

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD

Studijní program: N3918 Aplikované vědy a informatika
Studijní obor: Mechanika

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Mikrostrukturálně orientovaný model perfuze v játrech

Autor: **Bc. Martin REZEK**

Vedoucí práce: **Prof. Dr. Ing. Eduard ROHAN, DSc.**

Akademický rok 2011/2012

Prohlášení o autorství

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci, zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů, uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

V Plzni dne:

.....

podpis autora

Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu, panu Prof. Dr. Ing. Eduardu Rohanovi, DSc., za vstřícnost a čas, který mi věnoval během častých konzultací, za jeho cenné rady a podněty, které mě vedly na strastiplné cestě k dokončení této práce.

Můj velký dík patří také panu Ing. Vladimíru Lukešovi, Ph.D. za neskonalou trpělivost a obětavou pomoc při implementaci matematického modelu a ochotu zabývat se mými neustálými dotazy, proč nefunguje to či ono. Děkuji též panu Ing. Robertu Cimrmanovi, Ph.D. za možnost nahlédnout pod pokličku výpočetního softwaru *SfePy*, za jehož vytvořením je třeba hledat právě jeho.

A konečně bych chtěl říct velké Děkuji! své rodině a nejbližším za jejich lásku a podporu nejen ve věcech studijních.

Abstrakt

Diplomová práce se zabývá problémem proudění vazké tekutiny prostorem pórů v poddajné matrici. Pozadím problému je perfuze krve jaterní tkáně. Tato perfuze je ve skutečnosti velmi složitý proces s velkou variabilitou v důsledku mnoha faktorů, které ji ovlivňují. Problém prokrvení měkké tkáně proto bylo nutno výrazně zjednodušit pomocí matematického modelování silně heterogenních materiálů s důrazem na interakci vazké tekutiny a poddajné matrice porézního média. Využíváme při tom metody homogenizace aplikované na dvouškálový popis daného fyzikálního problému. V diplomové práci řešíme nejprve úlohu Stokesova proudění a dále rovnice statické rovnováhy, které představují tzv. Biotův model pro popis lineárního chování poroelastických materiálů. Uvedený lineární model je poté zpřesněn pomocí nástrojů citlivostní analýzy, přičemž výsledkem je model nelineární. Součástí práce je i ověření teoretických poznatků na jednoduché testovací úloze.

Klíčová slova:

Stokesovo proudění, homogenizace, tenzor permeability, porézní médium, poroelastická, citlivostní analýza

Vypracování diplomové práce bylo podpořeno grantovými projekty SGS-2010-046, GACR 106/09/0740 a IGA MZ CR 13326

Abstract

This diploma thesis is concerned with viscid fluid flow through a porous space of a deformable matrix. The background is the blood perfusion through human liver tissue. The perfusion is, in fact, a very complex process with high variability due to many factors. Therefore the problem of blood flow through soft tissue had to be simplified by using mathematical modeling of strongly heterogeneous materials with emphasis on interaction between viscid fluid and deformable matrix of a porous medium. A method of homogenization was employed on a two-scale description of given physical problem. This thesis uses the Stokes fluid flow model along with the equations of static equilibrium, which are used by the so called Biot model. Within the frame of this work a test was carried out to confirm the theoretical findings of this thesis. Finally, a nonlinear, more accurate model, which makes use of sensitivity analysis, was proposed and tested.

Keywords:

Stokes fluid flow, homogenization, permeability tensor, porous medium, poroelasticity, sensitivity analysis

This thesis was supported by the following grants: SGS-2010-046, GACR 106/09/0740 and IGA MZ CR 13326

Obsah

| | |
|---|----|
| Obsah..... | 1 |
| Úvod..... | 4 |
| 1.1 Pracovní postup | 4 |
| 1.2 Použitý software | 5 |
| 2 Biologický exkurs | 6 |
| 2.1 Játra..... | 6 |
| 2.1.1 Úloha jater v lidském těle..... | 6 |
| 2.1.2 Anatomický popis jater | 6 |
| 2.1.3 Popis krevních oběhů v játrech | 7 |
| 2.2 Krev | 8 |
| 2.2.1 Skladba krve člověka | 8 |
| 2.2.2 Faktory ovlivňující tok krve..... | 9 |
| 2.2.3 Matematické modelování toku krve..... | 9 |
| 3 Porézní materiály | 11 |
| 3.1 Permeabilita | 11 |
| 3.2 Výskyt a použití..... | 12 |
| 4 Zjednodušující předpoklady pro odvození matematického modelu | 13 |
| 4.1 Předpoklad 1: periodicita lobulární struktury..... | 13 |
| 4.2 Předpoklad 2: nahrazení sinusoidů porézním médiem | 13 |
| 4.3 Předpoklad 3: krev jako newtonská kapalina | 14 |
| 4.4 Předpoklad 4: Stokesovo proudění krve..... | 15 |
| 4.5 Předpoklad 5: lineárně elastický materiál matrice..... | 17 |
| 4.6 Stanovení výchozí pozice pro matematické modelování perfuze | 17 |
| 5 Homogenizace úlohy Stokesova proudění..... | 18 |
| 5.1 Typy pórovitosti a souvislost s hodnotou tlaku v tekutině | 18 |
| 5.2 Měřítko ε | 19 |
| 5.3 Referenční buňka Y | 20 |
| 5.4 Určení polohy bodu uvnitř porézní oblasti | 21 |
| 5.5 Formulace úlohy Stokesova proudění v porézní oblasti Ω | 22 |
| 5.5.1 Poznámka ke škálování viskozity | 23 |
| 5.6 Homogenizace – asymptotická analýza systému lineárních parciálních diferenciálních rovnic | 25 |
| 5.7 Odvození homogenizovaného modelu pomocí metody asymptotických rozvoju..... | 26 |
| 5.7.1 Asymptotický rozvoj rapidně oscilující funkce | 26 |

| | | |
|-------|---|----|
| 5.7.2 | Aplikace homogenizační metody asymptotických rozvoju na systém rovnic Stokesova proudění..... | 27 |
| 5.7.3 | Mikrouloha Stokesova proudění | 31 |
| 5.7.4 | Odvození makroulohy Stokesova proudění | 32 |
| 5.8 | Shrnutí poznatků kapitoly 5..... | 35 |
| 6 | Testovací úloha Stokesova proudění | 37 |
| 6.1 | Implementace matematického modelu | 37 |
| 6.1.1 | Mikrouloha na referenční buňce Y & sestavení tenzoru permeability..... | 37 |
| 6.1.2 | Makrouloha (Darcyho zákon) | 39 |
| 6.1.3 | Respektování konečné velikosti referenční buňky Y..... | 42 |
| 6.2 | Numerické řešení mikroulohy & sestavení tenzoru permeability | 43 |
| 6.2.1 | Tabulka výsledků řešení mikroulohy | 43 |
| 6.2.2 | Analýza výsledků řešení mikroulohy | 45 |
| 6.2.3 | Varianty č. 11 a č. 12..... | 46 |
| 6.2.4 | Shrnutí poznatků o faktorech ovlivňujících velikost složek tenzoru permeability 47 | |
| 6.3 | Numerické řešení makroulohy (Darcyho zákon)..... | 48 |
| 6.3.1 | Úloha 1 | 48 |
| 6.3.2 | Úloha 2 | 50 |
| 6.3.3 | Úloha 3 | 53 |
| 6.4 | Porovnání výsledků dosažených v rámci této práce s výsledky uvedenými v relevantní odborné literatuře..... | 53 |
| 7 | Citlivostní analýza tenzoru permeability | 55 |
| 7.1 | Vektorové pole designových rychlostí | 55 |
| 7.2 | Vztah materiálové a parciální derivace | 56 |
| 7.3 | Odvození totální derivace složek tenzoru permeability | 56 |
| 7.4 | Odvození parciálních derivací bilineárních forem podle umělého času..... | 58 |
| 7.4.1 | Pravidla derivování parciálně podle umělého času | 59 |
| 7.4.2 | Parciální derivace bilineárních forem podle umělého času..... | 60 |
| 7.5 | Testovací úloha pro numerické řešení citlivosti složek tenzoru permeability..... | 61 |
| 7.5.1 | Spline box..... | 61 |
| 7.5.2 | Citlivost tenzoru permeability na změnu tvaru výpočetní oblasti – spline box . | 62 |
| 7.5.3 | Citlivost tenzoru permeability na změnu tvaru výpočetní oblasti – výpočet pomocí konečných diferencí | 65 |
| 8 | Matematický model poroelastického média | 67 |
| 8.1 | Homogenizovaný lineární model elastostatiky poroelastické matrice | 67 |
| 8.1.1 | Slabá formulace rovnice elastostatiky poroelastického média..... | 69 |
| 8.1.2 | Mikrouloha elastostatiky poroelastické matrice..... | 69 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 8.1.3 | Sestavení homogenizovaných koeficientů rovnic úlohy elastostatiky..... | 72 |
| 8.1.4 | Lineární makroúloha elastostatiky poroelastického materiálu..... | 72 |
| 8.1.5 | Makroúloha elastostatiky poroelastického média v ustáleném stavu..... | 74 |
| 8.2 | Nelineární model elastostatiky poroelastického média | 75 |
| 8.2.1 | Zavedení závislosti tenzoru permeability na řešení | 76 |
| 8.2.2 | Výpočet citlivostí tenzoru permeability | 77 |
| 8.2.3 | Algoritmus výpočtu nelineární úlohy elastostatiky poroelastického média..... | 79 |
| 9 | Numerický výpočet testovací úlohy a porovnání výsledků řešení lineárního a nelineárního modelu elastostatiky poroelastického média..... | 81 |
| 9.1 | Řešení úlohy I..... | 82 |
| 9.1.1 | Lineární model | 82 |
| 9.1.2 | Nelineární model a vzájemné porovnání..... | 84 |
| 9.2 | Řešení úlohy II..... | 90 |
| 9.2.1 | Lineární model | 90 |
| 9.2.2 | Nelineární model a vzájemné porovnání..... | 93 |
| 10 | Závěr..... | 100 |
| 11 | Seznam použité literatury | 101 |
| | PŘÍLOHA..... | 104 |

Úvod

Moderní medicína využívá špičkové diagnostické a zobrazovací přístroje pro stanovení pacientova stavu. Existují i další, neméně sofistikované přístroje, které asistují lékařům přímo během zákroku. Současný vývoj ukazuje, že velkým pomocníkem lékařů v jejich práci mohou být aplikované poznatky biomechaniky.

Biomechanika je odvětví mechaniky, zabývající se mechanickými vlastnostmi biologických materiálů, tkání (jako např. stanovení materiálových konstant tkáně slimáka¹), různých látek (např. tokové vlastnosti a modelování proudění krve, viz [24]) a dále také dynamikou biologických systémů (např. svalová práce²), případně simulacemi interakce biologických materiálů a systémů s neživými (např. simulace střetu člověka s automobilem).

Tato diplomová práce se zabývá perfuzí, jinak řečeno průtokem, tekutiny porézním materiálem s výhledem na použití modelu pro simulaci perfuze jaterní tkáně. Tématu se věnuje několik zahraničních publikací, viz např. [3], [6], [26]. Matematickou metodou homogenizace se podrobně zabývají autoři publikací [1], [2], [5] a [23]. Homogenizaci coby nástroj aplikovaný na nejrůznější problémy biomechaniky uplatňují autoři článků [4], [14], [15], [17], [19] a celé řady dalších. Snahou autora této práce je blíže se seznámit s metodami modelování perfuze tekutiny porézním modelem a vytvořit zjednodušený, stacionární model tohoto jevu s využitím předchozího výzkumu Katedry mechaniky Fakulty aplikovaných věd ZČU v Plzni a softwaru vyvinutého tamtéž s vidinou možného použití právě na modelování perfuze krve játry. V žádném případě se nejedná o práci komplexní, dopodrobna se zabývající systémovým modelem průtoku krve játry se zohledněním veškerých fyziologických vnějších i vnitřních dynamických procesů, které tento systém permanentně ovlivňují, neboť prokrvení jater závisí na řadě faktorů (denní doba, pohybová aktivita jedince, příjem potravy, zdravotní stav jedince a další).

1.1 Pracovní postup

1. Formulace předpokladů matematického modelování perfuze v játrech.
2. Seznámení s matematickou metodou homogenizace periodicky porézních médií.
3. Aplikace metody homogenizace na problém Stokesova proudění nestlačitelné vazké tekutiny póry absolutně tuhého skeletu – Darcyho zákon. Ověření na příkladu s jednoduchou testovací geometrií.
4. Seznámení s optimalizační metodou citlivostní analýzy. Aplikace metody na tenzor permeability. Ověření na testovací úloze za použití tzv. spline boxu.
5. Výčet vztahů pro homogenizovaný model poroelastického média. Zahrnutí Darcyho zákona do modelu poroelastického média – nelineární model. Ověření na příkladu s jednoduchou testovací geometrií.

¹ <http://www.kme.zcu.cz/download/predmety/pmfb/prednaska-13.pdf>

² VALDMANNOVÁ, L. *Kosterně svalová rovnováha horní končetiny* [diplomová práce]. ZČU v Plzni, 2011.

1.2 Použitý software

Výsledky, prezentované v této diplomové práci, jsou výstupem výpočtů provedených v softwaru *SfePy*, volně dostupném kódu pro řešení lineárních i nelineárních mechanických systémů, popsaných parciálními diferenciálními rovnicemi a diskretizovaných pomocí metody konečných prvků. Software *SfePy* (*Simple finite elements in Python*) je výsledkem několikaletého úsilí akademických pracovníků ZČU Ing. Roberta Cimrmana a Ph.D., Ing. Vladimíra Lukeše, Ph.D. Jako open source kód, naprogramovaný převážně v jazyce C a Python, je software *SfePy* předmětem neustálého vývoje, vylepšování a rozšiřování nejen rukou svých tvůrců, ale také prostřednictvím aktivních členů jeho uživatelské základny. Vizualizace výsledků veškerých výpočtů, provedených ve *SfePy*, je realizována převážně v programu *ParaView*. Některé výpočty a vizualizace byly provedeny v softwaru MATLAB. Pro tvorbu konečněprvkových sítí byl použit software MSC.Marc.

2 Biologický exkurs

Předložená diplomová práce se zabývá tématem z oboru biomechaniky, které v sobě, alespoň okrajově, propojuje poznatky mechaniky tekutin, poddajných látek a medicíny. A proto na tomto místě uveďme krátký popis jater a krve, abychom objekt matematického modelování uvedli do náležitých souvislostí dříve, než přejdeme k odvození a formulaci výpočetního modelu.

2.1 Játra

Játra, řecky *hepar*, jsou největší žlázou lidského těla. U dospělého člověka dosahují hmotnosti mezi 1 a 2,5 kg, v průměru pak 1,5 kg, přičemž u mužů jsou hmotnější než u žen.

Poznámka: Kapitola o játrech napsána s využitím informací získaných během osobních konzultací s medicínskými odborníky.

2.1.1 Úloha jater v lidském těle

Játra v lidském těle zastávají několik životně důležitých funkcí.

- **sekreční funkce** – játra coby exokrinní žláza produkují žluč, která je poté skladována ve žlučníku a dále distribuována do střev (vliv na trávení, emulgaci tuků),
- **metabolická funkce** – játra se uplatňují při zpracování základních živin (tuků, cukrů a bílkovin), produkují také glykogen, zásobní polysacharid (zdroj okamžité energie), a plazmatické proteiny,
- **vylučovací funkce** – při činnosti jater vzniká močovina, která krví dále putuje do ledvin, načež je močí vyloučena,
- **termická funkce** – játra jsou díky intenzivním, v nich probíhajícím metabolickým procesům zdrojem tepla.

Játra plní v lidském těle nezastupitelnou roli při transformaci látek a detoxikaci organismu, což jim vysloužilo často zmiňované přirovnání k chemické továrně. Podívejme se nyní na jejich stavbu.

2.1.2 Anatomický popis jater

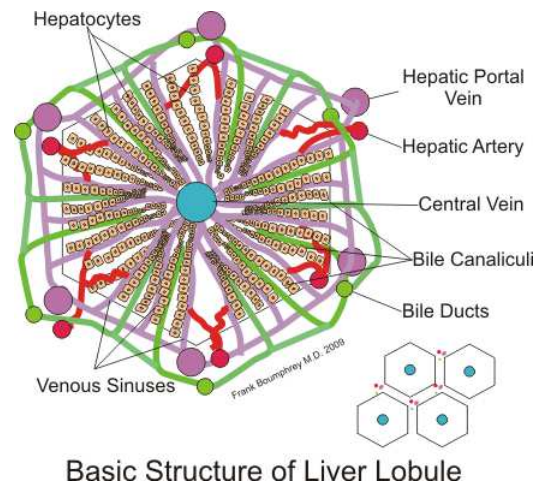
Z hlediska anatomického popisu se játra skládají ze čtyř laloků: *lobus dexter*, *lobus sinister*, *lobus quadratus* a *lobus caudatus*. Játra, umístěná pod bránicí na pravé straně dutiny břišní, jsou začleněna do oběhové soustavy. Na zado-spodní straně vstupují do jaterního parenchymu (viz níže), v místě zvaném jaterní brána (*porta hepatis*):

- jaterní tepna (*arteria hepatica propria*),
- portální nebo také vrátnicová žíla (*vena portae*).

Z jater vystupují:

- žlučovody (*ductus hepaticus dexter*, *ductus hepaticus sinister*),
- jaterní žíly.

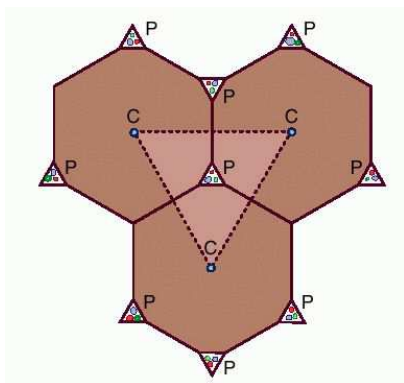
Stavba vlastní jaterní tkáně je následující. Největší objemové zastoupení má parenchym, houbovitě buněčné pletivo, tvořené polyedrickými jaterními buňkami (*hepatocyty*), seskupenými do trámců. Prostorem mezi hepatocyty je vedeno jemné síťoví kapilárních sinusoidů. Soudržnost těchto stavebních kamenů zaručuje vazivo. Trámce hepatocytů tvoří charakteristické lalůčky obklopující centrální žílu (*lobulus venae centralis*), na kolmém řezu pravidelné hexaedrické útvary, které jsou zároveň základní morfologickou (stavební, ale nikoli funkční!) jednotkou jater, viz **obr. 1**.



Basic Structure of Liver Lobule

obr. 1: Struktura jaterního lobulu. Zdroj:
http://en.wikipedia.org/wiki/Lobules_of_liver

2.1.3 Popis krevních oběhů v játrech



obr. 2: Schematické znázornění funkčního oběhu. Zdroj:
<http://medical-dictionary.thefreedictionary.com/hepatic+lobules>

Do jaterního parenchymu je krev přiváděna vrátnicovou žílou a jaterní tepnou. Jaterní tepna (*arteria hepatica propria*) přináší okysličenou krev ze srdce, zatímco vrátnicová žíla (*vena portae*) krev s živinami, pocházejícími z trávicího traktu. Tyto dvě cévy spolu se žlučovodem tvoří větvičí se triádu (*trias*), která obemyká každý z lalůček, přičemž na kolmém řezu jaterní tkáně je patrné, jak je triáda vedena jak v interlobulárním prostoru, tak podél hran každého hexagonálního lalůčku, viz **obr. 1**. Větvičí se strukturu triády lze obrazně přirovnat ke stromu. Krev přivedená vrátnicovou žílou po průchodu sinusoidy odtéká třemi nejbližší umístěnými centrálními žíly, viz **obr. 2**. Tyto tvoří husté větvení dalšího „stromu“, jehož kmen vytvoří dvě až tři jaterní žíly, vyúsťující pod bránicí do dolní duté žíly. Popsaný oběh krve je výrazem vlastní funkce jater.

Vedle tohoto zajišťuje nutriční oběh hepatickou artérií výživu jaterní tkáně okysličenou krví z aorty. Oba zmíněné oběhy jsou ve vzájemné součinnosti. Spolu se větví a na soutoku jejich terminálních vlásečnic vznikají výše zmíněné jaterní sinusoidy.

Zajímavou skutečností je, že vnitřní funkční členění jater neodpovídá jejich anatomickému popisu, neboť rozeznáváme celkem osm jaterních segmentů. Z hlediska průtoku krve se jedná o nezávislé spádové oblasti. Znalost segmentů a alespoň přibližné určení jejich hranic je důležité zejména při provádění chirurgického zákroku, neboť odstraněním některého ze segmentů, tzv. resekci, lze eliminovat patologickou tkáň, aniž by tento zákrok zamezil správnému fungování orgánu.

Důsledkem operace jsou zvýšené nároky na zbylou jaterní tkáň, která je vystavena původnímu přísunu krve. Zde se nachází možnost přímé spolupráce biomechaniky a medicíny, neboť do budoucna by právě stanovení hranic jednotlivých jaterních segmentů pomocí numerického modelu na základě předchozího CT a ultrazvukového vyšetření mohlo významně pomoci chirurgům v jejich práci snížením rizika vzniku komplikací. Nesmí totiž dojít k výraznému nepoměru mezi množstvím přiváděné krve a velikostí zbylého jaterního parenchymu.

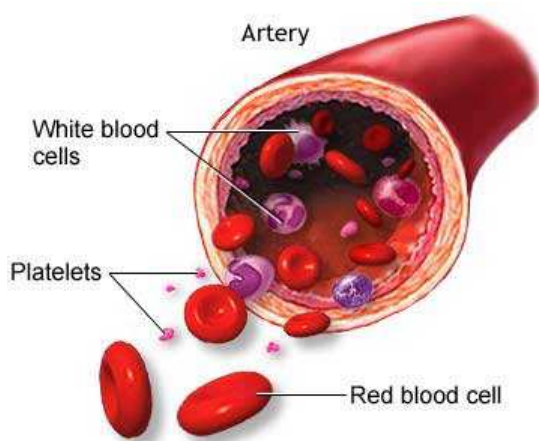
2.2 Krev

Krev je, jak uvádí autoři publikace [24], transportní kapalina oběhové soustavy člověka. Je to vazká, nestlačitelná kapalina heterogenní povahy s hustotou $\rho = 1043 \div 1066 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Skládá se z nažloutlé krevní plazmy (s objemovým podílem $46 \div 63 \%$) a krevních částic (s obj. podílem $37 \div 54 \%$), mezi které se řadí červené a bílé krvinky a krevní destičky.

Poznámka: Kapitola o krvi napsána s využitím údajů uvedených v [24].

2.2.1 Skladba krve člověka

Krevní plazma je kapalina o hustotě $\rho = 1025 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, složená převážně z vody (92 %) s přidavkem krevních bílkovin a anorganických solí (celkem 8 %). Zajišťuje transport krevních částic a různých chemických látek (vody, hormonů a tuků).



obr. 3: Krevní částice: červené a bílé krvinky a krevní destičky (platelets).

Zdroj: <http://www.thaimedicalnews.com/wp-content/uploads/blood-platelets.jpg>

Červené krvinky (*erythrocyty*) jsou bezjaderné buňky červené barvy (díky obsahu železa) tvaru vprostřed zploštělého disku o hustotě $\rho = 1090 \div 1100 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Jejich funkcí je především přenos dýchacích plynů oběhovou soustavou za účelem zásobování orgánů kyslíkem. Kromě toho udržují stálé pH krve.

Bílé krvinky (*leukocyty*) jsou buňky s jádrem a hustotou pohybující se dle typu v rozmezí $1055 \div 1085 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, přičemž existuje celkem 5 typů: *lymfocyty*, *monocyty*, *neutrofily*, *eosinofily* a *bazofily*. Důvodem této diverzity je schopnost bílých krvinek zajišťovat obranyschopnost organismu (tvorba protilátek, fagocytóza).

Posledním typem krevních částic jsou krevní destičky, což jsou bezjaderné úlomky větších buněk s hustotou $\rho \cong 1030 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, které se uplatňují především při zacelování ran, neboť umožňují přenos enzymů a dalších látek potřebných pro srážení krve (koagulaci).

2.2.2 Faktory ovlivňující tok krve

Tok krve je závislý na mnoha faktorech. Důležitým ukazatelem, který ovlivňuje mimo jiné také viskozitu krve, je tzv. hematokrit (Htc) – poměr objemu červených krvinek vůči objemu krve, daný vzorcem

$$Htc = \frac{V_{erythrocytes}}{V_{blood}} [\%]. \quad (2.1)$$

U savců včetně člověka se hematokrit pohybuje v rozmezí 40 ÷ 50 %, což je množství bezpečně zajišťující potřebné okysličení tkání. Se zvyšujícím se podílem červených krvinek (= rostoucím Htc) stoupá sice teoreticky schopnost krve přenášet dýchací plyny, zároveň však, zejména v kapilárách, narůstá odpor proti tečení, způsobený přílišnou viskozitou krve.

Dalším z hledisek, která mají vliv na tok krve, je její dynamická viskozita η [Pa.s], která je funkcí smykové rychlosti krve, tělesné teploty a právě hematokritu. Je-li smyková rychlost krve velmi nízká, dochází navíc k lokálním fluktuacím viskozity vlivem shlukování erytrocytů (tzv. penízkovatění). Červené krvinky se mohou výrazně deformovat a jsou tak kromě utváření soudržných shluků schopny projít kapilárou o průměru srovnatelném s rozměry červené krvinky.

Mimoto závisí tok krve a její viskozita či zdánlivá viskozita též na průměru cévy. Zajímavým faktem je, že v cévách o průměru menším než 500 μm se krevní částice soustřeďují kolem střednice cévy, zatímco při stěnách cévy se vytvoří jen několik mikrometrů silná vrstva čisté plazmy. Ta má za následek zlepšení tokových podmínek v cévě a tím i pokles skutečné hodnoty viskozity na zdánlivou a tedy zmenšení odporu proti tečení.

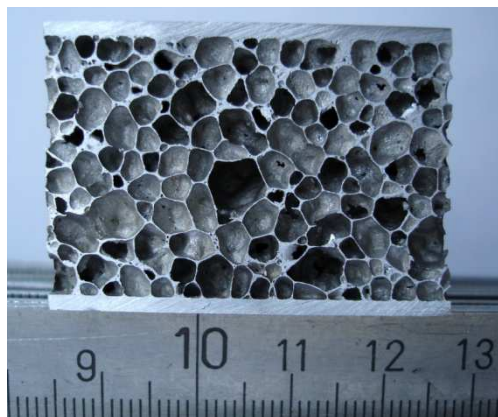
Nejdůležitějším faktorem, který má vliv na tokové vlastnosti krve, je však smyková rychlost. Její hodnota ovlivňuje nejen dynamickou viskozitu krve, ale určuje také hranici mezi newtonským a nnewtonským chováním krve. Zavádí se tzv. kritická smyková rychlost, která označuje nejmenší hodnotu smykové rychlosti, při které je zdánlivá viskozita krve konstantní a zcela převažuje newtonské chování. Podrobnější popis vlivu smykové rychlosti na tečení krve cévami lze najít v publikaci [24].

2.2.3 Matematické modelování toku krve

Existuje více přístupů k matematickému modelování toku krve, které závisejí např. na konkrétní aplikaci. Krev lze modelovat jako newtonskou kapalinu v případě, že se zabýváme tokem krve velkými cévami a při velkých hodnotách smykové rychlosti. Také krevní plazma se chová jako newtonská kapalina. Postoupíme-li k cévám menších průsvitů, nabývá na významu heterogenita krve a s ní související fluktuace viskozity, které zapříčiňují nnewtonské chování krve. I díky výše zmíněným jevům, mezi jaké patří např. vznik vrstvy čisté krevní plazmy při stěně cévy, je krev v podstatě vícefázové médium s pseudoplastickým až viskoelastickým chováním – zvláště, pokud modelujeme cévy velmi malých průsvitů ($\emptyset < 500 \mu\text{m}$).

Námětem této práce je průchod krve jaterní tkání, tedy z fyzikálního hlediska jakousi houbou, zastupující složitou spleť vlásečnic. Ve středu zájmu je především poznání interakce kapaliny a poddajného materiálu tkáně. Navíc se jedná o zjednodušený model určený spíše jako úvod do problematiky z oboru biomechaniky. V případě zájmu o poznání metod modelování neneutonských kapalin se zřetelem na tok krve oběhovou soustavou lze více než doporučit literaturu [24] autorské dvojice Vimmr - Jonášová.

3 Porézní materiály



obr. 4: Sendvič z plechů a kovové pěny z hliníkové slitiny jako ukázka porézního materiálu.

Zdroj: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Aluminium_foam_sandwich.jpg

Porézní materiály či média jsou heterogenní materiály, jejichž charakteristickým znakem je přítomnost dutin – pórů – ve skeletu základního materiálu. Základní vlastností porézních médií je poróznost, tedy číslo mezi nulou a jedničkou udávající poměr objemu pórů vůči celkovému objemu, který v prostoru těleso z porézního materiálu zaujímá. Co dále odlišuje porézní materiály od idealizované představy homogenního pevného materiálu, ale také od materiálů kompozitních, je přítomnost tekuté fáze v síti pórů. Touto tekutinou o určité hustotě ρ [kg·m⁻³], dynamické vazkosti η [Pa·s] a objemové stlačitelnosti γ [Pa⁻¹] může být prostor pórů vyplněn buď částečně, nebo zcela nasycen – saturován.

3.1 Permeabilita

Permeabilita je schopnost porézního materiálu propouštět tekutinu. Je-li struktura pórů v matici materiálu izotropní, je permeabilita vyjádřena jedinou skalární hodnotou, v případě anizotropních porézních materiálů pak hovoříme o tenzoru permeability.

Existuje několik způsobů, jak permeabilitu definovat. Vyjdeme-li z Darcyho zákona

$$\mathbf{w} = -k\nabla p, \quad (3.1)$$

kde \mathbf{w} [m·s⁻¹] je vektor perfuzní rychlosti tekutiny a $\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x}$ [kg·m⁻²·s⁻²] gradient tlaku, [25], pak permeabilita k [m³·s·kg⁻¹] udává, kolik tekutiny při daném tlakovém spádu porézním materiálem za jednotku času proteče¹. Perfuzní rychlost \mathbf{w} je podle [19] rozdíl rychlosti tekutiny \mathbf{v}_f proudící póry a rychlosti \mathbf{u} , s jakou se posouvají body matrice, kde \mathbf{u} značí vektor posunutí, přičemž rozdíl je navíc násoben objemovým podílem ϕ tekutiny vůči objemu porézního materiálu.

$$\mathbf{w} = \phi(\mathbf{v}_f - \mathbf{u}) \quad (3.2)$$

Nevýhoda výše zmíněné definice permeability spočívá ve skutečnosti, že pro daný porézní materiál je hodnota permeability závislá mimo jiné také na vlastnostech samotné tekutiny, jíž

¹ Rovnici (3.1) vynásobíme jednotkovou plochou $S = 1$ [m²]. Potom levá strana této rovnice je ekvivalentní průtočnému množství \dot{V} [m³·s⁻¹], zatímco její pravá strana je rovna součinu permeability a hybné síly F [N].

jsou póry syceny. Proto se zavádí tzv. vlastní či vnitřní permeabilita k' , definovaná jako součin permeability k a dynamické viskozity tekutiny η ,

$$k' = k\eta \text{ [m}^2\text{]}, \quad (3.3)$$

kteřá udává permeabilitu porézního materiálu nezávisle na tekutině, která póry protéká, [25]. Vlastní permeabilita k' , jak je zřejmé z jednotky, závisí pouze na geometrickém uspořádání mikrostruktury pórů. Nadále se budeme držet právě této definice permeability, a tak budeme-li napříště hovořit o permeabilitě, bude tím míněna vlastní permeabilita k' .

Další definice permeability lze dohledat např. v [25].

3.2 Výskyt a použití

Porézní materiály se běžně vyskytují v přírodě – půdy, horniny, dřevo¹, ale také např. kosti, které se vyznačují tzv. dvojitou porézitou, viz [4], [16]. I řada člověkem vytvořených materiálů se řadí mezi porézní – jako třeba některé keramické materiály či pomocí práškové metalurgie připravené kovové porézní materiály, nacházející uplatnění při výrobě samomazných ložisek².

Skelet porézních médií, zvaný též matrice, ale nemusí být tvořen pouze tuhým pevným materiálem. Představme si např. obyčejnou mycí houbu, u níž právě schopnost velmi poddajné matrice významnou měrou se deformovat, a tím vypudit porézním prostorem pohlcený objem vody, je každodenně využívána učiteli a žáky po celém světě. Také celou řadu biologických materiálů a měkkých tkání lze klasifikovat jako porézní médium.

Mechanickými vlastnostmi porézních materiálů se zabývá poromechanika, odnož mechaniky kontinua, zatímco poroakustika zkoumá šíření zvukových vln porézním médiem. Významný podíl na poznání vlastností porézních médií, jakož i na položení základů a rozvoji teorie poroelasticity má belgicko-americký fyzik Maurice Anthony Biot³ (1905 - 1985).



obr. 5: Maurice Anthony Biot.

Zdroj: <http://imechanica.org/node/235/>

¹ http://en.wikipedia.org/wiki/Porous_medium

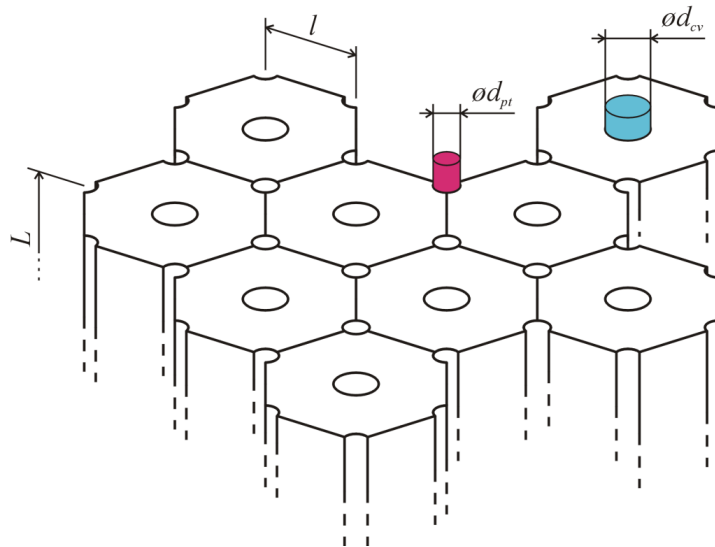
² <http://www.jinpo.cz/vylisky.html>

³ http://en.wikipedia.org/wiki/Maurice_Anthony_Biot

4 Zjednodušující předpoklady pro odvození matematického modelu

Při matematickém modelování naznačeného fyziologického procesu perfuze krve játry budeme vycházet z několika zjednodušujících předpokladů.

4.1 Předpoklad 1: periodičita lobulární struktury



obr. 6: Ideálně periodická lobulární struktura jater. Portální žíla vyznačena červeně, centrální žíla modře.

Lobulární strukturu uvažujeme dokonale periodickou, složenou z nekonečného počtu lobulů průřezu pravidelného šestiúhelníku, pro jehož stranu délky l platí

$$l \ll L, \quad (4.1)$$

kde L je délka lobulu v osovém směru, [3]. Podél každé hrany lobulu se táhne interlobulární větev portální žíly kruhového průřezu s průměrem d_{pt} , zatímco v prostředku šestiúhelníkového průřezu lobule ústí centrální žíla o průřevu d_{cv} , [3].

4.2 Předpoklad 2: nahrazení sinusoidů porézním médiem

Modelovat mikroproudění krve složitou sítí jemných sinusoidů přímo by znamenalo vytvořit referenční, velmi detailní geometrický model obou cévních stromů, respektující jejich přirozenou stochastickou stavbu alespoň do jisté úrovně detailů. Diskretizace takového geometrického modelu by nutně vyžadovala vytvoření velmi husté sítě, složené z obrovského počtu konečných objemů, a to již pro výpočetní oblast zahrnující pouhý jeden jediný lobulus. Kromě obtíží spojených s tvorbou sítě by použití přímého modelování kladlo značné nároky na hardware (potřeba velké operační paměti a pevného disku s dostatečnou kapacitou paměti pro ukládání dat během výpočtu) a neslo s sebou také zátěž v podobě časové náročnosti výpočtu. A proto zavádíme – z hlediska diskretizace výpočetní oblasti – významné zjednodušení tím, že proudění krve řečištěm sinusoidů modelujeme jako proudění porézním, a tedy na úrovni mikrostruktury nehomogenním materiálem. Tento přístup zřejmě odstraňuje problémy spojené se zdlouhavým preprocessingem a rostoucím výpočetním časem, na druhé straně však v sobě skrývá obtíže jiného druhu, kterými se blíže zabývá kapitola 5.

4.3 Předpoklad 3: krev jako newtonská kapalina

Krev je nestlačitelná nenewtonská vazká kapalina. Ovšem jak tvrdí autoři článku [3], tvoří rozdíl ve výsledcích výpočtu modelu klasické newtonské nestlačitelné kapaliny a pseudo-plastického modelu pouhých 4%, a proto budeme dále pracovat s jednodušším, lineárním modelem nestlačitelné newtonské kapaliny, tzv. Newtonovým modelem kapaliny, s kterým pracují také autoři článku [6].

Napětí v newtonské kapalině je popsáno tenzorem napětí τ_{ij} , který je dle [10] dán lineárním vztahem

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + R_{ij}; \quad i, j = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

kde p je konstantní hodnota tlaku, δ_{ij} Kroneckerovo delta, N dimenze úlohy (rovinná pro $N = 2$, prostorová pro $N = 3$) a R_{ij} tzv. disipační tenzor, který je dán vztahem

$$R_{ij} = 2\eta\dot{e}_{ij} + \eta'\dot{e}_{kk}\delta_{ij}. \quad (4.3)$$

Konstanta η [Pa.s] ve vzorci (4.3) značí dynamickou viskozitu kapaliny, jejíž velikost ale obecně závisí na teplotě a tlaku, η' [Pa.s] je tzv. druhá vazkost, pro niž platí

$$\eta' = -\frac{2}{3}\eta. \quad (4.4)$$

Jestliže $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ je vektor rychlosti kapaliny, pak tenzor

$$\dot{e}_{ij} = e_{ij}(\mathbf{w}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.5)$$

představuje rychlost poměrné deformace kapaliny.

V případě nestlačitelných kapalin je druhý člen rovnice (4.3) roven nule díky platnosti zákona zachování hmoty, který je pro nestlačitelnou tekutinu vyjádřen rovnicí kontinuity ve tvaru

$$\dot{e}_{kk} = \frac{\partial w_k}{\partial x_k} = 0. \quad (4.6)$$

Ve vztazích (4.3) a (4.6), jakož i v dalším průběhu práce, je použita Einsteinova sumační konvence.

Při platnosti předchozích tvrzení můžeme tenzor napětí τ_{ij} v newtonské nestlačitelné kapalině zapsat v jeho konečné podobě

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta\dot{e}_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right). \quad (4.7)$$

Případně zájemce o hlubší poznání tématu modelování toku krve pomocí modelů neneutonské kapaliny odkazují na literaturu [24].

4.4 Předpoklad 4: Stokesovo proudění krve

V mechanice tekutin obecně používaným matematickým aparátem je systém nelineárních nestacionárních Navier-Stokesových diferenciálních rovnic, které pro nestlačitelnou tekutinu mají v bezrozměrném tvaru podobu

$$\rho^* \frac{\partial w_i^*}{\partial t^*} + \rho^* \frac{\partial w_i^*}{\partial x_j^*} w_j^* = \frac{1}{Re} \left(-\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + f_i^* \right), \quad (4.8)$$

příčemž bezrozměrné veličiny hustoty, času, polohy, rychlosti, tlaku a vnější objemové síly, označené hvězdičkou, jsou definovány pomocí referenčních hodnot ρ_∞ , l_∞ a w_∞ :

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_\infty} \quad ; \quad t^* = \frac{w_\infty t}{l_\infty} \quad ; \quad x_i^* = \frac{x_i}{l_\infty} \quad ; \quad w_i^* = \frac{w_i}{w_\infty}$$

Bezrozměrný tlak p^* a vektor vnější objemové síly f_i^* nejsou v rovnici (4.8) definovány obvyklým způsobem¹, ale pomocí tečného napětí, působícího např. na rozhraní mezi tekutinou a pevnou stěnou, [9], [12].

$$p^* = \frac{p}{\eta \frac{w_\infty}{l_\infty}} \quad ; \quad f_i^* = \frac{f_i l_\infty}{\eta \frac{w_\infty}{l_\infty}} \quad (4.9)$$

S takto definovanými bezrozměrnými veličinami je celá pravá strana rovnice (4.8) násobena reciprokou hodnotou bezrozměrného Reynoldsova čísla

$$Re = \frac{\rho_\infty w_\infty l_\infty}{\eta}, \quad (4.10)$$

které udává poměr sil setrvačných a viskózních. Vynásobme rovnici (4.8) číslem Re a pozorujme, co se bude dít při velmi malém $Re \ll 1$.

$$1 \gg Re \left(\rho^* \frac{\partial w_i^*}{\partial t^*} + \rho^* \frac{\partial w_i^*}{\partial x_j^*} w_j^* \right) = -\frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} + \frac{\partial^2 w_i^*}{\partial x_j^* \partial x_j^*} + f_i^* \quad (4.11)$$

¹ Bezrozměrný tlak p^* roven podílu statického tlaku a dynamického tlaku referenčních veličin: $p^* = \frac{p}{\rho_\infty w_\infty^2}$.

Nízká hodnota Re indikuje buď vysokou viskozitu tekutiny, nebo její nízkou rychlost či malý charakteristický rozměr výpočetní oblasti, popřípadě nějakou kombinaci těchto jevů. Jelikož se v této práci zabýváme tečením krve řečištěm sinusoidů, přichází v úvahu v podstatě všechny zmíněné jevy. Krev je kapalina o nezanedbatelné viskozitě, protékající sítí velmi jemných cévek o malém průsvitu ($\emptyset d$ ekvivalentní charakteristickému rozměru l_∞) nízkou rychlostí, řádově 10^{-6} až 10^{-5} m.s $^{-1}$ ($2,59 \cdot 10^{-6}$ m.s $^{-1}$ podle [6]), což umožňuje jak lokální, tak i konvektivní člen na levé straně rovnice zanedbat, [9], [12], [23].

Při výpočtu vektoru rychlosti w_i a tlaku p ve vazké, nestlačitelné kapalině lze tedy přejít od systému Navier-Stokesových rovnic ke kvazi-stacionárnímu systému, popsánému lineárními Stokesovými rovnicemi (nyní opět v dimenzionálním tvaru s jednotkou [N.m $^{-3}$])

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j \partial x_j} + f_i = 0 \quad \text{v } \Omega_f; \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (4.12)$$

Ve vektorovém zápisu

$$-\nabla p + \eta \Delta \mathbf{w} + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega_f, \quad (4.13)$$

kde Δ značí Laplaceův operátor vzhledem k prostorovým souřadnicím $\mathbf{x} \in \Omega_f$.

Systém (4.12) o N rovnicích, popisujících Stokesovo proudění, někdy též zvané plíživé (*creeping flow*), [9], doplníme podmínkou nulové divergence vektoru rychlosti, rovnicí kontinuity, a konečně okrajovou podmínkou nulové rychlosti na hranici výpočtové oblasti Ω_f .

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{v } \Omega_f \quad (4.14)$$

$$w_i = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_f \quad (4.15)$$

kde $\partial\Omega_f$ je hranice oblasti Ω_f , [1], [23].

Rovnici (4.12), resp. (4.13) lze interpretovat také jako rovnici statické rovnováhy vnějších sil f_i působících na objem tekutiny a vnitřních sil působících v tekutině, vyjádřených pomocí tenzoru napětí τ_{ij} , přičemž platí

$$\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0.$$

Dosazením (4.7) za τ_{ij} a následnou úpravou vztahu s přihlédnutím k platnosti (4.14) získáme právě Stokesovu rovnici (4.12).

4.5 Předpoklad 5: lineárně elastický materiál matrice

Při matematickém modelování měkkých tkání a dalších biologických materiálů se často uplatňují nelineární mechanické modely materiálů (především viskoelastický model), které připouštějí velké deformace, vykazují časově závislé chování a další podobné fenomény. V této práci ale při řešení statického namáhání matrice porézního elastického materiálu vycházíme ze zjednodušujícího předpokladu, že deformace matrice, indukované vnějším zatížením, jsou malé a lze je tedy vyjádřit pomocí Cauchyova tenzoru malých deformací,

$$e_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (4.16)$$

kde $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ je vektor posunutí. Vztah mezi tenzorem napjatosti σ_{ij} matrice a tenzorem malých deformací e_{ij} uvažujeme lineární, vyjádřený Hookeovým zákonem

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} e_{kl}, \quad (4.17)$$

přičemž symetrický tenzor D_{ijkl} čtvrtého řádu, známý pod označením tenzor tuhosti, je dán vztahem

$$D_{ijkl} = \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} \quad (4.18)$$

s Lamého koeficienty μ a λ , [10].

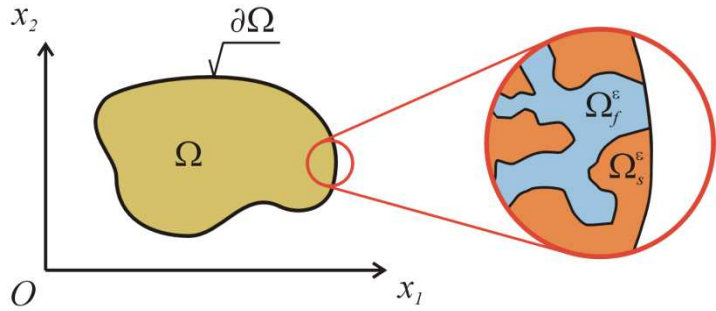
4.6 Stanovení výchozí pozice pro matematické modelování perfuze

Za výše zmíněných předpokladů lze perfuzi jaterní tkáně krví modelovat jako tok vazké nestlačitelné newtonské kapaliny prostorem pórů lineárně elastického ortotropního materiálu s periodicky porézní vnitřní strukturou. Takovýto materiál nazýváme lineárně poroelastický. Dále předpokládáme statické namáhání, tedy časově neměnné zatížení tkáně, indukované např. makroskopickou deformací jisté části tkáně, přičemž zanedbáváme setrvačné účinky. Příkladem popsané situace mohou být játra vystavená účinkům zvýšeného krevního tlaku. Tato zátěž vyvolá makroskopickou deformaci jaterní tkáně, jež způsobí pochopitelně též deformaci na lokální, řekněme lobulární úrovni, jakož i mikroproudění krve sítí pórů.

5 Homogenizace úlohy Stokesova proudění

V této kapitole bude odvozen matematický model pro výpočet úlohy Stokesova proudění kanálky tělesa z poroelastického materiálu, k čemuž využijeme přístup matematické metody homogenizace. Poznamenejme, že v celém průběhu této kapitoly uvažujeme matici dokonale tuhou, což znamená, že tvar kanálků se vlivem působení tlaku v tekutině nemění.

Mějme oblast Ω , jež představuje objem, který v prostoru zaujímá těleso z dokonale tuhého porézního materiálu. Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^N$ je souvislá, otevřená a omezená s hranicí $\partial\Omega$, [1], [2], [23]. Je popsána pomocí souřadnicového systému $Ox_1x_2 \dots x_N$, kde N je dimenze úlohy. Matematicky respektujeme existenci tuhé matrice a pórů, vyplněných vazkou tekutinou, rozdělením oblasti Ω na dvě disjunktní podoblasti:



obr. 7: Porézní oblast Ω s hranicí $\partial\Omega$ a naznačenou vnitřní strukturou (viz výřez).

Ω_s^ε ... podoblast tuhé matrice (*solid* – index s),

Ω_f^ε ... podoblast tekutinou vyplněných pórů (*fluid* – index f), viz obr. 7.

Dříve, než bude osvětlen význam indexu ε , je třeba učinit poznámku k charakteru prostorového uspořádání pórů.

5.1 Typy pórovitosti a souvislost s hodnotou tlaku v tekutině

Předpokládejme nyní porézní materiál, jehož póry jsou satureovány nestlačitelnou vazkou tekutinou. Předpokládejme dále, že materiál je izolovaný a nepůsobí na něj žádná objemová setrvačná síla. Z toho plyne, že uvažovaný porézní materiál se nachází v relativním klidu, přičemž zanedbáváme i vliv gravitačního zrychlení. Zatížíme-li popsany porézní materiál vnější statickou silou, vzroste úměrně tomuto zatížení statický tlak p uvnitř tekutiny, což se projeví i nárůstem namáhání interiéru matrice. Zde je nutno rozlišit, o jaký typ porézního materiálu se jedná. Existují totiž dvě varianty, přičemž v obou případech je matrice uvažována jako jediný, celistvý blok materiálu, což, vyjádřeno matematicky, znamená souvislou, otevřenou a omezenou podoblast $\Omega_s^\varepsilon \subset \Omega$.

- 1) Stejně jako matrice je i dutina, zahrnující všechny vzájemně propojené póry, tvořena jedinou, celistvou a tedy matematicky souvislou podoblastí $\Omega_f^\varepsilon \subset \Omega$ tak, že

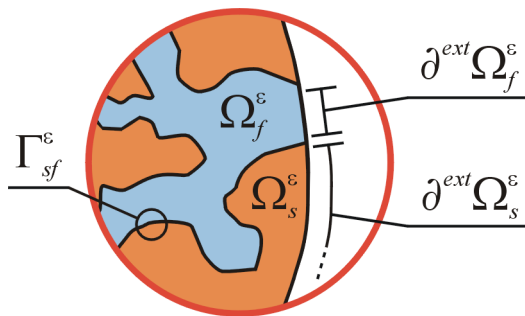
$$\Omega = \Omega_s^\varepsilon \cup \Omega_f^\varepsilon \cup \Gamma_{sf}^\varepsilon \quad ; \quad \Omega_s^\varepsilon \cap \Omega_f^\varepsilon = \emptyset \quad ; \quad \Gamma_{sf}^\varepsilon = \overline{\Omega_s^\varepsilon} \cap \overline{\Omega_f^\varepsilon}, \quad (5.1)$$

[1], [2], [4], [16], [18]. Potom je tlak v tekutině, vyplňující póry (podoblast Ω_f^ε), charakterizován jedinou skalární hodnotou p .

- 2) Některé z pórů matrice jsou uzavřené, což znamená, že tlak v tekutině, jak zachycené do těchto „pastí“, tak i v pórech komunikujících se svým okolím, může mít v každém bodě \mathbf{x} podoblasti Ω_f^ε obecně jinou, konstantní hodnotu. Rozložení tlaku v tekutině je tedy charakterizováno skalárním tlakovým polem $p(\mathbf{x})$, [4], [16], [18].

Dále se budeme zabývat případem 1), ovšem s uvažováním existence globálního tlakového gradientu a navíc za předpokladu saturace porézního prostoru tekutinou, tzv. FSPM materiálem (*fluid saturated porous medium*), [15], [17].

V rovinném případě pochopitelně není možné zobrazit podoblasti Ω_s^ε a Ω_f^ε zároveň jako souvislé. Hranice Γ_{sf}^ε představuje fázové rozhraní mezi tekutinou a matricí uvnitř oblasti Ω , viz **obr. 8**.



obr. 8: Výřez oblasti Ω se znázorněním podoblastí Ω_s^ε a Ω_f^ε , jejich fázového rozhraní Γ_{sf}^ε a vnějších hranic $\partial^{ext} \Omega_s^\varepsilon$ a $\partial^{ext} \Omega_f^\varepsilon$.

Definujme také hranice $\partial^{ext} \Omega_s^\varepsilon \subset \partial \Omega$, resp. $\partial^{ext} \Omega_f^\varepsilon \subset \partial \Omega$, [4], [16], [17], [18].

$$\partial^{ext} \Omega_s^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \setminus \Gamma_{sf}^\varepsilon = \partial \Omega_s^\varepsilon \cap \partial \Omega \quad (5.2)$$

$\partial^{ext} \Omega_s^\varepsilon$ je vnější hranice matrice, viz **obr. 8**, tzn. pevná část plochy vnějšího povrchu $\partial \Omega$ porézního tělesa Ω .

$$\partial^{ext} \Omega_f^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \setminus \Gamma_{sf}^\varepsilon = \partial \Omega_f^\varepsilon \cap \partial \Omega \quad (5.3)$$

$\partial^{ext} \Omega_f^\varepsilon$ je vnější hranice kanálků, viz **obr. 8**, jedná se tedy o vyústění kanálků na vnější povrch porézního tělesa Ω . Jinak řečeno jde o průřezy, kterými může oblast pórů Ω_f^ε vyplněných tekutinou komunikovat pomocí látkové výměny s vnějším světem (v případě jater tímto průřezem může např. být vyústění velké cévy).

5.2 Měřítko ε

Na porézní materiál lze pohlížet jako na materiál kvazi-homogenních makroskopických vlastností, které jsou přímo závislé na jeho mikroskopické vnitřní struktuře. Zavedme bezrozměrnou konstantu ε , pro niž platí $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll 1$ a kterou definujeme jako

$$\varepsilon = \frac{l_{micro}}{L_{macro}}, \quad (5.4)$$

kde l_{micro} , resp. L_{macro} je charakteristický rozměr mikroskopické, resp. makroskopické úrovně porézního materiálu, [4], [18], přičemž makroskopickou úroveň představuje oblast Ω . Číslo ε – jakési měřítko – udává potřebné (minimální) zvětšení, při jakém se mikrostruktura pro makroskopického pozorovatele prvně stává zřetelně patrnou.

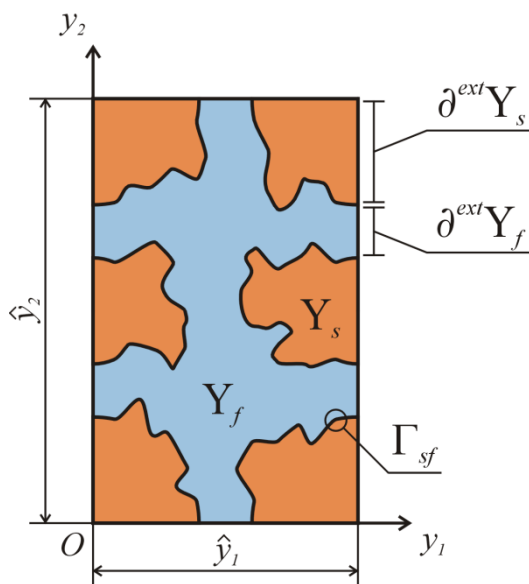
5.3 Referenční buňka Y

V souvislosti s předpokladem 4.1 se nyní omezíme pouze na takové porézní materiály, jejichž mikrostrukturu lze označit za dokonale periodickou. Pro popis periodicky porézního materiálu na mikroskopické úrovni zavádíme tzv. referenční buňku Y , vyplňující souvislou, otevřenou a omezenou oblast Y , [1], [23], která je definována v souřadnicovém systému $Oy_1y_2 \dots y_N$ a platí pro ni

$$Y = \prod_{i=1}^N (0, \hat{y}_i), \quad (5.5)$$

[5], [15], [17]. To znamená, že buňka Y má tvar N -rozměrného kvádrů s hranami o délkách \hat{y}_i pro $i = 1, \dots, N$. Podobně jako v případě makroskopické oblasti Ω sestává také oblast Y z podoblastí Y_s a Y_f , pro něž dle [1], [4], [16] a [18] platí

$$Y = Y_s \cup Y_f \cup \Gamma_{sf} \quad ; \quad Y_s \cap Y_f = \emptyset \quad ; \quad \Gamma_{sf} = \overline{Y_s} \cap \overline{Y_f}, \quad (5.6)$$



obr. 9: Periodická referenční buňka Y se znázorněním podoblastí Y_s a Y_f , jejich fázového rozhraní Γ_{sf} a vnějších hranic $\partial^{ext} Y_s$ a $\partial^{ext} Y_f$.

I vnější hranici $\partial^{ext} Y_s \subset \partial Y_s$, resp. $\partial^{ext} Y_f \subset \partial Y_f$ podoblasti Y_s , resp. Y_f definujeme na základě analogie s makroskopickou oblastí Ω , [16], [18].

$$\partial^{ext} Y_s = \partial Y_s \setminus \Gamma_{sf} = \partial Y_s \cap \partial Y \quad (5.7)$$

$$\partial^{ext} Y_f = \partial Y_f \setminus \Gamma_{sf} = \partial Y_f \cap \partial Y \quad (5.8)$$

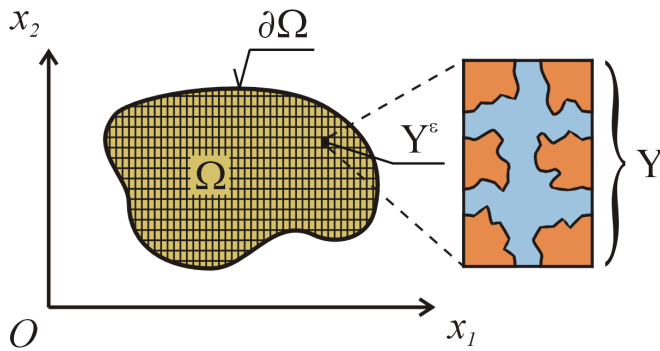
Referenční buňka Y na **obr. 9** představuje reprezentativní vzorek periodické mikrostruktury, ze které makroskopická oblast Ω sestává. To znamená, že oblast Ω je tvořena velkým počtem identických mikroskopických jednotek („dlaždic“ v případě 2D úlohy), viz **obr. 10** a **obr. 12**.

Velikost a tvar referenční buňky Y volíme obvykle na základě skutečné mikrostruktury. V tomto okamžiku však předpokládáme, že konkrétní podobu skutečné mikrostruktury neznáme

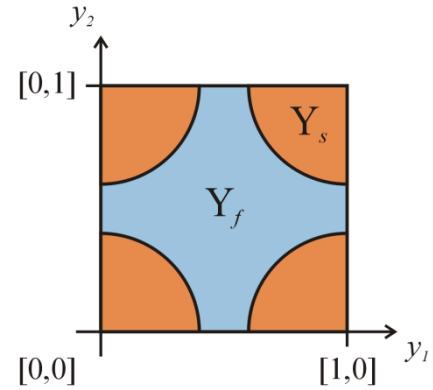
a velikost i tvar referenční buňky Y tak můžeme volit zcela libovolně.

V tom případě je výhodné definovat referenční buňku Y tvaru jednotkového čtverce (2D) či krychle (3D), viz **obr. 11**, tzn. $\hat{y}_i = 1$ pro $i = 1, \dots, N$ a tedy dle [4]

$$Y = \{\mathbf{y} ; \mathbf{y} \in (0,1)^N\}. \quad (5.9)$$



obr. 10: Makroskopická oblast Ω pokrytá periodickým rastrem skládajícím se z buněk Y^ε .



obr. 11: Referenční buňka Y jednotkového obsahu.

Míra referenční buňky Y , $|Y|$, tedy její obsah (2D) či objem (3D) pak bude mít hodnotu jedna, $|Y| = 1 [m^N]$. Se zavedením podoblastí Y_s a Y_f a oblasti Y jednotkové referenční buňky Y lze definovat poróznost ϕ materiálu, jež je podle [4], [18], [19] dána vztahem

$$\phi = \frac{|Y_f|}{|Y|}. \quad (5.10)$$

5.4 Určení polohy bodu uvnitř porézní oblasti

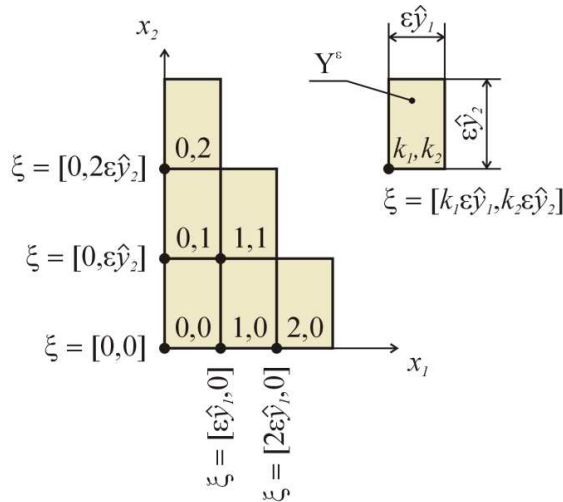
Vzájemnou souvislost mezi makroskopickou oblastí Ω a mikroskopickou referenční oblastí Y lze, jak uvádí [5], [15], matematicky zapsat vztahem

$$\Omega = \text{inter} \bigcup_{k \in \mathbb{K}_\Omega} \bar{Y}^\varepsilon(\xi), \quad (5.11)$$

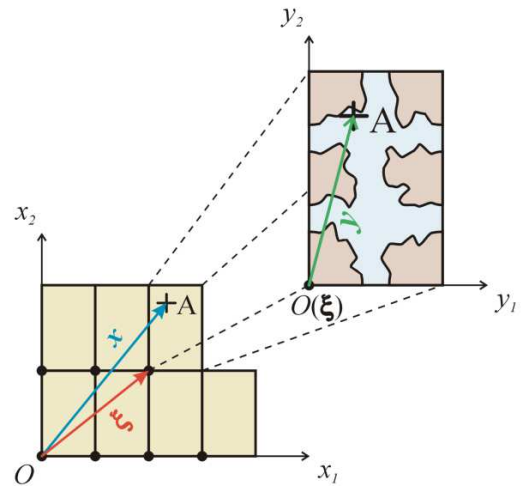
kde \bar{Y}^ε je uzávěr Y^ε , obrazu oblasti Y referenční buňky Y , adekvátně zmenšené prostřednictvím měřítka ε do podoby, v jaké skutečně tvoří stavební dílec heterogenní makroskopické oblasti Ω . $\mathbb{K}_\Omega \in \mathbb{Z}^N$ je množina celočíselných indexů takových, že dle [13] a [15] platí

$$Y^\varepsilon(\xi) = \xi + \varepsilon Y, \quad (5.12)$$

přičemž $\xi_i = k_{(i)} \varepsilon \hat{y}_i$ je i -tá makroskopická souřadnice levého spodního rohu referenční buňky Y , která se v periodické mřížce, jíž je oblast Ω diskretizována, nachází na pozici $[k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_N]$, viz **obr. 12**.



obr. 12: Systém uspořádání a popisu referenčních buněk Y^ε v periodické mřížce.



obr. 13: Nalezení globální pozice bodu A uvnitř mřížky.

Globální pozici \mathbf{x} libovolného bodu uvnitř mřížky vyjádříme pomocí souřadnic ξ uzlových bodů mřížky a lokálních mikroskopických souřadnic \mathbf{y} ; $y_i \in (0, \hat{y}_i)$ pro $i = 1, \dots, N$, viz [5], [15], [18] a na obr. 13.

$$\mathbf{x} = \varepsilon \left[\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon} \right]_Y + \varepsilon \left\{ \frac{\mathbf{y}}{\varepsilon} \right\}_Y = \xi(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad (5.13)$$

5.5 Formulace úlohy Stokesova proudění v porézní oblasti Ω

V souladu s předpokladem 4 definujeme úlohu Stokesova proudění nestlačitelné tekutiny kanálky porézní oblasti Ω .

Najděte $(p^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}))$, které splňují

$$-\nabla p^\varepsilon(\mathbf{x}) + \eta^\varepsilon \Delta \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon, \quad (5.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon, \quad (5.15)$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{sf}^\varepsilon, \quad (5.16)$$

[1], [2], [23]. Vektorová rovnice (5.14) Stokesova proudění ve směrech x_1, x_2 až x_N je doplněna o rovnici kontinuity (5.15) a Dirichletovu okrajovou podmínku (5.16), požadující nulovou rychlost tekutiny na stěnách kanálků. Vektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ je známý vektor vnějších objemových sil, který může postihnout celou řadu různých vnějších účinků, majících vliv na tok tekutiny podoblastí Ω_f^ε . Má-li $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ např. tvar

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho g \end{bmatrix}, \quad (5.17)$$

kde ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$] je hustota tekutiny a $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ velikost gravitačního zrychlení, pak je do Stokesova proudění zahrnut vliv gravitačního pole Země. Ten má význam např. v úlohách konvekce (kde gravitační síla spolu se sdílením tepla významně ovlivňují výsledné proudění) nebo v případě toku v říční síti, ve většině úloh mechaniky tekutin je ale zanedbatelný, a to, že dochází k proudění tekutiny, se děje především vlivem tlakového spádu. Avšak může se tak dít i působením jiného silového pole než gravitačního, např. elektromagnetického, v případě, že se zabýváme tečením médií specifických fyzikálních vlastností (např. magnetoreologické kapaliny). Odvození matematického modelu je provedeno zcela obecně, v následujících výpočtech však nebudeme objemovou sílu uvažovat.

Za předpokladu, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega)^N$, připouští systém (5.14) až (5.16) dle [2] jednoznačné řešení

$$p^\varepsilon \in L^2(\Omega_f^\varepsilon)/\mathbb{R} \quad ; \quad \mathbf{w}^\varepsilon \in H_0^1(\Omega_f^\varepsilon)^N, \quad (5.18)$$

kde $p^\varepsilon(\mathbf{x})$ – vzhledem k tomu, že se v rovnici (5.14) nachází v gradientu – lze určit až na aditivní konstantu. Obvykle tedy v nějakém bodu $\hat{\mathbf{x}}$ oblasti Ω_f^ε definujeme referenční hodnotu tlaku $p^\varepsilon(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \hat{p}$, zpravidla $\hat{p} = 0$, případně klademe podmínku nulovosti integrálního průměru tlaku $p^\varepsilon(\mathbf{x})$ přes danou oblast.

Jak samotné řešení (5.18), tak i oblast řešení Ω_f^ε (její tvar a geometrické uspořádání) a součinitel dynamické viskozity η^ε jsou závislé na ε . Jinak řečeno pro každé pevně dané $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots > 0$ lze najít odpovídající jednoznačné řešení $(p^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}))_{1,2,\dots}$, takže (5.18) vlastně představuje posloupnost různých řešení pro různá, pevně daná $\varepsilon > 0$, [1]. My ovšem potřebujeme najít jediné jednoznačné řešení úlohy Stokesova proudění, nezávislé na ε .

5.5.1 Poznámka ke škálování viskozity

Součinitel dynamické viskozity η^ε v rovnici (5.14) je dán vztahem

$$\eta^\varepsilon = \varepsilon^2 \eta_c, \quad (5.19)$$

kde η^ε je tabulková hodnota viskozity uvažované tekutiny a pod označením η_c zavádíme tzv. výpočetní součinitel dynamické viskozity (*computational – index c*). Volbu škálování viskozity dle (5.19) osvětluje autor [11] pomocí dimenzionální analýzy Stokesovy rovnice.

Prostřednictvím referenčních hodnot p_∞ , L_∞ a w_∞ zavedme bezrozměrný tlak p^* , bezrozměrnou perfuzní rychlost \mathbf{w}^* a bezrozměrný vektor vnějších objemových sil \mathbf{f}^* . Platí

$$p^* = \frac{p^\varepsilon}{p_\infty} \quad ; \quad \mathbf{w}^* = \frac{\mathbf{w}^\varepsilon}{w_\infty} \quad ; \quad \mathbf{f}^* = \mathbf{f} \frac{L_\infty}{p_\infty}.$$

Všechny bezrozměrné veličiny jsou řádu $\mathcal{O}(1)$, [11].

Mimoto musíme provést dimenzionální rozbor nyní dvouškálového operátoru Nabla, který do bezrozměrného tvaru převedeme s využitím referenčního délkového rozměru $L_\infty \equiv L_{macro}$, [11]. Bezrozměrné veličiny jsou jako obvykle označeny hvězdičkou.

$$\nabla^* = L_\infty \nabla = L_{macro} \nabla \quad ; \quad \nabla_x^* = L_{macro} \nabla_x \quad ; \quad \nabla_y^* = l_{micro} \nabla_y$$

Platí

$$\nabla^* = L_{macro} \nabla = L_{macro} (\nabla_x + \nabla_y) = L_{macro} \left(\frac{\nabla_x^*}{L_{macro}} + \frac{\nabla_y^*}{l_{micro}} \right) = \nabla_x^* + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y^*. \quad (5.20)$$

Zapišme nyní Stokesovu rovnici (v podobě bez součinitele ε^2 u členu s viskozitou η) pomocí bezrozměrných a referenčních veličin.

$$-\nabla^* p^* \frac{p_\infty}{L_\infty} + \nabla^* \cdot \nabla^* \mathbf{w}^* \frac{\eta w_\infty}{L_\infty^2} + \mathbf{f}^* \frac{p_\infty}{L_\infty} = \mathbf{0} \quad (5.21)$$

Vynásobením podílem L_∞/p_∞ uvedeme rovnici (5.21) do bezrozměrného tvaru.

$$-\nabla^* p^* + \nabla^* \cdot \nabla^* \mathbf{w}^* \frac{\eta w_\infty}{\underbrace{L_\infty p_\infty}_{\lambda^*}} + \mathbf{f}^* = \mathbf{0} \quad (5.22)$$

Pro určení řádu bezrozměrného čísla λ^* navrhuje autor [11] použít vztah (3.1) vyjadřující Darcyho zákon, upravený pomocí referenčních veličin, kde k [m²] nyní označuje vlastní permeabilitu.

$$w_\infty = \frac{k p_\infty}{\eta L_\infty} \quad (5.23)$$

Permeabilita k je funkcí pouze geometrie mikrostruktury porézního materiálu, čemuž odpovídá její jednotka [m²]. Díky přímé souvislosti permeability s geometrií mikrostruktury tak platí $k \sim l_{micro}^2$. Dosadíme z (5.23) do čísla λ^* a pokusme se odvodit řád tohoto čísla.

$$\lambda^* = \frac{\eta w_\infty}{L_\infty p_\infty} = \frac{\eta k}{L_\infty \eta L_\infty} \sim \frac{l_{micro}^2}{L_\infty^2} = \frac{l_{micro}^2}{L_{macro}^2} = \varepsilon^2 \Rightarrow \mathcal{O}(\lambda^*) = \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (5.24)$$

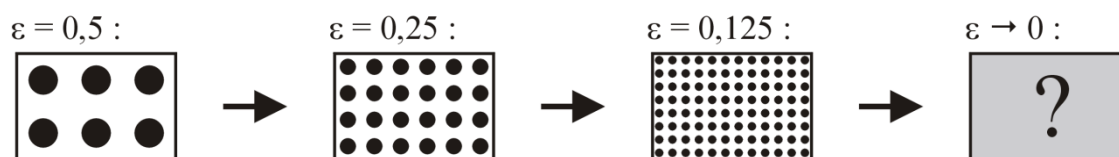
Výsledek (5.24) dimenzionální analýzy Stokesovy rovnice v bezrozměrném tvaru potvrzuje skutečnost, že součinitel dynamické viskozity η^ε v rovnici (5.14) je řádu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Důvodem pro škálování viskozity koeficientem ε^2 je, jak píše Allaire v [1], aby rychlost $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x})$ měla pro $\varepsilon \rightarrow 0$ nenulovou limitu. Allaire krom toho podává také náležité fyzikální vysvětlení. Říká, že právě nízká viskozita řádu $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ je v rovnováze s třením částic tekutiny na fázovém rozhraní, vynuceném podmínkou (5.16) nulové rychlosti na tomto rozhraní.

5.6 Homogenizace – asymptotická analýza systému lineárních parciálních diferenciálních rovnic

Mějme úlohu (viz např. výše popsanou úlohu Stokesova proudění), danou systémem lineárních parciálních diferenciálních rovnic (PDR), na silně heterogenní oblasti s periodickou mikrostrukturou. Jedná se o problém obecně víceškálového modelování, přičemž v dalším budeme předpokládat model dvouškálový, charakterizovaný jeho mikro- a makrostrukturou. Chování modelu je ovlivněno malým parametrem ε . Hledáme způsob, jakým dvouškálový model zjednodušit (což zužitkujeme především při numerickém modelování) a přitom do jeho makroskopického chování promítnout mikrostrukturální vlastnosti.

Nástrojem je tzv. asymptotická analýza systému PDR, [15]. Její zásadní myšlenka tkví v tom, že k daným vztahům systému, jako je (5.14) až (5.16), najdeme limitní PDR pro $\varepsilon \rightarrow 0$. Výsledkem je tzv. homogenizovaný makroskopický model popsáný PDR s efektivními koeficienty, které v tomto zjednodušeném modelu zastupují vliv mikrostrukturálních heterogenit na chování homogenizovaného modelu.

Pro ilustraci si představme periodicky porézní materiál s kulovými póry, jejichž průměr je v poměru k celkovým rozměrům tělesa z porézního materiálu dán bezrozměrným parametrem ε . S tím, jak se velikost ε blíží nule, zmenšují se póry a heterogenní charakter materiálu je tak při zběžném pohledu stále méně patrný, až pro $\varepsilon \rightarrow 0$ je dosaženo stavu, kdy se původně heterogenní materiál navenek jeví jako homogenní, viz *obr. 14*. Získali jsme homogenizovaný, tedy fiktivní kvazi-homogenní materiál, jehož mechanické vlastnosti se však od mechanických vlastností materiálu skeletu heterogenního porézního média liší. Je-li tuhost skeletu dána symetrickým tenzorem \mathbb{D} čtvrtého řádu, pak homogenizovaný materiál je popsán symetrickým tenzorem efektivní tuhosti, v této práci po vzoru [4], [16], [18] a [19] značeným \mathbb{A}^H .



obr. 14: Ilustrace procesu homogenizace heterogenního materiálu.

Lze namítnout, že homogenizovaný model neodpovídá žádnému skutečnému, neboť asymptotickou analýzou získané vztahy jsou pro parametr $\varepsilon \rightarrow 0$, zatímco kterýkoli reálný model je řešen na heterogenní oblasti s konečnou velikostí periody, εY ; $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 > 0$. Avšak čím silněji heterogenní materiál (zde podoblast Ω_f^ε , na které hledáme jednoznačné řešení), tím více se ε_0 blíží nule a tím lépe popisují limitní vztahy pro $\varepsilon \rightarrow 0$ skutečnost. S tímto předpokladem – existencí silně heterogenní, porézní výpočetní oblasti Ω – dále pracujeme.

5.7 Odvození homogenizovaného modelu pomocí metody asymptotických rozvojų

V odborné literatuře lze najít několik přístupů k homogenizaci PDR. Sanchez-Palencia, [23], uvádí metodu asymptotických rozvojų, Allaire, [1] a [2], metodu dvouškálové konvergence, zatímco Rohan et al., [15], [16] a [17], rozvíjejí tzv. *unfolding method*. V této práci budeme PDR úlohy Stokesova proudění homogenizovat pomocí metody asymptotických rozvojų.

5.7.1 Asymptotický rozvoj rapidně oscilující funkce

Funkce s indexem ε , tak, jak je zavádíme v rovnicích (5.14) až (5.16), jsou tzv. rapidně oscilující, přičemž funkční hodnoty takové funkce oscilují v prostoru s frekvencí rostoucí úměrně tomu, jak se zmenšuje poměr charakteristické délky l_{micro} mikroskopické periody Y^ε k charakteristické délce L_{macro} makroskopické oblasti Ω , vyjádřený, jak již bylo zmíněno, právě konstantou ε . Perioda zmíněných oscilací funkce je pochopitelně rovna ε -násobku délky strany referenční buňky Y a, jak je zřejmé, jsou tyto oscilace závislé na mikroskopické proměnné \mathbf{y} , kterou označujeme jako „rychlou“. To znamená, že každá funkce $u^\varepsilon(\mathbf{x})$, která je funkcí „pomalé“ proměnné \mathbf{x} , je inherentně závislá také na proměnné \mathbf{y} , ve které je tzv. Y -periodická, [1], [23], přičemž mezi prostorovými proměnnými \mathbf{x} a \mathbf{y} panuje vzájemný vztah

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}, \quad (5.25)$$

[1], [23]. Metoda asymptotických rozvojų předpokládá existenci nekonečné řady dvouškálových funkcí $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, tvořících koeficienty polynomu parametru ε , takže i -tý člen této řady je dán předpisem $\varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, přičemž horní index i značí mocninu parametru ε a spodní index i funkci u_i přisuzuje i -tou pozici v nekonečné řadě parametru ε , v kterou je funkce $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ rozvinuta. V tomto jediném případě činíme výjimku z pravidla sumace vázaných indexů dle Einsteinovy konvence, v této práci jinak uplatňovaného.

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots = \sum_{i=0}^{+\infty} \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (5.26)$$

[13], [23]. Funkce $u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; $i \in \mathbb{Z}_0^+$ je hladká reálná funkce proměnné $\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, Y -periodická v $\mathbf{y} \in Y_f$, nezávislá na ε , [23]. Předpis (5.26) lze modifikovat následujícím způsobem:

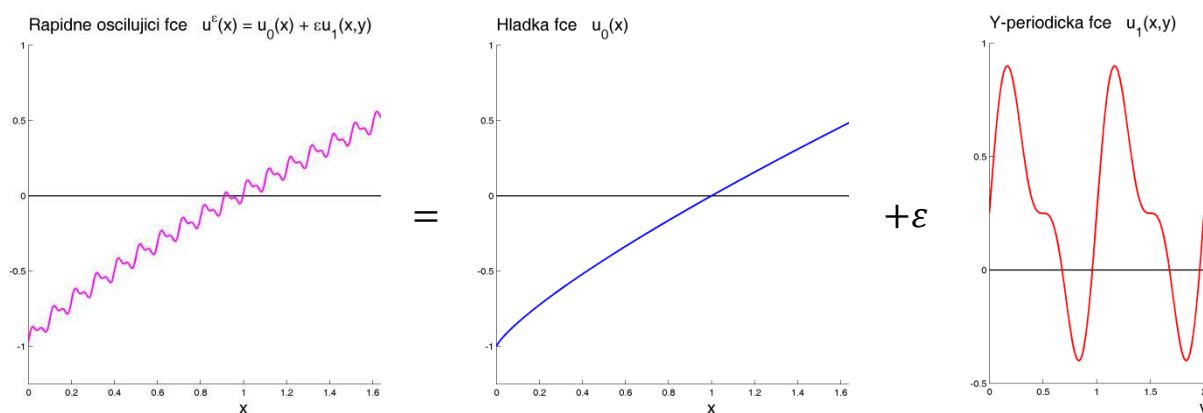
$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{+\infty} \varepsilon^i u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \text{ případně } u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (5.27)$$

kde $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ značí zbylé členy řádu ε^2 a vyšších celočíselných mocnin ε rozvoje.

Z (5.27)₁ je zřejmé, že rapidně oscilující funkce $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ v zásadě sestává z členu $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ řádu $\mathcal{O}(1)$, k němuž je přičten nekonečný součet členů řádů $\mathcal{O}(\varepsilon^i)$; $i = 1, 2, \dots$. V řadě aplikací, jako např. v úlohách sdílení tepla, difuze látky či v úloze Stokesova proudění, se navíc ukazuje, že nultý člen $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ nekonečné řady, v kterou lze skalární funkci $u^\varepsilon(\mathbf{x})$ rozvinout, je pouze funkcí „pomalé“ proměnné \mathbf{x} a na \mathbf{y} vůbec nezávisí. Můžeme tedy psát

$$u^\varepsilon(\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) + \varepsilon u_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \quad (5.28)$$

Omezíme-li obě prostorové proměnné, \mathbf{x} a \mathbf{y} , na jednodimenzionální případ, pak lze vztah (5.28) graficky interpretovat jako průběh hladké funkce $u_0(x)$, na jejíž funkční hodnoty jsou superponovány Y -periodické fluktuace funkce $u_1(x, y)$, závislé na y , násobené malým parametrem ε , viz *obr. 15*.



obr. 15: Ilustrační příklad rapidně oscilující skalární funkce $u^\varepsilon(x)$.

5.7.2 Aplikace homogenizační metody asymptotických rozvoje na systém rovnic Stokesova proudění

V souladu s předpokladem (5.26) rozvineme neznámé funkce $p^\varepsilon(\mathbf{x})$, $\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x})$ úlohy Stokesova proudění do podoby asymptotických rozvoje podle [23].

$$p^\varepsilon(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 p_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (5.29)$$

$$\mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^2 \mathbf{w}_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \quad (5.30)$$

Nyní na asymptotické rozvoje (5.29) a (5.30) aplikujeme operátor gradientu ∇ a divergence $\nabla \cdot$, abychom tak získali konkrétní členy, vyskytující se v rovnicích systému (5.14) až (5.16). Mějme při tom na paměti, že i operátor gradientu je operátor proměnných \mathbf{x} a \mathbf{y} ve tvaru

$$\nabla = \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y. \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned}\nabla p^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \nabla_x p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \nabla_x p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_y p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ \nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \nabla_x \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \nabla_x \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_y \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots \\ \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \nabla_x \cdot \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon \nabla_x \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots\end{aligned}$$

Na vektor perfuzní rychlosti \mathbf{w}^ε je v rovnici (5.14) aplikován Laplaceův operátor. Operaci $\Delta \mathbf{w}^\varepsilon$ můžeme zapsat také jako $\text{div grad } \mathbf{w}^\varepsilon = \nabla \cdot \nabla \mathbf{w}^\varepsilon$.

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \nabla \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) \\ \Delta \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) &= \Delta_{xx} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \nabla_x \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_x \cdot \nabla_y \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_{yy} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots\end{aligned}$$

Získané rozvoje dosadíme do příslušných PDR systému (5.14) až (5.16).

(5.14):

$$\begin{aligned}- \left(\nabla_x p_0 + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y p_0 + \varepsilon \nabla_x p_1 + \nabla_y p_1 + \dots \right) + \\ + \eta_c \left(\varepsilon^2 \Delta_{xx} \mathbf{w}_0 + \varepsilon \nabla_y \cdot \nabla_x \mathbf{w}_0 + \varepsilon \nabla_x \cdot \nabla_y \mathbf{w}_0 + \Delta_{yy} \mathbf{w}_0 + \dots \right) + \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon\end{aligned}\tag{5.32}$$

(5.15):

$$\nabla_x \cdot \mathbf{w}_0 + \frac{1}{\varepsilon} \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0 + \varepsilon \nabla_x \cdot \mathbf{w}_1 + \nabla_y \cdot \mathbf{w}_1 + \dots = 0 \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon\tag{5.33}$$

(5.16)

$$\mathbf{w}_0 + \varepsilon \mathbf{w}_1 + \varepsilon^2 \mathbf{w}_2 + \dots = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{sf}^\varepsilon\tag{5.34}$$

Nulovost nekonečných součtů (5.32) až (5.34) bude splněna právě tehdy, budou-li se nule rovnat všechny dílčí součty koeficientů určité mocniny ε . Pro koeficienty dvou nejnižších mocnin ε , ε^{-1} a ε^0 , tedy musí platit následující relace, [23].

ε^{-1} :

$$z \text{ (5.32): } \nabla_y p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \text{v } Y_f \Rightarrow p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p_0(\mathbf{x})\tag{5.35}$$

$$z \text{ (5.33): } \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{v } Y_f\tag{5.36}$$

Z (5.35) je ihned zřejmé, že nultý člen $p_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ asymptotického rozvoje tlaku $p^\varepsilon(\mathbf{x})$ je pouze funkcí \mathbf{x} , jak bylo předesláno. Označme tuto funkci jednoduše jako $p(\mathbf{x})$, neboť se jedná o funkci popisující rozložení „klasického“ makroskopického tlaku. Rovnost (5.36) říká, že

nultý člen $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ rozvoje perfuzní rychlosti splňuje rovnici kontinuity v mikroskopické proměnné \mathbf{y} .

ε^0 :

$$z \text{ (5.32): } -\nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{y}} p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta_c \Delta_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \forall Y_f \quad (5.37)$$

$$z \text{ (5.33): } \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall Y_f \quad (5.38)$$

Předtím, nežli provedeme analýzu rovnic (5.37) a (5.38), složených z odpovídajících koeficientů nulté mocniny ε , zavedeme tzv. operátor střední hodnoty, [23].

Mějme reálnou funkci $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ proměnných \mathbf{x} a \mathbf{y} , Y -periodickou v \mathbf{y} . Aplikujme na tuto funkci zmíněný operátor střední hodnoty, [23].

$$\tilde{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_Y \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (5.39)$$

Výsledkem je funkce $\tilde{\varphi}(\mathbf{x})$ makroskopické proměnné \mathbf{x} , ustředěná v \mathbf{y} , která na \mathbf{y} zřejmě nezávisí.

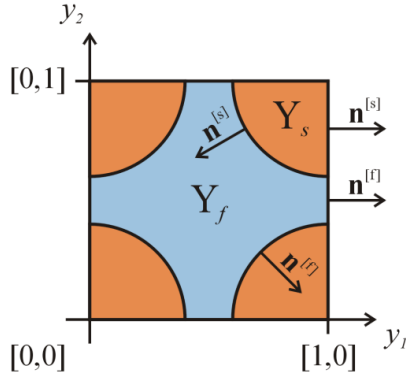
Podívejme se nejprve blíže na vztah (5.38) a provedme jeho ustředění v \mathbf{y} , přičemž díky platnosti (5.34) je každá funkce $\mathbf{w}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$; $i \in \mathbb{Z}_0^+$ na rozhraní Γ_{sf} rovna nule. V souladu s touto okrajovou podmínkou lze v $Y \setminus Y_f = Y_s \cup \Gamma_{sf}$ položit $\mathbf{w}_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, díky čemuž můžeme při středění v \mathbf{y} integrovat nikoli přes celou oblast Y , ale pouze přes podoblast Y_f , [23].

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0 \quad (5.40)$$

Na druhý integrál v (5.40) použijeme Gauss-Ostrogradského větu.

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{\partial Y_f} \mathbf{n}^{[f]} \cdot \mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = 0, \quad (5.41)$$

[23], kde $\mathbf{n}^{[f]}$ je vektor vnější normály k hranici ∂Y_f oblasti tekutiny Y_f , viz *obr. 16*.



obr. 16: Referenční buňka Y s vyznačenými vektory jednotkových vnějších normál k podoblastem Y_s a Y_f .

Integrál (5.41) po hranici $\partial Y_f = \Gamma_{sf} \cup \partial^{ext} Y_f$ je nulový díky platnosti (5.34) a Y -periodicitě funkce $\mathbf{w}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na $\partial^{ext} Y_f$. Tím se vztah (5.40) redukuje na

$$\nabla_x \cdot \underbrace{\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}}_{\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x})} = \nabla_x \cdot \tilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (5.42)$$

kde $\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv \tilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x})$ označuje perfuzní rychlost ustředěnou v \mathbf{y} . (5.42) představuje rovnici kontinuity pro proměnnou $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ a zároveň rovnici tzv. makroskopické úlohy, [23], jak uvidíme později.

Shrneme-li dosavadní poznatky o funkci $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, můžeme konstatovat, že se jedná o reálnou N -rozměrnou funkci z Hilbertova prostoru

$$W = \left\{ \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega; \mathbf{H}_{\#}^1(Y)); \nabla_y \cdot \mathbf{w}_0 = 0 \text{ v } \Omega \times Y_f; \nabla_x \cdot \tilde{\mathbf{w}}_0 = 0 \text{ v } \Omega; \right. \\ \left. \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{w}}_0 = 0 \text{ na } \partial\Omega_{wall} \right\}, \quad (5.43)$$

kde $\partial\Omega_{wall}$ představuje část hranice $\partial\Omega$ tvořenou neprostupnou stěnou.

Nyní se věnujme rovnici (5.37), kterou nejprve upravíme tak, že na jedné straně rovnice soustředíme členy závislé pouze na \mathbf{x} ,

$$\nabla_y p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \eta_c \Delta_{yy} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x}), \quad (5.44)$$

načež rovnici zapíšeme ve slabé formulaci. Za tím účelem ji vynásobíme testovací funkcí $\mathbf{v} \in V$, kde

$$V = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in L^2(\Omega; \mathbf{H}_{\#}^1(Y)); \nabla_y \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ v } \Omega \times Y; \nabla_x \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ v } \Omega; \right. \\ \left. \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \text{ na } \partial\Omega \right\} \quad (5.45)$$

je Hilbertův prostor všech testovacích funkcí, nulových na rozhraní Γ_{sf} , jež splňují rovnici kontinuity (5.42) v proměnné \mathbf{x} i (5.36) v \mathbf{y} , v které jsou navíc Y -periodické, [1], [23], a zintegrujeme přes oblast Y referenční buňky Y . Avšak díky skutečnosti, že testovací funkci \mathbf{v} vybíráme z prostoru V , můžeme v $Y \setminus Y_f$, stejně jako v případě perfuzní rychlosti \mathbf{w}_0 , položit $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$, díky čemuž jsou následující integrály v podoblasti $Y \setminus Y_f$ nulové a my tak můžeme integraci provést pouze přes podoblast Y_f .

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_y p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} - \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \eta_c \Delta_{yy} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} \quad (5.46)$$

Díky linearitě rovnice (5.46) předpokládáme její řešení $(p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ ve tvaru

$$p_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \pi^i(\mathbf{y}), \quad (5.47)$$

$$\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}), \quad (5.48)$$

kde $\pi^i(\mathbf{y})$ a $\boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y})$ jsou tzv. korektorové funkce, které jsou řešením následující mikroskopické úlohy v oblasti Y_f referenční buňky Y .

5.7.3 Mikroúloha Stokesova proudění

Hledáme $(\pi^i(\mathbf{y}), \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}))$, pro které podle [1] a [2] platí

$$\nabla_y \pi^i(\mathbf{y}) - \Delta_{yy} \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) = \mathbf{e}^i \quad \text{v } Y_f, \quad (5.49)$$

$$\nabla_y \cdot \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) = 0 \quad \text{v } Y_f, \quad (5.50)$$

$$\boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) = \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{sf}, \quad (5.51)$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \pi^i [\text{m}], \boldsymbol{\omega}^i [\text{m}^2] \quad \dots \quad Y\text{-periodické.}$$

Pravá strana systému (5.49) až (5.51), který je stejného tvaru jako výchozí problém (5.14) až (5.16), jen s tím rozdílem, že se nyní jedná o rovnice v bezrozměrném tvaru a s neznámými veličinami v podobě korektorů π^i a $\boldsymbol{\omega}^i$, je tvořena jednotkovým vektorem \mathbf{e}^i , který má pro $i = 1, 2, 3$ (ve 3D) podobu

$$\mathbf{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (5.52)$$

Jde v podstatě o bezrozměrné jednotkové zatížení v i -tém směru pro $i = 1, \dots, N$. Proč je zatížení v rovnici (5.49) mikroúlohy zastoupeno právě jednotkovým vektorem? Otázku snadno zodpovíme s pomocí rovnice (5.44), do které dosadíme z (5.47) a (5.48) za p_1 a \mathbf{w}_0 .

$$\nabla_y \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \pi^i(\mathbf{y}) - \eta_c \Delta_{yy} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x}),$$

po úpravě

$$\left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \nabla_{\mathbf{y}} \pi^i(\mathbf{y}) - \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \omega^i(\mathbf{y}) = \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \mathbf{e}^i. \quad (5.53)$$

Je zřejmé, že rozdíl v hranaté závorce je pouze funkcí \mathbf{x} , zatímco ostatní proměnné závisejí čistě na \mathbf{y} . Za předpokladu, že rozdíl v hranaté závorce je různý od nuly, jím můžeme rovnici (5.53) vydělit a získat tak již známý vztah (5.49).

Výpočet mikroúlohy (5.49) až (5.51) probíhá vždy pro konkrétní zatížení \mathbf{e}^i , přičemž tímto způsobem postupně získáme korektory π^i a ω^i pro všechna $i = 1, \dots, N$.

5.7.4 Odvození makroúlohy Stokesova proudění

Vraťme se k rovnici (5.46). Druhý integrál na její levé straně upravíme integrací po částech a využijeme při tom skutečnosti, že testovací funkce \mathbf{v} je na rozhraní Γ_{sf} nulová a na $\partial^{ext} Y_f$ Y -periodická.

$$\int_{Y_f} \Delta_{\mathbf{y}\mathbf{y}} \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} = \int_{\partial Y_f} \mathbf{n}^{[f]} \cdot \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{v} dS_{\mathbf{y}} - \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_0 : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} d\mathbf{y} = - \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_0 : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} d\mathbf{y}, \quad (5.54)$$

kde $dS_{\mathbf{y}}$ diferenciál hraniční plochy vyjádřený v proměnné \mathbf{y} . Díky faktu, že $\mathbf{v} \in V$, je integrál po hranici ∂Y_f v (5.54) roven nule.

Po dosazení (5.54) do (5.46) získáme

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} p_1 \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \eta_c \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{w}_0 : \nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{v} d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y}. \quad (5.55)$$

Integrací per partes upravíme také první integrál rovnice (5.46), obsahující gradient mikroskopických fluktuací tlaku.

$$\int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} p_1 \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} = \int_{\partial Y_f} p_1 \mathbf{n}^{[f]} \cdot \mathbf{v} dS_{\mathbf{y}} - \int_{Y_f} p_1 \nabla_{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{y} = 0 \quad (5.56)$$

Rozdíl integrálů v (5.56) je díky platnosti Gauss-Ostrogradského věty roven nule, což zároveň potvrzují i vlastnosti testovací funkce \mathbf{v} , viz (5.45).

Na základě předchozích úprav můžeme integrální rovnici (5.46) zapsat ve tvaru

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_y \mathbf{w}_0 : \nabla_y \mathbf{v} dy = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v} dy. \quad (5.57)$$

Ze vztahu (5.57) lze získat řešení dvouškálové perfuzní rychlosti $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Je zřejmé, že závisí na vektoru vnějších objemových sil $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ a gradientu tlaku $\nabla_x p(\mathbf{x})$, což jsou makroskopické veličiny závislé pouze na \mathbf{x} .

V (5.57) nyní za \mathbf{w}_0 dosadíme z (5.48).

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \nabla_y \omega^i(\mathbf{y}) : \nabla_y \mathbf{v} dy = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v} dy \quad (5.58)$$

Integrál na pravé straně rovnice (5.58) poněkud upravíme,

$$\int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} [\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})] \cdot \mathbf{v} dy = \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{v} dy,$$

a dosadíme zpět do (5.58), přičemž $\mathbf{v} \equiv \omega^j(\mathbf{y})$.

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \nabla_y \omega^i : \nabla_y \omega^j dy = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \mathbf{e}^i \cdot \omega^j dy \quad (5.59)$$

Vraťme se na okamžik k definici perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$, ustředěné v \mathbf{y} , o níž byla řeč v bodě 5.7.2. Dle (5.42) platí

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{w}}_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy.$$

Za $\mathbf{w}_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dosadíme z (5.48),

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \omega^i(\mathbf{y}) dy,$$

a veličiny závislé na \mathbf{x} vysuňme před integrál.

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (5.60)$$

Vynásobíme-li vektor $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ skalárně jednotkovým vektorem \mathbf{e}^j , je výsledkem průmět vektoru perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ do směru daného vektorem \mathbf{e}^j , tedy složka $w_j(\mathbf{x})$. Aplikujme na (5.60).

$$w_j(\mathbf{x}) = \mathbf{w}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^j = \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}^j d\mathbf{y}.$$

Skalární součin je komutativní, a proto můžeme pro složku $w_j(\mathbf{x})$ vektoru perfuzní rychlosti psát

$$w_j(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_c} \left[f_i(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right] \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^j \cdot \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.61)$$

Zaměňme index i za j a pišme pro i -tou složku $w_i(\mathbf{x})$ vektoru perfuzní rychlosti

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_c} \left[f_j(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right] \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^j(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (5.62)$$

kde zavedeme homogenizovaný tenzor permeability \mathbf{K}^H , jehož složku K_{ij}^H vypočítáme z definičního vztahu

$$K_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^j(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.63)$$

Homogenizovaný tenzor permeability \mathbf{K}^H je symetrický, pozitivně definitní tenzor druhého řádu, [1], [2] a [23]. Porovnáním (5.61) a pravé strany (5.59) zjistíme, že odpovídající integrály přes podoblast Y_f jsou navzájem transponované. Díky symetričnosti K_{ij}^H jsou však sobě rovné, z čehož vyplývá, že složku K_{ij}^H tenzoru permeability můžeme podle [1], [2] vypočítat dvěma způsoby.

$$K_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^j d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\omega}^i : \nabla_{\mathbf{y}} \boldsymbol{\omega}^j d\mathbf{y}; \quad i, j = 1, \dots, N \quad (5.64)$$

Složku K_{ij}^H tenzoru permeability budeme pro jednoduchost zapisovat jako bilineární formu

$$K_{ij}^H = (\nabla \omega^i, \nabla \omega^j)_{Y_f}. \quad (5.65)$$

Se znalostí homogenizovaného tenzoru permeability K_{ij}^H upravíme rovnici (5.62) na

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{K_{ij}^H}{\eta_c} \left[f_j(\mathbf{x}) - \frac{\partial p(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right], \quad (5.66)$$

což je konečná podoba vzorce pro výpočet složky vektoru perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$. Jak je zřejmé, přechází (5.66) při $f_j = 0$ na vzorec vyjadřující Darcyho zákon, viz (3.1). Tím jsme odvodili poslední vztah potřebný pro zformulování homogenizované makroúlohy Stokesova proudění.

Hledáme $(p(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$, jež splňují

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})) \quad \text{v } \Omega, \quad (5.67)$$

$$\nabla_x \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{v } \Omega, \quad (5.68)$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \quad (5.69)$$

[1], [2]. V dalším průběhu práce předpokládáme, že pro vektor vnějších objemových sil platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

5.8 Shrnutí poznatků kapitoly 5

Na závěr kapitoly 5 shrňme poznatky, kterých jsme prozatím dosáhli. Nástrojem matematického modelování na silně heterogenních, periodicky uspořádaných oblastech je homogenizace, jejímž základním principem je tzv. asymptotická analýza PDR, popisujících daný matematický model. K odvození asymptotických, jinak řečeno limitních vztahů pro $\varepsilon \rightarrow 0$, kde ε je malý parametr, dávající do poměru charakteristické délky referenční mikroskopické oblasti Y a makroskopické oblasti Ω , existuje několik metod. Výsledkem asymptotické analýzy je separace původně dvouškálového modelu na dvě samostatné úlohy. Nejprve je nutno vyřešit mikroúlohu na oblasti Y referenční buňky Y a ze získaných korektorových funkcí sestavit efektivní homogenizované koeficienty, které jsou následně použity ve výpočtu makroúlohy na oblasti Ω .

Připomeňme na tomto místě výchozí matematický systém PDR, modelující Stokesovo proudění v kanálcích porézní oblasti Ω .

$$\begin{aligned} -\nabla p^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \eta_c \Delta \mathbf{w}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon \\ \nabla \cdot \mathbf{w}^\varepsilon &= 0 \quad \text{v } \Omega_f^\varepsilon \\ \mathbf{w}^\varepsilon &= \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{sf}^\varepsilon \end{aligned}$$

Pomocí metody asymptotických rozvoju byla odvozena mikroúloha pro výpočet korektorů π^i a $\boldsymbol{\omega}^i$, z kterých byl sestaven tenzor permeability K_{ij}^H , následně dosazený do makroúlohy ve tvaru odpovídajícímu vzorci Darcyho zákona, viz níže umístěné schéma výpočtu.

1. mikroúloha:

$$\begin{aligned} \nabla_y \pi^i(\mathbf{y}) - \Delta_{yy} \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) &= \mathbf{e}^i \quad \text{v } Y_f \\ \nabla_y \cdot \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) &= 0 \quad \text{v } Y_f \\ \boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}) &= \mathbf{0} \quad \text{na } \Gamma_{sf} \\ \mathbf{y} \rightarrow \pi^i, \boldsymbol{\omega}^i &\dots \text{ Y-periodické} \end{aligned}$$



2. efektivní koeficient:

$$K_{ij}^H = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^i \cdot \boldsymbol{\omega}^j d\mathbf{y} = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_y \boldsymbol{\omega}^i : \nabla_y \boldsymbol{\omega}^j d\mathbf{y}$$



3. makroúloha:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \nabla_x p(\mathbf{x})) \quad \text{v } \Omega \\ \nabla_x \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{v } \Omega \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \end{aligned}$$

6 Testovací úloha Stokesova proudění

V této kapitole jsou prezentovány výsledky numerických výpočtů 2D testovací úlohy matematického modelu homogenizovaného Stokesova proudění, který byl odvozen v kapitole 5 a následně implementován do numerického řešiče *SfePy*. Za účelem prozkoumání vlivu geometrie mikrostruktury na makroskopické chování modelu jsou výpočty provedeny pro několik specifických variant 2D geometrie referenční buňky Y , navíc s různými okrajovými podmínkami 2D makroúlohy na homogenizované oblasti Ω . Nakonec je proveden ověřovací výpočet s vybranou 3D geometrií referenční buňky Y a homogenizované oblasti Ω .

6.1 Implementace matematického modelu

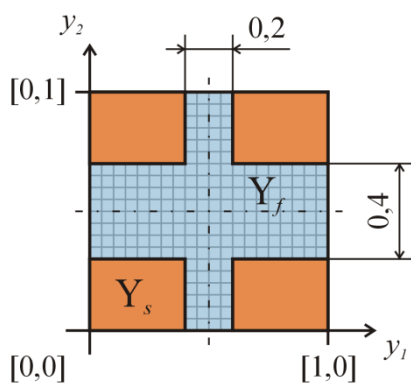
SfePy je výpočetní software založený na metodě konečných prvků. Rovnice a vztahy, které chceme implementovat do tohoto software, tak musíme nejprve vyjádřit ve slabé formulaci.

6.1.1 Mikroúloha na referenční buňce Y & sestavení tenzoru permeability

Stokesovu rovnici (5.49) vynásobíme skalárně vektorovou testovací funkcí $\mathbf{v} \in V$, viz (5.45), zatímco rovnici kontinuity (5.50) násobíme skalární testovací funkcí $q \in H_{\#}^1(Y_f)$.

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_y \pi^i \cdot \mathbf{v} dy + \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \nabla_y \boldsymbol{\omega}^i : \nabla_y \mathbf{v} dy = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{v} dy \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (6.1)$$

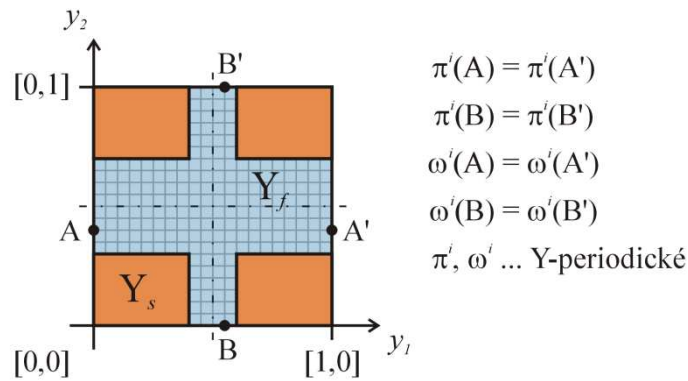
$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_f} (\nabla_y \cdot \boldsymbol{\omega}^i) q dy = 0 \quad \forall q \in H_{\#}^1(Y_f) \quad (6.2)$$



obr. 17: Referenční buňka Y v geometrickém uspořádání varianty č. 8 a se schematicky naznačenou diskretizací podoblasti Y_f .

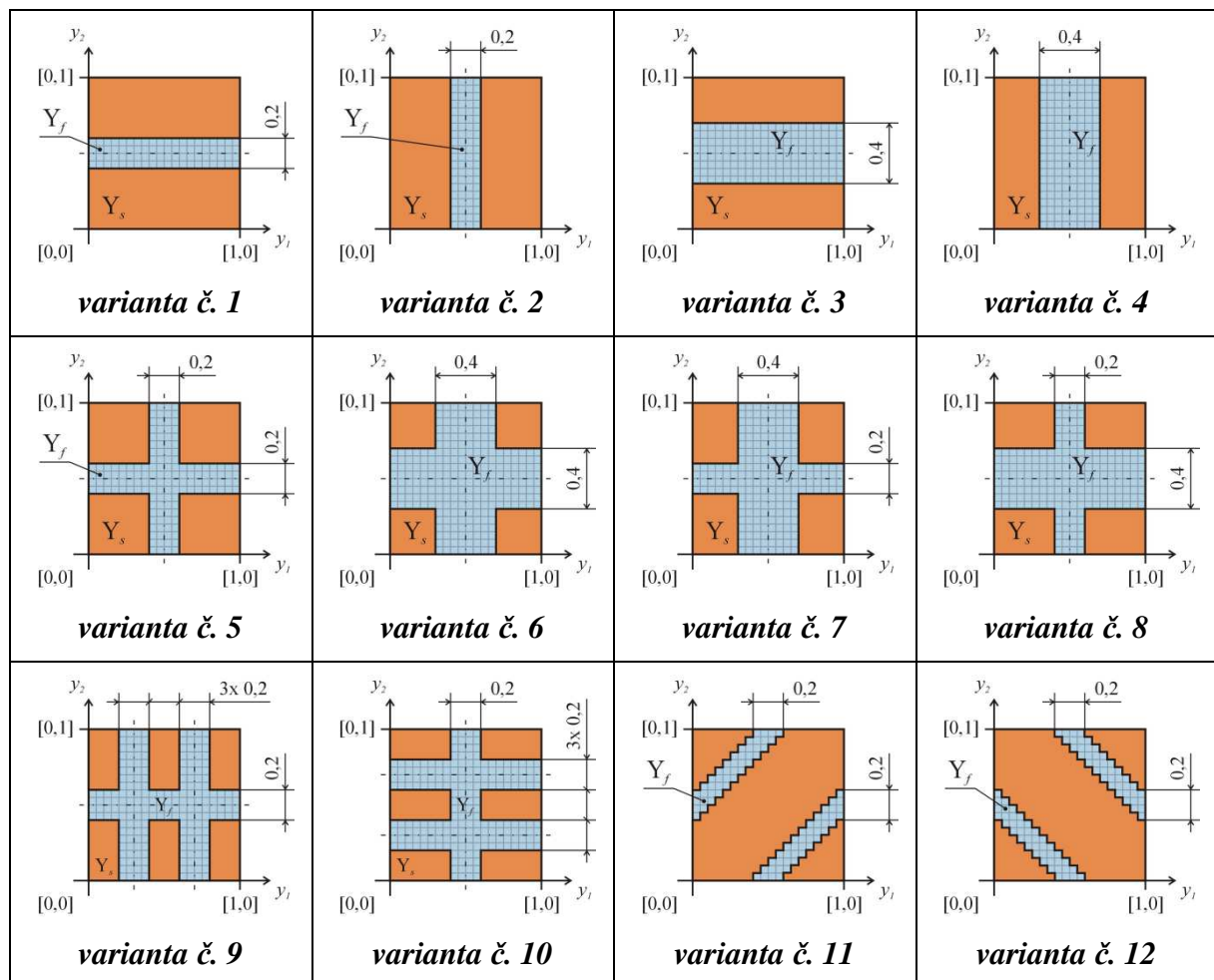
Rovnice (6.1) a (6.2) řešíme nejprve na podoblasti Y_f rovinné referenční buňky Y tvaru jednotkového čtverce, diskretizované sítí konečných prvků. Podoblast Y_f má např. ve variantě č. 8 podobu pravoúhlého kříže s nestejně širokými rameny, viz **obr. 17**.

Přidáme okrajové podmínky mikroúlohy. Díky Y -periodicitě jsou hodnoty korektorů π^i a $\boldsymbol{\omega}^i$ v odpovídajících si bodech protilehlých stran shodné, jak ukazuje **obr. 18**. Na rozhraní Γ_{Sf} musí být dále splněna okrajová podmínka (5.51), požadující $\boldsymbol{\omega}^i = \mathbf{0}$. A konečně zadáváme podmínku nulového integrálního průměru $\bar{\pi}_0^i = \int_{Y_f} \pi^i(\mathbf{y}) dy = 0$ korektoru π^i na podoblasti Y_f , tak abychom získali jednoznačné řešení úlohy.



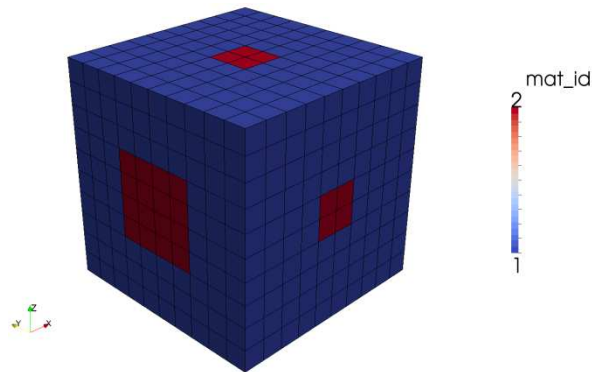
obr. 18: Znárodnění periodických okrajových podmínek Y -periodických korektorových funkcí $\pi^i(\mathbf{y})$ a $\omega^i(\mathbf{y})$.

Rovinná úloha (6.1) a (6.2) s výše popsanými periodickými i neperiodickými okrajovými podmínkami je řešena pro následující varianty 2D geometrie podoblasti Y_f :

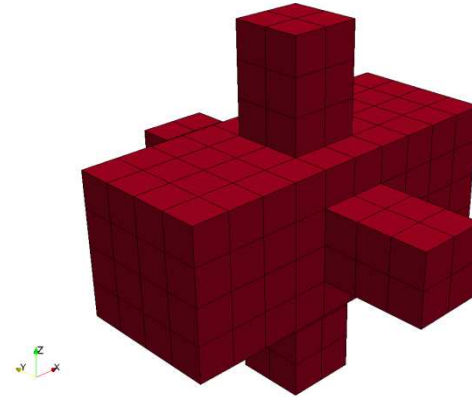


Poté je proveden výpočet mikroúlohy na 3D referenční buňce Y tvaru jednotkové krychle. Podoblast Y_f má, v analogii s variantami č. 7 nebo č. 8 v případě 2D výpočtu, podobu prostorového kříže se šesti rameny. Rameno ve směru osy x_1 tvoří hlavní kanál čtvercového

průřezu o hraně délky 0,4. Obě ramena ve směrech os x_2 a x_3 jsou také čtvercového průřezu, avšak s hranou poloviční délky, viz *obr. 19* a *obr. 20*.



obr. 19: Prostorová jednotková referenční buňka Y .



obr. 20: Výpočetní oblast 3D mikroúlohy Stokesova proudění, podoblast tekutiny Y_f .

Součástí programu pro řešení mikroúlohy je soubor příkazů pro sestavení tenzoru permeability \mathbf{K}^H dle vzorce (5.64)₂.

6.1.2 Makroúloha (Darcyho zákon)

Než přejdeme ke slabé formulaci makroúlohy, dosadíme rovnici (5.67) Darcyho zákona do rovnice kontinuity (5.68), přičemž $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Tím ze systému eliminujeme proměnnou $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ a získáme rovnici pro výpočet jediné neznámé: $p(\mathbf{x})$. Z vypočtených uzlových hodnot tlaku $p(\mathbf{x})$ můžeme pole perfuzních rychlostí $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ následně pomocí (5.67) kdykoli rekonstruovat.

Rovnici pro výpočet $p(\mathbf{x})$ vynásobíme skalární testovací funkcí $q \in H^1(\Omega)$,

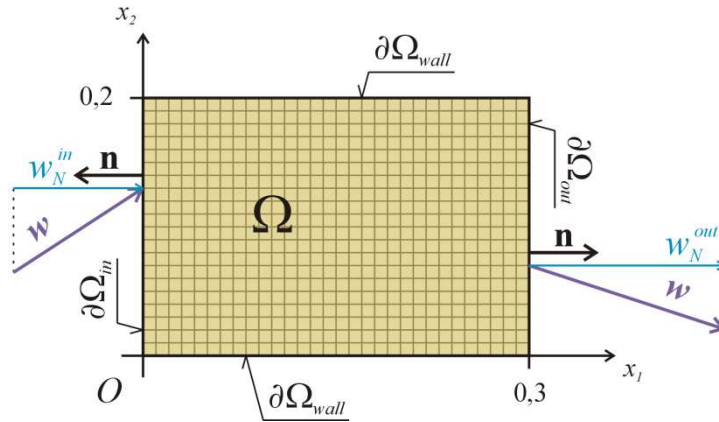
$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) q d\mathbf{x} = 0,$$

a upravíme pomocí integrace per partes.

$$\int_{\Omega} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) q d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{n} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \right)}_{-\mathbf{w}(\mathbf{x})} q dS_x - \int_{\Omega} \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} q d\mathbf{x} = 0 \quad (6.3)$$

Kulatou závorkou uzavřený člen v integrálu po hranici $\partial\Omega$ má samozřejmě význam záporně vzaté perfuzní rychlosti. Rozdělíme-li hranici $\partial\Omega$, viz *obr. 21*, na část $\partial\Omega_{in}$, kudy tekutina do oblasti Ω vstupuje, dále na část $\partial\Omega_{out}$, skrze kterou tekutina oblast Ω opouští, a konečně na nepropustnou stěnu $\partial\Omega_{wall}$, pak lze povrchový integrál rozdělit na tři, přičemž součet těchto integrálů bude, stejně jako původní integrál v (6.3), díky platnosti okrajové podmínky (5.69)

nulový. Z této trojice integrálů můžeme rovnou vyloučit integrál po $\partial\Omega_{wall}$, neboť stěnu považujeme za neprostupnou, z čehož vyplývá, že průmět vektoru perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ do směru vnější normály \mathbf{n} ke stěně musí být roven nule.



obr. 21: Makroskopická oblast Ω , použitá v numerických výpočtech, se schematicky naznačenou diskretizací oblasti a s hranicí $\partial\Omega$, rozdělenou na dílčí části $\partial\Omega_{in}$, $\partial\Omega_{out}$ a $\partial\Omega_{wall}$ se zřetelem na aplikaci okrajových podmínek. Na vstupu a výstupu naznačen průmět vektoru perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ do směru jednotkové vnější normály \mathbf{n} k hranici.

Součet zbylých dvou integrálů tvoří tzv. podmínku řešitelnosti (*solvability condition*)

$$0 = - \int_{\partial\Omega_{in}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) q dS_x - \int_{\partial\Omega_{out}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) q dS_x = \int_{\partial\Omega_{in}} w_N^{in}(\mathbf{x}) q dS_x - \int_{\partial\Omega_{out}} w_N^{out}(\mathbf{x}) q dS_x, \quad (6.4)$$

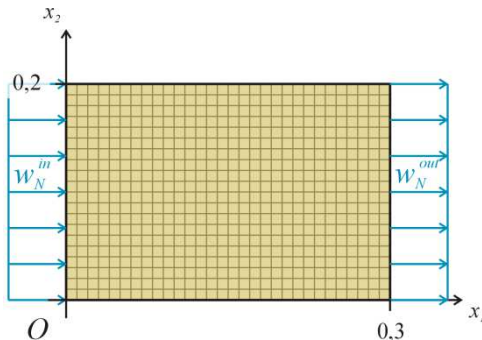
kde $w_N^{in}(\mathbf{x})$, resp. $w_N^{out}(\mathbf{x})$ je absolutní hodnota průmětu vstupní resp. výstupní perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ do směru vnější normály \mathbf{n} k příslušné vstupní, resp. výstupní ploše, viz **obr. 21**. Hodnota $w_N^{in}(\mathbf{x})$, resp. $w_N^{out}(\mathbf{x})$ je obecně funkcí \mathbf{x} , čímž lze postihnout např. rychlostní profil. Podmínka (6.4) v podstatě představuje rovnici kontinuity. Pokud budeme předpokládat $w_N^{in} = C^{in}$ a $w_N^{out} = C^{out}$, kde C^{in} a C^{out} jsou konstanty, a vstupní průřez shodný s výstupním, pak z (6.4) vyplývá, že $w_N^{in} = w_N^{out}$.

Kombinací vztahů (6.3) a (6.4) získáme slabou formulaci Neumannova problému, [23].

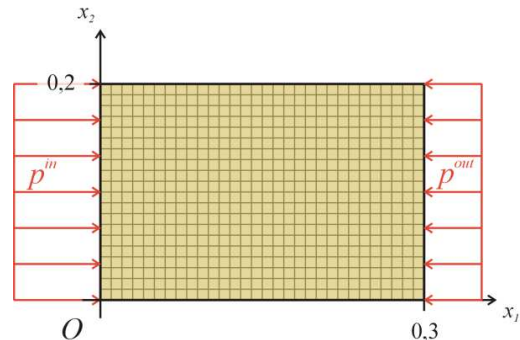
$$\int_{\Omega} \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_x p(\mathbf{x}) \cdot \nabla_x q d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega_{in}} w_N^{in}(\mathbf{x}) q dS_x - \int_{\partial\Omega_{out}} w_N^{out}(\mathbf{x}) q dS_x \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (6.5)$$

Alternativně lze zadat přímo tlakový spád, a to formou Dirichletových okrajových podmínek v podobě různých hodnot tlaku na dvou (či více) disjunktních částech hranice, např. na protilehlých plochách výpočetní oblasti obdélníkového tvaru, viz **obr. 23.**, což má – pokud bychom se zabývali reálným laboratorním pokusem – oproti rychlostním okrajovým podmínkám výhodu ve značně jednodušší regulaci toku. V tom případě řešíme rovnici

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_x p(\mathbf{x}) \cdot \nabla_x q d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (6.6)$$

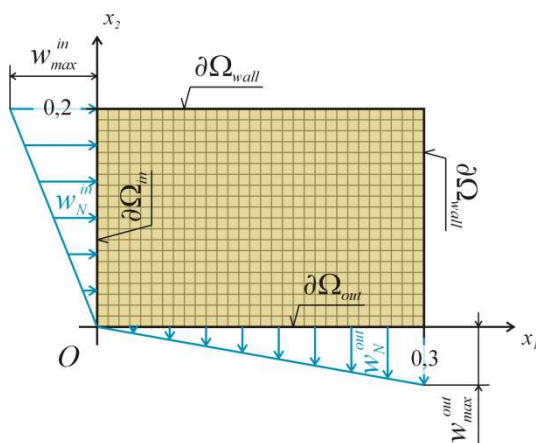


obr. 22: Makrooblast Ω se zadanými konst. rychlostními okrajovými podmínkami $w_N^{in} = w_N^{out}$ na $\partial\Omega_{in}$ a $\partial\Omega_{out}$.



obr. 23: Makrooblast Ω se zadanými konst. tlakovými okrajovými podmínkami p^{in} na $\partial\Omega_{in}$ a p^{out} na $\partial\Omega_{out}$.

Výpočet makroproblému je realizován na homogenizované oblasti Ω s definovanými okrajovými podmínkami na jejich hraničních plochách. Pro účely testování byla konečnými prvky diskretizována obdélníková rovinná oblast o rozměrech 0,3 krát 0,2 m, jejíž levá hrana, ($x_1 = 0$; $x_2 \in (0; 0,2)$), byla zvolena za vstupní, zatímco pravá, ($x_1 = 0,3$; $x_2 \in (0; 0,2)$) za výstupní. Na zmíněné hrany byly předepsány podmínky w_N^{in} a w_N^{out} nejprve jako konstanty, pro něž díky definici úlohy platí $w_N^{in} = w_N^{out}$, **obr. 22**. V případě rychlostních podmínek na vstupu a výstupu byla navíc definována podmínka nulového integrálního průměru tlaku na oblasti Ω , $\bar{p}_0 = \int_{\Omega} p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$, tak abychom získali jednoznačné řešení úlohy a rozložení tlaku $p(\mathbf{x})$.



obr. 24: Makroúloha Stokesova proudění na oblasti s modifikovanými hranicemi a rychlostními okrajovými podmínkami $w_N^{in}(x_2)$ a $w_N^{out}(x_1)$ s lineárním průběhem.

Posléze byla úloha modifikována, viz náčrt na **obr. 24**. Předně došlo k prohození okrajových podmínek na spodní a pravé hraně oblasti Ω , takže spodní hrana ($x_1 \in (0; 0,3)$; $x_2 = 0$) je nyní výstupní, zatímco pravá hrana ($x_1 = 0,3$; $x_2 \in (0; 0,2)$) zastává úlohu neprostupné stěny. Za druhé byly na vstupní a výstupní hraně předepsány rychlostní okrajové podmínky s lineárním průběhem, přičemž také zde byla za účelem získání jednoznačného řešení úlohy a rozložení tlaku $p(\mathbf{x})$ zvolena podmínka nulového integrálního průměru $\bar{p}_0 = 0$ tlaku $p(\mathbf{x})$ na oblasti Ω .

Abychom dodrželi podmínku řešitelnosti (6.4), musí rychlostní trojúhelník na vstupu svou plochou odpovídat ploše rychlostního trojúhelníku na výstupní hraně. A proto mezi maximální normálovou rychlostí w_{max}^{in} na vstupu a w_{max}^{out} na výstupu platí vzájemný vztah

$$\frac{w_{max}^{out}}{w_{max}^{in}} = \frac{\hat{x}_2}{\hat{x}_1}, \quad (6.7)$$

kde $\hat{x}_1 = 0,3$ a $\hat{x}_2 = 0,2$ jsou délky hran obdélníkové výpočetní oblasti na **obr. 24**, přičemž normálová rychlost $w_N^{in}(x_2)$ na vstupu, resp. $w_N^{out}(x_1)$ na výstupu je lineární funkce daná předpisem

$$w_N^{in}(x_2) = \frac{w_{max}^{in}}{\hat{x}_2} x_2, \text{ resp. } w_N^{out}(x_1) = \frac{w_{max}^{out}}{\hat{x}_1} x_1. \quad (6.8)$$

6.1.3 Respektování konečné velikosti referenční buňky Y

Díky asymptotické analýze PDR úlohy Stokesova proudění se původní matematickou formulací problému podařilo převést na mikro- a makroulohu, které jsou nezávislé. Jak bylo řečeno v kapitole 5.6, homogenizací získáme vztahy pro idealizovaný případ, kdy se jak malý parametr ε , tak i charakteristický rozměr l_{micro} referenční buňky Y limitně blíží nule. V reálných aplikacích metody homogenizace však referenční buňka Y zastupuje periodický vzorek skutečné mikrostruktury konečných rozměrů. Proto lze vždy nalézt $\varepsilon > 0$, které udává poměr velikosti buňky Y k rozměrům makroskopické oblasti Ω .

V případě Stokesova proudění, které je v makrouloze řešeno pomocí Darcyho zákona (6.5), resp. (6.6), je poměr ε do výpočetních vztahů zahrnut pomocí výpočetního koeficientu dynamické viskozity η_c , pro nějž dle (5.19) platí

$$\eta_c = \frac{\eta^\varepsilon}{\varepsilon^2}.$$

Pokud uvažujeme oblast Ω o rozměrech v řádu metrů a velikost buňky Y v řádu desetin milimetru (inspirováno údaji uvedenými v [3] a [6]), pak

$$\varepsilon = \frac{10^{-4}}{10^0} = 10^{-4}.$$

Pokud za η^ε vezmeme viskozitu krve $\eta^\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ Pa.s (údaj z [3]), potom pro výpočetní koeficient dynamické viskozity η_c platí

$$\eta_c = \frac{4 \cdot 10^{-3}}{(10^{-4})^2} = 4 \cdot 10^5 \text{ Pa.s.} \quad (6.9)$$

6.2 Numerické řešení mikroúlohy & sestavení tenzoru permeability

Vizualizace výsledků numerických výpočtů v softwaru *SfePy*, realizovaná v softwaru *ParaView*, využívá dvou srovnávacích prostředků – numerické hodnoty dané veličiny a barevné škály.

Vzhledem k tomu, že numerické hodnoty sledované veličiny, např. tlakového korektoru π^i , se varianta od varianty odlišují (někdy až o téměř dvě desítky řádů), nelze mezi sebou hodnoty vybrané veličiny, řekněme právě π^i , pro všechny varianty geometrie mikrostruktury porovnávat v jediné, všem variantám společné absolutní barevné stupnici. Proto je vždy pro danou variantu k zobrazení výsledků využito celé barevné škály, čímž získáme dobrou grafickou představu o relativním rozložení tlakového či rychlostního pole v rámci podoblasti Y_f náležící jediné, právě zkoumané variantě.

K absolutnímu porovnání variant co do výsledků polí tlakových korektorů π^i a rychlostních korektorů ω^i dobře poslouží numerické hodnoty. Pro každou variantu vypíšeme vždy hodnotu minima a maxima dané veličiny. Přínosné může být také zkoumání vztahu mezi tlakovým a rychlostním polem v rámci výpočetní oblasti dané varianty. Při zkoumání výsledků mikroúlohy řešené pro různé geometrické varianty referenční buňky Y se zaměříme na zjišťování faktorů, které mají vliv na velikost složek tenzoru permeability K^H .

6.2.1 Tabulka výsledků řešení mikroúlohy

Na základě výpočtu mikroúlohy pro všech dvanáct geometrických variant referenční buňky Y bylo zjištěno, že mikroúloha je symetrická vůči souřadnicovým osám y_1, \dots, y_N , ve 2D tedy vůči osám y_1 a y_2 , které jsou zároveň osami hlavními. Uvádíme proto pouze výsledky pro liché varianty, variantu č. 6, která je společně s variantou č. 5 unikátní svojí autosymetrií vzhledem k hlavním osám y_1 a y_2 , a také specifickou dvojici variant č. 11 a č. 12. Do hodnocení automaticky spadají i varianty se sudým pořadovým číslem.

Varianta č. 1:



$$\phi_1 = 0,2$$

$$K_1^H = \begin{bmatrix} 666,666666 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi^i \text{ [m]}; \omega^i \text{ [m}^2\text{]}; K_1^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{min}^1 = \pi_{max}^1 = 0$$

$$\pi_{min}^2 = -0,1; \pi_{max}^2 = 0,1$$

$$|\omega^1|_{min} = 0; |\omega^1|_{max} = 0,005$$

$$|\omega^2|_{min} = |\omega^2|_{max} = 0$$

Varianta č. 3:



$$\phi_3 = 0,4$$

$$K_3^H = \begin{bmatrix} 5333,33333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

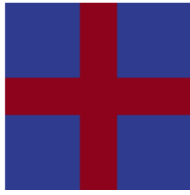
$$\pi^i \text{ [m]}; \omega^i \text{ [m}^2\text{]}; K_3^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{min}^1 = \pi_{max}^1 = 0$$

$$\pi_{min}^2 = -0,2; \pi_{max}^2 = 0,2$$

$$|\omega^1|_{min} = 0; |\omega^1|_{max} = 0,02$$

$$|\omega^2|_{min} = |\omega^2|_{max} = 0$$

Varianta č. 5:

$$\phi_5 = 0,36$$

$$\mathbf{K}_5^H = \begin{bmatrix} 727,8520 & 0 \\ 0 & 727,8520 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

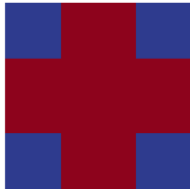
$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_5^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,1906; \pi_{ma}^1 = 0,1906$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1906; \pi_{ma}^2 = 0,1906$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,00546$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,00546$$

Varianta č. 6:

$$\phi_6 = 0,64$$

$$\mathbf{K}_6^H = \begin{bmatrix} 6382,5061 & 0 \\ 0 & 6382,5061 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_6^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,5193; \pi_{ma}^1 = 0,5193$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,5193; \pi_{ma}^2 = 0,5193$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,02394$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,02394$$

Varianta č. 7:

$$\phi_7 = 0,52$$

$$\mathbf{K}_7^H = \begin{bmatrix} 895,16084 & 0 \\ 0 & 5584,8546 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

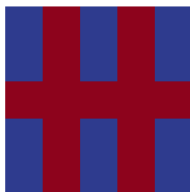
$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_7^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,3209; \pi_{ma}^1 = 0,3209$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,3115; \pi_{ma}^2 = 0,3115$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,00672$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,02095$$

Varianta č. 9:

$$\phi_9 = 0,52$$

$$\mathbf{K}_9^H = \begin{bmatrix} 801,40267 & 0 \\ 0 & 1455,2871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_9^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,2098; \pi_{ma}^1 = 0,2098$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1906; \pi_{ma}^2 = 0,1906$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,00601$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,00546$$

Varianta č. 11:

$$\phi_{11} = 0,205$$

$$\mathbf{K}_{11}^H = \begin{bmatrix} 146,5474 & 146,5474 \\ 146,5474 & 146,5474 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_{11}^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,1312; \pi_{ma}^1 = 0,1312$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1312; \pi_{ma}^2 = 0,1312$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,00161$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,00161$$

Varianta č. 12:

$$\phi_{12} = 0,205$$

$$\mathbf{K}_{12}^H = \begin{bmatrix} 146,5474 & -146,5474 \\ -146,5474 & 146,5474 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi^i \text{ [m]}; \boldsymbol{\omega}^i \text{ [m}^2\text{]}; \mathbf{K}_{12}^H \text{ [m}^2\text{]}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,1312; \pi_{ma}^1 = 0,1312$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1312; \pi_{ma}^2 = 0,1312$$

$$|\boldsymbol{\omega}^1|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^1|_{ma} = 0,00161$$

$$|\boldsymbol{\omega}^2|_{mi} = 0; |\boldsymbol{\omega}^2|_{ma} = 0,00161$$

6.2.2 Analýza výsledků řešení mikroúlohy

Pro tenzor permeability \mathbf{K}^H libovolné zde uvedené varianty (s výjimkou variant č. 11 a č. 12) a tenzor \mathbf{K}_{sym}^H varianty k ní symetrické generelně platí

$$\mathbf{K}_{sym}^H \equiv (\mathbf{K}^H)^T. \quad (6.10)$$

Dále platí, že smíšené složky $K_{12}^H = K_{21}^H$ tenzoru permeability \mathbf{K}^H díky ortogonalitě \mathbf{e}^i a $\boldsymbol{\omega}^j$ pro $i \neq j$, viz definiční vztah (5.63), vychází u všech variant s výjimkou variant č. 11 a č. 12 nulové, což numerický výpočet potvrdil.

Nyní můžeme porovnávat a všimnout si při tom podobností i rozdílů, které by mohly pomoci s odvozením obecných zákonitostí pro tenzor \mathbf{K}^H , který je pouze funkcí geometrie referenční buňky Y , přesněji řečeno její podoblasti Y_f , na které řešíme mikroúlohu Stokesova proudění. Každá podoblast Y_f má tyto vlastnosti: velikost, tvar a orientaci vůči hlavním osám buňky Y . Velikost Y_f je určována ve smyslu porózy ϕ , tedy jako poměr obsahu podoblasti Y_f k obsahu celé referenční buňky Y . Při hodnocení tvaru si všímáme geometrického uspořádání podoblasti Y_f , např. šířky a počtu kanálků, tvaru jejich stěn a případných dalších atributů.

Podívejme se na konkrétní příklady. Začneme triviálními případy variant č. 1 až č. 4, které mají geometrii s jediným kanálkem vedeným jedním z hlavních směrů, zatímco ve směru kolmém k tomuto jsou pro tekutinu nepropustné. Příslušný tenzor K_i^H pro $i = 1, 2, 3, 4$ má jedinou nenulovou složkou a vyjadřuje tak vlastně skalární permeabilitu v hlavním směru, kterým je orientován kanálek. Kanálek může mít různou šířku, a jak vidíme ze srovnání variant č. 1 a č. 3, šířka kanálku má na velikost permeability vliv. Rozlišujeme při tom dva limitní případy. Kanálek nulové šířky znamená nulovou permeabilitu, máme těleso z homogenního, neporézního materiálu. Opačný případ, tedy, kdy se kanálek rozšiřuje až do té míry, že poróza dosáhne sta procent, znamená, že máme pouze oblast tekutiny, pro kterou můžeme řešit běžný systém Stokesových či Navier-Stokesových rovnic bez nutnosti použít homogenizaci.

Kromě šířky kanálku hraje roli také poróza ϕ , jak můžeme vidět, porovnáme-li hodnoty permeability variant č. 5, č. 6 a č. 7. Je zřejmé, že s rostoucí porózitou se zvyšuje také permeabilita, která je maximální v případě varianty č. 6, jejíž poróza činí celých 64%. Srovnáním zmíněných variant navíc zjistíme, že pro velikost konkrétní složky tenzoru permeability nemá význam jen šířka kanálku, který prochází příslušným směrem, ale také tvar a šířka kanálku k němu kolmého.

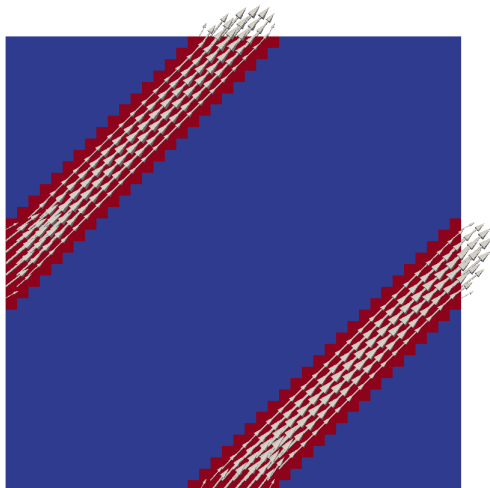
Zaměřme se dále na varianty č. 7 a č. 9, které mají shodnou porózu $\phi = 0,52$. Přesto však mají ve směru y_2 velice rozdílnou permeabilitu, ačkoli ve směru y_1 je permeabilita obou variant zhruba na stejné úrovni. Důvod hledejme ve vlastnostech vazkých tekutin. Díky viskozitě ulpívají tekutiny na povrchu stěn kanálku, mají zde nulovou rychlost, zatímco v ose kanálku je rychlost tekutiny maximální – dojde k vytvoření rychlostního profilu. Ač je šířka dvojice kanálků vedoucích u varianty č. 9 směrem y_2 v součtu shodná jako šířka kanálku

ve směru y_2 u varianty č. 7, celkové průtočné množství tekutiny touto dvojicí kanálků bude vždy menší než průtočné množství tekutiny dvojnásobně širokým kanálkem varianty č. 7, neboť se jedná o veličinu s nelineární závislostí na šířce kanálku.

6.2.3 Varianty č. 11 a č. 12

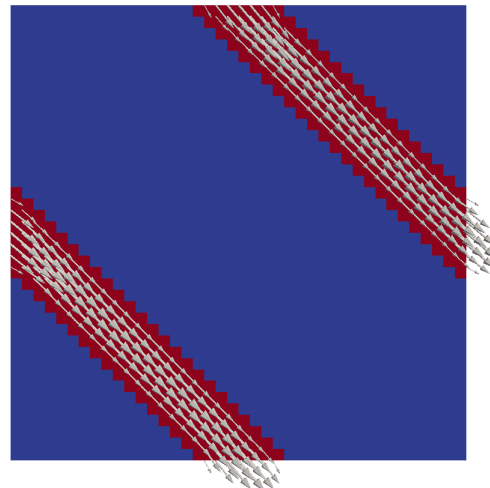
Varianty č. 11 a č. 12 jsou specifické, poněvadž díky směru, kterým jsou vedeny kanálky a který se neshoduje s hlavními směry y_1 a y_2 , jsou mimodiagonální složky tenzoru permeability nenulové. Zde uvedený případ je navíc speciální tím, že orientací kanálků v diagonálním směru, tedy pootočením o 45° vůči směrům hlavních os, jsme docílili toho, že všechny složky tenzoru permeability \mathbf{K}^H mají stejnou velikost (v absolutní hodnotě). Rozdíl ve znaménku v případě varianty č. 12 reflektuje směr rychlostního korektoru ω^2 , viz následující tabulka s vizualizacemi vektorového rychlostního pole. Zřejmý je vyvinutý rychlostní profil proudu tekutiny s maximální rychlostí v ose kanálku.

varianta č. 11:

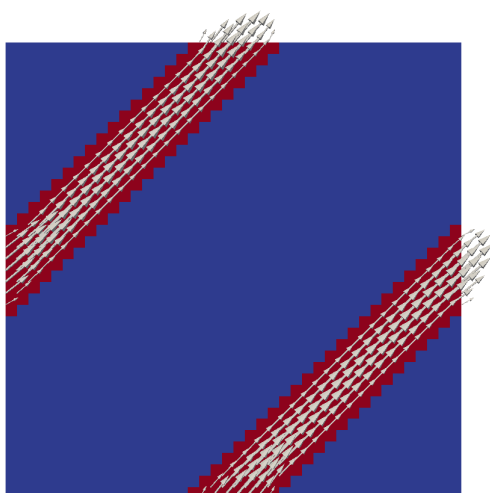


vektorové pole ω^1

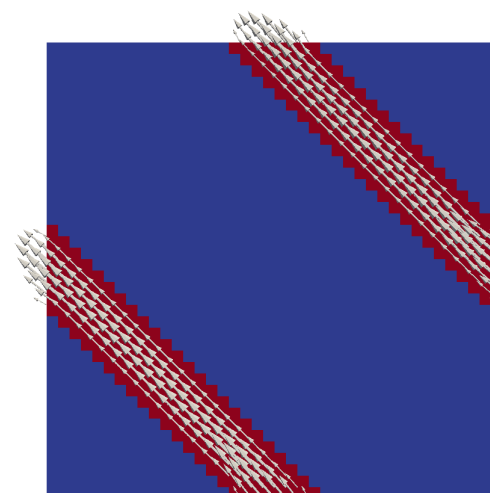
varianta č. 12:



vektorové pole ω^1



vektorové pole ω^2



vektorové pole ω^2

Abychom mohli tenzor permeability variant č. 11 a č. 12 porovnat s tenzorem permeability ostatních variant, najdeme jeho vlastní čísla, která jsou složkami tenzoru permeability variant č. 11 a č. 12, transformovaných do souřadnicového systému hlavních os y_1 a y_2 , resp. jeho vlastní vektory, které určují potřebný úhel natočení mezi skutečnou konfigurací a transformovanou konfigurací v systému hlavních os.

Z MATLABu pomocí příkazu $[V, \text{Lamb}] = \text{eig}(K11)$ získáme výstup v podobě modální matice V , jejíž sloupce tvoří vlastní vektory \mathbf{v}_1 a \mathbf{v}_2 , a spektrální matici A s vlastními čísly λ_1 a λ_2 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 293,0948 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad ; \quad V = \begin{bmatrix} -0,707106781187 & 0,707106781187 \\ 0,707106781187 & 0,707106781187 \end{bmatrix}$$

Z tvaru spektrální matice A vyplývá, že varianty č. 11 a č. 12 jsou v podstatě triviálními případy jako varianty č. 1 až č. 4 s tím rozdílem, že referenční buňkou Y variant č. 11 a č. 12 jsou vedeny dva rovnoběžné kanálky místo jediného. Vlastní čísla v matici A jsou řazena vzestupně dle velikosti. Pokud tedy chceme pomocí modální matice zjistit potřebný úhel φ_2 natočení referenční buňky Y varianty č. 11, resp. č. 12, musíme tak učinit pomocí vlastního vektoru \mathbf{v}_2 , který náleží druhému vlastnímu číslu $\lambda_2 = 293,0948 \cdot 10^{-6}$. Úhel φ_2 vypočteme ze známého vztahu pro výpočet úhlu sevřeného dvěma vektory,

$$\varphi_2 = \arccos \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{e}_2| |\mathbf{v}_2|},$$

kde \mathbf{e}_2 je jednotkový vektor ve směru hlavní souřadnicové osy y_2 . Po dosazení získáme řešení $\varphi_2 = \pi/4 = 45^\circ$. Výpočet tedy potvrdil předchozí tvrzení, že referenční buňka Y varianty č. 11, resp. č. 12 je vůči souřadnicovému systému hlavních os y_1 a y_2 natočena o 45° .

6.2.4 Shrnutí poznatků o faktorech ovlivňujících velikost složek tenzoru permeability

Na základě výše uvedených zjištění můžeme konstatovat, že velikost složek tenzoru permeability \mathbf{K}^H závisí na porózitě ϕ dané geometrie referenční buňky Y , na šířce a počtu kanálků, jakož i na jejich orientaci vůči hlavním směrům y_1 a y_2 referenční buňky Y . Poznamenejme, že pro výpočet testovací mikroúlohy byly použity velice jednoduché symetrické geometrie s příkými kanálky konstantní šířky v celé jejich délce. Geometrie skutečných, k praktickým výpočtům používaných mikrostruktur bývá mnohem rozmanitější a vede na tenzor permeability \mathbf{K}^H , jehož všechny složky jsou obecně nenulové, viz [6].

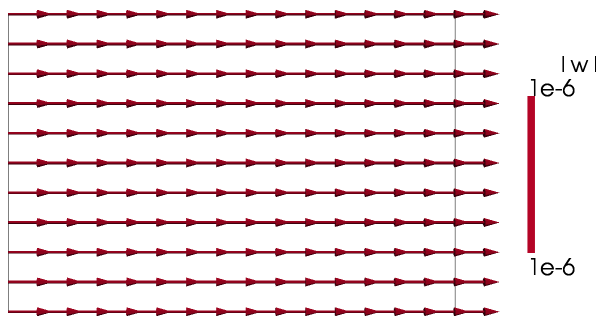
V následující kapitole využijeme všech variant tenzorů permeability pro výpočet makroúlohy Stokesova proudění (6.5), resp. (6.6), přičemž prostřednictvím sestavených tenzorů \mathbf{K}^H budeme sledovat vliv orientace a šířky kanálků na řešení $(p(\mathbf{x}), \mathbf{w}(\mathbf{x}))$ Darcyho zákona při zachování totožných okrajových podmínek pro všechny varianty mikrostruktury. V příloze této práce se nacházejí vizualizace výsledků řešení $(\pi^i, \boldsymbol{\omega}^i)$ mikroúlohy variant č. 1, č. 5, č. 7, č. 9 a č. 11.

6.3 Numerické řešení makróúlohy (Darcyho zákon)

Řešíme nejprve úlohu 1, viz rovnice (6.5), s rychlostními okrajovými podmínkami na vstupní a výstupní hraně oblasti Ω dle schématu na **obr. 22** (str. 41). Poté provedeme výpočet úlohy 2, viz rovnice (6.6), s tlakovými okrajovými podmínkami na vstupní a výstupní hraně oblasti Ω dle schématu na **obr. 23**. Nakonec budeme řešit úlohu 3, viz rovnice (6.5), s modifikovanými rychlostními okrajovými podmínkami s lineárním průběhem dle schématu na **obr. 24** (str. 41).

Do vztahů (6.5), resp. (6.6) ve tvaru slabé formulace rovnice Darcyho zákona dosazujeme materiálový parametr η_c , který je všem úlohám, zmíněným v předchozím odstavci, společný. Jedná se o výpočetní viskozitu tekutiny, jejíž hodnota je s ohledem na konečnou velikost parametru ε určena vztahem (6.9) a činí $\eta_c = 4 \cdot 10^5$ Pa. s.

6.3.1 Úloha 1

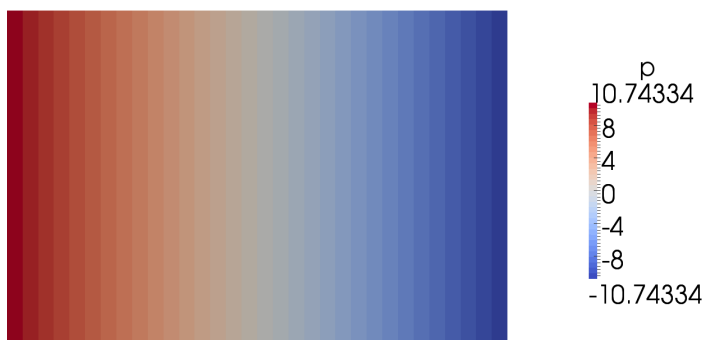


obr. 25: Konstantní rychlostní vektorové pole na oblasti Ω , $|w| = 10^{-6} \text{ m. s}^{-1}$.

Úloha 1 je řešena s rychlostními okrajovými podmínkami $w_N^{out} = w_N^{in} = 10^{-6} \text{ m. s}^{-1}$, jejichž velikost byla stanovena s přihlédnutím k údajům uvedeným v práci [6]. Volbou těchto okrajových podmínek a díky rozvržení úlohy 1 je vektorové rychlostní pole na celé makroskopické oblasti Ω konstantní, viz **obr. 25**. V důsledku toho vzniká v podélném směru x_1 rovnoměrný tlakový spád, viz **obr. 26**, tvořící konstantní tlakový gradient

$$\nabla_x p = \frac{p_{in} - p_{out}}{\hat{x}_1} = \frac{p_{in} - p_{out}}{0,3} \quad (6.11)$$

kde p_{in} , resp. p_{out} je velikost tlaku na vstupní, resp. výstupní hraně a $\hat{x}_1 = 0,3 \text{ m}$ je délka hrany oblasti Ω ve směru x_1 .



obr. 26: Rozložení tlaku na oblasti Ω na příkladu varianty č. 8.

Hodnota gradientu $\nabla_x p$ je díky konstantní perfuzní rychlosti w nepřímo úměrná velikosti permeability v daném směru, jak vyplývá z Darcyho zákona. Níže umístěná tabulka obsahuje výsledky, kterých bylo dosaženo výpočtem makróúlohy s referenční buňkou Y geometrických variant č. 1, č. 3, a č. 5 až č. 10.

Varianta:

 K_i^H [m²]; p [Pa]; $\nabla_x p$ [N·m⁻³]

č. 1



$$K_1^H = \begin{bmatrix} 666,666666 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 90$$

$$p_{out} = -90$$

$$\nabla_x p = 600$$

č. 3



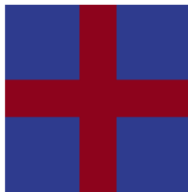
$$K_3^H = \begin{bmatrix} 5333,33333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 11,25$$

$$p_{out} = -11,25$$

$$\nabla_x p = 75$$

č. 5



$$K_5^H = \begin{bmatrix} 727,8520 & 0 \\ 0 & 727,8520 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 82,4343$$

$$p_{out} = -82,4343$$

$$\nabla_x p = 549,562$$

č. 6



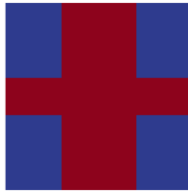
$$K_6^H = \begin{bmatrix} 6382,5061 & 0 \\ 0 & 6382,5061 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 9,4007$$

$$p_{out} = -9,4007$$

$$\nabla_x p = 62,6713$$

č. 7



$$K_7^H = \begin{bmatrix} 895,16084 & 0 \\ 0 & 5584,8546 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 67,0271$$

$$p_{out} = -67,0271$$

$$\nabla_x p = 446,847$$

č. 8



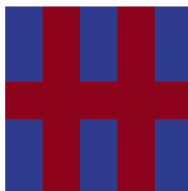
$$K_8^H = \begin{bmatrix} 5584,8546 & 0 \\ 0 & 895,16084 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 10,7433$$

$$p_{out} = -10,7433$$

$$\nabla_x p = 71,6223$$

č. 9



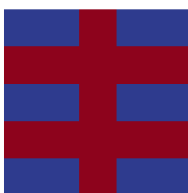
$$K_9^H = \begin{bmatrix} 801,40267 & 0 \\ 0 & 1455,2871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 74,8687$$

$$p_{out} = -74,8687$$

$$\nabla_x p = 499,125$$

č. 10



$$K_{10}^H = \begin{bmatrix} 1455,2871 & 0 \\ 0 & 801,40267 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$p_{in} = 41,2290$$

$$p_{out} = -41,2290$$

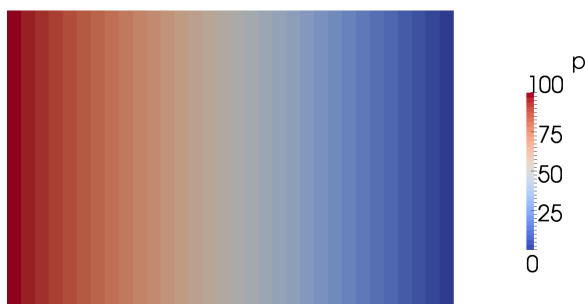
$$\nabla_x p = 274,860$$

Výsledky uvedené na předchozí straně jsou v souladu s očekávaným řešením pro rozložení tlakového pole, viz **obr. 26**. Výjimku tvoří pouze výše neuvedené varianty č. 2, č. 4 a symetrická dvojice variant č. 11 a č. 12, jejichž řešení není konformní s řešením ostatních variant. Důvodem je geometrické uspořádání referenční buňky Y těchto variant. Geometrie mikrostruktury variant č. 2 a č. 4 s kanálkem orientovaným ve směru osy x_2 jsou za stávajícího rozvržení úlohy 1, kdy preferenční směr toku je shodný se směrem osy x_1 , pro tekutinu neprostupné. Jinak řečeno je permeabilita těchto variant v preferenčním směru toku nulová a výsledný gradient tlaku roste nade všechny meze, $\nabla_x p \rightarrow \infty$. Numerický výpočet sice poskytl jistá data, avšak rozložení tlaku neodpovídá předpokládanému (viz **obr. 26**) a navíc se velikost tlaku pohybuje v řádu 10^{12} Pa, z čehož vyplývá, že za těchto podmínek by pro udržení toku tekutiny konstantní rychlostí $w = 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ bylo zapotřebí obrovského a vzhledem k měřítku úlohy zcela nerealistického tlakového gradientu.

Ani varianty č. 11 a č. 12 nemají vzhledem k rozvržení úlohy 1 vyhovující geometrii mikrostruktury. Jejich kanálky pootočené o 45° vůči preferenčnímu směru toku totiž nedovolují přenos hmoty ve směru x_1 při zachování konstantní hodnoty souřadnice x_2 .

Na základě výsledků výpočtu makroúlohy 1 můžeme konstatovat, že při zadané perfuzní rychlosti $w = |\mathbf{w}|$, konstantní na celé makroskopické oblasti Ω , a konstantní hodnotě výpočetní viskozity tekutiny η_c je jediným faktorem, který skutečně ovlivňuje výsledné rozložení tlaku na oblasti Ω , velikost permeability porézního materiálu v preferenčním směru toku. Ta přímo souvisí s tvarem, velikostí a orientací kanálků v rámci geometrie referenční buňky Y , jak bylo zjištěno dříve. Největší tlakový gradient, $\nabla_x p = 600 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, který je nezbytný pro udržení toku tekutiny stálou rychlostí $w = 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, tak vyžaduje varianta č. 1, zatímco nejmenší, $\nabla_x p = 62,6713 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$, logicky varianta č. 6.

6.3.2 Úloha 2









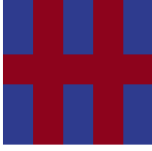

obr. 27: Tlakové pole s konstantním gradientem $\nabla_x p$ na celé oblasti Ω .

Úloha 2 je řešena s tlakovými okrajovými podmínkami $p_{in} = 10^2 \text{ Pa}$ a $p_{out} = 0 \text{ Pa}$. Velikost tlaku (lépe řečeno přetlaku) p_{in} na vstupu je volena na základě údajů v [3], zatímco nulová hodnota výstupního tlaku (přetlaku) p_{out} napovídá, že předpokládáme výstup tekutiny do okolí. Výsledný tlakový gradient $\nabla_x p$ na makroskopické oblasti Ω , viz **obr. 27**, má pro všechny varianty geometrie mikrostruktury shodnou hodnotu

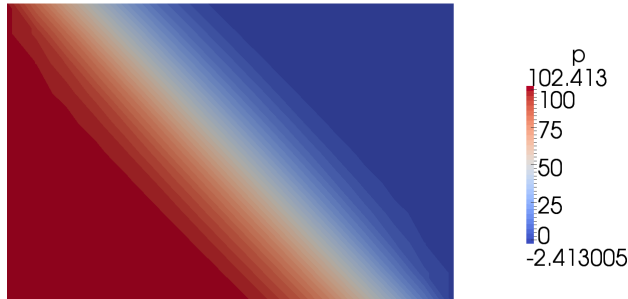
$$\nabla_x p = \frac{p_{in} - p_{out}}{\hat{x}_1} = \frac{100 - 0}{0,3} = 333, \bar{3} \text{ Pa.} \quad (6.12)$$

Díky tomu, že hybnou sílu toku tekutiny představuje konstantní gradient $\nabla_x p$, předpokládáme, že řešením makroúlohy 2 bude konstantní vektorové pole perfuzní rychlosti \mathbf{w} , podobné tomu

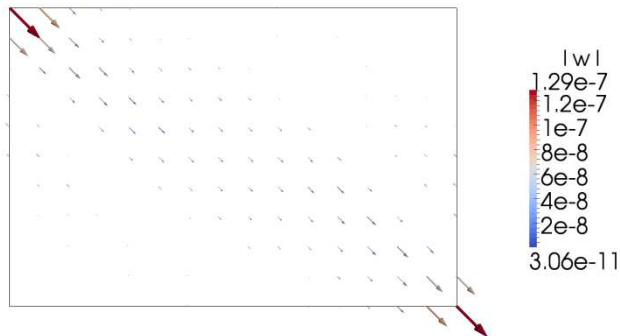
na **obr. 25** (viz str. 48), přičemž velikost rychlosti $w = |\mathbf{w}|$ bude za daných podmínek přímo úměrná velikosti permeability porézního materiálu v preferenčním směru toku. Tento předpoklad však splňují, stejně jako v případě úlohy 1, jen varianty č. 1, č. 3 a č. 5 až č. 10, jejichž výsledky jsou uspořádány do následující tabulky.

| Varianta: | K_i^H [m ²]; $w = \mathbf{w} $ [m · s ⁻¹] |
|---|---|
| č. 1  | $K_1^H = \begin{bmatrix} 666,666666 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 5,556 \cdot 10^{-7}$ |
| č. 3  | $K_3^H = \begin{bmatrix} 5333,33333 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 4,444 \cdot 10^{-6}$ |
| č. 5  | $K_5^H = \begin{bmatrix} 727,8520 & 0 \\ 0 & 727,8520 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 6,065 \cdot 10^{-7}$ |
| č. 6  | $K_6^H = \begin{bmatrix} 6382,5061 & 0 \\ 0 & 6382,5061 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 5,319 \cdot 10^{-6}$ |
| č. 7  | $K_7^H = \begin{bmatrix} 895,16084 & 0 \\ 0 & 5584,8546 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 7,460 \cdot 10^{-7}$ |
| č. 8  | $K_8^H = \begin{bmatrix} 5584,8546 & 0 \\ 0 & 895,16084 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 4,654 \cdot 10^{-6}$ |
| č. 9  | $K_9^H = \begin{bmatrix} 801,40267 & 0 \\ 0 & 1455,2871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 6,678 \cdot 10^{-7}$ |
| č. 10  | $K_{10}^H = \begin{bmatrix} 1455,2871 & 0 \\ 0 & 801,40267 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \quad w = 1,213 \cdot 10^{-6}$ |

Výstupem řešení makroúlohy 2 při použití geometrie mikrostruktury výše neuvedených variant č. 2 a č. 4 je vektorové pole perfuzní rychlosti \mathbf{w} s nulovou velikostí. Je zřejmé, že vzhledem k nulové permeabilitě materiálu v preferenčním směru toku, který je určen tlakovým gradientem $\nabla_x p$, nemůže tekutina oblastí Ω v tomto směru vůbec procházet.



obr. 28: Rozložení tlaku v oblasti Ω pro geometrii mikrostruktury ve variantě č. 12.



obr. 29: Vektorové pole perfuzní rychlosti v Ω pro geometrii mikrostruktury ve variantě č. 12.

obr. 29 dává tušit, že rychlost, s jakou tekutina diagonálně protéká oblastí Ω , bude v průměru dokonce ještě nižší. Výsledek řešení úlohy 2 s geometrií mikrostruktury ve variantě č. 11 je analogický k tomuto.

Na základě výsledků výpočtu makroúlohy 2 můžeme konstatovat, že při tlakovém spádu, zadaném pomocí okrajových podmínek $p_{in} = 100$ Pa a $p_{out} = 0$ Pa, který iniciuje vznik konstantního tlakového gradientu $\nabla_x p = 333, \bar{3}$ N.m⁻³ na oblasti Ω , získáme pro varianty č. 1, č. 3 a č. 5 až č. 10 řešení v podobě konstantní perfuzní rychlosti $w = |\mathbf{w}|$, jejíž velikost se odvíjí pouze od hodnoty permeability porézního materiálu v preferenčním směru toku. Díky tomu můžeme říct, že nejvyšší perfuzní rychlosti, $w = 5,319 \cdot 10^{-6}$ m.s⁻¹, dosáhneme u varianty č. 6, nejmenší, $w = 5,556 \cdot 10^{-7}$ m.s⁻¹, naopak u varianty č. 1. Do výčtu variant jsme nezapočítali varianty č. 2 a č. 4, které jsou pro tekutiny při daném rozvržení úlohy neprostupné, a varianty č. 11 a č. 12, jejichž odlišné řešení bylo popsáno v předchozím odstavci.

Varianty č. 11 a č. 12 jsou i v případě úlohy 2 poněkud odlišné od zbylých. Na **obr. 28** lze vidět rozložení tlaku, na **obr. 29** zase vektorové pole perfuzní rychlosti pro geometrickou variantu č. 12. I přes zadané tlakové okrajové podmínky nedošlo v makroskopické oblasti Ω k vytvoření tlakového gradientu v preferenčním směru toku, jak je zřejmé z **obr. 28**. Uspořádání kanálků referenční buňky Y varianty č. 12 má za následek, že tekutina může makroskopickou oblastí Ω téct pouze diagonálně z jejího horního levého do jejího dolního pravého rohu, viz **obr. 29**. Činí tak ale s obtížemi, jak lze vyčíst z hodnoty maximální dosahované rychlosti $|\mathbf{w}|_{max} = 1,29 \cdot 10^{-7}$ m.s⁻¹, která je nižší v porovnání s rychlostmi, jakých bylo dosaženo u libovolné z variant uvedených na předchozí straně.

Pohled na vektorové rychlostní pole na

6.3.3 Úloha 3

Modifikací rychlostních okrajových podmínek a přesunem výstupní hrany oblasti Ω dle **obr. 24** (viz strana 41) získáme úlohu, jejíž řešení nelze, na rozdíl od obou předchozích úloh, s pomocí vzorce Darcyho zákona odhadnout či dokonce vypočítat. Musíme se tedy spokojit s numerickým řešením úlohy v softwaru *SfePy*.

Bylo zjištěno, že geometrie referenční buňky Y variant č. 1 až č. 4 je pro zadané okrajové podmínky úlohy 3 nevyhovující, neboť vlivem vedení kanálku pouze jedním z hlavních směrů nemůže dojít ke stočení proudu tekutiny od levé vstupní směrem k pravé výstupní hraně oblasti Ω . Velikost rychlosti, vypočítaná numerickým modelem, se u variant č. 1 až č. 4 pohybuje v řádu 10^{-12} až 10^{-14} m.s⁻¹. To je v kontextu výsledků zbývajících variant hodnota, kterou lze považovat za nulovou.

Dále se ukázalo, že také v případě variant č. 11 a č. 12 získáme nulové řešení pro vektorové pole perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$. Na vině je opět geometrie příslušných mikrostruktur, bezpodmínečně předepisující směr, kterým se má tekutina, proudící makroskopickou oblastí Ω , ubírat a který ani v této úloze není v souhře se zvolenými okrajovými podmínkami. Na rozdíl od variant č. 5 až č. 10 totiž makroskopická oblast Ω , poskládaná z „dlaždic“ škálovaných referenčních buněk Y variant č. 11 nebo č. 12, nevytváří síť na sebe kolmých skupin rovnoběžných kanálků, které by tekutině proudící oblastí Ω umožnily nerušený průchod oblastí za využití nejružnějších odboček a propojovacích kanálků.

Výsledky řešení variant č. 5 až č. 10 včetně vizualizace rozložení tlaku a vektorového rychlostního pole na oblasti Ω lze najít v příloze této práce.

6.4 Porovnání výsledků dosažených v rámci této práce s výsledky uvedenými v relevantní odborné literatuře

Kvalitu či naopak nekvalitu výsledků výpočtů provedených v rámci této diplomové práce nejlépe posoudíme při přímém porovnání s výsledky obdobně zaměřeného výzkumu ve světě, publikovanými v impaktované odborné literatuře, viz např. článek [6].

Porovnáním dosažených hodnot permeability, $\sim 10^{-4}$ až 10^{-6} m², s relevantními výsledky uvedenými ve zdroji [6], $\sim 10^{-14}$ až 10^{-15} m², zjistíme odlišnost v řádu 10^9 až 10^{10} . Naproti tomu hodnoty perfuzní rychlosti jsou se svými protějšky z [6] řádově srovnatelné, $\sim 10^{-5}$ až 10^{-7} m.s⁻¹. Co je ale příčinou tak velkého řádového rozdílu v hodnotách permeability?

První z možných příčin může být velikost a tvar referenční buňky Y. Autoři článku [6] pracují s geometrií sublobulárních rozměrů, která navíc vznikla z CT skenu reálné části jaterní tkáně, zatímco zde prezentovaná testovací úloha Stokesova proudění je řešena na velmi jednoduché výpočetní oblasti rozměrů srovnatelných s velikostí lobulu, která však nereflektuje skutečnou morfologii lobulu. S tím souvisí také skutečnost, že relevantní geometrie z [6] má průměrnou

porózitu $\phi = 0,143$, což je až více než čtyřikrát méně, než u některých variant geometrie použitých v této práci. A jak jsme poznali dříve, viz kapitola 6.2, hraje porózita při výpočtu tenzoru \mathbf{K}^H svoji nezanedbatelnou roli.

S vyřešením této diskrepance v dosažených výsledcích permeability může pomoci následující úvaha. V kapitole 5.5.1 jsme zavedli tzv. výpočetní viskozitu η_c tekutiny, která je velmi odlišná od tabulkové hodnoty součinitele dynamické viskozity η^ε tekutiny, ale na druhé straně reflektuje konečnou velikost poměru ε charakteristické délky l_{micro} mikrostruktury a charakteristického rozměru L_{macro} makroskopické oblasti. V rovnici (6.5), resp. (6.6) Darcyho zákona ve slabé formulaci výpočetní viskozita η_c tekutiny vystupuje jako dělitel tenzoru permeability \mathbf{K}^H ,

$$\frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H.$$

Za η_c dosadíme z (5.19):

$$\frac{\varepsilon^2}{\eta^\varepsilon} \mathbf{K}^H = \frac{1}{\eta^\varepsilon} \varepsilon^2 \mathbf{K}^H \quad (6.13)$$

Podstata zmíněné úvahy spočívá ve způsobu jakým na podíl (6.13) nahlížíme. Pokud vnímáme tenzor permeability \mathbf{K}^H společně s kvadrátem parametru ε , přičemž tento součin je vydělen skutečnou hodnotou viskozity η^ε , pak se díky hodnotě $\varepsilon^2 = 10^{-8}$ řádově významně přiblížíme hodnotám permeability uvedeným v [6].

S přihlédnutím k faktu, že i s omezenými možnostmi, danými použitím výpočetního modelu a primitivní geometrie na čistě akademické úrovni oproti komerčnímu softwarovému balíku ANSYS Fluent a věrné počítačové kopii skutečné geometrie sinusoidálního prostoru, bylo v rámci této diplomové práce dosaženo výsledků, které se zhruba shodují s výsledky publikovanými v článku [6], můžeme konstatovat, že v této práci představený model Stokesova proudění svou roli úvodu do matematické metody homogenizace splnil a je vhodné zabývat se dalším rozvojem tohoto modelu, např. rozšířením v model, který zachycuje krom čistého toku tekutiny prostorem porů také interakci této tekutiny a poddajné matrice, o čemž blíže pojednává kapitola 8.

7 Citlivostní analýza tenzoru permeability

V této kapitole diplomové práce se prostřednictvím citlivostní analýzy tenzoru permeability pokusíme zjistit vliv deformace mikrostruktury na permeabilitu a perfuzní rychlost tekutiny proudící kanálky poroelastického materiálu. Matrici, na rozdíl od předchozí kapitoly, kdy představovala dokonale tuhý skelet, nyní uvažujeme poddajnou.

Citlivostní analýzou obecně rozumíme výpočet citlivosti změny účelové funkce v závislosti na změně optimalizačních parametrů, na kterých účelová funkce či funkcionál závisí nepřímo prostřednictvím stavové proměnné, [20]. Poznamenejme, že v následujícím se nejedná o skutečnou optimalizaci, tedy hledání extrému účelové funkce či funkcionálu, ale využití některých matematických nástrojů optimalizace k vyšetření citlivosti složek tenzoru permeability.

Definujme nejprve účelový funkcionál

$$\psi = \psi(\boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}), \mathbf{y}) = K_{ij}^H = (\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f}; \quad i, j = 1, \dots, N. \quad (7.1)$$

Citlivostní analýza tohoto funkcionálu spočívá ve výpočtu totálního diferenciálu $\delta\psi(\boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y}), \mathbf{y}) \circ \delta\mathbf{y}$ ve směru perturbace $\delta\mathbf{y}$ vektoru optimalizačních proměnných \mathbf{y} , [20], přičemž $\boldsymbol{\omega}^i(\mathbf{y})$ je stavová proměnná splňující mikroúlohu (5.49) až (5.51). Zajímá nás, jak se změní permeabilita v jednotlivých směrech y_1, \dots, y_N , pokud dojde k deformaci referenční buňky Y , a tedy i výpočetní oblasti Y_f . Tvarové změny oblasti Y_f posuzujeme prostřednictvím deformace rozhraní Γ_{sf} . Poznamenejme, že periodicitu buňky Y pokládáme za zachovanou, tzn., že veškeré změny tvaru se odehrávají uvnitř oblasti Y , zatímco hranice ∂Y je neměnná.

7.1 Vektorové pole designových rychlostí

Ve výpočetní oblasti Y_f definujeme vektorové pole designových rychlostí $\mathcal{V}(\mathbf{y})$, tedy jakýsi „tok“ materiálních částic, a zavádíme zobrazení parametrizované pomocí umělého „času“ $\tau \in (0, \tau)$, [14],

$$\mathcal{F}(\tau, \cdot) : Y_f \rightarrow Z_f(\tau), \quad \mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau) = \mathcal{F}(\tau, \mathbf{y}), \quad (7.2)$$

kde

$$z_i = y_i + \tau \mathcal{V}_i(\mathbf{y}); \quad \mathbf{y} \in Y_f, \quad \mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau) \in Z_f(\tau), \quad Z_f(\tau) = Y_f + \{\tau \mathcal{V}(\mathbf{y})\}_{\mathbf{y} \in Y_f}. \quad (7.3)$$

Vektorové pole designových rychlostí $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ je voleno tak, aby se rovnalo nule v té části Y_f , kterou uvažujeme tvarově neměnnou, což znamená, že nepodléhá designové optimalizaci, [14]. Vektorové pole designových rychlostí $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ je svázáno s vektorem optimalizačních

parametrů \mathbf{y} zobrazením $\{\mathbf{y}\} \rightarrow \Gamma_{sf}$. Uvažujme perturbaci $\delta\mathbf{y}$ vektoru designových proměnných. Pak platí

$$\{\delta\mathbf{y}\} \rightarrow \delta\Gamma_{sf} \equiv \{\mathbf{V}(\mathbf{y})\}, \quad \mathbf{y} \in \Gamma_{sf}. \quad (7.4)$$

7.2 Vztah materiálové a parciální derivace

Mějme hladkou funkci $f \in C^1(Z_f)$, kde $Z_f \supset Y_f$ je takové, že pro dostatečně malé τ je $\mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau) \in Z_f$ pro jakékoli $\mathbf{y} \in Y_f$. Předpokládáme, že funkce f závisí na aktuálním designu Y_f , perturbovaném pomocí designových rychlostí $\mathbf{V}(\mathbf{y})$, definovaných v (7.3), (7.4). $\tilde{f}(\mathbf{z}, \tau)$ značí funkci vyhodnocenou v bodě $\mathbf{z} = \mathbf{z}(\tau)$, vztaženou k perturbovanému designu $\tilde{Z}_f(\tau) = \{\mathbf{z} | \mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau) = \mathbf{y} + \tau\mathbf{V}(\mathbf{y})\}$. Díky parametrizaci designu pomocí umělého času τ dle (7.3) lze sledovat „pohyb“ materiálových částic. Definujme materiálovou derivaci

$$\delta f(\mathbf{y}) \equiv \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau), \tau) - f(\mathbf{y})}{\tau} = \delta_\tau f(\mathbf{y}) + \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial y_i} \mathcal{V}_i(\mathbf{y}). \quad (7.5)$$

Materiálová derivace (7.5) vystihuje změnu funkční hodnoty v bodě unášeném rychlostí $\mathbf{V}(\mathbf{y})$. První člen materiálové derivace, $\delta_\tau f(\mathbf{y})$, je parciální derivace podle umělého času τ ,

$$\delta_\tau f(\mathbf{y}) = \frac{\partial f(\mathbf{y})}{\partial \tau} = \lim_{\tau \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(\mathbf{y}, \tau) - f(\mathbf{y})}{\tau}, \quad (7.6)$$

která popisuje lokální změnu funkční hodnoty vyhodnocené v pevném bodě $\mathbf{y} \in Y_f$.

7.3 Odvození totální derivace složek tenzoru permeability

Hledáme totální derivaci $\delta\psi = \delta K_{ij}^H$. Dle (7.5) ji vyjádříme následovně:

$$\begin{aligned} \delta\psi(\tau, \mathbf{y}) &= \delta_\tau \psi(\tau, \mathbf{y}) + \frac{\partial \psi(\tau, \mathbf{y})}{\partial y_i} \mathcal{V}_i(\mathbf{y}) \\ \delta K_{ij}^H(\tau, \mathbf{y}) &= \delta_\tau K_{ij}^H(\tau, \mathbf{y}) + \frac{\partial K_{ij}^H(\tau, \mathbf{y})}{\partial y_k} \mathcal{V}_k(\mathbf{y}); \quad i, j, k = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\delta K_{ij}^H = \delta_\tau (\nabla \omega^i, \nabla \omega^j)_{Y_f} + (\nabla \delta \omega^i, \nabla \omega^j)_{Y_f} + (\nabla \omega^i, \nabla \delta \omega^j)_{Y_f}, \quad (7.8)$$

kde

$$\delta \omega^i = \delta_\tau \omega^i + \frac{\partial \omega^i}{\partial y_k} \mathcal{V}_k. \quad (7.9)$$

Totální (materiálová) derivace tenzoru permeability (7.8) obsahuje materiálovou derivaci (7.9) korektorové funkce $\boldsymbol{\omega}^i$ ve skalárním součinu s nezderivovanou funkcí $\boldsymbol{\omega}^i$. Tyto členy však lze eliminovat, podle [14] dokonce ani není nutno řešit adjungovanou úlohu. Systém (5.49) až (5.51) vyjádříme ve slabé formulaci, viz (6.1) a (6.2), pomocí zjednodušeného zápisu

$$(\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{v})_{Y_f} = 0 \quad \forall \boldsymbol{v} \in V, \quad (7.10)$$

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i, q)_{Y_f} = 0 \quad \forall q \in H_{\#}^1(Y_f). \quad (7.11)$$

Vztahy (7.10), (7.11) podrobíme materiálové derivaci.

$\delta(7.10)$:

$$\begin{aligned} & \delta_{\tau}(\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{v})_{Y_f} + (\nabla \delta \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{v})_{Y_f} + (\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \delta \boldsymbol{v})_{Y_f} - \\ & - \delta_{\tau}(\pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\delta \pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\pi^i, \nabla \cdot \delta \boldsymbol{v})_{Y_f} - \\ & - \delta_{\tau}(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\delta \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{v})_{Y_f} - (\boldsymbol{e}^i, \delta \boldsymbol{v})_{Y_f} = 0 \end{aligned} \quad (7.12)$$

Jednotkový vektor \boldsymbol{e}^i je konstantní, jeho materiálová derivace $\delta \boldsymbol{e}^i$ je tedy nulová, a proto také $(\delta \boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{v})_{Y_f} = 0$. Testovací funkce \boldsymbol{v} je definována tak, že její materiálová derivace $\delta \boldsymbol{v}$ je rovna nule.

$\delta(7.11)$:

$$\delta_{\tau}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i, q)_{Y_f} + (\nabla \cdot \delta \boldsymbol{\omega}^i, q)_{Y_f} + (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^i, \delta q)_{Y_f} = 0 \quad (7.13)$$

Do (7.12) dosadíme $\boldsymbol{v} := \boldsymbol{\omega}^j$:

$$\begin{aligned} & \delta_{\tau}(\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} + (\nabla \delta \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} - \\ & - \delta_{\tau}(\pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} - (\delta \pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} - \delta_{\tau}(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} = 0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

Nyní využijeme vztahu (7.11), do něžž poté, co jsme zaměnili index i za j , dosadíme $q := \delta \pi^i$:

$$(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^j, \delta \pi^i)_{Y_f} = 0 \quad (7.15)$$

Díky symetrii bilineární formy, $(f, g)_{\Omega} = (g, f)_{\Omega}$, lze identitu (7.15) dosadit do rovnice (7.14), kterou tímto dále zjednodušíme.

$$\delta_{\tau}(\nabla \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} + (\nabla \delta \boldsymbol{\omega}^i, \nabla \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} - \delta_{\tau}(\pi^i, \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} - \delta_{\tau}(\boldsymbol{e}^i, \boldsymbol{\omega}^j)_{Y_f} = 0 \quad (7.16)$$

Z (7.16) vyjádříme člen s materiálovou derivací $\delta\omega^i$:

$$(\nabla\delta\omega^i, \nabla\omega^j)_{Y_f} = -\delta_\tau(\nabla\omega^i, \nabla\omega^j)_{Y_f} + \delta_\tau(\mathbf{e}^i, \omega^j)_{Y_f} + \delta_\tau(\pi^i, \nabla \cdot \omega^j)_{Y_f} \quad (7.17)$$

Z (7.13), poté, co jsme původní index i zaměnili za j , dosadili $q := \pi^i$ a uplatnili (7.15), vyplývá

$$(\pi^i, \nabla \cdot \delta\omega^j)_{Y_f} = -\delta_\tau(\pi^i, \nabla \cdot \omega^j)_{Y_f}. \quad (7.18)$$

Identitu (7.17) dosadíme do vzorce (7.8) pro výpočet totální derivace tenzoru permeability K_{ij}^H , který upravíme na výsledný tvar

$$\begin{aligned} \delta K_{ij}^H = & -\delta_\tau(\nabla\omega^i, \nabla\omega^j)_{Y_f} + \delta_\tau(\mathbf{e}^i, \omega^j)_{Y_f} + \delta_\tau(\mathbf{e}^j, \omega^i)_{Y_f} + \\ & + \delta_\tau(\pi^i, \nabla \cdot \omega^j)_{Y_f} + \delta_\tau(\pi^j, \nabla \cdot \omega^i)_{Y_f}. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Citlivost tenzoru permeability K_{ij}^H vzhledem k vektorovému poli designových rychlostí $\mathbf{V}(\mathbf{y})$ určíme dle vzorce (7.19). Dalším krokem bude vyčíslení všech integrálů v (7.19).

7.4 Odvození parciálních derivací bilineárních forem podle umělého času

Zavedeme pravidla derivování parciálně podle umělého času τ . Nejprve však bilineární formy v (7.19) ještě v nezderivované podobě vyjádříme v perturbované oblasti $Z_f(\tau)$. Poté je díky platnosti (7.3) transformujeme do Y_f .

$$(\nabla\omega^i, \nabla\omega^j)_{Z_f(\tau)} = \int_{Z_f(\tau)} \frac{\partial\omega_k^i}{\partial z_l(\tau)} \frac{\partial\omega_k^j}{\partial z_l(\tau)} dz = \int_{Y_f} \frac{\partial\omega_k^i}{\partial y_m} \frac{\partial y_m}{\partial z_l(\tau)} \frac{\partial\omega_k^j}{\partial y_n} \frac{\partial y_n}{\partial z_l(\tau)} J(\mathbf{z}) dy, \quad (7.20)$$

kde $J(\mathbf{z}) = J(\mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau)) = \det \left[\frac{\partial z_i(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_j} \right]$ je Jakobiho matice.

$$(\mathbf{e}^i, \omega^j)_{Z_f(\tau)} = \int_{Z_f(\tau)} e_k^i \omega_k^j dz = \int_{Y_f} e_k^i \omega_k^j J(\mathbf{z}) dy \quad (7.21)$$

$$(\pi^i, \nabla \cdot \omega^j)_{Z_f(\tau)} = \int_{Z_f(\tau)} \pi^i \frac{\partial\omega_k^j}{\partial z_k(\tau)} dz = \int_{Y_f} \pi^i \frac{\partial\omega_k^j}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial z_k(\tau)} J(\mathbf{z}) dy \quad (7.22)$$

7.4.1 Pravidla derivování parciálně podle umělého času

Zavedme následující pravidla derivování parciálně podle umělého času τ .

a)

$$\begin{aligned} \delta_\tau \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial z_i(\mathbf{y}, \tau)}{\partial y_j} \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{\partial (y_i + \tau \mathcal{V}_i(\mathbf{y}))}{\partial y_j} \right] \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\delta_{ij} + \tau \frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \right] \Big|_{\tau=0} \\ \delta_\tau \left(\frac{\partial z_i}{\partial y_j} \right) &= \frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \end{aligned} \quad (7.23)$$

b)

$$\delta_\tau \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j(\mathbf{y}, \tau)} \right) \Big|_{\tau=0} = ??? \quad (7.24)$$

Pro odvození vztahu (7.24) využijeme následující identity:

$$\mathbf{X}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{I},$$

kde \mathbf{X} je regulární čtvercová matice a \mathbf{I} matice jednotková. Na místo matice \mathbf{X} dosadíme deformační gradient $F_{ij} = \frac{\partial z_i}{\partial y_j}$.

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_j} = \delta_{ij} \quad (7.25)$$

Vztah (7.25) zderivujeme parciálně podle τ , přičemž stejně jako v (7.23) derivaci provedeme pro $\tau = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial z_i(\tau)}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial z_j(\tau)} \right) \Big|_{\tau=0} &= 0 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial z_i(\tau)}{\partial y_k} \right) \Big|_{\tau=0} \frac{\partial y_k}{\partial z_j(0)} + \frac{\partial z_i(0)}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y_k}{\partial z_j(\tau)} \right) \Big|_{\tau=0} \\ 0 &= \frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial y_j} + \frac{\partial y_i}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y_k}{\partial z_j(\tau)} \right) \Big|_{\tau=0} \\ \delta_{ik} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial y_k}{\partial z_j(\tau)} \right) \Big|_{\tau=0} &= -\delta_{kj} \frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_k} \\ \delta_\tau \left(\frac{\partial y_i}{\partial z_j} \right) &= -\frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_j} \end{aligned} \quad (7.26)$$

c)

$$\delta_\tau J(\mathbf{z}(\mathbf{y}, \tau)) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\det \left[\frac{\partial z_i(\mathbf{z}, \tau)}{\partial y_j} \right] \right) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \mathcal{V}_i(\mathbf{y})}{\partial y_i} = \operatorname{div} \mathbf{V} \quad (7.27)$$

Pro parciální derivace integrálních vztahů (7.20) až (7.22) podle τ budeme dále potřebovat hodnotu Jakobiánu pro $\tau = 0$.

$$J(\mathbf{z}(\mathbf{y}, 0)) = \det \left[\frac{\partial z_i(\mathbf{y}, 0)}{\partial y_j} \right] = \det \left[\frac{\partial y_i}{\partial y_j} \right] = \det[\delta_{ij}] = 1 \quad (7.28)$$

7.4.2 Parciální derivace bilineárních forem podle umělého času

Se znalostí všech pravidel pro derivování parciálně podle τ můžeme nyní přistoupit k odvození parciálních derivací vztahů (7.20) až (7.22).

$\delta_\tau(7.20)$:

$$\begin{aligned} \delta_\tau(\nabla \omega^i, \nabla \omega^j)_{Z_f(0)=Y_f} &= \int_{Y_f} \left(\operatorname{div}(\mathbf{V}) \delta_{ml} \delta_{nl} - \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_l} \delta_{nl} - \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial y_l} \delta_{ml} \right) \frac{\partial \omega_k^i}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_k^j}{\partial y_n} d\mathbf{y} \\ \delta_\tau(\nabla \omega^i, \nabla \omega^j)_{Z_f(0)=Y_f} &= \int_{Y_f} \left(\operatorname{div}(\mathbf{V}) \delta_{mn} - \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_n} - \frac{\partial \mathcal{V}_n}{\partial y_m} \right) \frac{\partial \omega_k^i}{\partial y_m} \frac{\partial \omega_k^j}{\partial y_n} d\mathbf{y} \end{aligned} \quad (7.29)$$

$\delta_\tau(7.21)$:

$$\delta_\tau(\mathbf{e}^i, \omega^j)_{Z_f(0)=Y_f} = \int_{Y_f} e_k^i \omega_k^j \operatorname{div}(\mathbf{V}) d\mathbf{y} \quad (7.30)$$

$\delta_\tau(7.22)$:

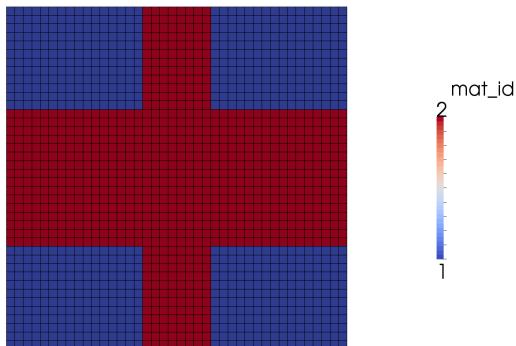
$$\delta_\tau(\pi^i, \nabla \cdot \omega^j)_{Z_f(0)=Y_f} = \int_{Y_f} \left(\operatorname{div}(\mathbf{V}) \delta_{lk} - \frac{\partial \mathcal{V}_l}{\partial y_k} \right) \pi^i \frac{\partial \omega_k^j}{\partial y_l} d\mathbf{y} \quad (7.31)$$

Podíváme-li se na vztahy (7.29) až (7.31), je zřejmé, že operace parciální derivace podle τ do jisté míry zachovala původní podobu integrálů, viz (7.20) až (7.22). Integrály (7.29) až (7.31) se však odlišují maticemi, uzavřenými v kulatých závorkách, které oproti integrálním vztahům (7.20) až (7.22) nejsou jednotkové.

7.5 Testovací úloha pro numerické řešení citlivosti složek tenzoru permeability

Funkčnost získaných vztahů citlivostní analýzy vyzkoušíme na jednoduché testovací úloze, přičemž vektorové pole designových rychlostí $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ bude definováno pomocí tzv. spline boxu.

7.5.1 Spline box



obr. 30: Referenční buňka Y v geometrickém uspořádání varianty č. 8, diskretizovaná síť konečných prvků.

Mějme referenční buňku Y v geometrickém uspořádání odpovídajícím variantě č. 8, viz kapitola 6 a **obr. 30**. Oblast tekutiny Y_f , materiál 2, je značena červeně, zbylé části, tedy oblast solidu Y_s , materiál 1, jsou znázorněny modře.

V tvarové optimalizaci lze danou výpočetní oblast parametrizovat pomocí spline boxu. Více v [21] a [22]. Spline box S^I je reprezentací třídimenzionálního tělesa \mathcal{B}^I . Předpokládáme sjednocení $\mathcal{B} = \sum_{I=1}^{NSB} \mathcal{B}^I$ kvádrů (boxů) \mathcal{B}^I takových, že výpočetní

oblast $\Omega \subset \mathcal{B}$. Toto si lze představit jako vložení oblasti Ω do krabice a její obestavení dalšími krabicemi tak, že vnější pozorovatel vidí pouze na sebe a vedle sebe naskládané krabice.

Parametrizace spline křivek parametrem t je definována v počáteční konfiguraci \mathcal{B}_0 . Řídící polyedr označíme $\{\mathbf{b}\}$, $\mathbf{b} = (b_r^{ijk})$; $r = 1, 2, 3$, a definujeme zobrazení $S^I: \mathbf{t} \rightarrow \mathbf{y}$,

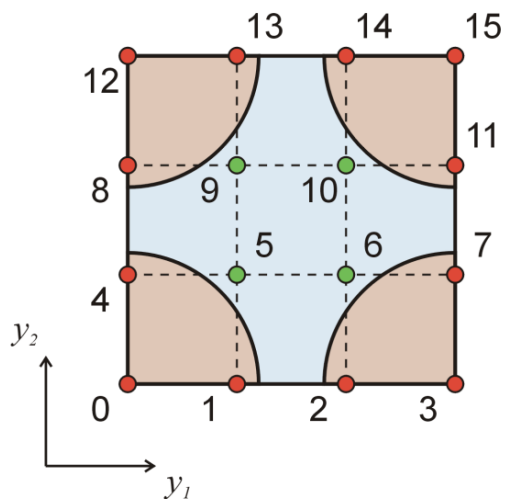
$$\mathbf{x} = S^I(\{\mathbf{b}\}, \{N\}, \mathbf{t}) \equiv \left[\sum_{i=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{n_j} \sum_{k=1}^{n_k} \mathbf{b}^{ijk} N^i(t_1) N^j(t_2) N^k(t_3) \right]_I; \quad \mathbf{t} = (t_r) \in \mathcal{B}_0^I, \quad (7.32)$$

kde $N^i(t_r)$; $\mathbf{t} \in (a_r, b_r)$ jsou bázové funkce B-splinu.

Pohneme-li některým z bodů řídicího polyedru v libovolném směru, změní se nejen tvar samotného spline boxu, ale díky parametrizaci i design vnořené oblasti Ω . Toho právě využijeme pro otestování algoritmu citlivostní analýzy.

Definujme dvojdimenzionální spline box

$$S(\{\mathbf{b}\}, \{N\}, \mathbf{t}) \equiv \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 \mathbf{b}^{ij} N^i(t_1) N^j(t_2); \quad \mathbf{t} = (t_r) \in \mathcal{B}_0. \quad (7.33)$$



obr. 31: Splinebox s očíslovanými řídicími body. Červené body leží na vnější, Y -periodické hranici ∂Y , zelené body 5, 6, 9 a 10 jsou vnitřními body spline boxu a oblasti Y .

Jde o čtvercovou síť s šestnácti řídicími body, jak ilustruje **obr. 31**. Translací některého z řídicích bodů z jeho základní polohy je iniciováno pole designových rychlostí $\mathcal{V}(\mathbf{y})$ příslušející této konkrétní změně designu oblasti.

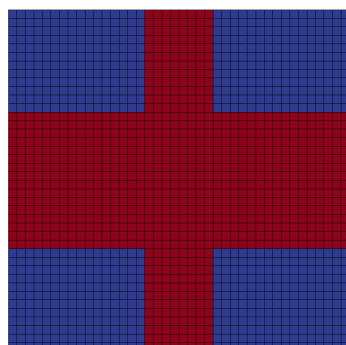
Abychom zachovali periodicitu perturbovaného designu referenční buňky Y , omezíme deformaci splineboxu pouze na jeho vnitřní body P_5 , P_6 , P_9 a P_{10} , přičemž každý z těchto bodů po řadě posuneme o jedničku postupně v každém ze směrů souřadnicových os. Získáme celkem osm nových deformovaných designů, pro které vyčíslíme citlivost tenzoru permeability na změnu tvaru, zapříčiněnou právě deformací mřížky řídicích uzlů spline boxu.

7.5.2 Citlivost tenzoru permeability na změnu tvaru výpočetní oblasti – spline box

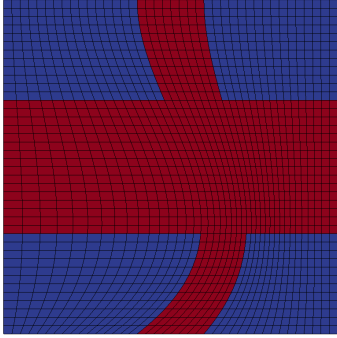
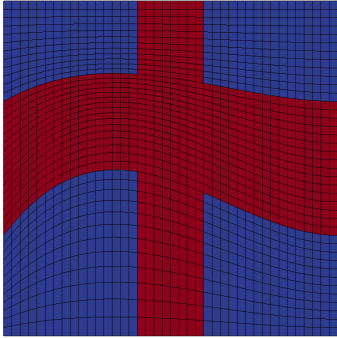
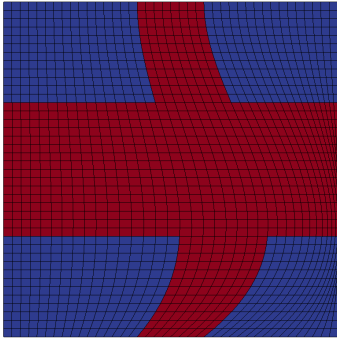
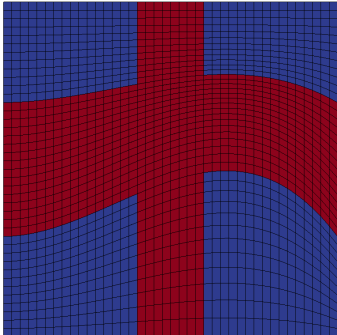
Pro počáteční design výpočetní oblasti Y_f , viz **obr. 30**, byl ve *SfePy* nejprve určen tenzor permeability \mathbf{K}^H nezdeformované referenční buňky Y . Poté byla vyčíslena citlivost $\delta\mathbf{K}^H$ tenzoru permeability na změnu tvaru výpočetní oblasti Y_f , danou osmi různými perturbacemi spline boxu.

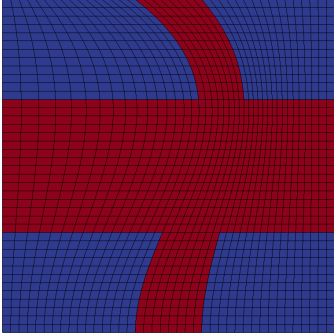
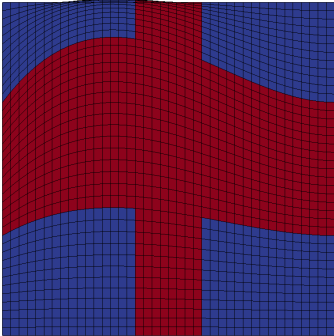
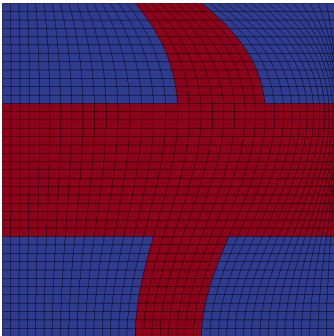
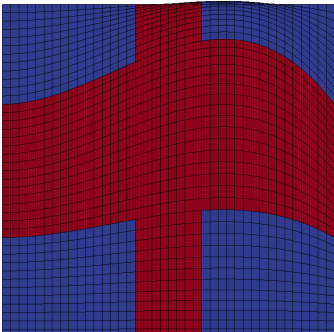
| | | |
|---------------|--|---------------------|
| | Nedeformovaná referenční buňka Y v počáteční konfiguraci | Tenzor permeability |
| Perturbace č. | | |

0)
počáteční
konfigurace



$$\mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 5586,3975 & 0 \\ 0 & 951,4880 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

| Perturbace č. | Deformovaná referenční buňka Y po perturbaci spline boxu | Citlivost tenzoru permeability |
|--|---|---|
| <p>1)</p> <p>P_5: $y_1 = 1, y_2 = 0$</p> <p>$P_{6,9,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_5 \rightarrow e_1}^H = \begin{bmatrix} -117,1166 & 51,6260 \\ 51,6260 & -395,7916 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>2)</p> <p>P_5: $y_1 = 0, y_2 = 1$</p> <p>$P_{6,9,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_5 \rightarrow e_2}^H = \begin{bmatrix} -2503,1840 & 83,1331 \\ 83,1331 & -140,6146 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>3)</p> <p>P_6: $y_1 = 1, y_2 = 0$</p> <p>$P_{5,9,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_6 \rightarrow e_1}^H = \begin{bmatrix} 117,1166 & 51,6260 \\ 51,6260 & 395,7916 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>4)</p> <p>P_6: $y_1 = 0, y_2 = 1$</p> <p>$P_{5,9,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_6 \rightarrow e_2}^H = \begin{bmatrix} -2503,1840 & -83,1331 \\ -83,1331 & -140,6146 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |

| Perturbace č. | Deformovaná referenční buňka Y po perturbaci spline boxu | Citlivost tenzoru permeability |
|---|---|--|
| <p>5)</p> <p>P_9: $y_1 = 1, y_2 = 0$</p> <p>$P_{5,6,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_9 \rightarrow e_1}^H = \begin{bmatrix} -117,1166 & -51,6260 \\ -51,6260 & -395,7916 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>6)</p> <p>P_9: $y_1 = 0, y_2 = 1$</p> <p>$P_{5,6,10}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_9 \rightarrow e_2}^H = \begin{bmatrix} 2503,1840 & 83,1331 \\ 83,1331 & 140,6146 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>7)</p> <p>P_{10}: $y_1 = 1, y_2 = 0$</p> <p>$P_{5,6,9}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_{10} \rightarrow e_1}^H = \begin{bmatrix} 117,1166 & -51,6260 \\ -51,6260 & 395,7916 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |
| <p>8)</p> <p>P_{10}: $y_1 = 0, y_2 = 1$</p> <p>$P_{5,6,9}$: $y_1 = y_2 = 0$</p> |  | $\delta \mathbf{K}_{P_{10} \rightarrow e_2}^H = \begin{bmatrix} 2503,1840 & -83,1331 \\ -83,1331 & 140,6146 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ |

Z výše uvedených výsledků je zřejmé, že citlivost $\delta \mathbf{K}^H$ tenzoru permeability \mathbf{K}^H na změnu geometrie, vyvolanou posunutím jednoho z řídicích bodů spline boxu o jedničku ve směru souřadnicové osy, je řádově srovnatelná se samotnou permeabilitou. To znamená, že tenzor permeability \mathbf{K}^H je velmi citlivý na deformaci výpočetní oblasti Y_f .

7.5.3 Citlivost tenzoru permeability na změnu tvaru výpočetní oblasti – výpočet pomocí konečných diferencí

Způsobnost algoritmu pro výpočet citlivosti tenzoru permeability pomocí spline boxu můžeme snadno ověřit provedením výpočtu $\delta\mathbf{K}^H$ konečnými diferencemi.

Konečná diference funkce je aproximací derivace této funkce. Platí-li pro derivaci funkce

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

pak centrální diference funkce $f(x)$ je její konečnou aproximací. Píšeme

$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x}. \quad (7.34)$$

Máme-li funkci $f(\mathbf{x})$; $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dimenze n , pak lze pomocí centrální diference aproximovat i -tou parciální derivaci funkce $f(\mathbf{x})$ následovně:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{2\Delta x_i} \quad (7.35)$$

Vzorec (7.35) využijeme pro aproximativní výpočet citlivosti $\delta\mathbf{K}^H$ při posunutí řídicího bodu P_5 ve směru souřadnicové osy y_1 , resp. y_2 .

$$\mathbf{K}_{+\Delta y_1}^H = \mathbf{K}^H \left(P_5(y_1^{P_5} + \Delta y_1^{P_5}, y_2^{P_5}), P_6(y_1^{P_6}, y_2^{P_6}), P_9(y_1^{P_9}, y_2^{P_9}), P_{10}(y_1^{P_{10}}, y_2^{P_{10}}) \right)$$

$$\mathbf{K}_{-\Delta y_1}^H = \mathbf{K}^H \left(P_5(y_1^{P_5} - \Delta y_1^{P_5}, y_2^{P_5}), P_6(y_1^{P_6}, y_2^{P_6}), P_9(y_1^{P_9}, y_2^{P_9}), P_{10}(y_1^{P_{10}}, y_2^{P_{10}}) \right)$$

$$\delta\mathbf{K}^H|_{\Delta y_1^{P_5}} \approx \frac{\mathbf{K}_{+\Delta y_1}^H - \mathbf{K}_{-\Delta y_1}^H}{2\Delta y_1^{P_5}} \quad (7.36)$$

$$\mathbf{K}_{+\Delta y_2}^H = \mathbf{K}^H \left(P_5(y_1^{P_5}, y_2^{P_5} + \Delta y_2^{P_5}), P_6(y_1^{P_6}, y_2^{P_6}), P_9(y_1^{P_9}, y_2^{P_9}), P_{10}(y_1^{P_{10}}, y_2^{P_{10}}) \right)$$

$$\mathbf{K}_{-\Delta y_2}^H = \mathbf{K}^H \left(P_5(y_1^{P_5}, y_2^{P_5} - \Delta y_2^{P_5}), P_6(y_1^{P_6}, y_2^{P_6}), P_9(y_1^{P_9}, y_2^{P_9}), P_{10}(y_1^{P_{10}}, y_2^{P_{10}}) \right)$$

$$\delta\mathbf{K}^H|_{\Delta y_2^{P_5}} \approx \frac{\mathbf{K}_{+\Delta y_2}^H - \mathbf{K}_{-\Delta y_2}^H}{2\Delta y_2^{P_5}} \quad (7.37)$$

Citlivost $\delta \mathbf{K}^H|_{\Delta y_r^{P_5}}$, $r = 1, 2$ byla vypočítána pro inkreментy $\Delta y_r^{P_5} = \{0,01; 0,001; 0,0001\}$.

$$\text{Norma tenzoru } \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 5586,3975 & 0 \\ 0 & 951,4880 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}; \quad \|\mathbf{K}^H\| = 5666,84803776 \cdot 10^{-6}$$

$$\delta \mathbf{K}^H|_{y_1^{P_5}+|e_1|} \text{ pomocí spline boxu: } \delta \mathbf{K}^H|_{y_1^{P_5}+|e_1|} = \begin{bmatrix} -117,116554 & 51,6260049 \\ 51,6260049 & -395,791559 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

| $\Delta y_1^{P_5}$ | $\delta \mathbf{K}^H _{\Delta y_1^{P_5}}$ pomocí centrální diference | Relativní chyba |
|--------------------|--|---|
| | | $\frac{1}{\ \mathbf{K}^H\ } (\delta \mathbf{K}^H _{y_1^{P_5}+ e_1 } - \delta \mathbf{K}^H _{\Delta y_1^{P_5}})$ |
| 0,01 | $\begin{bmatrix} -117,116903 & 51,6251573 \\ 51,6251573 & -395,787964 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} 61,5826069 & 149,577135 \\ 149,577135 & -634,383410 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$ |
| 0,001 | $\begin{bmatrix} -117,116558 & 51,6259964 \\ 51,6259964 & -395,791523 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} 0,622829077 & 1,49580324 \\ 1,49580324 & -6,34349404 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$ |
| 0,0001 | $\begin{bmatrix} -117,116554 & 51,6260048 \\ 51,6260048 & -395,791559 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} -12,8246888 & 15,0614383 \\ 15,0614383 & -69,0342298 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}$ |

$$\delta \mathbf{K}^H|_{y_2^{P_5}+|e_2|} \text{ pomocí spline boxu: } \delta \mathbf{K}^H|_{y_2^{P_5}+|e_2|} = \begin{bmatrix} -2503,18390 & 83,1331317 \\ 83,1331317 & -140,614613 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

| $\Delta y_2^{P_5}$ | $\delta \mathbf{K}^H _{\Delta y_2^{P_5}}$ pomocí centrální diference | Relativní chyba |
|--------------------|--|---|
| | | $\frac{1}{\ \mathbf{K}^H\ } (\delta \mathbf{K}^H _{y_2^{P_5}+ e_2 } - \delta \mathbf{K}^H _{\Delta y_2^{P_5}})$ |
| 0,01 | $\begin{bmatrix} -2503,16370 & 83,1322975 \\ 83,1322975 & -140,614957 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} -3564,12109 & 147,204145 \\ 147,204145 & 60,7302566 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$ |
| 0,001 | $\begin{bmatrix} -2503,18370 & 83,1331233 \\ 83,1331233 & -140,614616 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} -35,6427405 & 1,47179770 \\ 1,47179770 & 0,607150648 \end{bmatrix} \cdot 10^{-9}$ |
| 0,0001 | $\begin{bmatrix} -2503,18390 & 83,1331316 \\ 83,1331316 & -140,614613 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$ | $\begin{bmatrix} -407,348683 & 13,5599935 \\ 13,5599935 & 6,27952510 \end{bmatrix} \cdot 10^{-12}$ |

Výsledky výpočtu citlivosti pomocí konečných diferencí potvrzují správnost algoritmu pro výpočet citlivosti. Z výše uvedených tabulek je zřejmé, že se snižující se hodnotou inkreментu $\Delta y_r^{P_5}$ došlo též k poklesu relativní chyby, která v případě $\Delta y_r^{P_5} = 0,0001$ dosahovala hodnot řádu 10^{-10} až 10^{-12} .

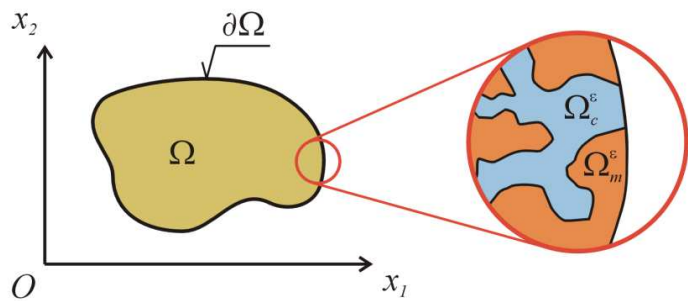
Znalost vztahů (7.29) až (7.31) pro výpočet citlivosti $\delta \mathbf{K}^H$ tenzoru permeability \mathbf{K}^H pomocí metody designových rychlostí využijeme v kapitole 8.2, ve které zavedeme lineární funkční závislost tenzoru permeability \mathbf{K}^H na hodnotě tlaku v tekutině a deformaci skeletu porézního materiálu, a to právě pomocí citlivostí $\delta \mathbf{K}^H$ vůči těmto veličinám.

8 Matematický model poroelastického média

Na úvod této kapitoly formulujeme matematický model poroelastického média, na který následně (bez odvození) aplikujeme metodu homogenizace. Získáme mikroúlohu pro výpočet korektorových funkcí, z nichž sestavíme efektivní koeficienty a ty dosadíme do vztahů makroúlohy ve tvaru Biotova modelu poroelastického média. Ten poté modifikujeme dosazením Darcyho zákona, viz kapitola 5.7.4, do rovnice rovnováhy pro tekutinu v pórech. Výsledkem je lineární model popisující interakci deformovatelné matrice a tekutiny, která vyplňuje prostor pórů. Nakonec lineární model zpřesníme zavedením implicitní závislosti tenzoru permeability na řešení, čímž se zmíněný model stane nelineárním.

8.1 Homogenizovaný lineární model elastostatiky poroelastické matrice

Mějme oblast Ω , jež představuje objem, který v prostoru zaujímá těleso z poddajného poroelastického materiálu. Oblast $\Omega \in \mathbb{R}^N$ je souvislá, otevřená a omezená s hranicí $\partial\Omega$, [1], [23]. Je popsána pomocí souřadnicového systému $Ox_1x_2 \dots x_N$, kde N je dimenze úlohy. Poroelastická oblast Ω se dělí na dvě disjunktí podoblasti:



obr. 32: Poroelastická oblast Ω s hranicí $\partial\Omega$ a naznačenou vnitřní strukturou (viz výřez).

Ω_m^ε ... podoblast poddajné matrice (*matrix* – index m),

Ω_c^ε ... podoblast tekutinou vyplněných pórů (*channels* nebo *cavity* – index c), viz **obr. 32**.

Dále předpokládáme, že jak pro podoblast matrice Ω_m^ε , tak i pro podoblast pórů Ω_c^ε platí, že se jedná o souvislou podoblast, tvořenou jediným objemem (viz podkapitola 5.1 případ 1)). V případě Ω_c^ε je navíc veškerý objem podoblasti saturován tekutinou (FSPM materiál). Tlakové pole $p(\mathbf{x})$ v tekutině je plně v souladu s případem 1) konstantní. Označme jej \bar{p} , čímž zdůrazníme, že se jedná o jedinou skalární hodnotu tlaku, působícího v každém bodě tekutiny, při uvažování statické úlohy na oblasti Ω , [18].

$$p(\mathbf{x}) = \bar{p} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_f^\varepsilon \quad (8.1)$$

Na periodicky porézní oblasti Ω řešíme úlohu elastostatiky. Úkolem je najít $(\bar{p}^\varepsilon, \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}))$ takové, že

$$\nabla \cdot (\mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) + \mathbf{f}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{v } \Omega_m^\varepsilon, \quad (8.2)$$

$$\mathbf{n}^{[m]} \cdot (\mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) = \mathbf{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) \quad \text{na } \partial^{ext} \Omega_m^\varepsilon, \quad (8.3)$$

$$\mathbf{n}^{[m]} \cdot (\mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) = -\bar{p}^\varepsilon \mathbf{n}^{[m]} \quad \text{na } \Gamma_{mc}^\varepsilon, \quad (8.4)$$

[16], [18]. Vektorová rovnice (8.2) představuje statickou rovnováhu vnitřních a vnějších sil, kde $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ je vektor posunutí, \mathbb{D}^ε tenzor tuhosti čtvrtého řádu, $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)$ symetrický Cauchyův tenzor malých deformací (tenzor druhého řádu)

$$e_{ij}(\mathbf{u}^\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^\varepsilon}{\partial x_i} \right) \quad (8.5)$$

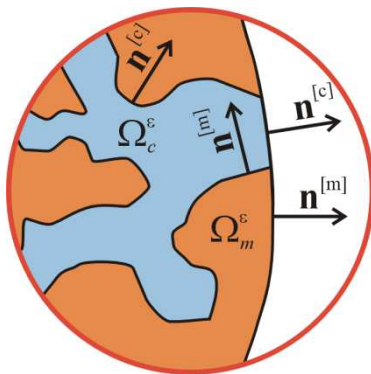
a \mathbf{f}^ε [$\text{N} \cdot \text{m}^{-3}$] vektor vnějších objemových sil. Pomocí vektoru \mathbf{f}^ε do modelu nejčastěji vkládáme vliv gravitačního zrychlení, může to však být také vliv jiného silového pole, např. elektromagnetického.

Vztahy (8.3) a (8.4) jsou okrajovými podmínkami rovnice (8.2), přičemž (8.3) se vztahuje na plošné zatížení \mathbf{g}^ε [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$] působící na vnější povrch matrice, tedy $\partial^{ext} \Omega_m^\varepsilon$, zatímco (8.4) popisuje rovnováhu napětí v matrici a tlaku \bar{p}^ε [Pa] v tekutině v bodech příslušejících fázovému rozhraní Γ_{mc}^ε . Vektor $\mathbf{n}^{[m]}$ je vektor jednotkové vnější normály k povrchu $\partial \Omega_m^\varepsilon$ matrice.

Protože máme celkem čtyři neznámé, $u_{x_1}^\varepsilon$, $u_{x_2}^\varepsilon$, $u_{x_3}^\varepsilon$ a \bar{p}^ε , musíme k podmínce statické silové rovnováhy ve směrech x_1 , x_2 a x_3 , viz rovnice (8.2), přidat ještě čtvrtou rovnici, kterou je rovnice globální rovnováhy tekutiny v pórech, jinak též rovnice zákona zachování hmoty pro tekutinu, [16], [18], [19], která má následující tvar:

$$J^\varepsilon := - \int_{\partial^{ext} \Omega_c^\varepsilon} \mathbf{u}_{rel}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^{[c]} dS_x = \int_{\partial \Omega_c^\varepsilon} \mathbf{u}^\varepsilon \cdot \mathbf{n}^{[c]} dS_x + \gamma \bar{p}^\varepsilon |\Omega_c^\varepsilon|, \quad (8.6)$$

kde $\mathbf{u}_{rel}^\varepsilon$ je relativní průsak tekutiny ze sítě kanálků do okolí, $\gamma \geq 0$ je hodnota objemové stlačitelnosti tekutiny v [Pa^{-1}] při konstantní teplotě, která splňuje vztah



obr. 33: Výřez oblasti Ω s vyznačenými vektory jednotkových vnějších normál.

$$\gamma = - \frac{1}{V} \left(\frac{dV}{dp} \right) \Big|_{T=konst.}, \quad (8.7)$$

[8], a $\mathbf{n}^{[c]}$ vektor jednotkové vnější normály orientovaný vně Ω_c^ε . J^ε [m^3] představuje nárůst objemu tekutiny v pórech následkem injektáže jistého množství další tekutiny z vnějšího okolí oblasti Ω do již tekutinou nasycené sítě kanálků Ω_c^ε . Takto definovaná změna objemu tekutiny vysvětluje znaménko minus v definičním vztahu J^ε , (8.6), neboť relativní průsak $\mathbf{u}_{rel}^\varepsilon$ tekutiny její vnější hranicí $\partial^{ext} \Omega_c^\varepsilon$ je míněn ve smyslu shodném s orientací vnější normály $\mathbf{n}^{[c]}$ k $\partial^{ext} \Omega_c^\varepsilon$, viz **obr. 33**, tedy ven z oblasti Ω_c^ε .

Nárůst J^ε objemu tekutiny je, jak dokládají členy na pravé straně rovnice (8.6), kompenzována jednak zvětšením porů matrice (posunutí matrice směrem

do jejího nitra, neboť platí $\mathbf{n}^{[m]} = -\mathbf{n}^{[c]}$, jednak stlačením tekutiny. Systém rovnic (8.2), (8.6) spolu s okrajovými podmínkami (8.3), (8.4) doplníme ještě o podmínku řešitelnosti

$$\int_{\partial^{ext}\Omega_m^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon dS_x + \int_{\Omega_m^\varepsilon} \mathbf{f}^\varepsilon dx = \mathbf{0}, \quad (8.8)$$

kteřá říká, že vnější povrchové a objemové síly jsou v rovnováze, [16], [18].

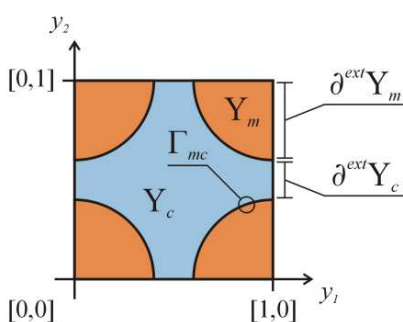
8.1.1 Slabá formulace rovnice elastostatiky poroelastického média

Systém (8.2) až (8.4) před homogenizací vyjádříme ve slabé formulaci. Za tím účelem vynásobíme rovnice (8.2) až (8.4) testovací funkcí $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_m^\varepsilon)$ a zintegrujeme přes podoblast Ω_m^ε . Po nezbytných úpravách, zahrnujících integraci per partes, získáme integrální rovnici

$$\int_{\Omega_m^\varepsilon} (\mathbb{D}^\varepsilon : \mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon)) : \mathbf{e}(\mathbf{v}) dx + \bar{p}^\varepsilon \int_{\Gamma_{mc}^\varepsilon} \mathbf{n}^{[m]} \cdot \mathbf{v} dS_x = \int_{\Omega_m^\varepsilon} \mathbf{f}^\varepsilon \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial^{ext}\Omega_m^\varepsilon} \mathbf{g}^\varepsilon \cdot \mathbf{v} dS_x \quad (8.9)$$

$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega_m^\varepsilon)$ pro neznámé $(\bar{p}^\varepsilon(\mathbf{x}), \mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})) \in \mathbf{H}^1(\Omega_m^\varepsilon)/\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, [16], [18]. Rovnice (8.9) spolu s rovnicí (8.6) zákona zachování hmoty pro tekutinu a podmínkou řešitelnosti (8.8) představují výchozí systém rovnic dvouškálových proměnných, na který aplikujeme některou z metod homogenizace pro získání dvou samostatných, na parametru ε nezávislých úloh podobně jako v případě Stokesova proudění, viz kapitola 5.

8.1.2 Mikroúloha elastostatiky poroelastické matrice



obr. 34: Jednotková referenční buňka Y mikroúlohy elastostatiky poroelastické matrice.

Předtím, než s odkazem na příslušné zdroje formulujeme mikroúlohu elastostatiky poroelastické matrice, zavedeme jednotkovou referenční buňku Y , viz **obr. 34**, téměř totožnou s tou, která byla použita v mikroúloze Stokesova proudění. Rozdíl spočívá pouze ve značení jednotlivých podoblastí a jejich hranic. Pro podoblasti Y_m a Y_c platí

$$Y_m \equiv Y_s \quad ; \quad Y_c \equiv Y_f \quad (8.10)$$

a analogii najdeme také v popisu hraničních ploch.

$$\Gamma_{mc} \equiv \Gamma_{sf} \quad ; \quad \partial^{ext} Y_m \equiv \partial^{ext} Y_s \quad ; \quad \partial^{ext} Y_c \equiv \partial^{ext} Y_f \quad (8.11)$$

V souladu s metodou asymptotických rozvoju lze vektor posuvu $\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x})$ předpokládat ve tvaru

$$\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \varepsilon \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (8.12)$$

kde $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ je makroskopický posuv na globální úrovni oblasti Ω , který budeme pro zdůraznění příslušnosti k makroskopickým veličinám závislých pouze na prostorové proměnné \mathbf{x} značit $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, a $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je dvouškálový vektor fluktuací posuvů.

Jak bylo řečeno v úvodu práce, vyvolá makroskopická deformace porézního materiálu lokální odezvu na úrovni referenční buňky Y . Při popisu této odezvy opět vycházíme z předpokladu metody asymptotických rozvoju, že k lokální deformaci referenční buňky Y dochází jednak vlivem makroskopické deformace, jednak díky lokálním fluktuacím deformace.

V limitním přechodu pro $\varepsilon \rightarrow 0$ tenzor deformace $\mathbf{e}(\mathbf{u}^\varepsilon(\mathbf{x}))$ dvouškálově konverguje k

$$\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) + \mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})), \quad (8.13)$$

[16], [18], kde $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$ představuje makroskopickou deformaci oblasti Ω vlivem posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a $\mathbf{e}_y(\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$ fluktuační část deformace. Abychom mohli určit lokální deformaci referenční buňky Y , musíme nejprve zavést tzv. transformační vektor $\Pi^{ij}(\mathbf{y})$, pro který platí

$$\Pi_k^{ij} = y_j \delta_{ik} \quad (8.14)$$

a pomocí kterého makroskopickou deformaci $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$ transformujeme do lokálního souřadnicového systému referenční buňky Y , viz následující odstavce.

Posunutí bodu uvnitř škálované buňky Y^ε je, stejně jako kdekoli v rámci makroskopické oblasti Ω , popsáno vzorcem (8.12). Přitom však vektor makroskopických posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ může dosahovat velikosti větší, než kolik činí charakteristická délka l_{micro} mikrostruktury. Vektor $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ tak může hrát roli translačního vektoru, popisujícího „pohyb“ škálované buňky Y^ε oblastí Ω .

Vydělíme-li (8.12) parametrem ε , získáme vztah pro popis posunutí v souřadnicovém systému referenční buňky Y .

$$\mathbf{u}_{micro}^\varepsilon(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{U}(\mathbf{x})}{\varepsilon} + \mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (8.15)$$

přičemž pro $\varepsilon \rightarrow 0$ roste podíl vektoru makroskopických posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a parametru ε nade všechny meze, což lze chápat jako opuštění referenční buňky Y a přeskok do jiné, potenciálně velmi vzdálené buňky Y , tzn. v souřadnicovém systému $Oy_1 \dots y_N$ referenční buňky Y se zaměříme pouze na vektor fluktuací posuvů $\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Ten podle definice uvedené v [16], [17]

a [18] sestává ze součtu vektoru $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, závisějícího prostřednictvím $\mathbf{\Pi}^{ij}$ na $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, a vektoru $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, což je vektor fluktuací posunutí způsobených heterogenitou, jinak řečeno výskytem pórů v materiálu.

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (8.16)$$

Zatímco pro vektor $\bar{\mathbf{u}}$ platí vztah

$$\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{\Pi}^{ij}(\mathbf{y}) e_{ij}^x(\mathbf{U}(\mathbf{x})), \quad (8.17)$$

volíme vektor $\tilde{\mathbf{u}}$ dle [16], [17] a [18] ve tvaru

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y}) e_{ij}^x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) - \boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y}) \bar{p}. \quad (8.18)$$

Z (8.18) je zřejmé, že i $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je dvouškálová proměnná, která závisí nejen na tenzoru makroskopických deformací $\mathbf{e}_x(\mathbf{U})$, ale také na konstantním tlaku \bar{p} v tekutině, a to prostřednictvím charakteristických posuvů $\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y})$ [m] a $\boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y})$ [m. Pa⁻¹], které jsou řešením následující mikroúlohy na podoblasti Y_m referenční buňky Y , [4], [16], [17], [18].

Určete $(\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y}), \boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y})) \in \mathbf{H}_{\#}^1(Y_m) \times \mathbf{H}_{\#}^1(Y_m)$ splňující

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} (\mathbb{D} : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^{ij})) : \mathbf{e}_y(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = -\frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} (\mathbb{D} : \mathbf{e}_y(\mathbf{\Pi}^{ij})) : \mathbf{e}_y(\mathbf{v}) d\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\#}^1(Y_m), \quad (8.19)$$

$$\frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} (\mathbb{D} : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^P)) : \mathbf{e}_y(\mathbf{v}) d\mathbf{y} = \int_{\Gamma_{mc}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^{[m]} dS_y \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_{\#}^1(Y_m), \quad (8.20)$$

$$\mathbf{y} \rightarrow \boldsymbol{\omega}^{ij} \text{ [m]}, \boldsymbol{\omega}^P \text{ [m. Pa}^{-1}\text{]} \dots Y\text{-periodické,}$$

kde $\mathbf{H}_{\#}^1(Y_m)$ je prostor všech vektorových funkcí Y -periodických na Y_m , [4], a $\mathbb{D} = [D_{ijkl}]$ značí tenzor tuhosti matrice porézního materiálu zbaveného veškeré tekutiny, což je stav v anglicky psané odborné literatuře označováný jako *drained*, viz [7], [16], [17] a [18].

Se znalostí charakteristických posuvů (též označovaných jako korektory) $\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y})$ a $\boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y})$ můžeme deformace referenční buňky Y popsat vztahem

$$\mathbf{e}_y(\mathbf{u}) = \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y}) + \mathbf{\Pi}^{ij}(\mathbf{y})) e_{ij}^x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) - \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y})) \bar{p}. \quad (8.21)$$

8.1.3 Sestavení homogenizovaných koeficientů rovnic úlohy elastostatiky

Z korektorových funkcí $\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y})$ a $\boldsymbol{\omega}^P(\mathbf{y})$ sestavíme následující efektivní koeficienty, které posléze dosadíme do homogenizovaných vztahů makroúlohy.

$$A_{ijkl}^H = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} (\mathbb{D} : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij})) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^{kl} + \boldsymbol{\Pi}^{kl}) d\mathbf{y} \quad (8.22)$$

$$B_{ij}^H = -\frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} \nabla_y \cdot \boldsymbol{\omega}^{ij} d\mathbf{y} \quad (8.23)$$

$$M^H = \frac{1}{|Y|} \int_{Y_m} (\mathbb{D} : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^P)) : \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\omega}^P) d\mathbf{y} \quad (8.24)$$

Tenzory \mathbb{A}^H a \mathbf{B}^H jsou symetrické, \mathbb{A}^H je navíc pozitivně definitní a skalár $M^H > 0$, jak dokládá [4], [16], [18] a [19]. Tensor \mathbb{A}^H čtvrtého řádu se nazývá tenzor efektivní tuhosti skeletu porézního materiálu ve vysušeném (*drained*) stavu. Dále zavádíme

$$\widehat{\mathbf{B}}^H = \mathbf{B}^H + \phi \mathbf{I} \quad ; \quad \widehat{M}^H = M^H + \phi \gamma, \quad (8.25)$$

přičemž $\widehat{\mathbf{B}}^H$ se nazývá tenzor Biotových koeficientů napětí a \widehat{M}^H efektivní Biotův modul stlačitelnosti, vyjadřující celkovou stlačitelnost tekutiny a skeletu, deformovaného působením tlaku v tekutině [4], [17].

Efektivní koeficienty \mathbb{A}^H , $\widehat{\mathbf{B}}^H$ a \widehat{M}^H použijeme v lineární makroúloze, o níž pojednává kapitola 8.1.4.

8.1.4 Lineární makroúloha elastostatiky poroelastického materiálu

Homogenizací systému (8.6), (8.8) a (8.9) nakonec obdržíme makroúlohu tohoto znění:

Nalezněte vektor posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ a tlak $\bar{p} \in \mathbb{R}$, které jsou řešením systému

$$\int_{\Omega} (\mathbb{A}^H : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}) - \bar{p} \widehat{\mathbf{B}}^H) : \mathbf{e}_x(\mathbf{v}) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} (1 - \phi) \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS_x, \quad (8.26)$$

$$\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{B}}^H : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}) d\mathbf{x} + (\bar{p} - p_0) \widehat{M}^H |\Omega| = J, \quad (8.27)$$

$\forall \mathbf{v}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, přičemž p_0 je referenční tlak, obvykle nulový, a J limita J^ε , [16], [17], [18]. Dříve, než budeme moci na oblasti Ω rovnice (8.26) a (8.27) řešit pro neznámé $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a \bar{p} , musíme tento nárůst J [m³] objemu tekutiny v pórech definovat.

Za tím účelem rovnicí kontinuity (8.27) nejprve zderivujeme podle času a navíc ji vyjádříme v diferenciálním tvaru

$$\widehat{\mathbf{B}}^H : \mathbf{e}_x(\dot{\mathbf{U}}) + \dot{p}\widehat{M}^H = \dot{\zeta}, \quad (8.28)$$

kde $\dot{\zeta}$ [s^{-1}] představuje měrnou rychlost relativního nárůstu objemu tekutiny ζ [1] (bezrozměrná veličina) a $\mathbf{e}_x(\dot{\mathbf{U}})$ tenzor rychlosti deformace.

Učiňme dále předpoklad týkající se tlaku \bar{p} . Při formulaci systému PDR elastostatiky porézního média jsme vycházeli z faktu, že porézní prostor je spojitý a tudíž tlak v něm je určen jedinou konstantní hodnotou \bar{p} . Připustíme-li však existenci malých gradientů tlaku, zřetelných pouze na globální úrovni tak, že lokálně se tlakové pole $p(\mathbf{x})$ i nadále jeví jako konstantní, $p(\mathbf{x}) \approx \bar{p} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{U}_\delta(\mathbf{x}_0); \mathbf{x}_0 \in \Omega$, [17], pak lze položit

$$\dot{\zeta} = -\nabla_x \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}), \quad (8.29)$$

[17], [18], [19], kam za $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ dosadíme z Darcyho zákona (5.67) při uvažování $\mathbf{f} = \mathbf{0}$.

$$\dot{\zeta} = \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{K}^H}{\eta_c} \nabla_x p(\mathbf{x}, t) \quad (8.30)$$

Vztah (8.30) poté dosadíme do rovnice (8.28).

$$\widehat{\mathbf{B}}^H : \mathbf{e}_x(\dot{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t)) + \dot{p}(\mathbf{x}, t)\widehat{M}^H - \nabla_x \cdot \frac{\mathbf{K}^H}{\eta_c} \nabla_x p(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (8.31)$$

Pro účely numerického výpočtu převedeme rovnici (8.31) do slabé formulace, přičemž po úpravě získáme integrální rovnici

$$\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{B}}^H : \mathbf{e}_x(\dot{\mathbf{U}}) q dx + \int_{\Omega} \dot{p}\widehat{M}^H q dx + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{K}^H}{\eta_c} \nabla_x p \cdot \nabla_x q dx = 0 \quad \forall q(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega). \quad (8.32)$$

Úloha elastostatiky poroelastického média s póry vyplněnými vazkou, nestlačitelnou newtonskou tekutinou je dána lineárním, časově závislým systémem

$$\int_{\Omega} (\mathbb{A}^H : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}) - \bar{p}\widehat{\mathbf{B}}^H) : \mathbf{e}_x(\mathbf{v}) dx = \int_{\Omega} (1 - \phi)\mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{v} dS_x \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \quad (8.33)$$

$$\int_{\Omega} \widehat{\mathbf{B}}^H : \mathbf{e}_x(\dot{\mathbf{U}}) q dx + \int_{\Omega} \dot{p}\widehat{M}^H q dx + \int_{\Omega} \frac{\mathbf{K}^H}{\eta_c} \nabla_x p \cdot \nabla_x q dx = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (8.34)$$

pro určení neznámých $U_{x_1}(\mathbf{x}, t), \dots, U_{x_N}(\mathbf{x}, t)$ a $p(\mathbf{x}, t)$.

8.1.5 Makroúloha elastostatiky poroelastického média v ustáleném stavu

Než přejdeme k numerickému výpočtu konkrétní okrajové úlohy, zavedme některá zjednodušení. Předně budeme v dalším uvažovat stacionární, tedy ustálený stav, což znamená, že rovnice (8.32) se redukuje na již známý tvar

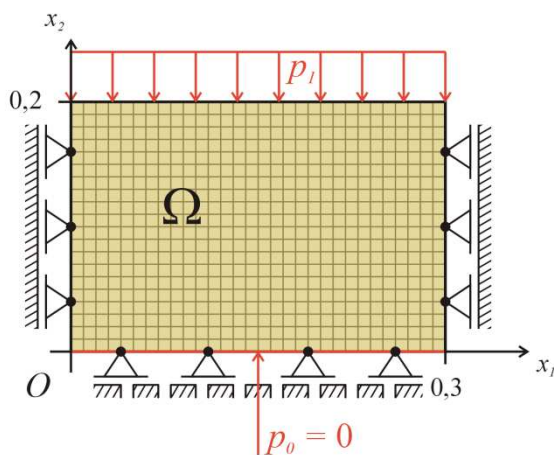
$$\int_{\Omega} \frac{1}{\eta_c} \mathbf{K}^H \nabla_x p(\mathbf{x}) \cdot \nabla_x q d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \quad (8.35)$$

s tlakovými Dirichletovými okrajovými podmínkami (viz kapitola 6.1.2 vzorec (6.6)).

Protože řešíme úlohu elastostatiky, neuvažujeme vznik jakýchkoli dynamických jevů a nezohledňujeme ani vliv gravitačního zrychlení, které v daném problému nepředstavuje významnou hybnou sílu. Díky tomu vypadne z rovnice (8.33) integrál obsahující vektor objemových sil \mathbf{f} . Zachován však zůstává integrál po hranici $\partial\Omega$ oblasti Ω , v němž vystupuje vektor povrchových sil \mathbf{g} [$\text{N} \cdot \text{m}^{-2}$], který předpokládáme ve tvaru

$$\mathbf{g} = (1 - \phi) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} + \phi(-p) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}, \quad (8.36)$$

kde $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$ je tenzor napjatosti, $p = p(\mathbf{x})$ hledaný tlak, \mathbf{I} jednotková matice, \mathbf{n} vektor vnější jednotkové normály k hranici $\partial\Omega$ a ϕ poróznost materiálu. Ve vzorci (8.36) představuje člen $(1 - \phi) \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ zatížení pevné části povrchu, člen $\phi(-p) \mathbf{I} \cdot \mathbf{n}$ pak zatížení od tlaku v tekutině působící na její hladinu v pórech, které vyúsťují na povrch (vycházíme z představy, že porézní materiál je v tekutině celý ponořen).



obr. 35: Schematické znázornění možného laboratorního pokusu.

Představme si následující laboratorní pokus. Zkušební vzorek z porézního materiálu umístíme do nádoby s perforovaným dnem, tedy jakýmsi sítím, u něhož budeme pro jednoduchost uvažovat poróznost shodnou s porózností zkušební vzorku. Velikost a tvar zkušební vzorku přesně odpovídá velikosti a tvaru nádoby – s výjimkou její výšky. Z toho vyplývá, že krajní plochy zatíženého vzorku porézního materiálu mohou po stěnách nádoby klouzat, ve směru normály k příslušné stěně nádoby je však jejich pohyb zabráněno, jak ukazuje **obr. 35**. Horní plocha $\partial\Omega_{top}$ vzorku se může posouvat libovolně.

Na **obr. 35** je zřejmá také uvažovaná zátěžná síla, indukovaná tlakem p_1 . Toto zatížení horní plochy zkušební vzorku považujeme za rovnoměrně působící jak na pevný povrch, tak na hladinu tekutiny v pórech, zatímco boční plochy vzorku tlakem p_1 namáhány nejsou.

Na spodní plochu vzorku působí tlaková síla od tlaku p_0 , pro který však platí $p_0 = 0$ Pa. Za těchto okolností lze pro povrchovou sílu \mathbf{g} psát

$$\mathbf{g} = \begin{cases} -p_1 \mathbf{n} & \text{na } \partial\Omega_{top} \\ \mathbf{0} & \text{na } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{top} \end{cases}, \quad (8.37)$$

kde $\boldsymbol{\sigma} = -p_1 \mathbf{I}$ na $\partial\Omega_{top}$. Řešíme tedy úlohu

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\mathbb{A}^H : \mathbf{e}_x(\mathbf{U}) - \bar{p} \widehat{\mathbf{B}}^H) : \mathbf{e}_x(\mathbf{v}) dx &= - \int_{\partial\Omega_{top}} p_1 \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} dS_x \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \frac{\mathbf{K}^H}{\eta_c} \nabla_x p \cdot \nabla_x q dx &= 0 \quad \forall q \in H^1(\Omega) \\ p &= p_1 \quad \text{na } \partial\Omega_{top} \\ p &= p_0 = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_{bottom} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{U} &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega \setminus \partial\Omega_{top} \end{aligned} \quad (8.38)$$

pro neznámé pole posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ a tlakové pole $p(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ s Dirichletovými okrajovými podmínkami (8.38)₃ a (8.38)₄ pro tlak na horní a spodní ploše výpočetní oblasti a podmínkou (8.38)₅ absolutně tuhých stěn nádoby, ve které se zkušební vzorek nachází (posuv krajní plochy vzorku je ve směru vnější normály k příslušné stěně nádoby nulový). Vektor $\mathbf{g} = -p_1 \mathbf{n}$ na $\partial\Omega_{top}$ vyjadřuje průměrné napětí povrchových sil působících na horní plochu výpočetní oblasti.

8.2 Nelineární model elastostatiky poroelastického média

Tensor permeability \mathbf{K}^H je funkcí geometrie prostoru pórů, jak jsme se přesvědčili v kapitole 5.7, pojednávající krom jiného i o konstrukci tenzoru \mathbf{K}^H . Ve zmíněné kapitole jsme ovšem volbou lineárního modelu Stokesova proudění předpokládali pouze tok vazké nestlačitelné newtonské tekutiny předem definovanou a neměnnou geometrií kanálků, tvořících spojitou dutinu v absolutně tuhé matici porézního média. Poroelastický model, představený v kapitole 8.1, však navíc pracuje s elastickým skeletem, který se vlivem působení vnějších sil i tlaku v tekutině deformuje, čímž dochází ke geometrickým změnám též na lokální úrovni referenční buňky Y . A tím i k ovlivnění tenzoru permeability \mathbf{K}^H , neboť ten je funkcí právě geometrie podoblasti $Y_f \equiv Y_c$ referenční buňky Y . Zmíněnou závislost v rámci této kapitoly zakomponujeme do lineárního poroelastického modelu, představeného v předchozí kapitole, čímž dojde ke zpřesnění modelu. Současně to ale znamená, že se model stane nelineárním.

8.2.1 Zavedení závislosti tenzoru permeability na řešení

Díky znalosti konstrukce efektivních koeficientů \mathbb{A}^H , \mathbf{B}^H , (M^H) , resp. \mathbf{K}^H víme, že velikost jejich složek závisí na korektorových funkcích $\boldsymbol{\omega}^{ij}$, $\boldsymbol{\omega}^P$, resp. $\boldsymbol{\omega}^i$, přičemž tyto jsou funkcí geometrie podoblasti Y_m , resp. Y_f referenční buňky Y . Každé zatížení makroskopické oblasti Ω vyvolá její deformaci, kterou lze známým způsobem (viz vzorec (8.21)) přenést do souřadnicového systému $Oy_1 \dots y_N$ referenční buňky Y . Výpočtem nových korektorů $\boldsymbol{\omega}^{ij}$, $\boldsymbol{\omega}^P$, resp. $\boldsymbol{\omega}^i$ na zdeformované referenční buňce Y získáme nové efektivní koeficienty, zohledňující aktuální deformační stav geometrie mikrostruktury. Tento postup bychom mohli opakovaně provádět v rámci iteračního cyklu, neboť je zřejmé, že efektivní koeficienty \mathbb{A}^H , \mathbf{B}^H , (M^H) , resp. \mathbf{K}^H jsou implicitními funkcemi řešení $(p(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}))$ systému (8.38). Výsledkem by byl velmi komplikovaný nelineární model s několika implicitně zadanými závislostmi. Proto se v dalších úvahách o možnosti zpřesnění původního lineárního modelu omezíme pouze na závislost tenzoru permeability \mathbf{K}^H na řešení $(p(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}))$, zatímco ostatní efektivní koeficienty budeme po celou dobu výpočtu uvažovat konstantní.

Vydeme při tom z nezatížené a nezdeformované struktury, tzn. $p(\mathbf{x}) = 0$ a současně $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) = \mathbf{0}$. Na referenční buňce Y s geometrií odpovídající tomuto výchozímu stavu vyřešíme mikroúlohu (8.19) a (8.20), resp. (6.1) a (6.2) a z vypočítaných korektorů $\boldsymbol{\omega}^{ij}$, $\boldsymbol{\omega}^P$, resp. $\boldsymbol{\omega}^i$ sestavíme inicializační efektivní koeficienty \mathbb{A}_0^H , \mathbf{B}_0^H , (M_0^H) , resp. \mathbf{K}_0^H , přičemž v dalším průběhu výpočtu bude platit

$$\mathbb{A}^H \equiv \mathbb{A}_0^H \quad ; \quad \mathbf{B}^H \equiv \mathbf{B}_0^H \quad ; \quad (M^H \equiv M_0^H), \quad (8.39)$$

zatímco tenzor permeability \mathbf{K}^H předpokládáme lineárně závislý na řešení $(p(\mathbf{x}), \mathbf{U}(\mathbf{x}))$, přesněji řečeno definujeme tenzor permeability $\mathbf{K}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ jako lineární funkci tlaku $p(\mathbf{x})$ a tenzoru deformace $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$ v podobě Taylorova rozvoje prvního řádu

$$\mathbf{K}^H(p(\mathbf{x}), \mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))) = \mathbf{K}_0^H + \partial_{ij}^e \mathbf{K}^H e_{ij}^x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) + \partial^p \mathbf{K}^H p(\mathbf{x}), \quad (8.40)$$

kde $\mathbf{K}_0^H = \mathbf{K}^H(p_0 = 0, \mathbf{e}_0(\mathbf{U}) = \mathbf{0})$ je inicializační tenzor permeability, sestavený z korektorů $\boldsymbol{\omega}^i$, vypočítaných na výchozí nezatížené a nezdeformované geometrii referenční buňky Y . $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$, resp. $\partial^p \mathbf{K}^H$ je citlivost tenzoru permeability \mathbf{K}^H vůči složce $e_{ij}^x(\mathbf{U})$ deformačního tenzoru, resp. tlaku p . Z pohledu Taylorova rozvoje prvního řádu na okolí bodu $[p_0, \mathbf{e}_0(\mathbf{U})]$ pak $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$, resp. $\partial^p \mathbf{K}^H$ představuje gradient tenzoru \mathbf{K}^H , který je v rozvoji (8.40) násoben rozdílem $(e_{ij}^x(\mathbf{U}) - e_{ij}^0(\mathbf{U}))$, resp. $(p - p_0)$, kde $e_{ij}^0(\mathbf{U}) = 0$, resp. $p_0 = 0$. Pozor! Vztah (8.40) pro $\mathbf{K}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ jako lineární funkci p a $\mathbf{e}_x(\mathbf{U})$ je lineární aproximací tenzoru \mathbf{K}^H , což znamená, že tenzor \mathbf{K}^H sice závisí na řešení, ale lineárně, tedy bez nutnosti transformovat v každém iteračním kroku deformaci oblasti Ω prostřednictvím korektorů $\boldsymbol{\omega}^{ij}$ a $\boldsymbol{\omega}^P$ na podoblast Y_s , z deformace její hranice – fázového rozhraní Γ_{sf} – poté odvodit změnu tvaru podoblasti Y_f a vyřešením mikroúlohy Stokesova proudění na této zdeformované podoblasti Y_f získat korektor $\boldsymbol{\omega}^i$ potřebný pro sestavení nového tenzoru permeability, platného

pro aktuální geometrii podoblasti Y_f . Namísto toho v rámci každého iteračního kroku pouze dosadíme aktuální tlak a složky tenzoru deformace do (8.40) a získáme nový tenzor permeability zpřesněný členy, které zahrnují vliv aktuální deformace na permeabilitu. Toto v podstatě linearizované vyjádření tenzoru permeability ale předpokládá, že $\mathbf{K}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ se od \mathbf{K}_0^H nebude příliš lišit. Pro zachování platnosti modelu je tím pádem nutno vyvarovat se takových zatížení, která způsobí příliš velké deformace struktury. A oproti lineárnímu modelu zde nalezneme ještě další odlišnost. Zatímco u lineární úlohy (8.38) elastostatiky poroelastického média je tenzor permeability \mathbf{K}^H konstantní na celé makroskopické oblasti Ω , je v nelineární úloze také funkcí prostorových souřadnic \mathbf{x} , jak vyplývá ze vztahu (8.40).

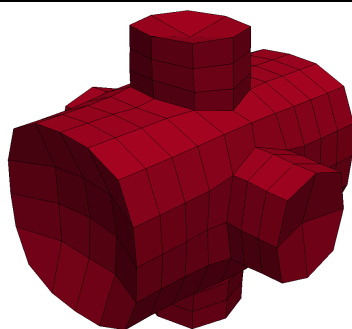
8.2.2 Výpočet citlivostí tenzoru permeability

Citlivost $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$, resp. $\partial^p \mathbf{K}^H$, tenzoru permeability \mathbf{K}^H vůči složce $e_{ij}^x(\mathbf{U})$ deformačního tenzoru, resp. tlaku p vypočítáme pomocí vztahů (7.19) a (7.29) až (7.31), odvozených v kapitole 7, s využitím vektoru designových rychlostí

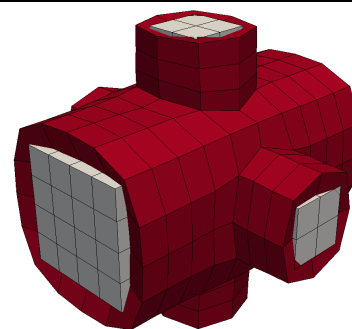
$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \bar{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} = \left(\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\Pi}^{ij}(\mathbf{y}) \right) e_{ij}^l(\mathbf{U}) - \boldsymbol{\omega}^p(\mathbf{y}) p_l \quad (8.41)$$

pro $e_{ij}^l(\mathbf{U}) = 1$ a $p_l = 1$. Získáme celkem sedm různých gradientů $\partial \mathbf{K}^H$ – šest $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$ pro unikátní složky $e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{23}$ a e_{31} symetrického tenzoru deformace $\mathbf{e}_x(\mathbf{U})$ a sedmý $\partial^p \mathbf{K}^H$ pro tlak p . K jejich výpočtu použijeme zmíněných vztahů z kapitoly 7, přičemž za $\mathbf{v}(\mathbf{y})$ dosadíme buď součet $(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij})$, nebo $(-\boldsymbol{\omega}^p)$ podle toho, zjišťujeme-li citlivost tenzoru \mathbf{K}^H vůči některé ze složek tenzoru deformace, nebo zajímá-li nás citlivost tenzoru \mathbf{K}^H vůči tlaku. Díky skutečnosti, že korektory $\boldsymbol{\omega}^{ij}(\mathbf{y})$ a $\boldsymbol{\omega}^p(\mathbf{y})$ jsou vyčísleny pouze během inicializačního výpočtu ve výchozí konfiguraci referenční buňky Y , což znamená, že jsou v celém průběhu výpočtu neměnné, máme zaručeno, že také citlivosti $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$ a $\partial^p \mathbf{K}^H$ jsou konstantní.

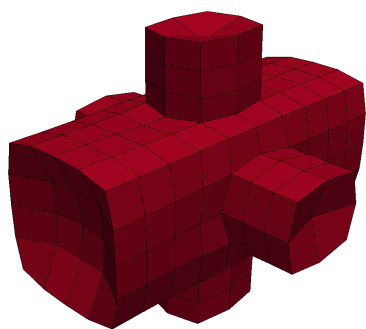
Následující tabulka obsahuje vizualizace zachycující, jakým způsobem přenášejí korektory $(\boldsymbol{\omega}^{ij} + \boldsymbol{\Pi}^{ij})$ a $(-\boldsymbol{\omega}^p)$, dílčí součásti vektoru designových rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{y})$, makroskopickou deformaci oblasti Ω , způsobenou tenzorem $\mathbf{e}_x(\mathbf{U})$ a tlakem p , na výchozí geometrii stěn fázového rozhraní Γ_{mc} podoblastí Y_m a Y_c .



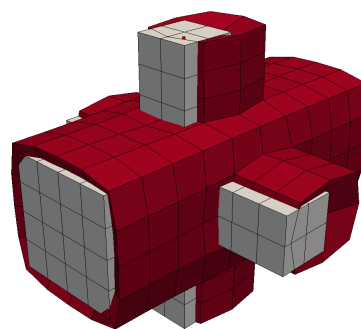
$(-\boldsymbol{\omega}^p)$



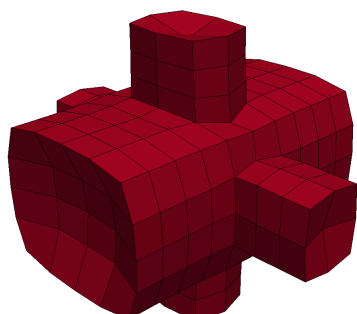
$(-\boldsymbol{\omega}^p)$ (s původní geometrií)



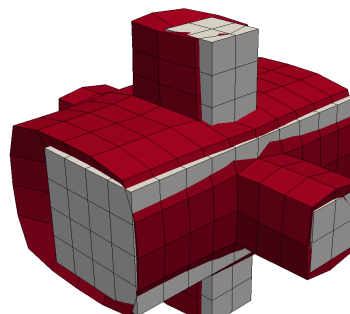
$(\omega^{11} + \Pi^{11})$



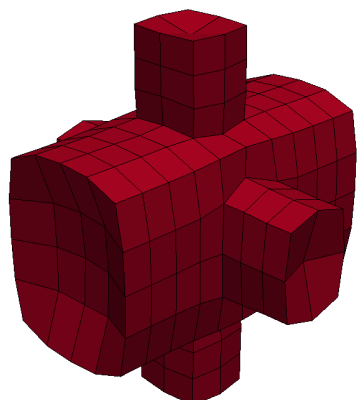
$(\omega^{11} + \Pi^{11})$ (s původní geometrií)



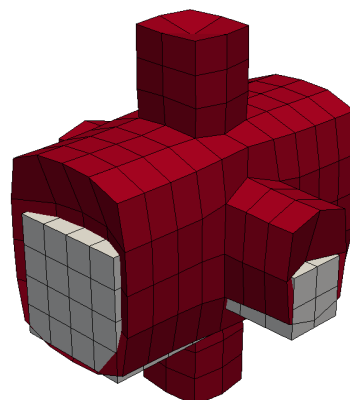
$(\omega^{22} + \Pi^{22})$



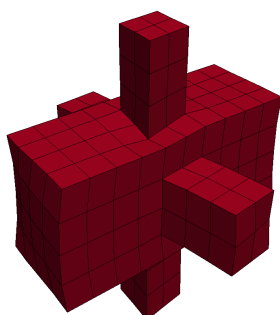
$(\omega^{22} + \Pi^{22})$ (s původní geometrií)



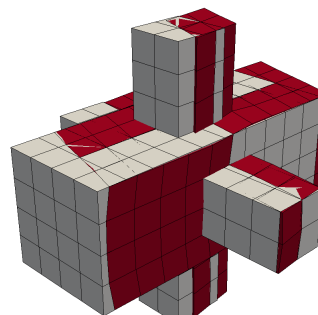
$(\omega^{33} + \Pi^{33})$



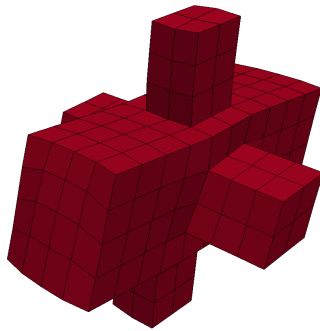
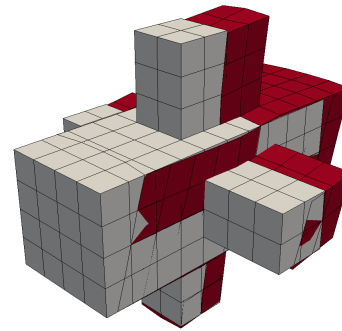
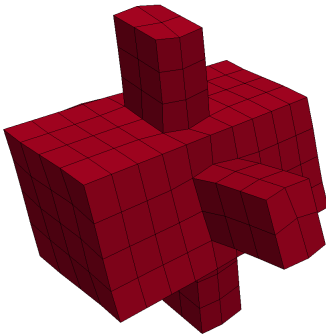
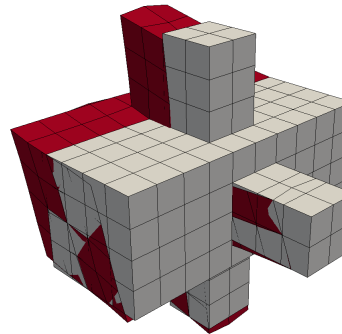
$(\omega^{33} + \Pi^{33})$ (s původní geometrií)



$(\omega^{12} + \Pi^{12})$



$(\omega^{12} + \Pi^{12})$ (s původní geometrií)


 $(\omega^{13} + \Pi^{13})$

 $(\omega^{13} + \Pi^{13})$ (s původní geometrií)

 $(\omega^{23} + \Pi^{23})$

 $(\omega^{23} + \Pi^{23})$ (s původní geometrií)

Z výše uvedených obrázků je patrný charakter deformace fázového rozhraní Γ_{mc} , přenášené korektory $(\omega^{ij} + \Pi^{ij})$ a $(-\omega^P)$. Poznamenejme, že v případě namáhání referenční buňky Y tlakem p v tekutině dochází k deformaci fázového rozhraní Γ_{mc} ve smyslu smršťování podoblasti Y_m matrice za současného rozpínání podoblasti $Y_c \equiv Y_f$ tekutiny.

8.2.3 Algoritmus výpočtu nelineární úlohy elastostatiky poroelastického média

Výpočet nelineární úlohy elastostatiky poroelastického materiálu zahájíme vyčíslením korektorů ω^{ij} , ω^P , resp. ω^i , z nichž sestavíme efektivní koeficienty \mathbf{A}^H , \mathbf{B}^H , (M^H) , resp. \mathbf{K}_0^H . Pomocí korektorů ω^{ij} a ω^P dále zkonstruujeme citlivosti $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$ a $\partial^p \mathbf{K}^H$ tenzoru permeability $\mathbf{K}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ vůči jednotlivým složkám tenzoru deformace a vůči tlaku. V tomto okamžiku máme k dispozici všechny veličiny potřebné pro inicializaci výpočtu nelineárního modelu metodou fyzikální iterace. Dále postupujeme v uvedených krocích.

- 1) Provedeme výpočet makroúlohy (8.38), ze kterého získáme řešení $(p^{(new)}(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{(new)}(\mathbf{x}))$ a odvozené veličiny jako vektor perfuzní rychlosti $\mathbf{w}^{(new)}(\mathbf{x})$ a především potřebný tenzor deformace $\mathbf{e}_x^{(new)}(\mathbf{U})$.
- 2) V kroku 1) vypočtené $\mathbf{e}_x^{(new)}(\mathbf{U})$ a $p^{(new)}(\mathbf{x})$ dosadíme do (8.40) pro určení aktualizovaného tenzoru permeability $\mathbf{K}^{H(new)}(p^{(new)}, \mathbf{e}_x^{(new)}(\mathbf{U}))$.

$$\mathbf{K}^{H(new)}(p^{(new)}, \mathbf{e}_x^{(new)}(\mathbf{U})) = \mathbf{K}_0^H + \partial_{ij}^e \mathbf{K}^H e_{ij}^{x(new)}(\mathbf{U}(\mathbf{x})) + \partial^p \mathbf{K}^H p^{(new)}(\mathbf{x})$$

3) Vypočítáme normu $\|p^{(new)}(\mathbf{x}) - p^{(old)}(\mathbf{x})\|$ tlakového pole, resp. normu $\|\mathbf{U}^{(new)}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^{(old)}(\mathbf{x})\|$ pole posuvů, kde $(p^{(old)}(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{(old)}(\mathbf{x}))$ je řešení, které jsme obdrželi v předchozím iteračním kroku.

4) Provedeme kontrolu na ukončení iteračního cyklu. V případě, že platí

$$\|p^{(new)}(\mathbf{x}) - p^{(old)}(\mathbf{x})\| < \beta_p \quad \text{a zároveň} \quad \|\mathbf{U}^{(new)}(\mathbf{x}) - \mathbf{U}^{(old)}(\mathbf{x})\| < \beta_U,$$

kde β_p , resp. β_U je malá, předem zvolená konstanta, zde $\beta_p = 10^{-4}$ a $\beta_U = 10^{-6}$, byl splněn požadavek na konvergenci a můžeme výpočet ukončit. V opačném případě uložíme aktuální řešení $(p^{(new)}(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{(new)}(\mathbf{x}))$ do $(p^{(old)}(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{(old)}(\mathbf{x}))$ a vrátíme se do bodu 1), kam dosadíme aktuální tenzor permeability $\mathbf{K}^{H(new)}(p^{(new)}, \mathbf{e}_x^{(new)}(\mathbf{U}))$, a řešíme pro nové $(p^{(new)}(\mathbf{x}), \mathbf{U}^{(new)}(\mathbf{x}))$.

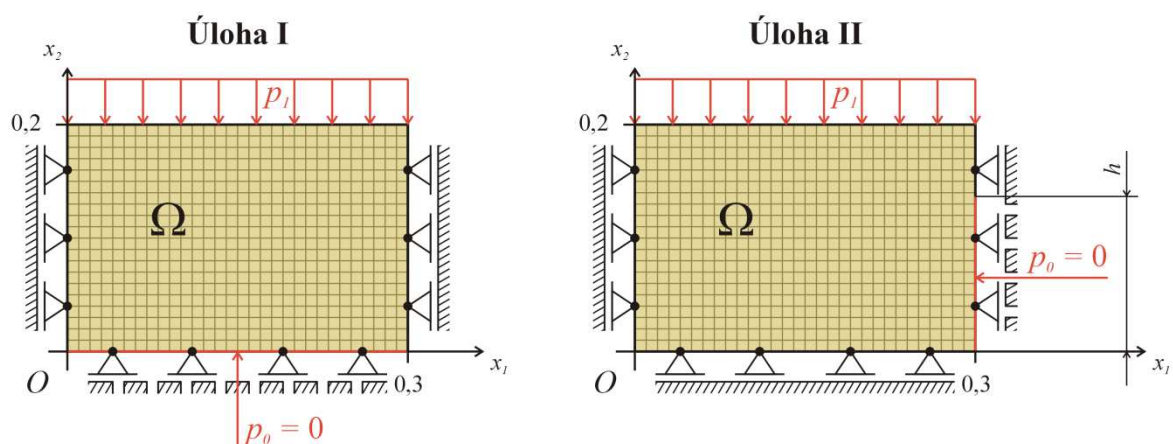
V případě, že výpočet nelineární úlohy elastostatiky poroelastického média úspěšně zkonvergoval, můžeme nyní vyšetřit pole makroskopických posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ a tlaku $p(\mathbf{x})$, jakož i dalších veličin – především perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ či makroskopických deformací $\mathbf{e}_x(\mathbf{U})$.

9 Numerický výpočet testovací úlohy a porovnání výsledků řešení lineárního a nelineárního modelu elastostatiky poroelastického média

V této kapitole jsou prezentovány výsledky numerického výpočtu 3D testovací úlohy homogenizovaného matematického modelu elastostatiky poroelastického média, který byl v kapitole 8 odvozen jako lineární s konstantním efektivním tenzorem permeability \mathbf{K}^H i jako nelineární se zpřesněným tenzorem permeability $\mathbf{K}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$, jenž je implicitní funkcí řešení (p, \mathbf{U}) . Uvádíme také vzájemné porovnání obou modelů.

Na rozdíl od předchozí testovací úlohy Stokesova proudění, která byla řešena převážně ve 2D, je tento matematický model řešen explicitně ve 3D. Důvodem je, že rovinná geometrie referenční buňky Y neumožňuje zachovat spojitost podoblasti Y_m i Y_c zároveň. Pokud ale není podmínka spojitosti Y_m splněna, vede diskretizace rovnic úlohy na singulární matici soustavy. Z tohoto důvodu byl zmíněný model od začátku řešen jako prostorový.

Při řešení lineární i nelineární úlohy elastostatiky poroelastického média vycházíme z představy reálného laboratorního pokusu se zkušební vzorkem poroelastického materiálu, tak jak byl popsán v kapitole 8.1.5. Původní pokus, jehož rozvržení je zobrazeno na *obr. 35* (str. 74) a který budeme značit jako úlohu I, doplníme o novou úlohu II, kterou můžeme popsat následovně.



obr. 36: Rozvržení úlohy I a II s vyznačenými Dirichletovými okrajovými podmínkami tlaku.

Zkušební vzorek shodných rozměrů vložíme do nádoby, která se od nádoby použité v úloze I liší nepoddajným a nepropustným dnem. Zatížení horní plochy vzorku tlakem p_1 zůstává zachováno, ale výstup z porézní oblasti Ω je přenesen na pravou krajní plochu s normálou v kladném smyslu osy x_1 . Přesněji řečeno pouze spodní část do výšky h zmíněné plochy skutečně tvoří výstupní plochu z oblasti, viz *obr. 36*. Touto volbou se vyhneme nutnosti zadat do uzlových bodů, ležících na průsečnici pravé a horní plochy vzorku, jak vstupní podmínku zatěžujícího tlaku p_1 , tak také podmínku $p_0 = 0$ Pa výstupu do volného prostředí.

9.1 Řešení úlohy I

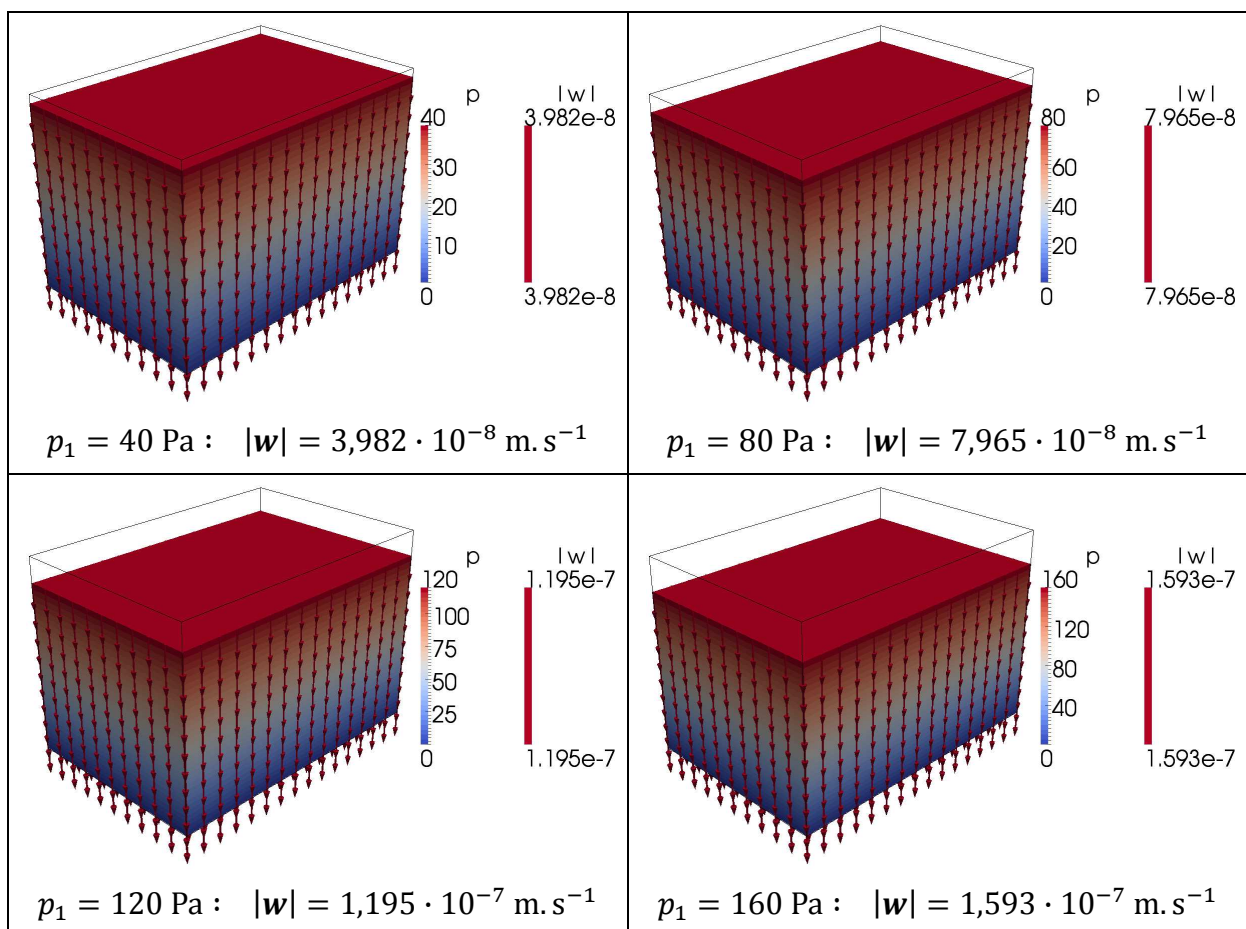
9.1.1 Lineární model

Úlohu I nejprve řešíme pro neznámé pole posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x}) \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ a tlakové pole $p(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega)$ pomocí lineárního modelu s konstantním tenzorem permeability

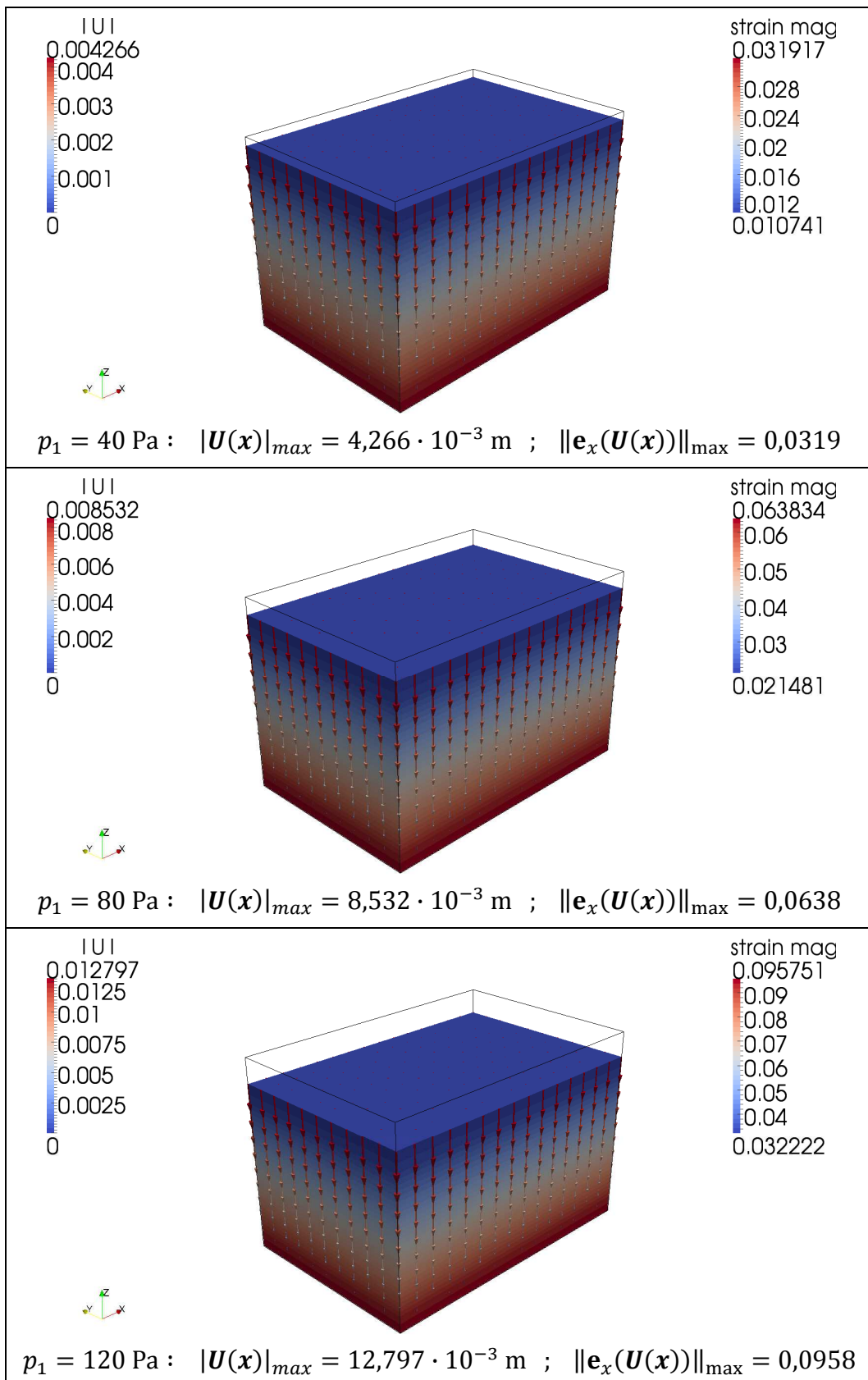
$$\mathbf{K}_{lin}^H = \begin{bmatrix} 938,525585 & 0 & 0 \\ 0 & 79,6452415 & 0 \\ 0 & 0 & 79,6452415 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.$$

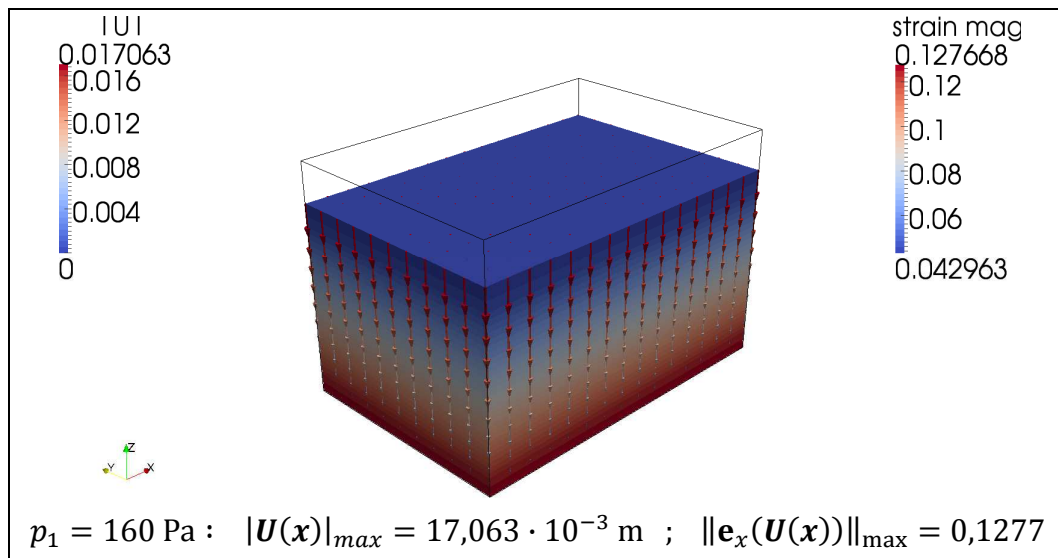
Materiálové parametry poddajné matrice byly zvoleny podle [3]: $E = 1230 \text{ Pa}$, $\nu = 0,43$. Zatížení p_1 bylo zvoleno v řádu desítek až stovek pascalů, též v souladu s údajem v [3].

Úloha I je navržena jako jednoduchý laboratorní pokus, při kterém je vzorek porézního materiálu stlačován vlivem vnějšího tlaku – okrajové podmínky p_1 s působíštěm na horní ploše vzorku. Úlohu řešíme pro diskrétní hodnoty zatížení p_1 z intervalu 0 až 160 Pa. Díky použití konstantního tenzoru permeability \mathbf{K}_{lin}^H vychází z Darcyho zákona pro uniformní tlakový gradient, generovaný přetlakem p_1 na vstupu, perfuzní rychlost \mathbf{w} rovnající se konstantě, jejíž velikost lineárně stoupá se zvětšujícím se gradientem tlaku, jak ukazují následující obrázky.



Dále bylo zjištěno, že hodnoty vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ i norma tenzoru deformace $\|\mathbf{e}_x(\mathbf{U})\|$ narůstají lineárně se zvyšujícím se tlakem p_1 , jak dokládají vizualizace v tabulce na této straně.





Jak můžeme vidět, je porézní materiál velmi měkký, což se projevuje poměrně velkými posuvy a deformacemi v řádech procent. Zde narážíme na hranici použitelnosti modelu, který byl od začátku uvažován pro malé deformace.

9.1.2 Nelineární model a vzájemné porovnání

Úlohu I nyní řešíme pomocí nelineárního modelu s tenzorem permeability $\mathbf{K}_{nonlin}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ ve tvaru

$$\mathbf{K}_{nonlin}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U})) = \mathbf{K}_0^H + \partial_{ij}^e \mathbf{K}^H e_{ij}^x(\mathbf{U}(\mathbf{x})) + \partial^p \mathbf{K}^H p(\mathbf{x}),$$

kde

$$\mathbf{K}_0^H = \begin{bmatrix} 938,525585 & 0 & 0 \\ 0 & 79,6452415 & 0 \\ 0 & 0 & 79,6452415 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

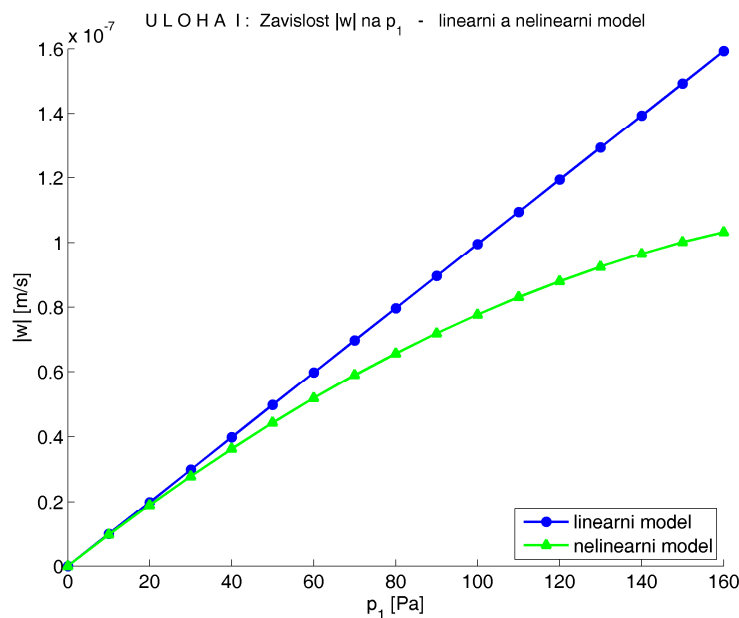
je tenzor permeability nezátížená a nezdeformovaná výchozí konfigurace referenční buňky Y , shodný s \mathbf{K}_{lin}^H , $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$ je citlivost (gradient) tenzoru permeability vůči složce $e_{ij}^x(\mathbf{U})$ tenzoru deformace a $\partial^p \mathbf{K}^H$ citlivost tenzoru permeability vůči tlaku p . Materiálové parametry i okrajová podmínka p_1 zůstávají zachovány. Pro 3D referenční buňku Y s oblastí Y_f ve tvaru šestimenného prostorového kříže, viz *obr. 20* (str. 39), byly vypočteny následující citlivosti vůči tlaku a složkám tenzoru deformace (v $[\text{m}^2]$):

$$\partial^p \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 1,599 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1884 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1884 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

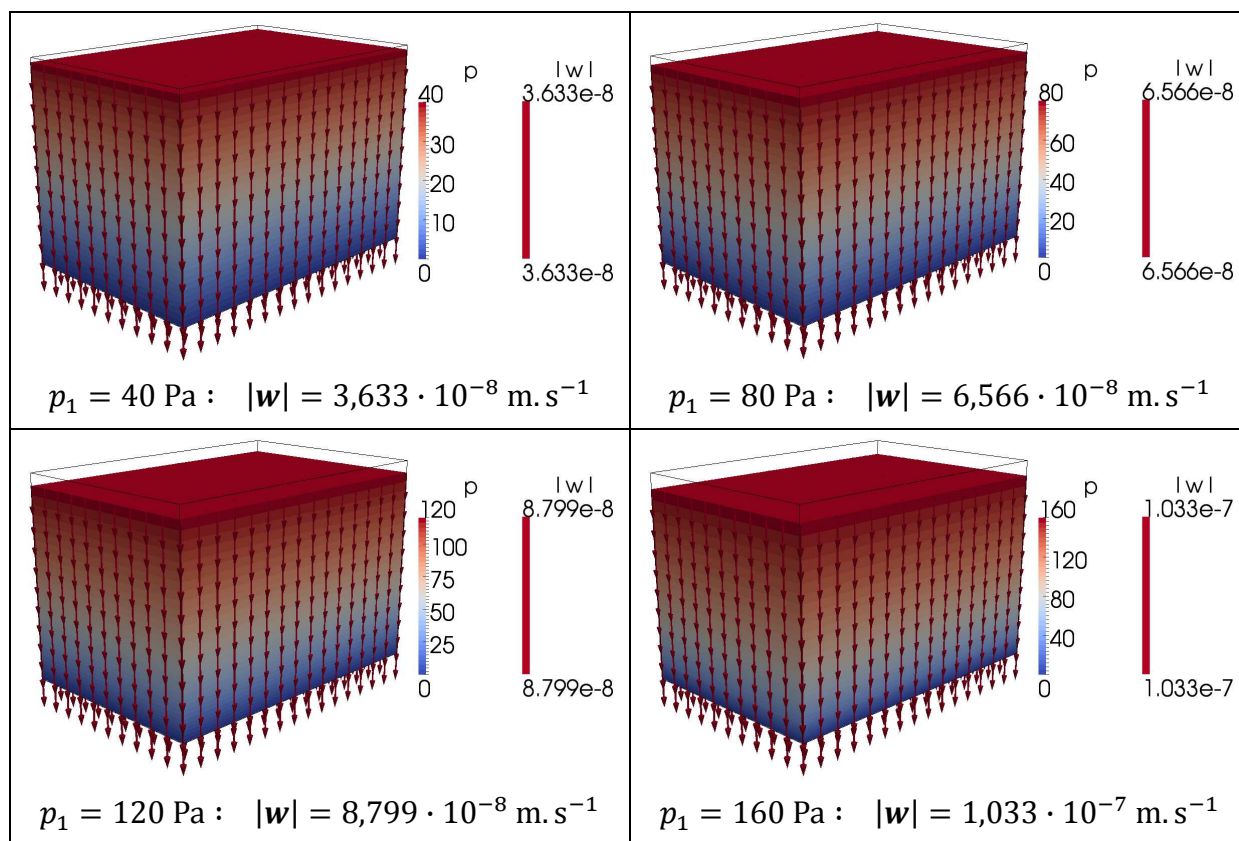
$$\begin{array}{l}
 \partial_{11}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 4,515 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7683 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7683 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \\
 \partial_{22}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 6,688 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5046 & 0 \\ 0 & 0 & 0,7551 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3} \\
 \partial_{33}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 6,688 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7551 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5046 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}
 \end{array}
 \quad \left| \quad
 \begin{array}{l}
 \partial_{12}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 0 & -60,64 & 0 \\ -60,64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \\
 \partial_{13}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -60,64 \\ 0 & 0 & 0 \\ -60,64 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6} \\
 \partial_{23}^e \mathbf{K}^H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 67,62 \\ 0 & 67,62 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}
 \end{array}$$

Je zřejmé, že citlivost $\partial^p \mathbf{K}^H$ vůči tlaku a citlivost $\partial_{ij}^e \mathbf{K}^H$ vůči deformaci se liší o tři řády. To je ovšem v pořádku, neboť z výpočtu, řešeného pro hodnoty tlaku v řádu desítek až stovek pascalů, očekáváme výstup v podobě deformace řádu setin, maximálně jedné až dvou desetín (neboť se zabýváme měkkým materiálem s velmi nízkou tuhostí). Za těchto podmínek se budou hodnoty složek tenzoru permeability měnit v řádu procent. Z uvedených hodnot citlivostí je mimo jiné zřejmá také vyšší citlivost tenzoru permeability na normálové složky deformačního tenzoru oproti složkám smykové deformace.

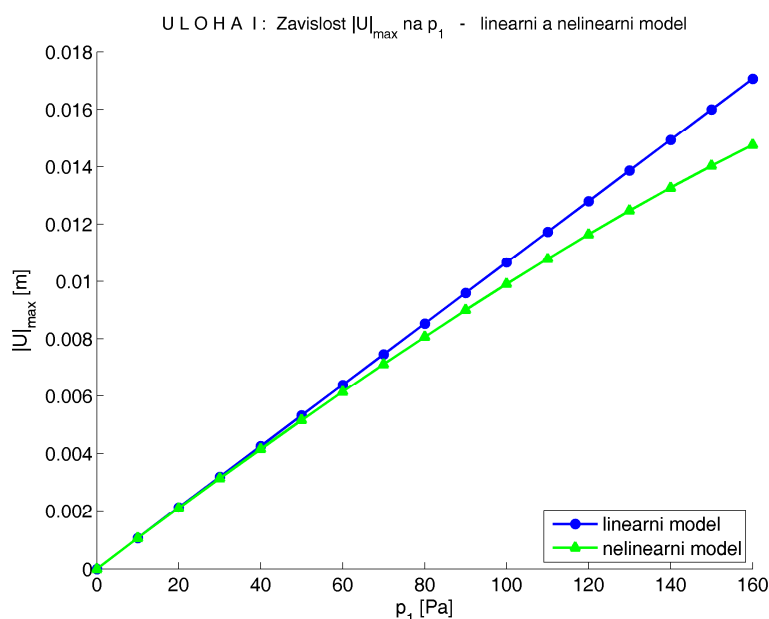
Bylo zjištěno, že perfuzní rychlost w v případě nelineárního modelu narůstá v závislosti na velikosti p_1 pomaleji než u lineárního modelu, jak dokládají obrázky v tabulce na následující straně a také graf, viz **obr. 37**, porovnávající závislost $w(p_1)$, vypočítané jednou pomocí lineárního a podruhé pomocí nelineárního modelu.



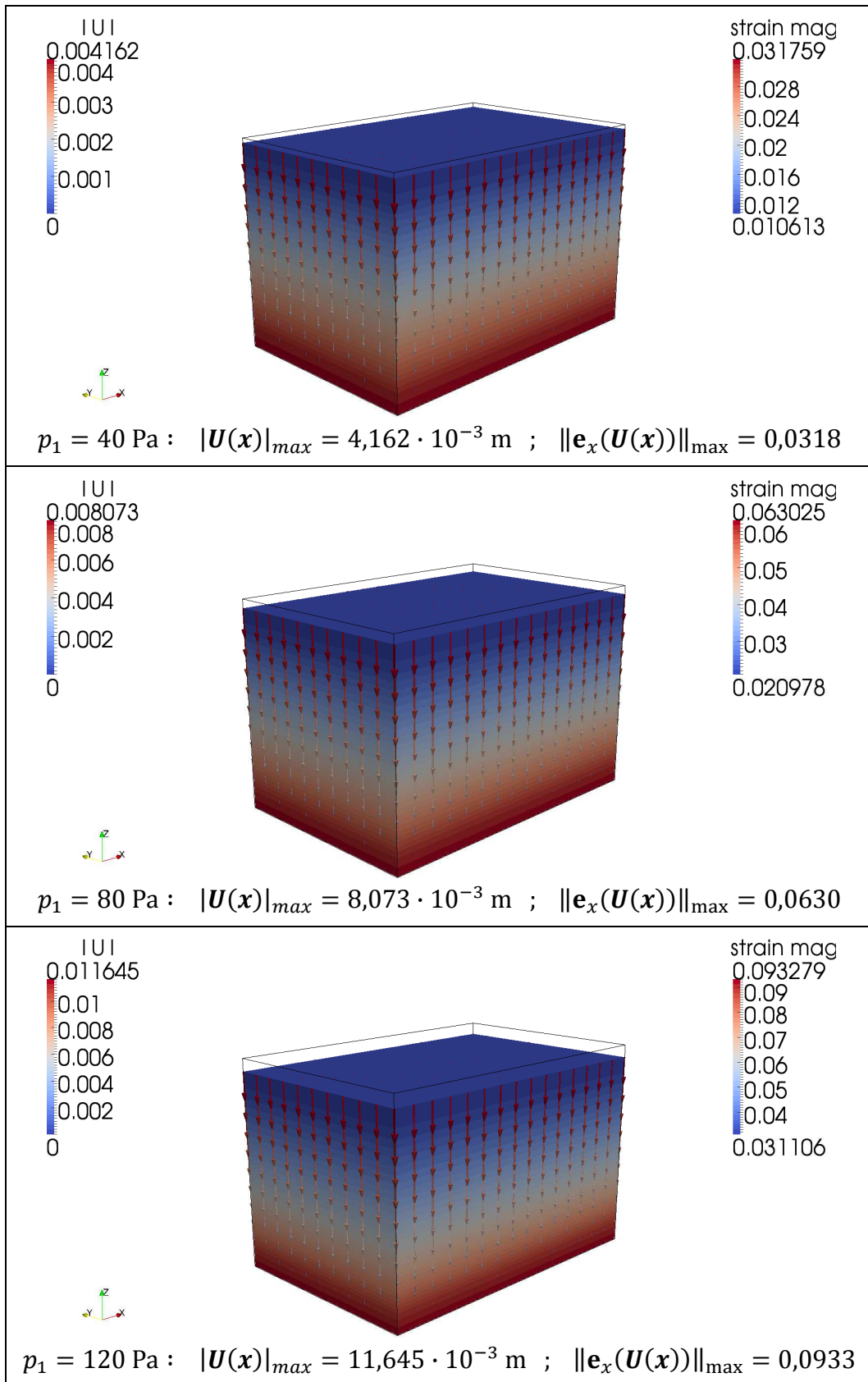
obr. 37: Graf závislosti velikosti perfuzní rychlosti w na okrajové podmínce p_1 u lineárního a nelineárního modelu – úloha I.

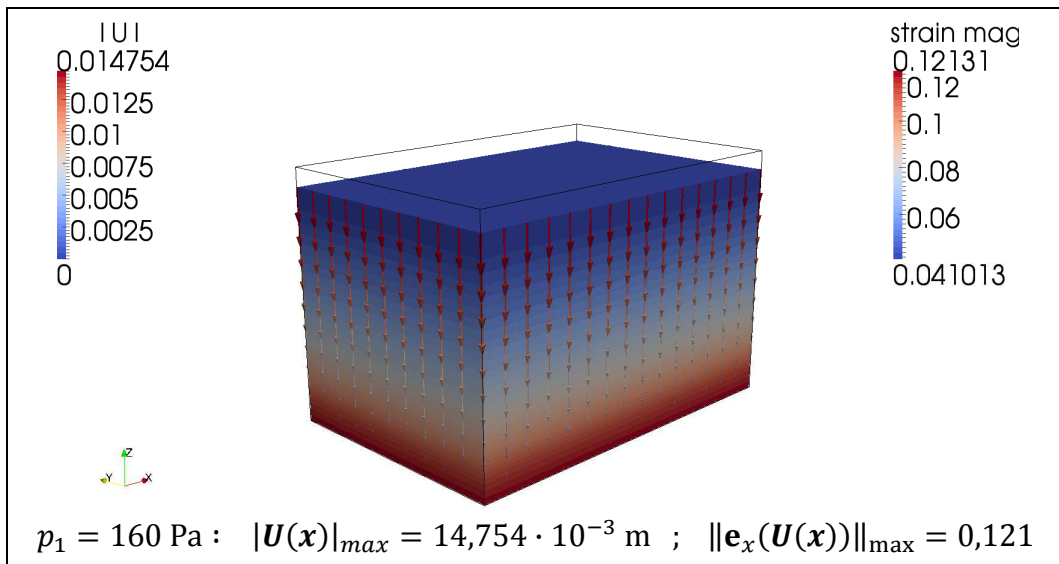


Také hodnota vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ i norma tenzoru deformace $\|\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\|$ narůstají se zvyšujícím se tlakem p_1 pomaleji než u lineárního modelu, viz níže umístěná tabulka obrázků a graf na *obr. 38*, do kterého jsou vyneseny maximální hodnoty vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ v absolutní hodnotě, $|\mathbf{U}(\mathbf{x})|_{\max}$. Jde zřejmě o posuv horní plochy vzorku ve směru $(-x_3)$.

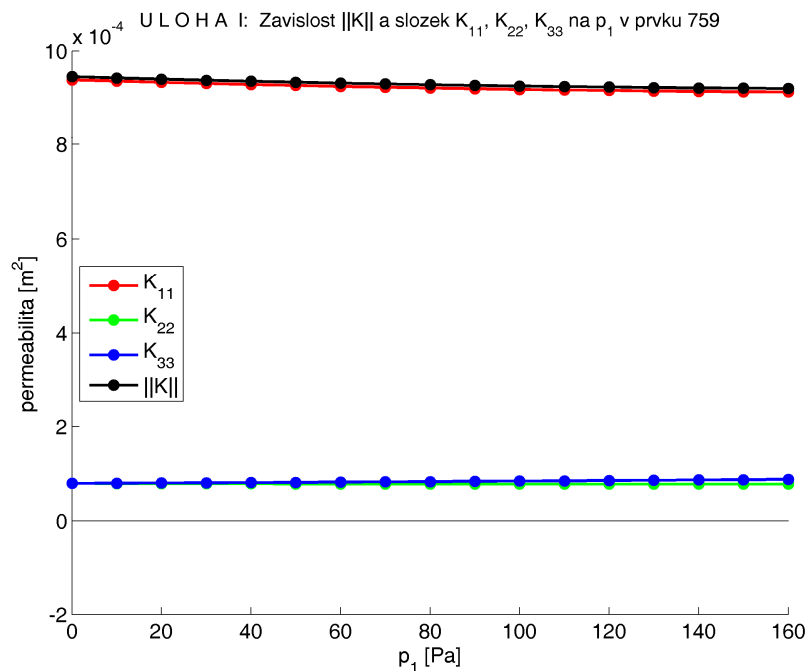


obr. 38: Graf závislosti maximální hodnoty velikosti vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ na okrajové podmínce p_1 u lineárního a nelineárního modelu – úloha II.

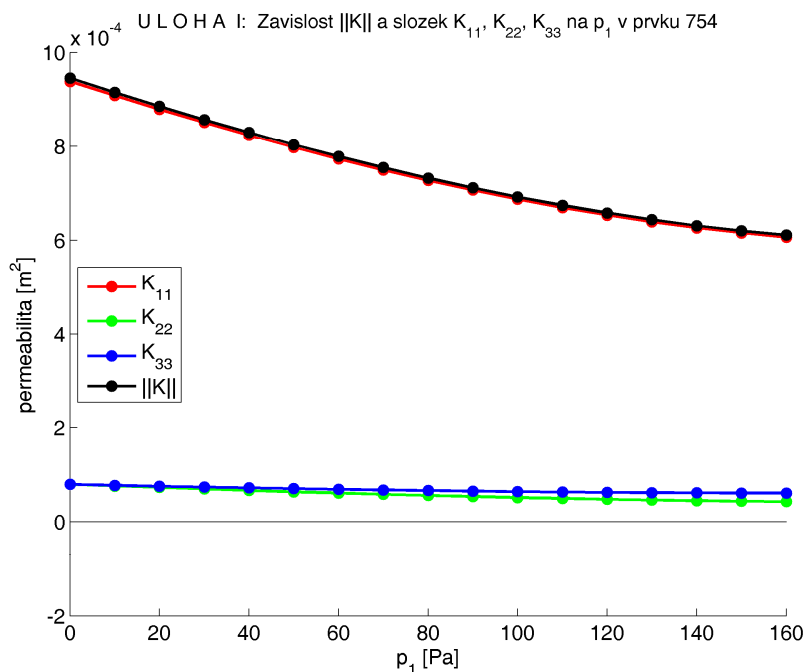




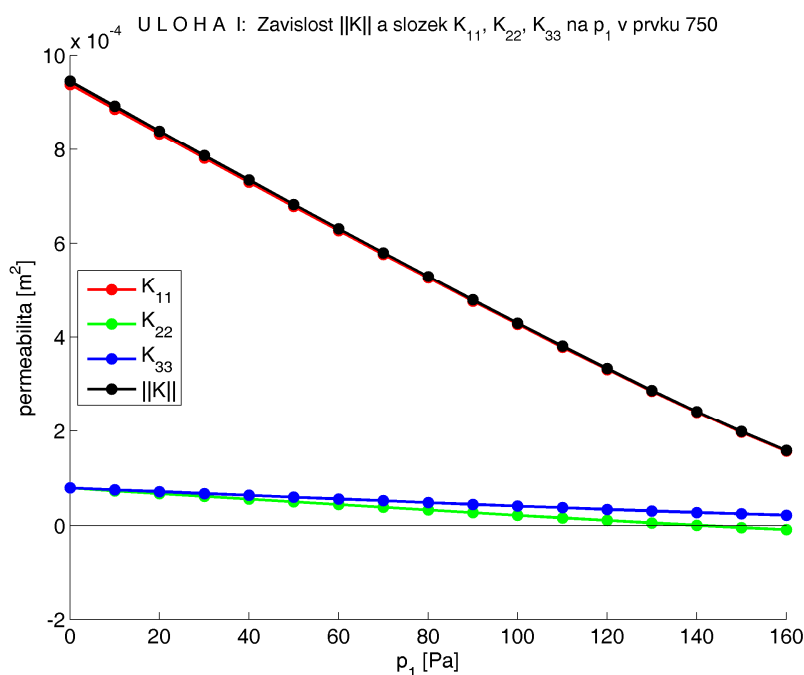
Porovnáním výsledků pro lineární a nelineární model můžeme vidět, že nelineární model je v reakci na deformaci, která de facto vede ke zmenšení objemu pórů, poněkud tužší a má nižší permeabilitu, jak dokládají nelineární, degresivní závislosti $\mathbf{U}(p_1)$ a $\mathbf{w}(p_1)$. Tím, že jsme použili zvolenou aproximaci (8.40) tenzoru permeability \mathbf{K}^H , dochází vlivem deformace makroskopické oblasti Ω ke změnám ve velikosti složek tohoto tenzoru, viz grafy na *obr. 39*, *obr. 40* a *obr. 41*. Každý z těchto tři grafů ukazuje změnu velikosti složek v hlavních směrech i normu tenzoru permeability \mathbf{K}^H v jiném místě oblasti Ω – první (na *obr. 39*) v její horní ploše, druhý (na *obr. 40*) přibližně uprostřed oblasti a třetí (na *obr. 41*) v místě, kde oblast doléhá na dno nádoby.



obr. 39: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|\mathbf{K}^H\|$ tenzoru permeability v horní ploše oblasti Ω (prvek č. 759) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .



obr. 40: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|K^H\|$ tenzoru permeability ve střední části oblasti Ω (prvek č. 754) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .



obr. 41: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|K^H\|$ tenzoru permeability u dna oblasti Ω (prvek č. 750) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .

Je zřejmé, že složky tenzoru permeability K^H a jeho Frobeniova norma klesají tím více, čím větší je deformace. Výjimku tvoří jen složka K_{33}^H tenzoru K^H v horní ploše oblasti Ω , viz graf na obr. 39, jejíž velikost se zatížením dokonce ještě mírně roste. Největší deformace dosahujeme na spodní ploše oblasti Ω u samého dna nádoby, proto je zde pokles permeability

největší, jak dokazuje průběh velikostí složek i normy tenzoru \mathbf{K}^H v grafu na **obr. 41**. Z výše uvedených grafů můžeme například určit pokles normy tenzoru \mathbf{K}^H mezi nezatíženým stavem a při zatížení $p_1 = 160$ Pa, který činí necelá 3% v horní části oblasti Ω , zhruba 35% v její střední části a více než 83% u dna. Při zatížení $p_1 = 150$ Pa a při daných materiálových parametrech ($E = 1230$ Pa, $\nu = 0,43$ a $\eta^\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ Pa.s) byla překročena použitelnost nelineárního modelu, neboť složka K_{22} tenzoru \mathbf{K}^H u dna nádoby při tomto zatížení nabývá nefyzikální záporné hodnoty. Nelineární model by proto v budoucnu mohl být vylepšen např. přidáním kontaktní mikroúlohy pro případ, že vlivem deformace dojde k úplnému uzavření některého z kanálků (rovná se nulové hodnotě permeability ve směru kanálku a současně znamená skokové zvýšení tuhosti matrice ve směrech kolmých k ose nyní již neexistujícího kanálku).

9.2 Řešení úlohy II

9.2.1 Lineární model

Rozdíl oproti úloze I spočívá v usměrnění toku tekutiny do nového výstupního průřezu, který byl ze dna nádoby přenesen do spodní poloviny její pravé krajní plochy a který má při volbě výšky $h = 0,1$ m ve srovnání se vstupním průřezem pouze třetinový průřez.

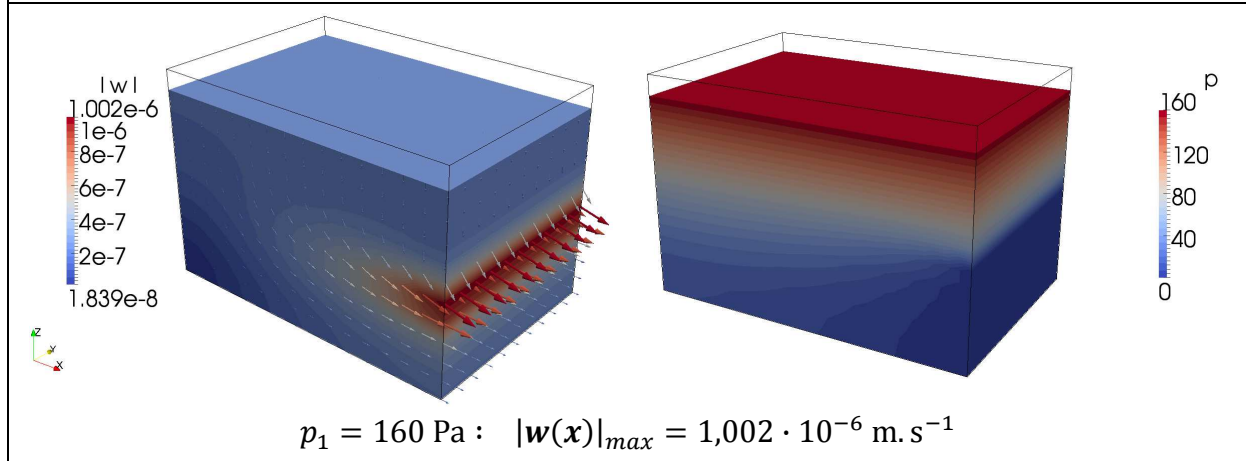
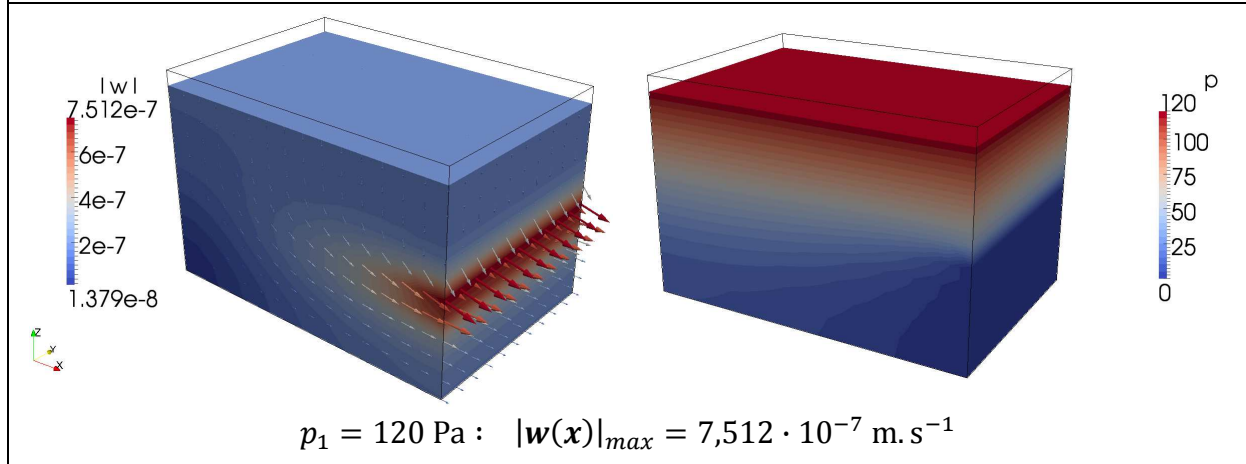
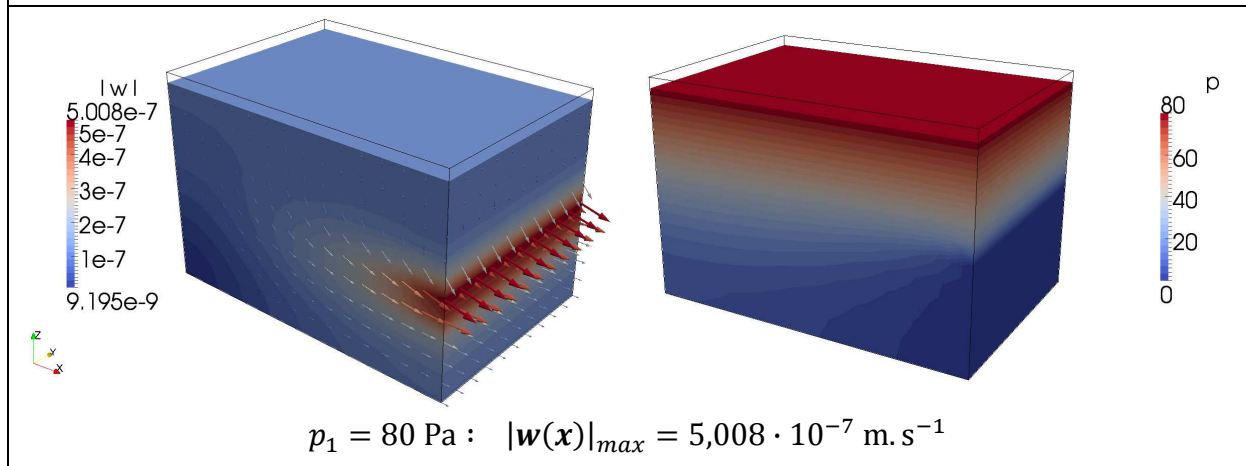
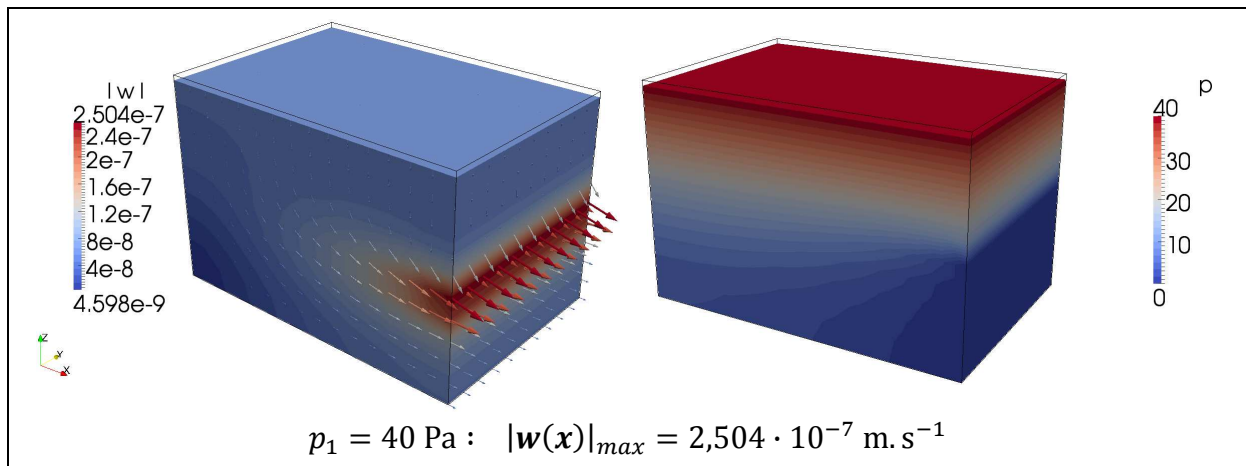
$$\text{INLET: } S_{in} = 0,3 \cdot 0,2 = 0,06 \text{ m}^2 \quad ; \quad \text{OUTLET: } S_{out} = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02 \text{ m}^2$$

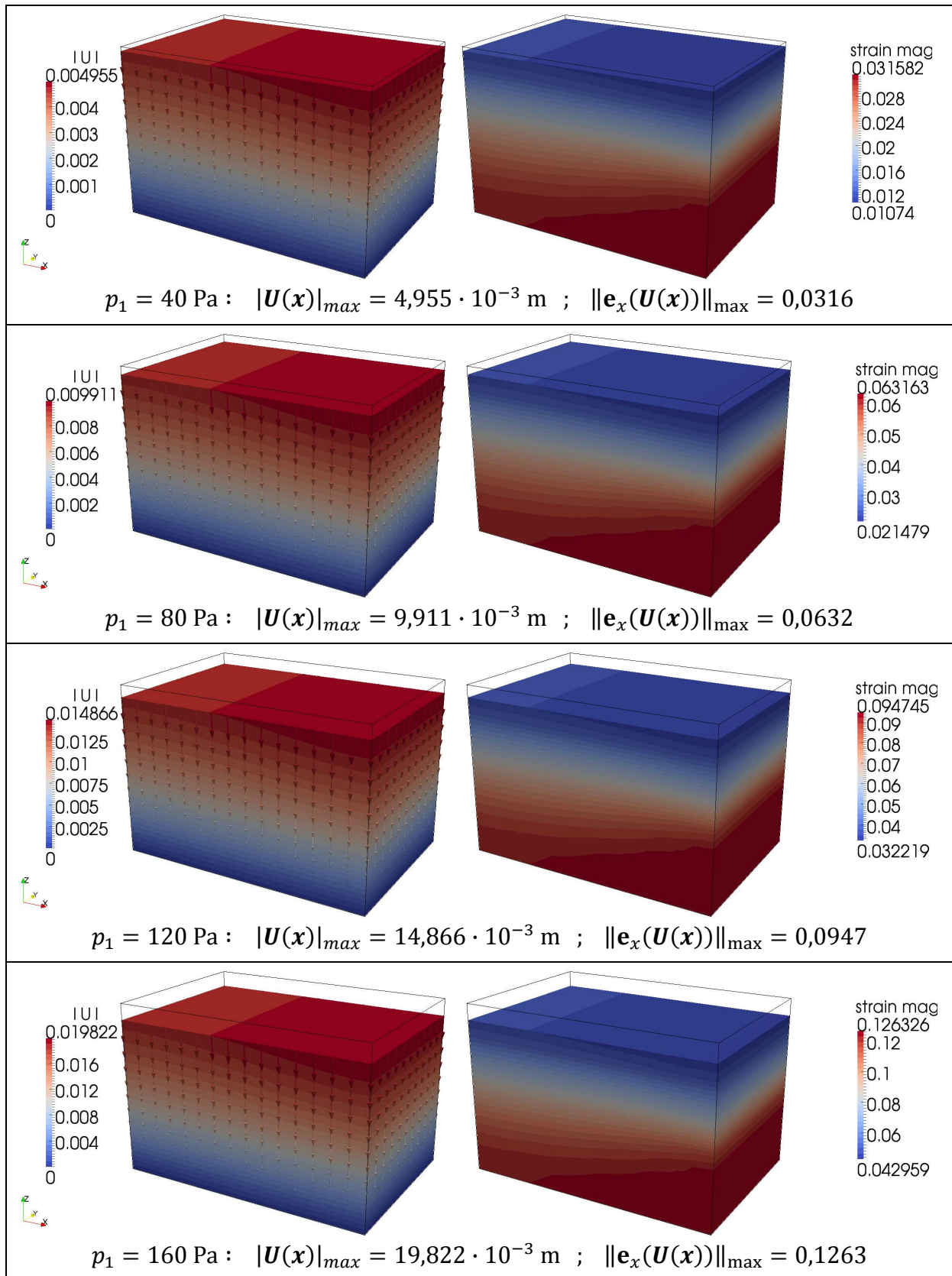
Současně tedy dojde k urychlení toku tekutiny, a to až na trojnásobek její původní rychlosti, což je důsledek platnosti rovnice kontinuity.

$$\begin{aligned} \int_{S_{in}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) dS_x + \int_{S_{out}} \mathbf{n} \cdot \mathbf{w}(\mathbf{x}) dS_x &= 0 \\ -\bar{w}_N^{in} S_{in} + \bar{w}_N^{out} S_{out} &= 0 \\ \bar{w}_N^{out} &= \bar{w}_N^{in} \frac{S_{in}}{S_{out}} = 3\bar{w}_N^{in}, \end{aligned}$$

kde \bar{w}_N^{in} , resp. \bar{w}_N^{out} je velikost střední vstupní, resp. výstupní normálové rychlosti.

Následkem přenesení výstupního průřezu mimo osu horní plocha-spodní plocha oblasti Ω (v záporném smyslu osy x_3), jak tomu bylo v úloze I, se v objemu oblasti Ω vyvinulo tlakové pole složitějšího průběhu než v předešlém případě. Vzniklý tlakový gradient není konstantní podél osy x_3 , ale stejně jako u vektorového pole perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ u něj došlo ke stočení tak, že hodnoty tlaku po linii tažené od vstupního průřezu k výstupnímu vykazují pokles. Ani zmíněné vektorové pole perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ již není v oblasti Ω tvořeno jedinou konstantní hodnotou, ale dochází k urychlení toku směrem k výstupnímu průřezu, kde hodnoty perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ dosahují maxima, jak dokládá tabulka obrázků na následující straně.





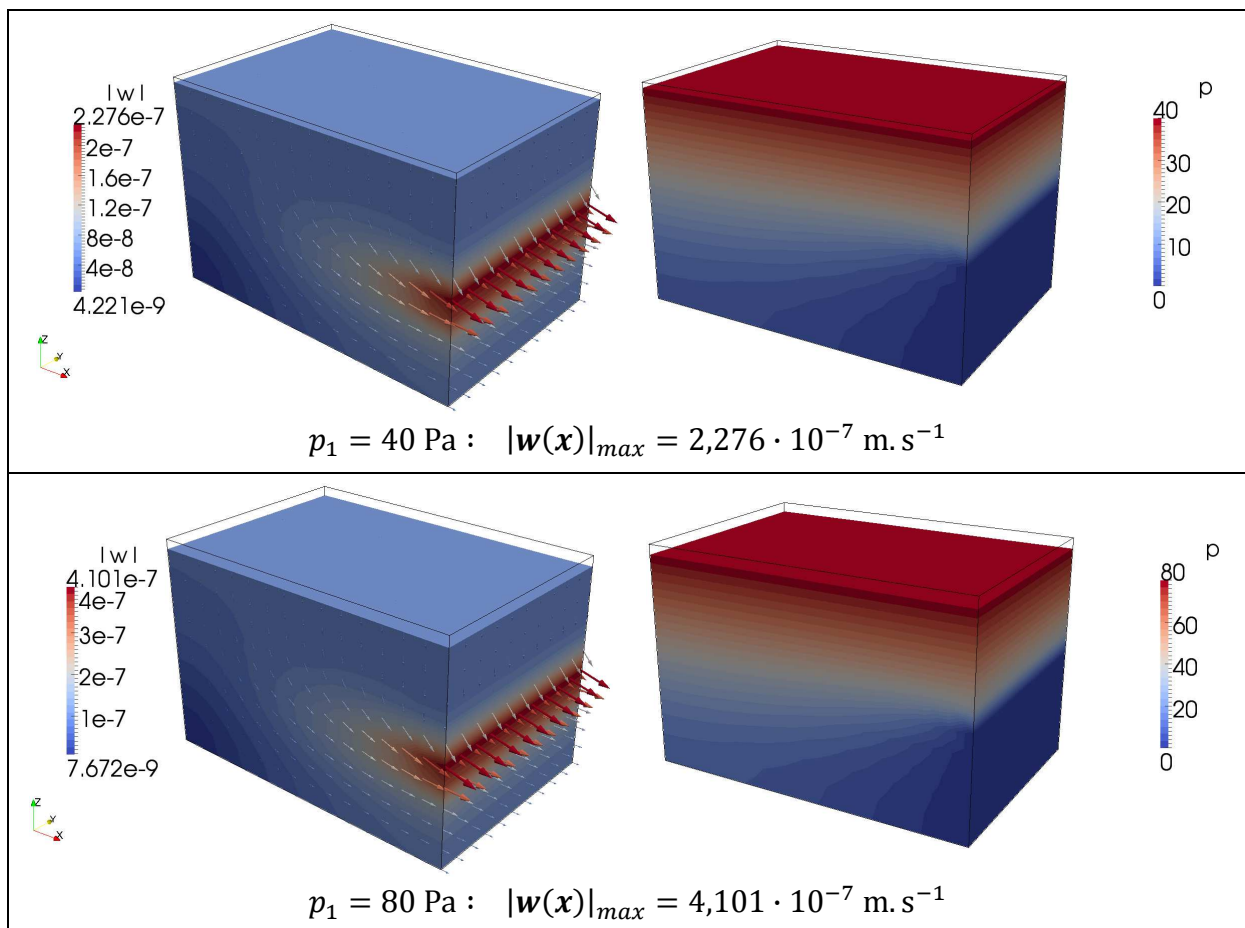
I přesto, že působením tlaku p_1 je vzorek porézního materiálu v nádobě stlačován v záporném smyslu souřadnicové osy x_3 stejně, jak tomu bylo v případě úlohy I, není posuv $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ v řezech kolmých na tuto osu – na rozdíl od případu úlohy I – konstantní, jak můžeme vidět

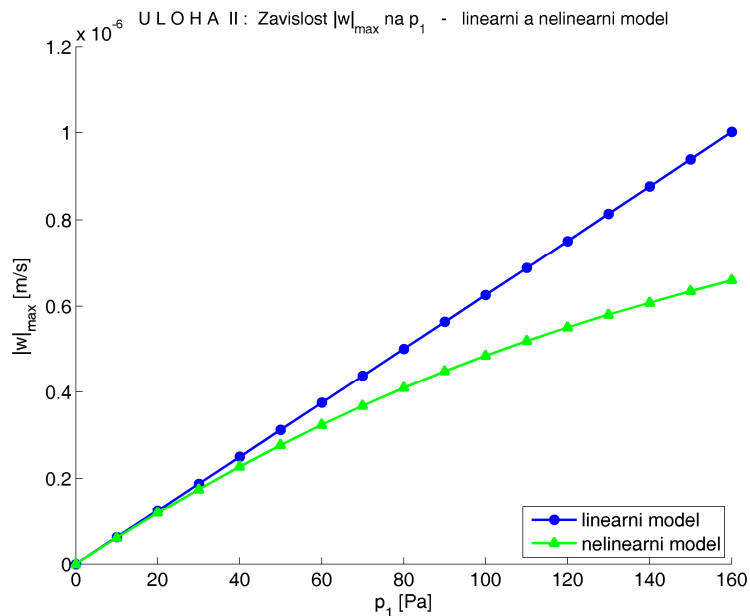
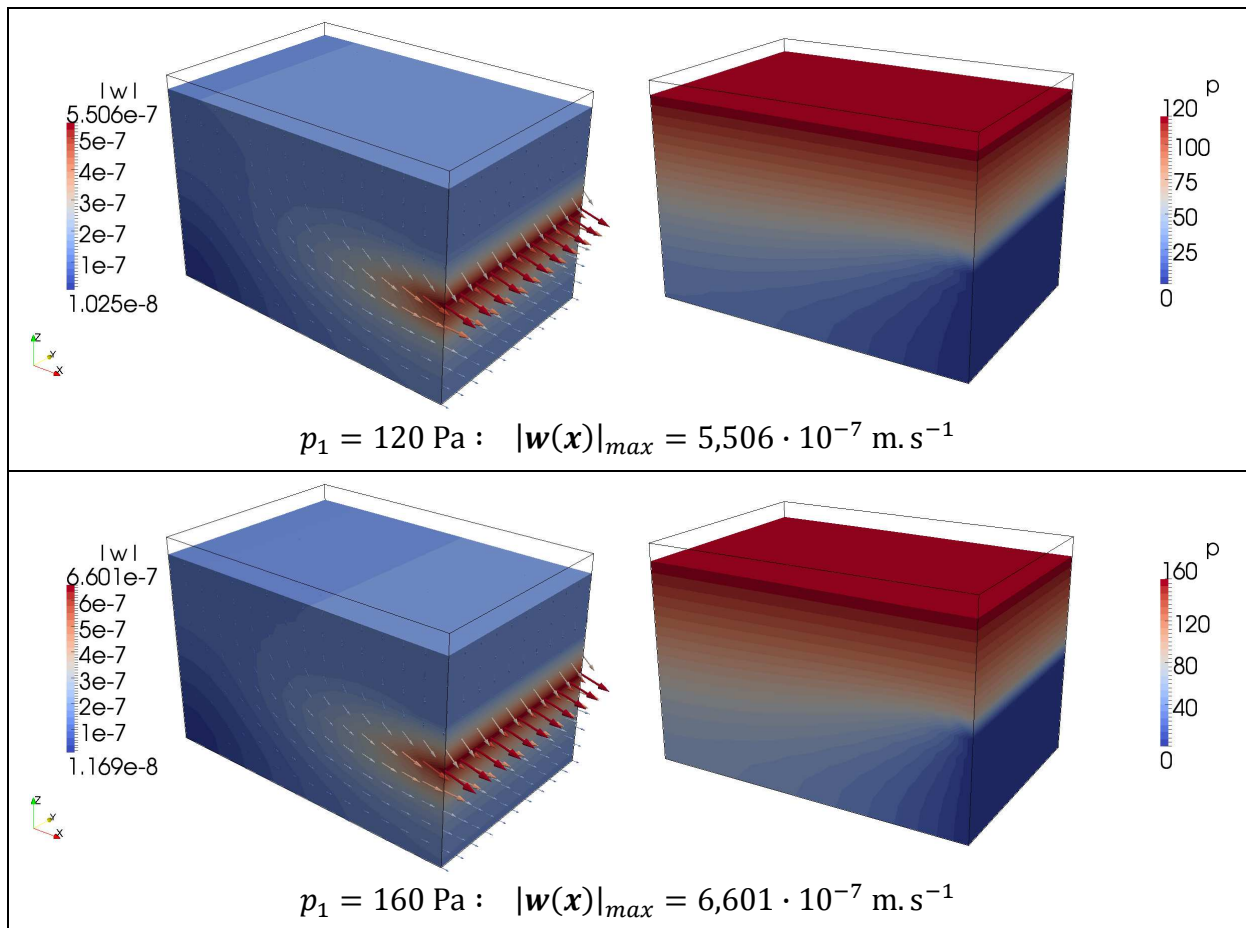
na sérii obrázků na předchozí straně. Vlivem urychlení proudu tekutiny směrem k výstupnímu průřezu dochází v této oblasti k poklesu statického tlaku v pórech a tím díky zatížení od p_1 de facto i k jejich zploštění ve směru osy x_3 , což má za následek zvětšení posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. Rozložení deformace $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$, která je maximální právě v oblasti předcházející výstupnímu průřezu, jak se lze přesvědčit na obrázcích uspořádaných do tabulky na předchozí straně, zmíněné zploštění kanálků potvrzuje.

9.2.2 Nelineární model a vzájemné porovnání

Úlohu II nyní řešíme pomocí nelineárního modelu s tenzorem permeability $\mathbf{K}_{nonlin}^H(p, \mathbf{e}_x(\mathbf{U}))$ závislým na řešení, přičemž dosažené výsledky porovnáme, podobně jako v případě úlohy I, s výsledky vypočtenými pomocí lineárního modelu.

Také v případě úlohy II bylo zjištěno, že perfuzní rychlost $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ narůstá u nelineárního modelu v závislosti na velikosti p_1 pomaleji než u lineárního modelu, jak dokládají obrázky v tabulce na této a následující straně a také graf, viz *obr. 42*, porovnávající závislost $\mathbf{w}(p_1)$, vypočítané jednou pomocí lineárního a podruhé pomocí nelineárního modelu.

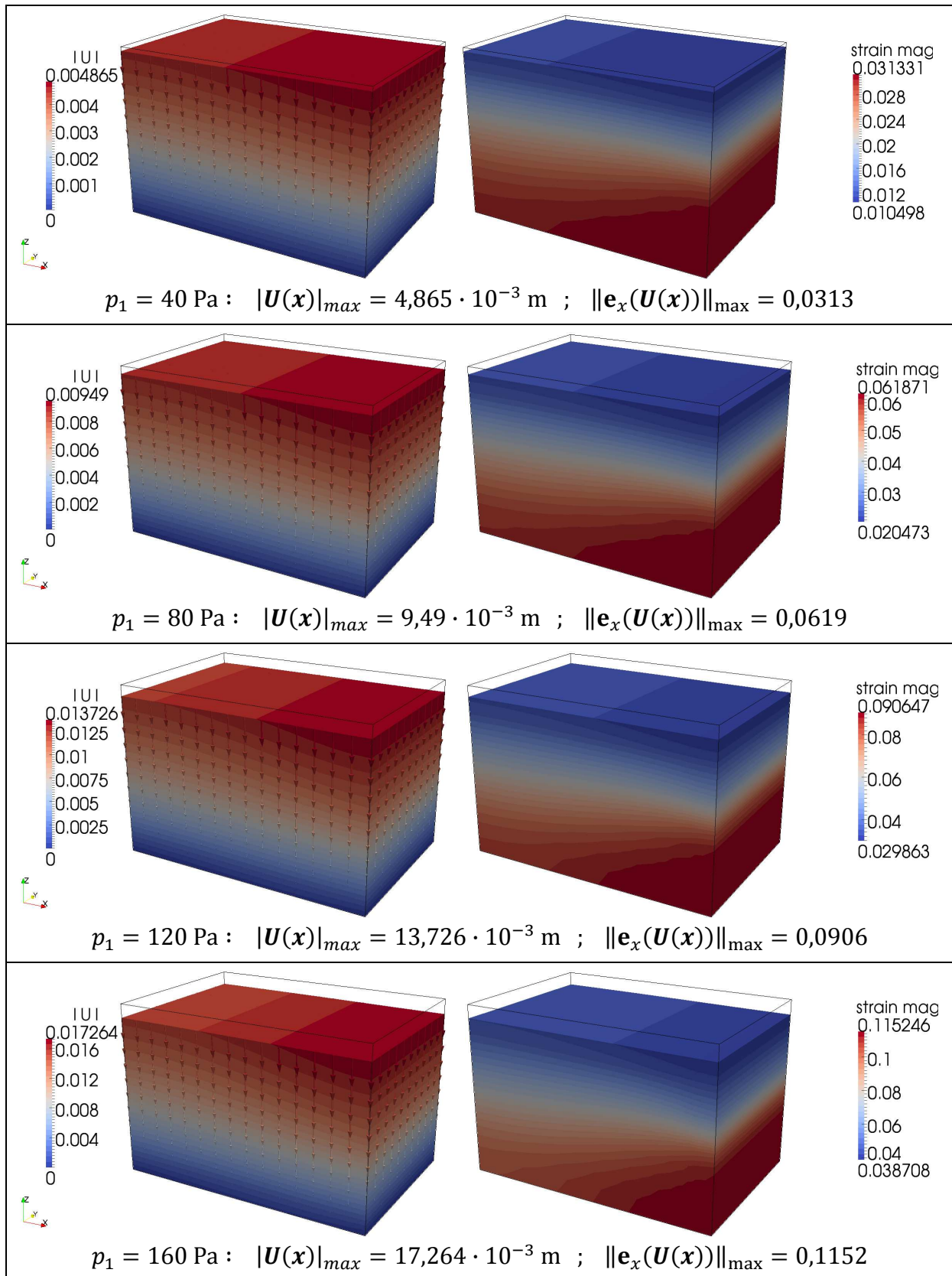


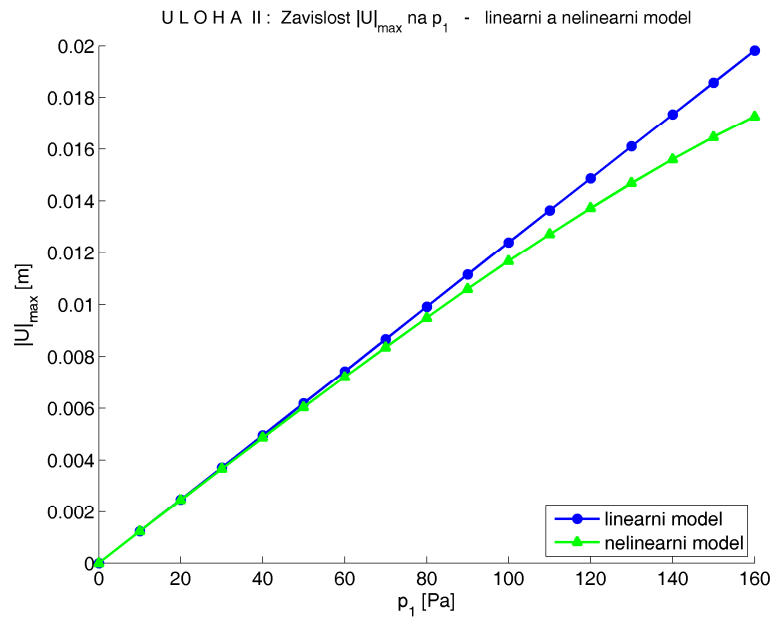


obr. 42: Graf závislosti velikosti maxima perfuzní rychlosti w na okrajové podmínce p_1 u lineárního a nelineárního modelu – úloha II.

Také hodnota vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ i norma tenzoru deformace $\|\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))\|$ narůstají se zvyšujícím se tlakem p_1 pomaleji než u lineárního modelu, viz tabulka obrázků na další straně

a graf na *obr. 43*, do kterého jsou vyneseny maximální hodnoty vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ v absolutní hodnotě, $|\mathbf{U}(\mathbf{x})|_{max}$.



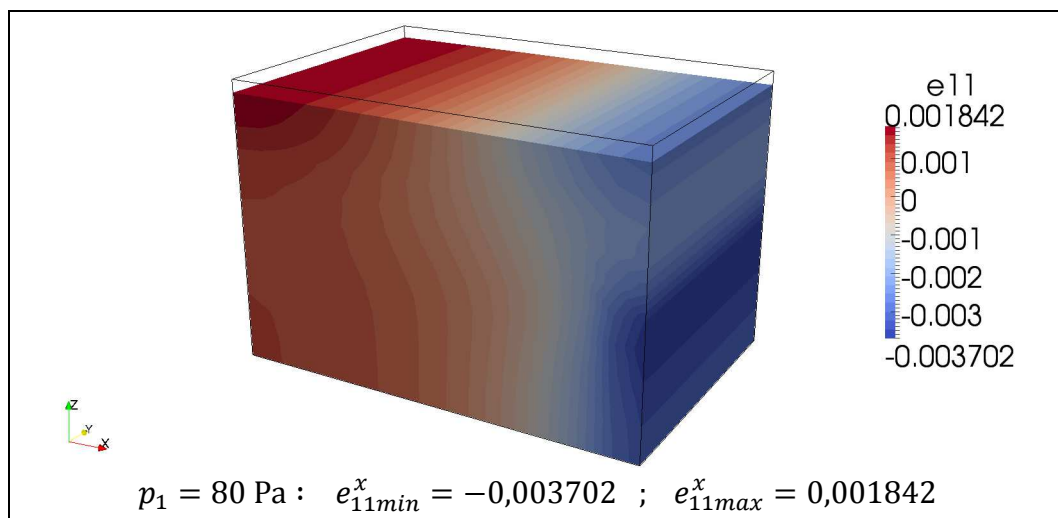


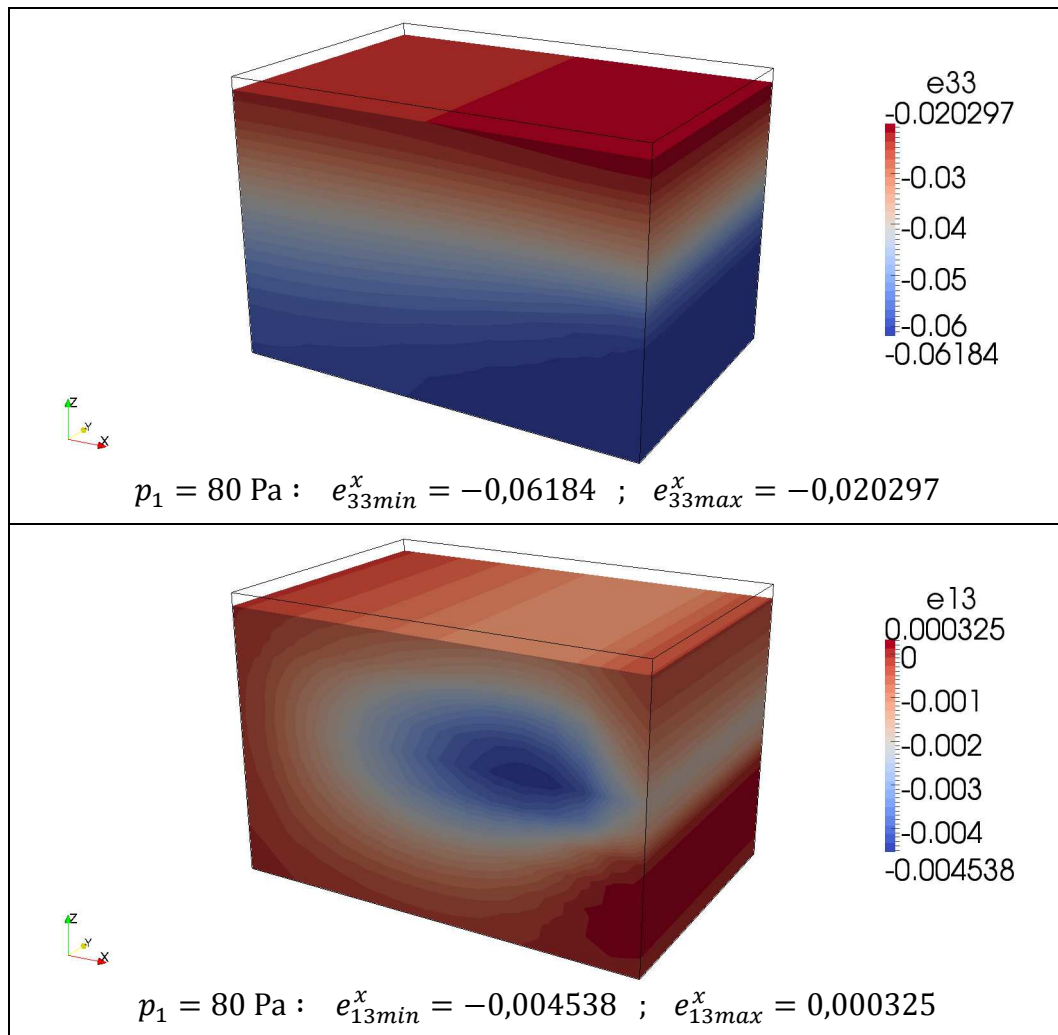
obr. 43: Graf závislosti maximální hodnoty velikosti vektoru posuvů $U(x)$ na okrajové podmínce p_1 u lineárního a nelineárního modelu – úloha II.

Bylo zjištěno, že vlivem zatížení od tlaku p_1 a předepsaných okrajových podmínek vzniká v oblasti Ω deformační stav, který můžeme popsat následujícím tenzorem deformace,

$$\mathbf{e}_x(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} e_{11} & 0 & e_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ e_{31} & 0 & e_{33} \end{bmatrix},$$

v němž jsou všechny složky kromě e_{11} , e_{33} a $e_{13} = e_{31}$ nulové. Tento deformační stav můžeme popsat jako stav rovinné deformace. Níže umístěná tabulka obrázků ukazuje rozložení těchto nenulových složek deformace v oblasti Ω při jejím zatížení $p_1 = 80$ Pa.



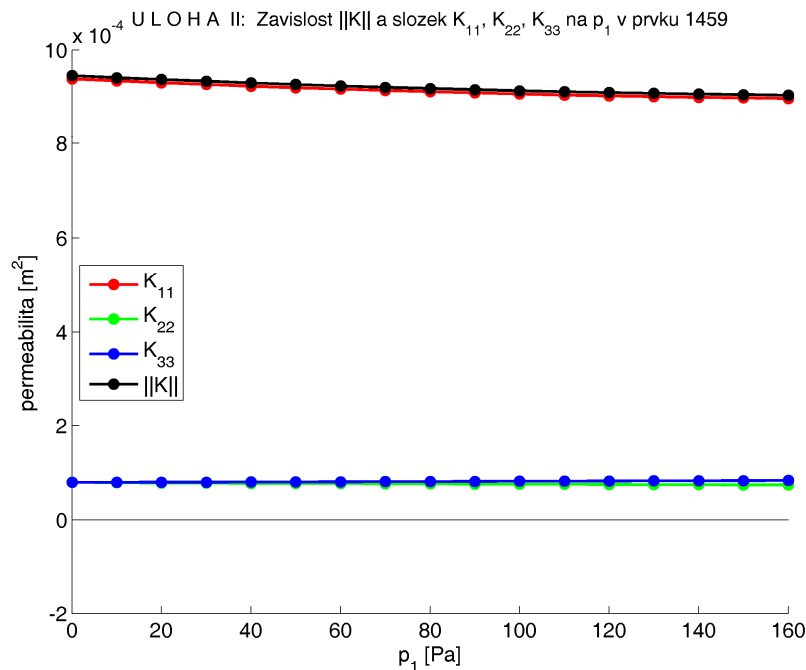


Z předchozích obrázků je zřejmé, že nejvýznamnější složka deformace je logicky složka $e_{33}^x(\mathbf{x})$ ve směru působící tlakové síly od p_1 .

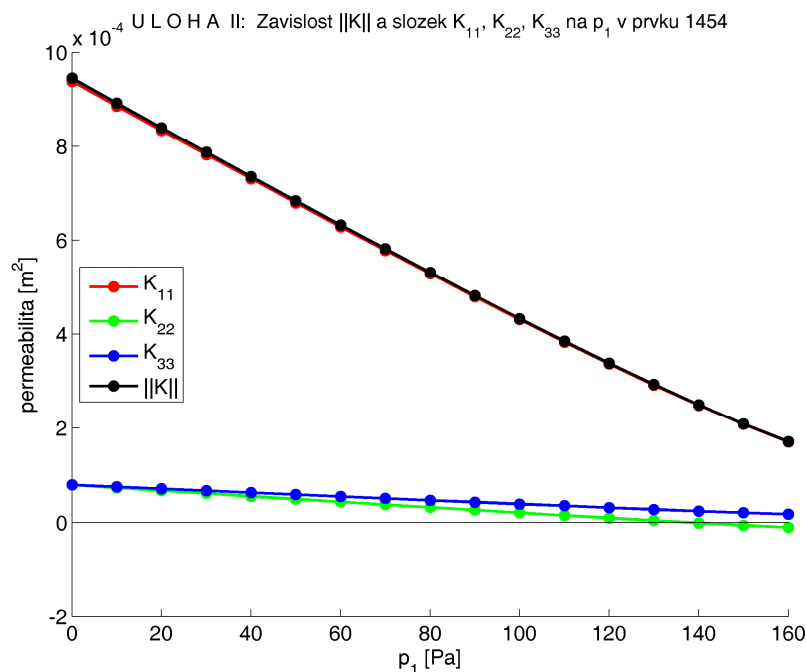
Stejně jako v případě úlohy I, viz kapitola 9.1.2, shrňme na tomto místě výsledky výpočtu úlohy II nejprve pomocí lineárního a poté pomocí nelineárního modelu. Z porovnání obou modelů opět vyplývá, že hodnoty složek vektoru posuvů $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, tenzoru deformace $\mathbf{e}_x(\mathbf{U}(\mathbf{x}))$ i vektoru perfuzní rychlosti $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ u nelineárního modelu se zvyšujícím se zatížením p_1 sice rostou, ale poněkud pomaleji než u lineárního modelu. Průběh závislosti zmíněných veličin na p_1 u nelineárního modelu je tedy i v úloze II regresivní. To znamená, že nelineární model je tužší a má nižší permeabilitu oproti lineárnímu.

Dodejme, že vlivem deformace makroskopické oblasti Ω dochází díky použití aproximace (8.40) ke změnám ve velikosti složek tenzoru permeability, jak je možno se přesvědčit na následujících grafech, viz *obr. 44*, *obr. 45* a *obr. 46*. Na rozdíl od úlohy I, kde jsme pro vyhodnocení velikosti složek a normy tenzoru permeability mohli použít libovolný element v dané horizontální rovině, musíme v případě úlohy II místo pro analýzu vývoje \mathbf{K}^H v závislosti na p_1 pečlivě vybírat. Kritické místo z hlediska deformace se nachází v oblasti výstupního průřezu, proto jsme vývoj velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|\mathbf{K}^H\|$ vyhodnotili právě tam, přičemž stejně jako v případě úlohy I byly vyhodnocovací body

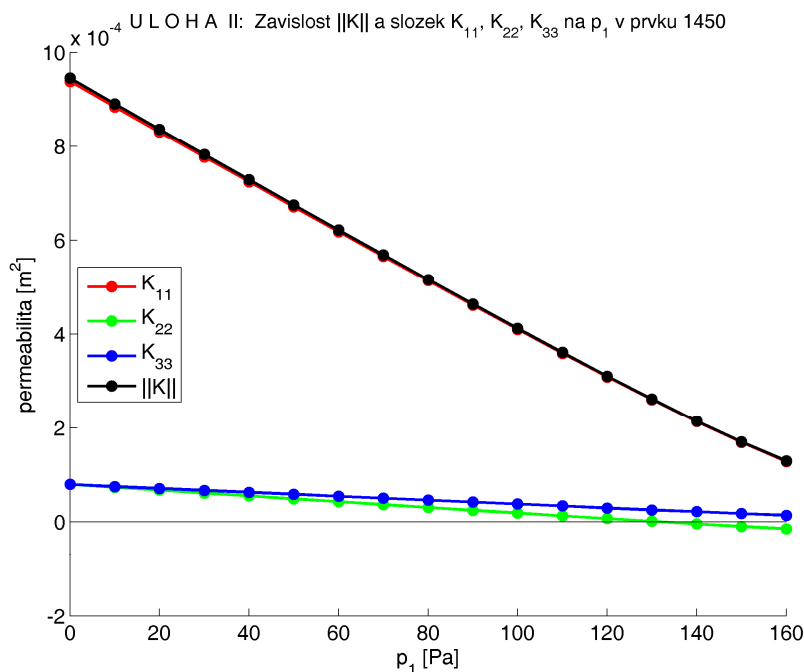
umístěny do horní plochy oblasti Ω (na *obr. 44*), do její střední části (na *obr. 45*) a konečně na samé dno oblasti (na *obr. 46*).



obr. 44: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|K^H\|$ tenzoru permeability v horní ploše oblasti Ω (prvek č. 1459) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .



obr. 45: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|K^H\|$ tenzoru permeability ve střední části oblasti Ω (prvek č. 1454) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .



obr. 46: Graf vývoje velikosti složek K_{11}^H , K_{22}^H , K_{33}^H a normy $\|K^H\|$ tenzoru permeability u dna oblasti Ω (prvek č. 1450) při rostoucím zatížení tlakem p_1 .

Je zřejmé, že složky tenzoru permeability K^H a jeho Frobeniova norma klesají tím více, čím větší je deformace. Výjimku tvoří jen složka K_{33}^H tenzoru K^H v horní ploše oblasti Ω , viz graf na *obr. 44*, jejíž velikost se zatížením dokonce ještě mírně roste. V oblasti výstupního průřezu, kde provádíme odběr dat, je deformace největší. Zvláště ve spodní polovině této oblasti, jak potvrzuje strmý pokles hodnoty normy $\|K^H\|$ na grafech pro prvek 1454, viz *obr. 45*, a především pro prvek 1450, viz *obr. 46*. Pokles normy tenzoru K^H mezi nezatíženým stavem a při zatížení $p_1 = 160$ Pa činí asi jen 5% v horní části oblasti Ω , ale více než 81% v její střední části a u dna dokonce více než 86%.

Skutečná použitelnost nelineárního modelu byla při daných materiálových parametrech ($E = 1230$ Pa, $\nu = 0,43$ a $\eta^\varepsilon = 4 \cdot 10^{-3}$ Pa.s) překročena při zatížení $p_1 = 140$ Pa, neboť složka K_{22} tenzoru K^H jak ve střední, tak i ve spodní části oblasti Ω při tomto zatížení nabývá nefyzikálních záporných hodnot. Proto i zde platí, co již bylo řečeno u rozboru řešení úlohy I pomocí nelineárního modelu. Nelineární model pro řešení elastostatiky poroelastického média je ve své současné podobě a se stávajícími materiálovými parametry, převzatými z odborné literatury, použitelný pouze pro výpočty úloh s malým zatížením oblasti Ω . Může však posloužit jako základ dále vyvíjeného modelu pro popis interakce vazké tekutiny v pórech a poddajné matrice z velmi měkkého materiálu.

10 Závěr

V rámci diplomové práce byla provedena rešerše materiálů, zabývajících se matematickou homogenizací úloh s dvouškálovým popisem. Poté byla vybraná homogenizační metoda aplikována na systém rovnic řešících úlohu Stokesova proudění kanálky porézního materiálu s dokonale tuhými matricí. Byl sledován vliv geometrie mikrostruktury, zastoupené referenční buňkou Y , na velikost složek tenzoru permeability, přičemž bylo zjištěno, že permeabilita závisí především na porózitě materiálu a také na šířce a orientaci kanálků v rámci referenční buňky Y . Vliv geometrie mikrostruktury byl pozorován také při řešení testovacích makroúloh Stokesova proudění, jejichž rovnice jsou ve tvaru Darcyho zákona.

Následně byl model Stokesova proudění zakomponován do Biotova poroelastického modelu v ustáleném stavu. Byla řešena lineární úloha, kdy se sledoval vliv deformace mikrostruktury na proudění vazké tekutiny v kanálcích. Poté jsme zavedli vztah pro zpřesnění tenzoru permeability, který je v podstatě implicitní funkcí tlaku a deformace. Tím jsme získali nelineární úlohu, pro niž jsme řešili totožné příklady, abychom mohli provést vzájemné porovnání obou modelů. Ukázalo se, že vliv zpřesnění tenzoru permeability je poměrně výrazný.

Testovací úlohy, prezentované v této práci byly řešeny pro jednoduchou geometrii, avšak se skutečnými materiálovými parametry, převzatými z odborné literatury. Další plány zahrnují aplikaci nelineárního modelu na geometrii, která lépe odpovídá skutečné lobulární struktuře, a modifikaci nelineárního modelu o vztahy lépe vystihující chování měkké tkáně, než jak to činí Hookeův zákon.

11 Seznam použité literatury

- [1] ALLAIRE, G. One-Phase Newtonian Flow. In HORNUNG, U. *Homogenization and Porous Media*. New York: Springer-Verlag, 1997, s.45-66. ISBN 0-387-94786-8.
- [2] ALLAIRE, G. *Two-Scale Convergence and Homogenization of Periodic Structures*. School on Homogenization, ICTP, Trieste: 1993.
<http://www.mat.uniroma2.it/~braides/ICTP93/ICTP93Allaire1.pdf>, (21. 7. 2012).
- [3] BONFIGLIO, A., LEUNGCHAVAPHONGSE, K., REPETTO, R., SIGGERS, J. H. Mathematical Modeling of the Circulation in the Liver Lobule. In *Journal of Biomechanical Engineering*, 2010, Vol. 132. ISSN 0148-0731.
- [4] CIMRMAN, R., ROHAN, E. Hierarchical multiscale modelling of porous media with applications in biomechanics. *Sborník konference Engineering Mechanics 2012*. Praha: Ústav teoretické a aplikované mechaniky AV ČR, v. v. i., 2012, s. 161-168. ISBN 978-80-86246-40-6.
- [5] CIORANESCU, D., DONATO, P., ZAKI, R. *The periodic unfolding method in perforated domains*. Université Pierre et Marie Curie: 2006.
<http://hal.upmc.fr/docs/00/11/31/07/PDF/R06014.pdf>, (21. 7. 2012).
- [6] DEBBAUT, Ch. et al. Perfusion Characteristics of the Human Hepatic Microcirculation Based on Three-Dimensional Reconstructions and Computational Fluid Dynamic Analysis. In *Journal of Biomechanical Engineering*, 2012, Vol. 134. ISSN 0148-0731.
- [7] DETOURNAY, E., CHENG, A. H.-D. Fundamentals of poroelasticity, Chapter 5. In FAIRHURST, C. *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method*. Pergamon Press, s. 113-171, 1993.
<http://www.engin.umich.edu/class/bme332/ch8poroelasticity/poroelasticitywebnotes.pdf>, (21. 7. 2012).
- [8] DRÁBKOVÁ, S., et. al. *Mechanika tekutin*. Ostrava: Vysoká škola báňská – TU Ostrava, 2007. <http://www.338.vsb.cz/PDF/Drabkova-Mechanikatekutin.pdf>, (21. 7. 2012).
- [9] CHILDRESS, S. *Chapter 7 Stokes flow* [učební text]. Department of Mathematics, New York University. <http://www.math.nyu.edu/faculty/childres/chpseven.PDF>, (21. 7. 2012).
- [10] KŘEN, J., ROSENBERG, J. *Mechanika kontinua*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2002. ISBN 80-7082-908-7.

- [11] LEMAIRE, T. *Partie 2: Quelques exemples d'homogénéisation périodique en milieux hétérogènes*. Z přednášek předmětu Modélisation multi-échelles des matériaux et des structures. Université Paris Est Créteil Val de Marne, 2011. Zapůjčila Ing. A. Rathová.
- [12] LEWALLE, J. Chapter 6 Stokes Flows. In *Lecture Notes in Incompressible Fluid Dynamics: Phenomenology, Concepts and Analytical Tools*. Syracuse University: 2006.
<http://www.lcs.syr.edu/faculty/lewalle/FluidDynamics/fluidsCh67.pdf>, (21. 7. 2012).
- [13] LUKEŠ, V. *Two-scale computational modelling of soft biological tissues* [disertační práce]. Plzeň: ZČU v Plzni, 2007.
http://home.zcu.cz/~vlukes/dokumenty/lukes_phdthesis.pdf, (21. 7. 2012).
- [14] MIARA, B., ROHAN, E. *Homogenization and shape sensitivity of microstructures for design of piezoelectric bio-materials*. Elsevier Science, 2006.
- [15] ROHAN, E. *Homogenization of strongly heterogeneous porous media* [přívodní text k disertační práci]. Plzeň: ZČU v Plzni, 2011.
http://www.avcr.cz/miranda2/export/sites/avcr/data.avcr.cz/vzdelavani/vedecky_titul_doktor_ved/files_obhajoby/autoreferat-Rohan.pdf, (21. 7. 2012).
- [16] ROHAN, E., CIMRMAN, R., LEMAIRE, T., NAILI, S. *Validation of the homogenized poroelasticity equations*. Rukopis článku, 2011.
- [17] ROHAN, E., CIMRMAN, R., NAILI, S. Modelling cortical bone properties using homogenization using double porous medium. In *Proceedings of the 3rd GAMM Seminar on Continuum Biomechanics*. Dresden: GAMM, 2010, s. 7.
- [18] ROHAN, E., NAILI, S., CIMRMAN, R., LEMAIRE, T. *Hierarchical homogenization of potřeba fluid saturated porous solid with multiple porosity scales*. Rukopis článku, 2012.
- [19] ROHAN, E., SHAW, S., WHITEMAN, J. R. *Poro-viscoelasticity modelling based on upscaling quasistatic fluid-saturated solids*. Rukopis článku zaslán do časopisu Computational Geology, 2012.
- [20] ROHAN, E. *Citlivostní analýza pro optimalizaci v mechanice kontinua*. Přednášky předmětu KME/Optimalizace konstrukcí, FAV ZČU v Plzni, 2011.
- [21] ROHAN, E. Spline boxes for shape optimization. *Sborník konference Splines and IsoGeometric Analysis*, Praha 2011.
http://www.it.cas.cz/files/u1891/SIGA_2011_Rohan.pdf, (21. 7. 2012).

-
- [22] ROHAN, E. *SPBOX, User's guide*. NTC, ZČU v Plzni, 2007.
- [23] SANCHEZ-PALENCIA, E. *Non-Homogenous Media and Vibration Theory*. Berlin: Springer-Verlag, 1980. ISBN 3-540-10000-8.
- [24] VIMMR, J., JONÁŠOVÁ A. *Modelování hemodynamiky v cévních náhradách*. Plzeň: ZČU v Plzni, 2012.
- [25] Anonym. *Porous materials, Permeability* [učební text]. University of Edinburgh: Centre for Materials Science and Engineering, 2002.
<http://www.cmse.ed.ac.uk/MSE3/Topics/MSE-permeability.pdf>, (21. 7. 2012).
- [26] RICKEN, T., DAHMEN, U., DIRSCH, O. A biphasic model for sinusoidal liver perfusion remodeling after outflow obstruction. In *Biomech Model Mechanobiol*, 2010, Vol. 9, s. 435-450.

PŘÍLOHA

**Výsledky a vizualizace numerických výpočtů 2D úlohy
Stokesova proudění**

Vizualizace řešení mikroúlohy Stokesova proudění

varianty č. 1, č. 5, č. 7, č. 9 a č. 11

Varianta č. 1:

π^i [m]; ω^i [m²]; K_1^H [m²]



$$\phi_1 = 0,2$$

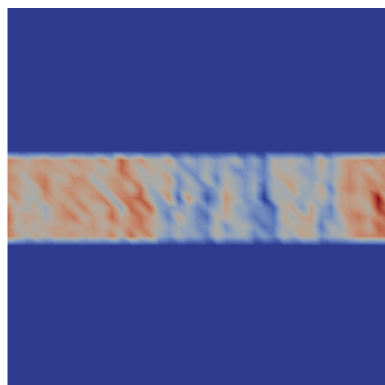
$$K_1^H = \begin{bmatrix} 666,666666 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi_{min}^1 = \pi_{max}^1 = 0$$

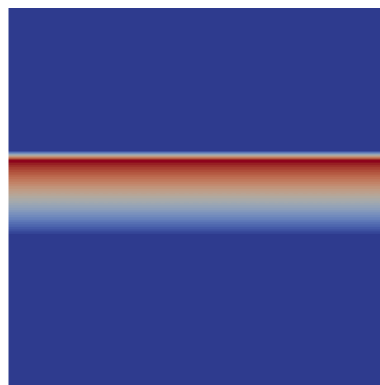
$$\pi_{min}^2 = -0,1; \pi_{max}^2 = 0,1$$

$$|\omega^1|_{min} = 0; |\omega^1|_{max} = 0,005$$

$$|\omega^2|_{min} = |\omega^2|_{max} = 0$$



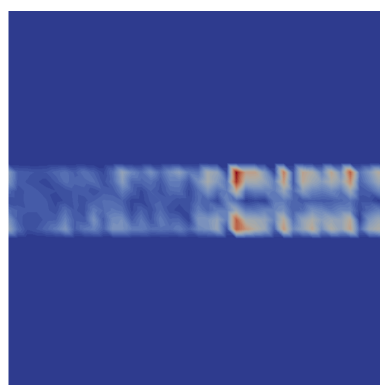
π^1



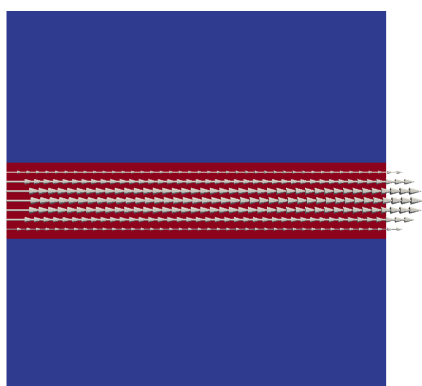
π^2



$|\omega^1|$



$|\omega^2|$

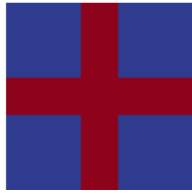


vektorové pole ω^1

nedostupné

vektorové pole ω^2

Varianta č. 5:

 π^i [m]; ω^i [m²]; K_5^H [m²]

$$\phi_5 = 0,36$$

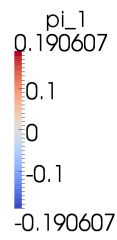
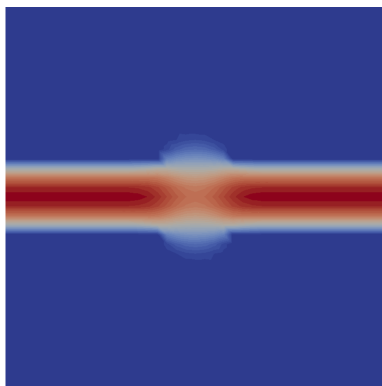
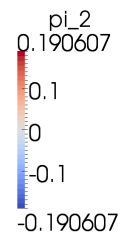
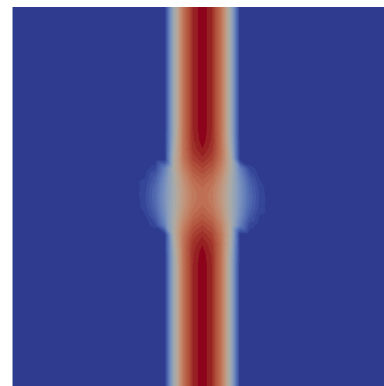
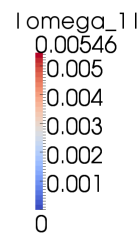
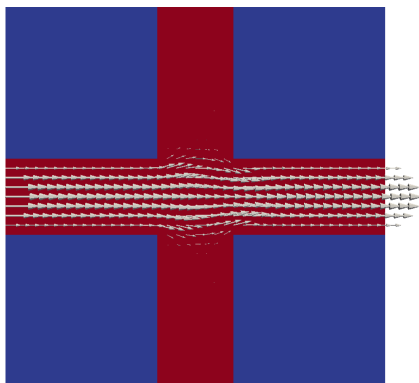
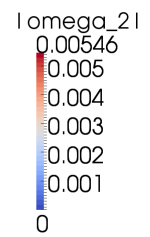
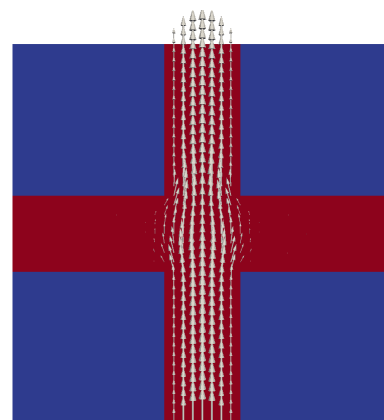
$$K_5^H = \begin{bmatrix} 727,8520 & 0 \\ 0 & 727,8520 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,1906; \pi_{ma}^1 = 0,1906$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1906; \pi_{ma}^2 = 0,1906$$

$$|\omega^1|_{mi} = 0; |\omega^1|_{ma} = 0,00546$$

$$|\omega^2|_{mi} = 0; |\omega^2|_{ma} = 0,00546$$

 π^1  π^2  $|\omega^1|$  $|\omega^2|$ vektorové pole ω^1 vektorové pole ω^2

Varianta č. 7:

 π^i [m]; ω^i [m²]; K_7^H [m²]

$\phi_7 = 0,52$

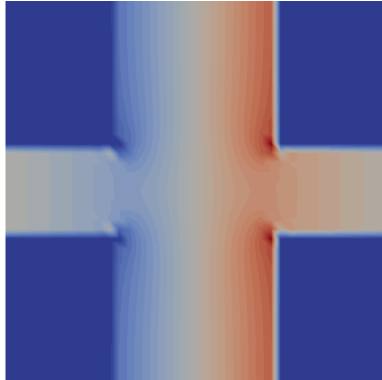
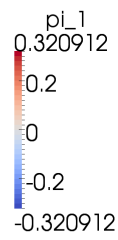
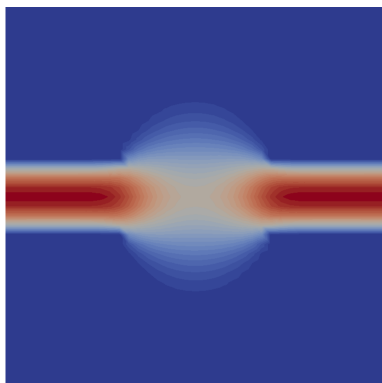
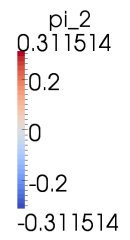
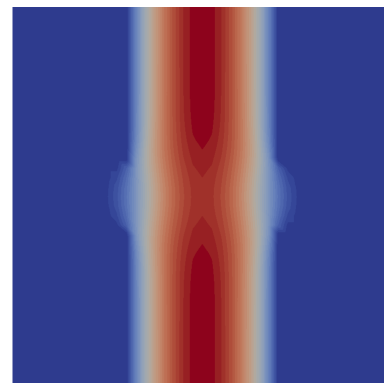
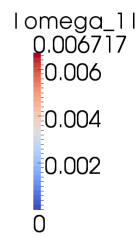
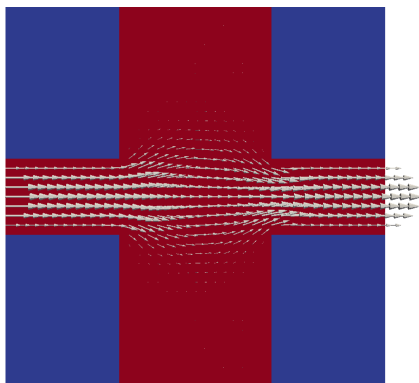
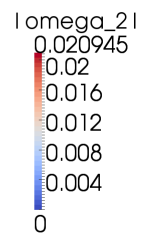
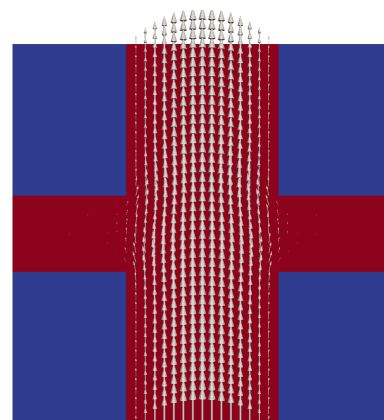
$$K_7^H = \begin{bmatrix} 895,16084 & 0 \\ 0 & 5584,8546 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$\pi_{mi}^1 = -0,3209$; $\pi_{ma}^1 = 0,3209$

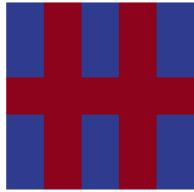
$\pi_{mi}^2 = -0,3115$; $\pi_{ma}^2 = 0,3115$

$|\omega^1|_{mi} = 0$; $|\omega^1|_{ma} = 0,00672$

$|\omega^2|_{mi} = 0$; $|\omega^2|_{ma} = 0,02095$

 π^1  π^2  $|\omega^1|$  $|\omega^2|$ vektorové pole ω^1 vektorové pole ω^2

Varianta č. 9:

 π^i [m]; ω^i [m²]; K_9^H [m²]

$$\phi_9 = 0,52$$

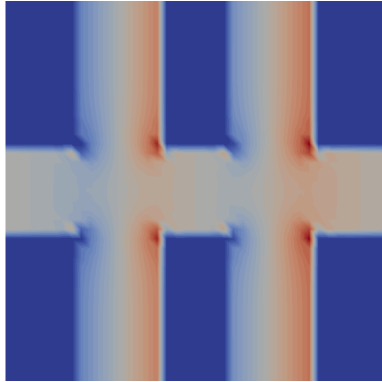
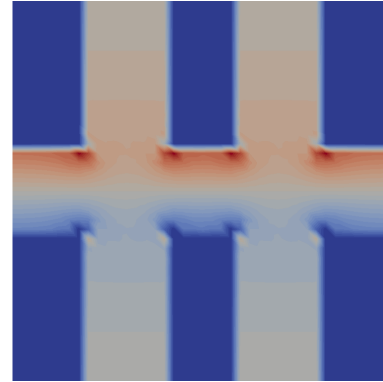
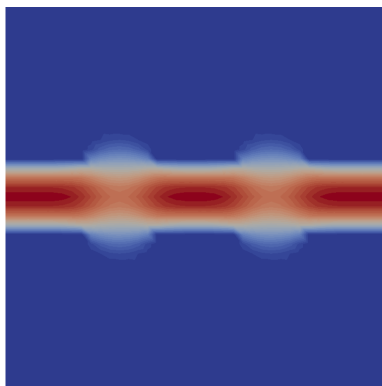
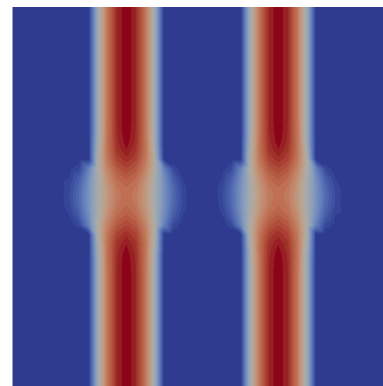
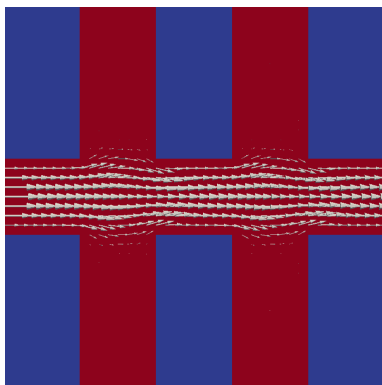
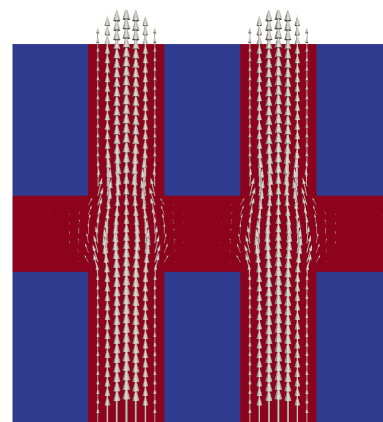
$$K_9^H = \begin{bmatrix} 801,40267 & 0 \\ 0 & 1455,2871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,2098; \pi_{ma}^1 = 0,2098$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1906; \pi_{ma}^2 = 0,1906$$

$$|\omega^1|_{mi} = 0; |\omega^1|_{ma} = 0,00601$$

$$|\omega^2|_{mi} = 0; |\omega^2|_{ma} = 0,00546$$

 π^1  π^2  $|\omega^1|$  $|\omega^2|$ vektorové pole ω^1 vektorové pole ω^2

Varianta č. 11:

 π^i [m]; ω^i [m²]; K_{11}^H [m²]

$$\phi_{11} = 0,205$$

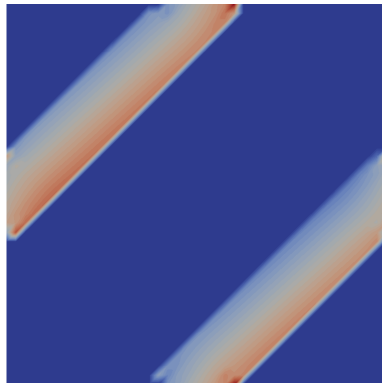
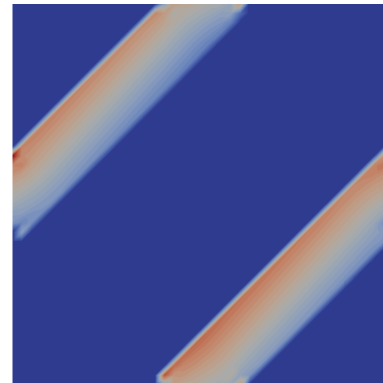
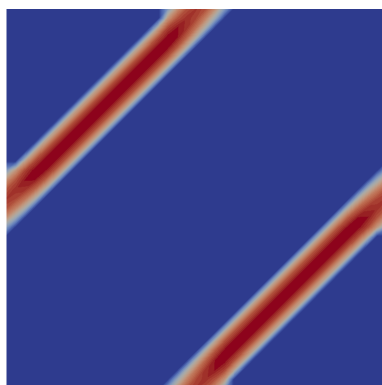
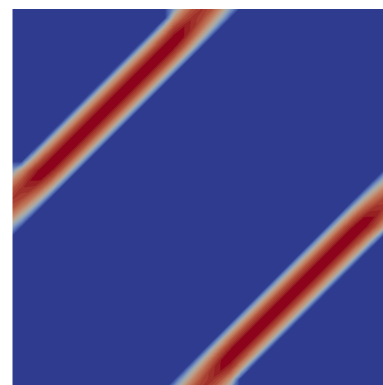
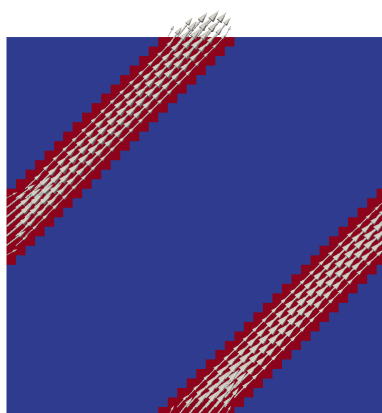
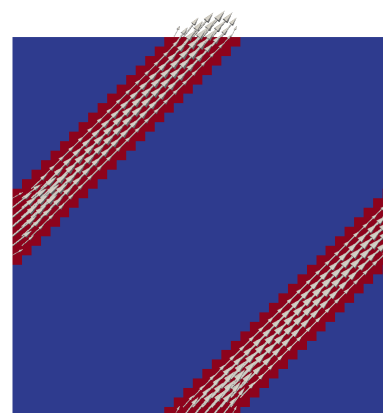
$$K_{11}^H = \begin{bmatrix} 146,5474 & 146,5474 \\ 146,5474 & 146,5474 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\pi_{mi}^1 = -0,1312; \pi_{ma}^1 = 0,1312$$

$$\pi_{mi}^2 = -0,1312; \pi_{ma}^2 = 0,1312$$

$$|\omega^1|_{mi} = 0; |\omega^1|_{ma} = 0,00161$$

$$|\omega^2|_{mi} = 0; |\omega^2|_{ma} = 0,00161$$

 π^1  π^2  $|\omega^1|$  $|\omega^2|$ vektorové pole ω^1 vektorové pole ω^2

Vizualizace řešení makroúlohy 3 Stokesova proudění

s referenční buňkou Y variant č. 5 až č. 10

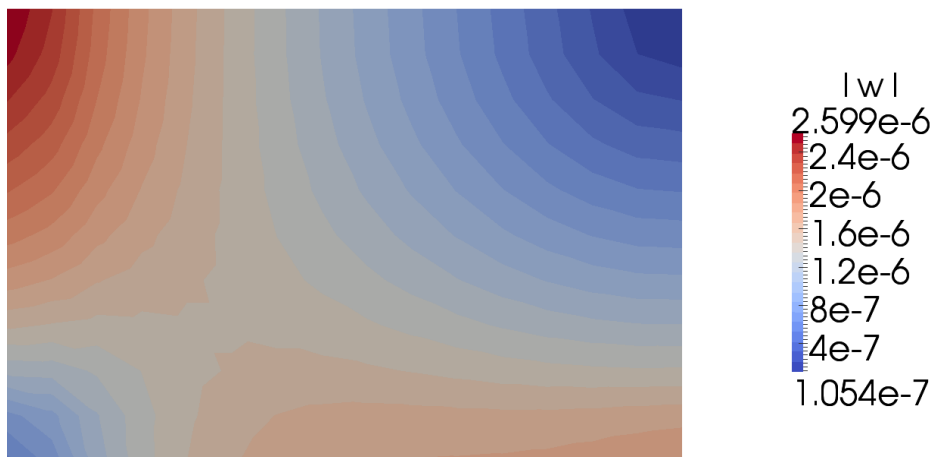
Varianta č. 5:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m.s⁻¹]

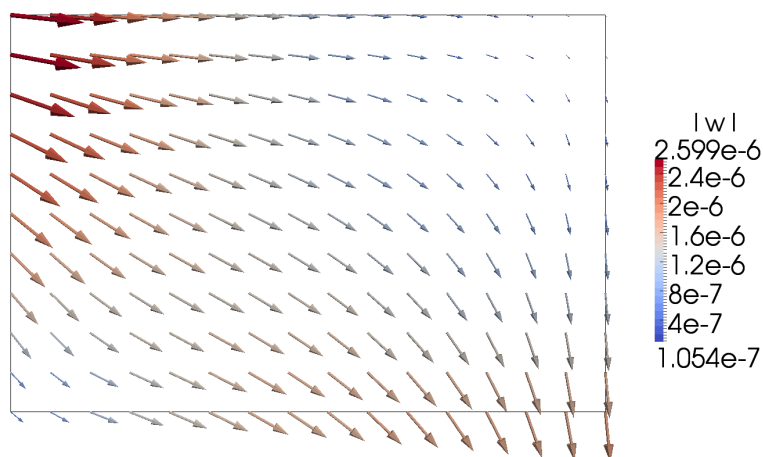
$$K_5^H = \begin{bmatrix} 727,8520 & 0 \\ 0 & 727,8520 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



$p(x)$: $p_{min} = -124,582$; $p_{max} = 155,972$

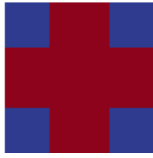


$w(x)$: $|w(x)|_{min} = 1,054 \cdot 10^{-7}$; $|w(x)|_{max} = 2,599 \cdot 10^{-6}$

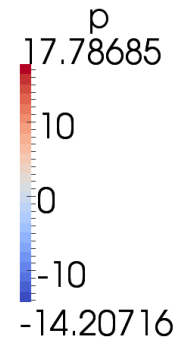
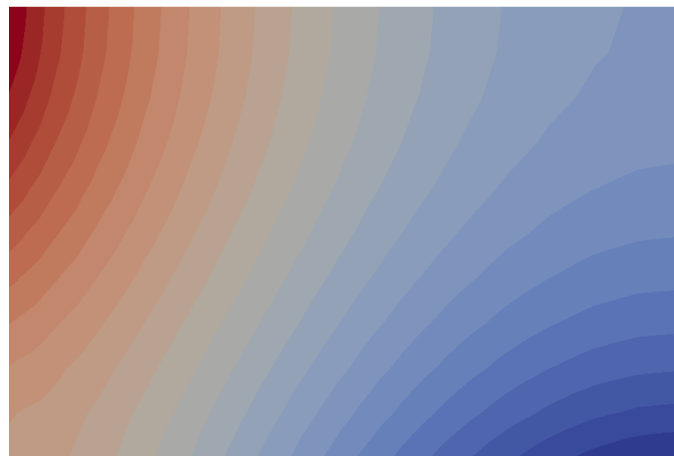
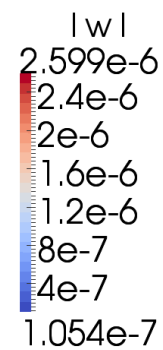
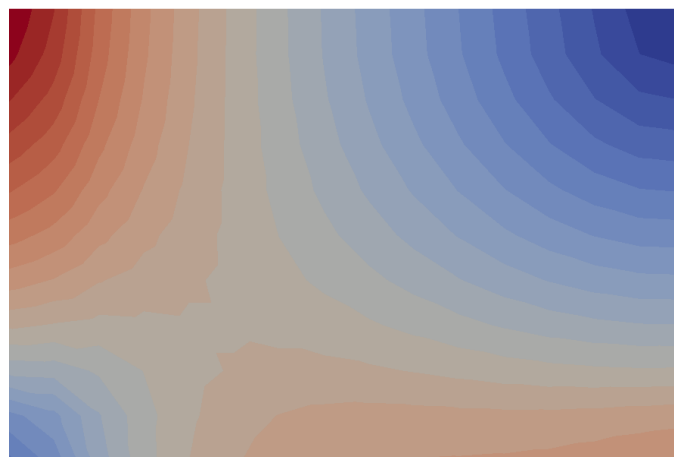
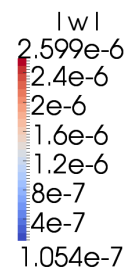
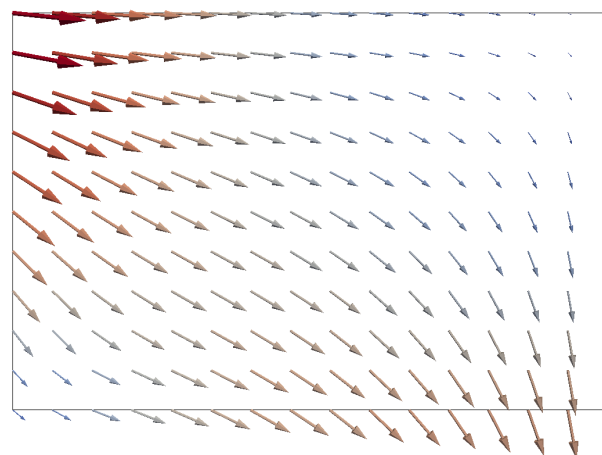


vektorové pole $w(x)$

Varianta č. 6:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m.s⁻¹]

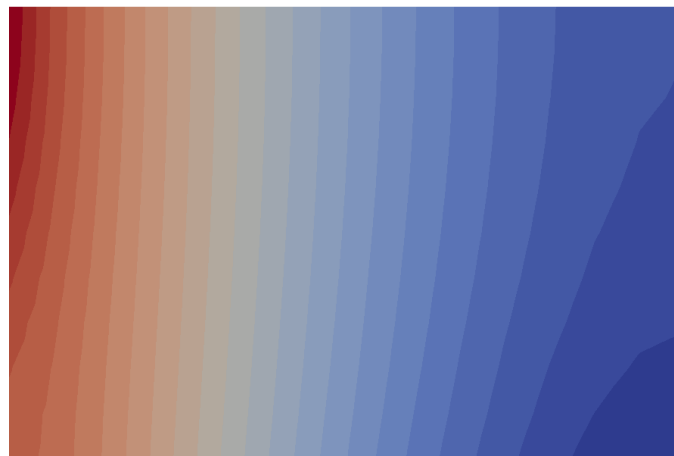
$$K_6^H = \begin{bmatrix} 6382,5061 & 0 \\ 0 & 6382,5061 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$


 $p(x) : p_{min} = -14,207 ; p_{max} = 17,787$

 $w(x) : |w(x)|_{min} = 1,054 \cdot 10^{-7} ; |w(x)|_{max} = 2,599 \cdot 10^{-6}$
vektorové pole $w(x)$

Varianta č. 7:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m.s⁻¹]

$$K_7^H = \begin{bmatrix} 895,16084 & 0 \\ 0 & 5584,8546 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



p

98.25495

75

50

25

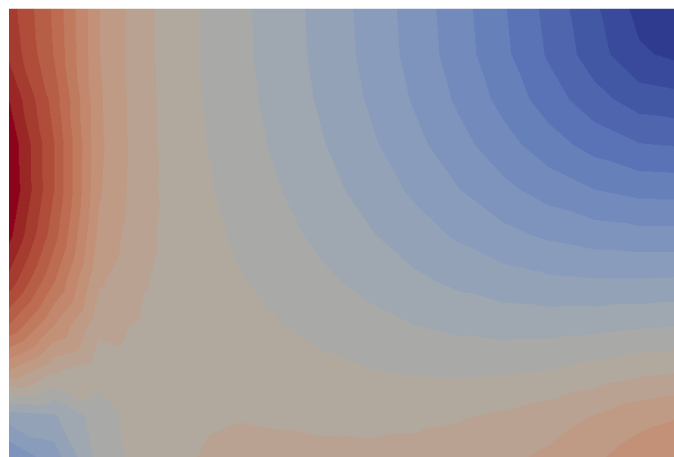
0

-25

-50

-59.30303

$p(x)$: $p_{min} = -59,303$; $p_{max} = 98,255$



$|w|$

2.659e-6

2.4e-6

2e-6

1.6e-6

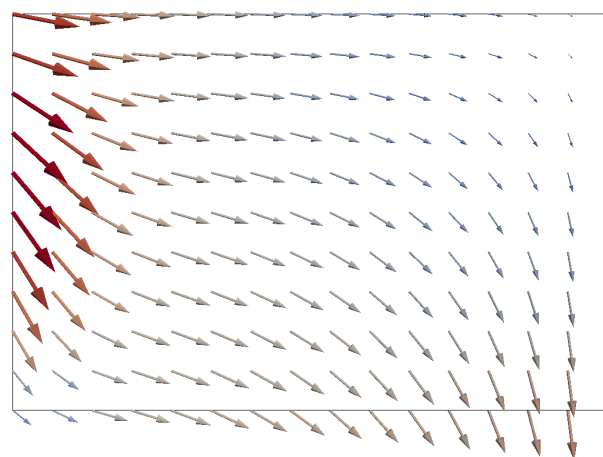
1.2e-6

8e-7

4e-7

1.242e-7

$w(x)$: $|w(x)|_{min} = 1,242 \cdot 10^{-7}$; $|w(x)|_{max} = 2,659 \cdot 10^{-6}$



$|w|$

2.659e-6

2.4e-6

2e-6

1.6e-6

1.2e-6

8e-7

4e-7

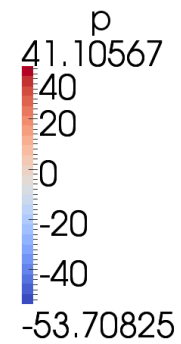
1.242e-7

vektorové pole $w(x)$

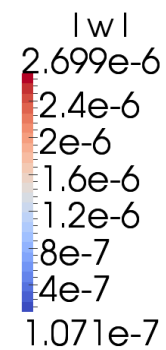
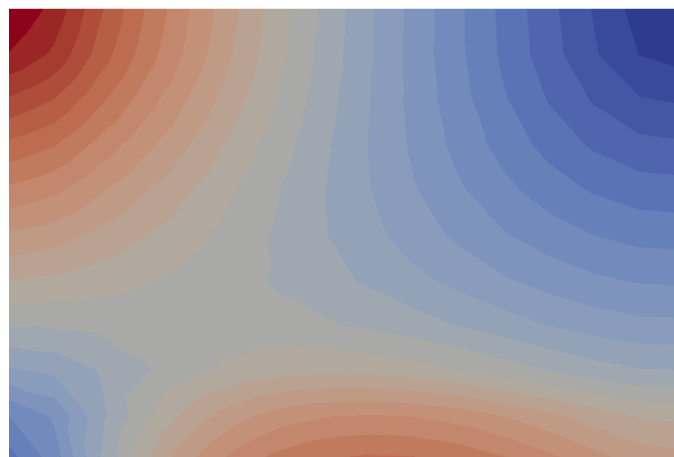
Varianta č. 8:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m.s⁻¹]

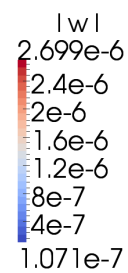
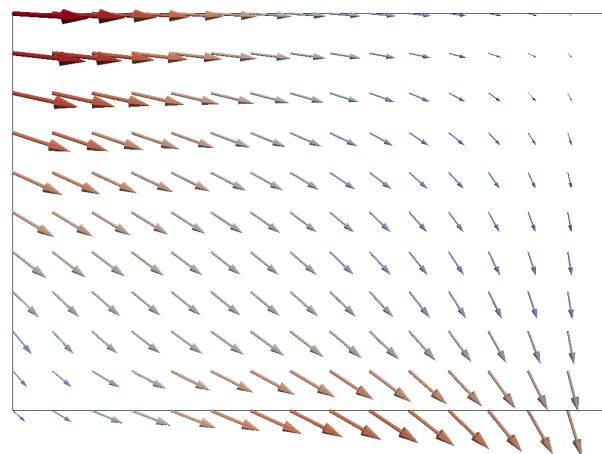
$$K_8^H = \begin{bmatrix} 5584,8546 & 0 \\ 0 & 895,16084 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



$p(x)$: $p_{min} = -53,708$; $p_{max} = 41,106$

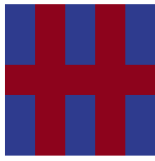


$w(x)$: $|w(x)|_{min} = 1,071 \cdot 10^{-7}$; $|w(x)|_{max} = 2,699 \cdot 10^{-6}$

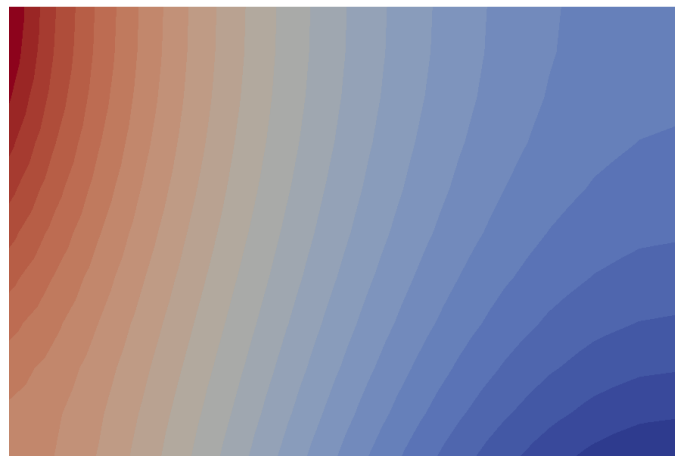


vektorové pole $w(x)$

Varianta č. 9:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m. s⁻¹]

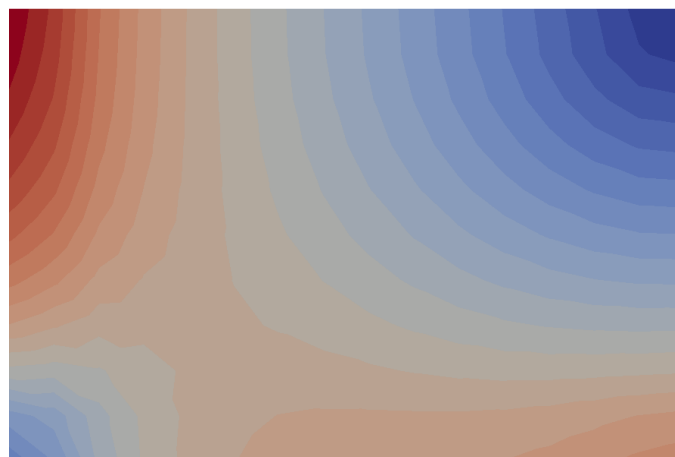
$$K_9^H = \begin{bmatrix} 801,40267 & 0 \\ 0 & 1455,2871 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$



p

126.5812
120
80
40
0
-40
-80
-88.72332

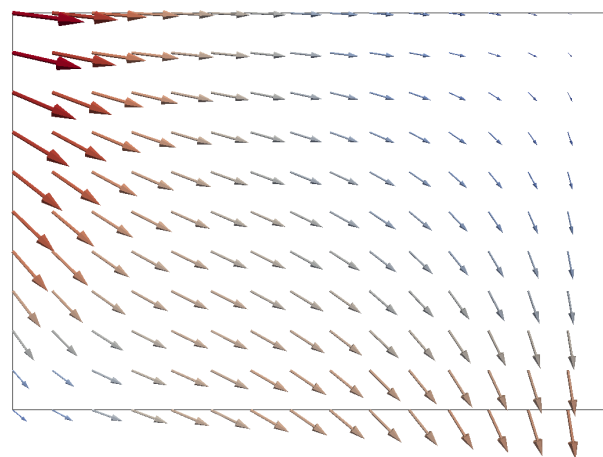
$w(x)$: $p_{min} = -88,723$; $p_{max} = 126,581$



$|w|$

2.546e-6
2.4e-6
2e-6
1.6e-6
1.2e-6
8e-7
4e-7
1.117e-7

$w(x)$: $|w(x)|_{min} = 1,117 \cdot 10^{-7}$; $|w(x)|_{max} = 2,546 \cdot 10^{-6}$

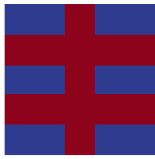


$|w|$

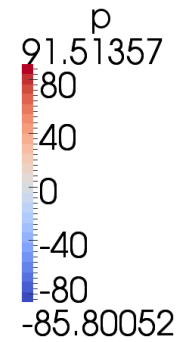
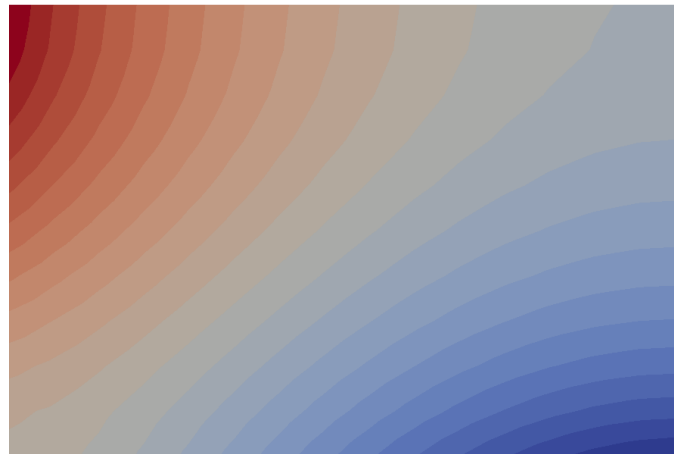
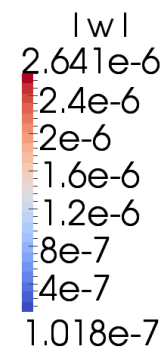
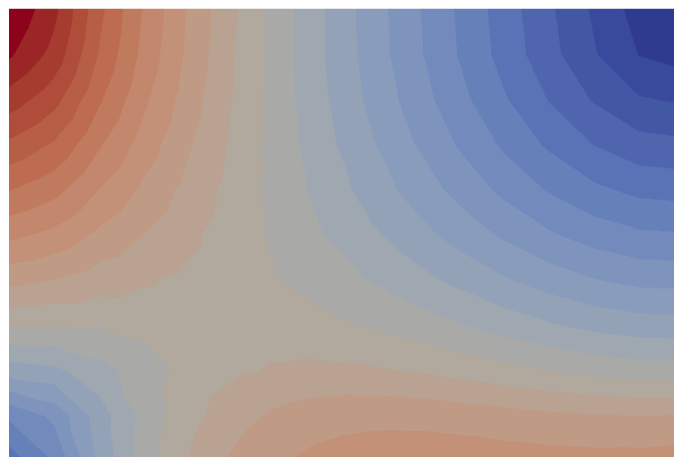
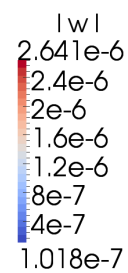
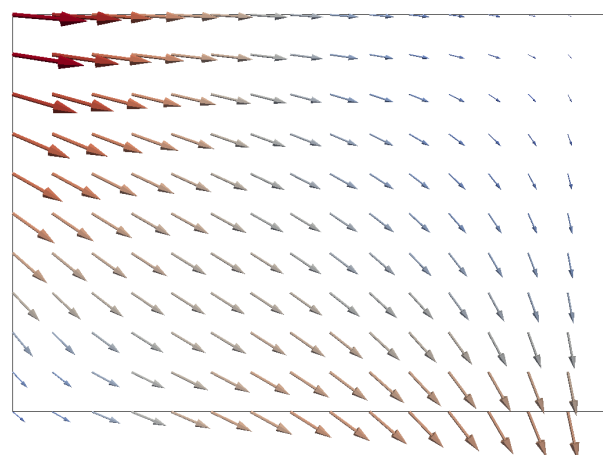
2.546e-6
2.4e-6
2e-6
1.6e-6
1.2e-6
8e-7
4e-7
1.117e-7

vektorové pole $w(x)$

Varianta č. 10:

 $p(x)$ [Pa] ; $w(x)$ [m. s⁻¹]

$$K_{10}^H = \begin{bmatrix} 1455,2871 & 0 \\ 0 & 801,40267 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$


 $p(x) : p_{min} = -85,801 ; p_{max} = 91,514$

 $w(x) : |w(x)|_{min} = 1,018 \cdot 10^{-7} ; |w(x)|_{max} = 2,641 \cdot 10^{-6}$
vektorové pole $w(x)$