00003	0,0544
	10	-0,273	0,303	0,00293	0,1030
3°	0.1	-0,121	0,133	0,00033	0,0493
	1	-0,135	0,142	0,00027	0,0494
	10	-0,345	0,324	0,00659	0,1269
5°	0.1	-0,067	0,064	0,00106	0,0241
	1	-0,078	0,072	0,00147	0,0267
	10	-0,290	0,348	0,00956	0,1082
10°	0.1	-0,011	0,012	0,00009	0,0042
	1	-0,012	0,354	0,00017	0,0103
	10	-0,015	0,273	0,0047	0,0986

Tabulka 4 Srovnání velikostí chyb RGPP pro různé integ. poloměry a data zatížená bílým šumem