

Kmitání turbinových lopatek v poli odstředivých sil

Patrik Vladař¹

1 Úvod

Tato práce spočívá v modelování turbinové lopatky jako jednorozměrného kontinua. Model je vytvořen pomocí 1D prvků typu nosník, v nichž jsou respektovány tahové, ohybové a krutové deformace. Cílem je sestavit pohybové rovnice a určit vlastní frekvence a vlastní tvary kmitů lopatky v rotujícím poli odstředivých sil. Velká výhoda tohoto modelu oproti modelům, používajícím 3D prvky, je snížení počtu stupňů volnosti systému a tudíž urychlení řešení problému kmitání lopatek a celého turbosoustrojí. Uvažovaný homogenní, izotropní materiál je popsán Youngovým modulem pružnosti v tahu E a modulem pružnosti ve smyku G .

2 Sestavení pohybových rovnic

Souřadnicový systém ξ, η, ζ , který budeme v modelu používat, rotuje společně s lopatkou okolo osy η úhlovou rychlostí ω . Souřadnice ξ je kolmá na příčné průřezy lopatky. V prvním přiblížení budeme uvažovat lopatku prismatickou, což znamená, že má po celé délce konstantní průřez. Je třeba vyjádřit kinetickou a potenciální energii elementu pro následnou aplikaci Lagrangeových rovnic, ze kterých vzniknou pohybové rovnice

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_{De} + \mathbf{M}_e^M) \mathbf{q}_e = \mathbf{f}_{De}, \quad (1)$$

\mathbf{M}_e - matice hmotnosti elementu, \mathbf{G}_e - matice gyroskopických účinků elementu, \mathbf{K}_e - matice tuhosti elementu, \mathbf{K}_{De} - cirkulační matice elementu (závisí na ω^2), \mathbf{f}_{De} - vektor cirkulačních sil elementu, \mathbf{M}_e^M - matice membránových sil (zohledňuje účinky osové síly v příčných směrech η, ζ). Jeden prvek má 16 stupňů volnosti, celá lopatka 42. V jednom uzlu sou jimi posuvy do 3 směrů (u, v, w), 3 natočení (φ, ϑ, ψ), zkřut φ' a relativní prodloužení u' . Všechny matice a vektory všech prvků z posledního vztahu (1) použijeme pro sestavení celkových matic $\mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K}, \mathbf{K}_D, \mathbf{M}^M, \mathbf{f}_D$ metodou konečných prvků.

3 Deplanační funkce

Deplanace je jev, který by se doslovně přeložil asi jako “znerovinění”. Znamená odchylku bodu průřezu od roviny kolmé na osu prvku v důsledku zkroucení. Deplanační funkci počítáme z minimalizace funkcionálu potenciální energie deformace od Bittnar a Šejnoha (1992) s respektováním podmínek od Dupal a Zajíček (2017)

$$\iint_A g dA = 0, \quad \iint_A g\eta dA = 0, \quad \iint_A g\zeta dA = 0. \quad (2)$$

¹ student bakalářského studijního programu Počítačové modelování v technice, obor Mechanika, e-mail: vladař@students.zcu.cz

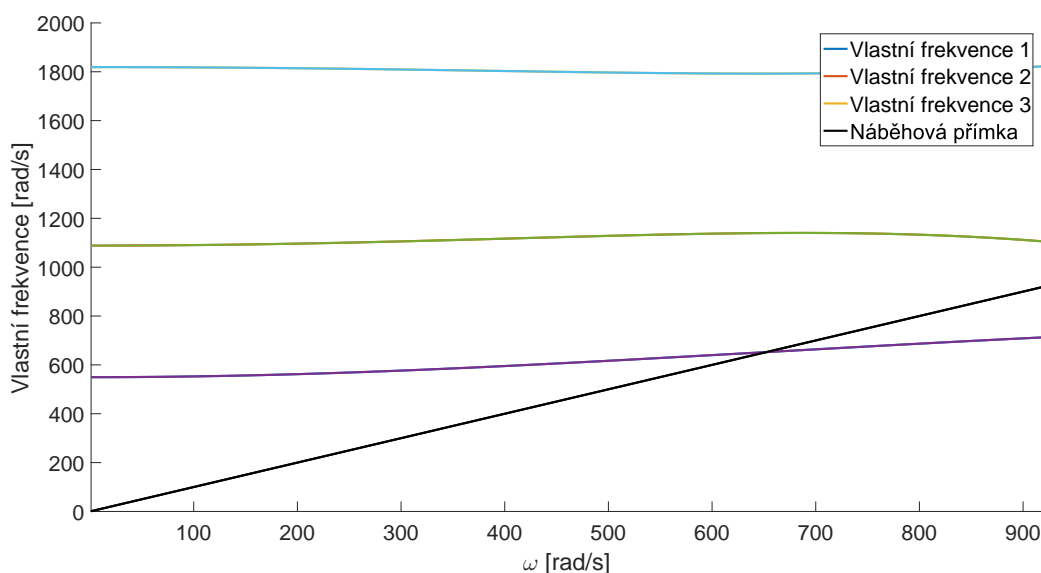
Tyto podmínky zajistí silovou rovnováhu na prvku ve směru ξ , respektive momentovou rovnováhu k osám η a ζ . Diskretizací pomocí MKP dostaneme soustavu $n + 6$ rovnic o $n + 6$ neznámých, kde n je počet uzlů v síti.

4 Vstup a výstup

Nyní známe pohybové rovnice i v nich vystupující deplanační funkci. Uvažujme vstupní hodnoty $E = 210 [GPa]$, $G = 80 [GPa]$, lopatku o délce $0,662 [m]$, rozdělenou na 5 prvků. Cílem je zjistit vlastní frekvence soustavy a jim odpovídající vlastní tvary kmitu. Sestavme matice

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} + \mathbf{B} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^M - \mathbf{K} - \mathbf{K}_D & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{N}^{-1}\mathbf{P} \quad (3)$$

a zjistíme vlastní čísla a vlastní vektory matice \mathbf{A} . Aby byl systém stabilní, musí být reálná část každého vlastního čísla záporná. Imaginární část vlastního čísla představuje vlastní frekvenci. Následující graf je Campbellův diagram pro první tři nejnižší vlastní frekvence včetně náběhové přímky



Obrázek 1: Campbellův diagram

Z grafu lze vyčíst kritickou úhlovou rychlost a převést ji na kritické otáčky $6\,626 [ot \cdot min^{-1}]$, kterým je třeba se při provozu vyhnout. Ještě je třeba dodat, že lopatka ztrácí stabilitu při $14\,295 [ot \cdot min^{-1}]$. Dříve (při $3\,992 [ot \cdot min^{-1}]$) je však překročena mez kluzu (pro ocel zhruba $0,3 [GPa]$). V 1. tvaru kmitu dominuje tah a ohyb ve směru osy η . Ve 2. a 3. tvaru kmitu je dominantní ohyb ve směru osy ζ .

Literatura

Bittnar, Z., Šejnoha, J., *Numerické metody mechaniky 2*. Vydavatelství ČVUT Praha 1992.

Dupal, J., *Modelování turbinových lopatek a jejich kmitání v poli odstředivých sil*. VZ NTIS - VP3 - 0011/2017, Plzeň 2017.