Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta pedagogická
Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

Diferenciální rovnice 1. řádu: sbírka řešených příkladů

Bakalářská práce

Iveta Haasová
Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2018

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 28. června 2018

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych touto cestou poděkovala PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D., vedoucímu mé bakalářské práce, za čas, zájem a připomínky, které mi věnoval, ale především za trpělivost a vedení v průběhu vytváření práce.

Další poděkování patří také mé rodině, příteli a všem blízkým, kteří při mně během studia stáli a podporovali mne.

OBSAH

ÚVOD

Tématem mé bakalářské práce jsou diferenciální rovnice 1. řádu, které mají široké využití nejen v matematice, ale také ve fyzice, ekonomii či řadě technických odvětví.

Ačkoli by to mohlo mnohé překvapit, diferenciální rovnice si můžeme spojit např. i s lesními zvířaty, která na první pohled nemají s matematikou vůbec nic společného. Vezměme si problém přemnožení zajíců a lišek. Pokud budeme předpokládat, že liščí potravou jsou pouze zajíci a zajíci se živí trávou, které je všude dostatek, pak se díky dostatku potravy začnou zajíci přemnožovat. V důsledku velkého množství zajíců mají dostatek potravy také lišky, jejichž počet se také výrazně navýší. Tím ale začne ubývat zajíců a následně i lišek. Pokud je málo lišek, začnou přibývat zajíci a tak se celý koloběh neustále opakuje. Tento proces bychom snadno mohli vyjádřit soustavou lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu. Takový příklad už je složitější, ale snadno nám posloužil jako ukázka využití diferenciálních rovnic. V této práci se ale budeme zabývat spíše úvodem do tématu a jednodušší problematikou.

V první části jsem se věnovala úvodu do teorie těchto rovnic, kterou je nezbytné znát pro řešení příkladů. Vyřešené příklady tvoří druhou a nejpodstatnější část mé práce. Celý text je pojat a psán jako sbírka řešených příkladů. Druhá část je dělena na podkapitoly zabývající se konkrétními typy diferenciálních rovnic 1. řádu, mezi které patří obyčejné diferenciální rovnice základního typu, diferenciální rovnice se separovanými proměnnými, homogenní diferenciální rovnice, lineární diferenciální rovnice a Bernoulliova diferenciální rovnice. Jsou zde představeny rovnice spolu s popisem způsobů jejich řešení. Nechybí ani příklady s počátečními podmínkami. V závěrečné třetí části jsem se krátce věnovala aplikaci a využití diferenciálních rovnic v příkladech z praxe.

Text je vhodný pro zájemce o matematiku, ale především je koncipován jako pomocný studijní materiál pro studenty matematických či technických oborů. Může sloužit jako doplnění k doporučené literatuře.

1 TEORETICKÁ ČÁST

1.1 ZÁKLADNÍ POJMY

Rovnice, v nichž se vyskytuje neznámá funkce a její derivace, nazýváme ***diferenciální rovnice***. S takovými rovnicemi se můžeme setkat při matematické formulaci některých úloh z fyziky, geometrie a jiných vědních oborů. My však v této části práce zůstaneme u matematického hlediska.

Při řešení diferenciálních rovnic hledáme funkci $y = \varphi(x)$, definovanou na nějaké množině M a víme, že pro každé $x \in M$ splňuje vztah $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0$. Pokud taková funkce existuje, pak ji nazýváme ***řešením obyčejné diferenciální rovnice***

$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0$$

na množině M.

Kromě obyčejných diferenciálních rovnic, jejichž neznámou je funkce jedné proměnné a v nichž se vyskytuje derivace této neznámé funkce, existují i tzv. parciální diferenciální rovnice. Tyto rovnice obsahují jako neznámou funkci dvou nebo více proměnných a vyskytují se v nich derivace této neznámé funkce, kterým se říká parciální derivace.

Příklad parciální diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

U některých příkladů se lze setkat i se soustavami diferenciálních rovnic.

Diferenciální rovnice mohou být různého řádu. Rozdělení se odvíjí od výše řádu derivace neznámé funkce. V našem případě nás tedy budou zajímat pouze diferenciální rovnice obsahující nejvýše derivaci prvního řádu neznámé funkce, protože se jedná o sbírku příkladů diferenciálních rovnic 1. řádu. (BRABEC, MARTAN, & ROZENSKÝ, 1989)

Příklady diferenciálních rovnic:

- $xy' + y^2 = 0$ je diferenciální rovnice prvního řádu
- $y'' + 4xy' = xy$ je diferenciální rovnice druhého řádu
- $y''' - y' - 2y = 3x$ je diferenciální rovnice třetího řádu

Definice (diferenciální rovnice prvního řádu)

Diferenciální rovnice prvního řádu rozřešená vzhledem k derivaci je rovnice tvaru

$$y' = \varphi(x, y), \text{ (DR)}$$

kde φ je funkce dvou proměnných.

Řešením rovnice (DR) na intervalu I rozumíme každou funkci $y = y(x)$, která rovnici na I splňuje.

Zpravidla lze téměř všechna řešení rovnice (DR) vyjádřit pomocí jediného vzorce, který obsahuje nějakou konstantu C, tj. $y = y(x, C)$, případně $\phi(y, x, C) = 0$. Všechna tato řešení nazýváme ***obecné řešení***. Obecné řešení může, ale nemusí obsahovat úplně všechna řešení.

U výsledků příkladů v druhé části práce budeme znázorňovat také grafické řešení, musíme tedy zavést pojem ***integrální křivka***. Křivka, která je grafem řešení se nazývá integrální křivka.

Definice (počáteční (Cauchyho) úloha)

Nechť $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Úloha najít řešení rovnice (DR), které splňuje tzv. počáteční podmínku

$$y(x_0) = y_0,$$

se nazývá počáteční (Cauchyho) úloha. Jejím řešením je funkce, která splňuje počáteční podmínku a je na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím bod x_0 řešením rovnice (DR).

Partikulárním řešením rozumíme jednu konkrétní funkci, která rovnici splňuje. Volbou konkrétní konstanty v obecném řešení obdržíme jedno partikulární řešení. Řešení počáteční úlohy je partikulární řešení, jehož integrální křivka prochází bodem (x_0, y_0). Má-li počáteční úloha jediné řešení, znamená to, že bodem (x_0, y_0) prochází jediná integrální křivka.

Diferenciální rovnice můžeme také dělit na *tzv. lineární a nelineární diferenciální rovnice*. Mezi obyčejné lineární diferenciální rovnice *n*-tého řádu řadíme všechny ve tvaru

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x),$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou funkce proměnné x. (JANKOVSKÝ, PECHOVÁ, & PRŮCHA, 1985)

2 ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

2.1 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE ZÁKLADNÍHO TYPU

Rovnice ve tvaru

$$y' = f(x)$$

je nejjednodušším příkladem diferenciální rovnice. Jsou to rovnice, ve kterých se nevyskytuje y, tedy f závisí pouze na x.

Je-li F primitivní funkce k funkci f, tj. platí-li

$$F(x) = \int f(x)dx,$$

lze obecné řešení diferenciální rovnice zapsat ve tvaru

$$y(x) = F(x) + C,$$

kde C je integrační konstanta. (KUFNER, 1993)

K výsledku dojdeme nahrazením y' podílem diferenciálů $\frac{dy}{dx}$ a pomocí úprav a využití primitivní funkce (neurčitého integrálu).

Příklad 2.1.1.

Najděte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = (3x + 1)^4.$$

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = (3x + 1)^4$$

$$\int dy = \int (3x + 1)^4 dx$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou substituce:

$$\int (3x + 1)^4 dx = \left| \begin{array}{l} u = 3x + 1 \\ du = 3dx \\ \frac{1}{3} du = dx \end{array} \right| =$$

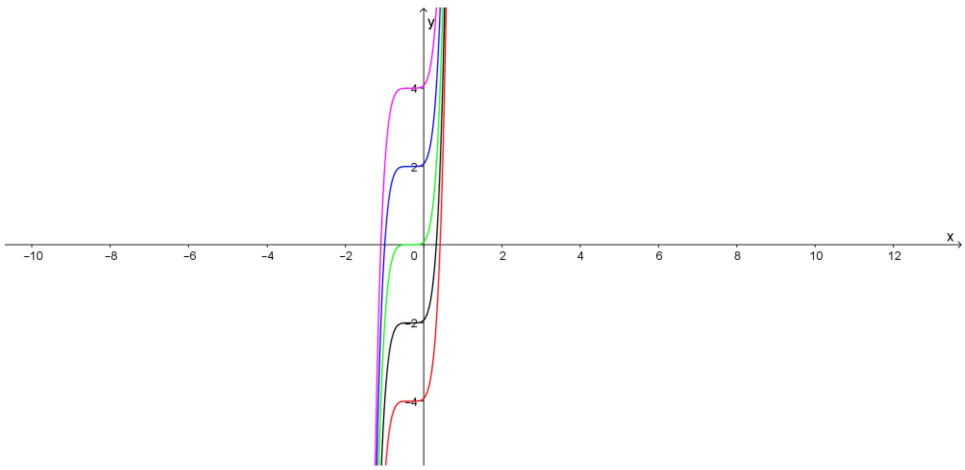
$$= \int u^4 \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int u^4 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^5}{5} + C_1 = \frac{(3x + 1)^5}{15} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení

$$y = \frac{(3x+1)^5}{15} + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 1: Grafické řešení příkladu 2.1.1. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.1.2.

Najděte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{8}\cos\frac{x}{8}.$$

<u>Řešení:</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{8}\cos\frac{x}{8}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{8}\cos\frac{x}{8}\,dx$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou substituce:

$$\int \frac{1}{8}\cos\frac{x}{8}\,dx = \frac{1}{8}\int \cos\frac{x}{8}\,dx = \left| \begin{array}{c} u = \frac{x}{8} \\ du = \frac{1}{8}dx \\ 8du = dx \end{array} \right| =$$

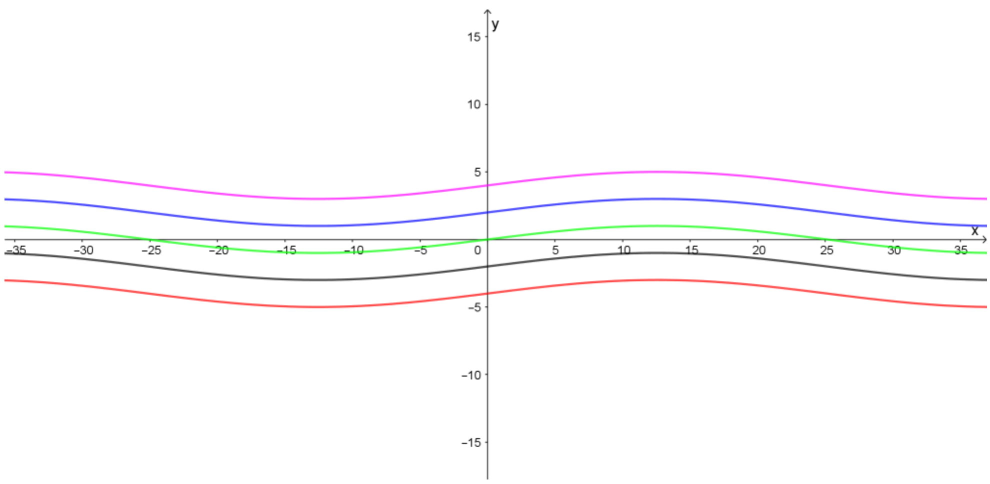
$$= \frac{1}{8}\int \cos(u) 8du = \int \cos u\, du = \sin u + C_1 = \sin\frac{x}{8} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení:

$$y = \sin\frac{x}{8} + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 2: Grafické řešení příkladu 2.1.2. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.1.3.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = x^6 - 2x$$

s počáteční podmínkou $y(1) = 0$.

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = x^6 - 2x$$

$$\int dy = \int (x^6 - 2x)dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$\int (x^6 - 2x)dx = \int x^6 dx - \int 2x\, dx = \frac{x^7}{7} - x^2 + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení:

$$y = \frac{x^7}{7} - x^2 + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = 1$, $y = 0$:

$$0 = \frac{1^7}{7} - 1^2 + C$$

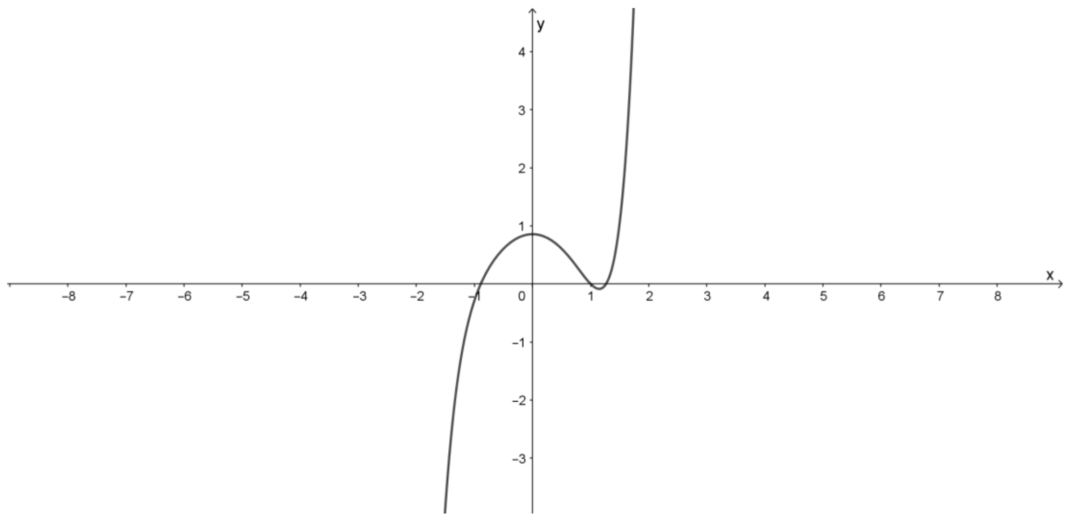
$$C = \frac{6}{7}$$

Hledané partikulární řešení je tedy:

$$y = \frac{x^7}{7} - x^2 + \frac{6}{7},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 3: Grafické řešení příkladu 2.1.3. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.1.4.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{1}{x+3}$$

s počáteční podmínkou $y(-2) = 4$.

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq -3$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x+3}$$

$$\int dy = \int \frac{1}{x+3} dx$$

Integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou substituce:

$$\int \frac{1}{x+3} dx = \begin{vmatrix} u = x+3 \\ du = dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C_1 = \ln|x+3| + C_1 , \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení:

$$y = \ln|x+3| + C,$$

kde $x \neq -3, C \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = -2$, $y = 4$:

$$4 = \ln|-2 + 3| + C$$

$$C = 4 - \ln(1)$$

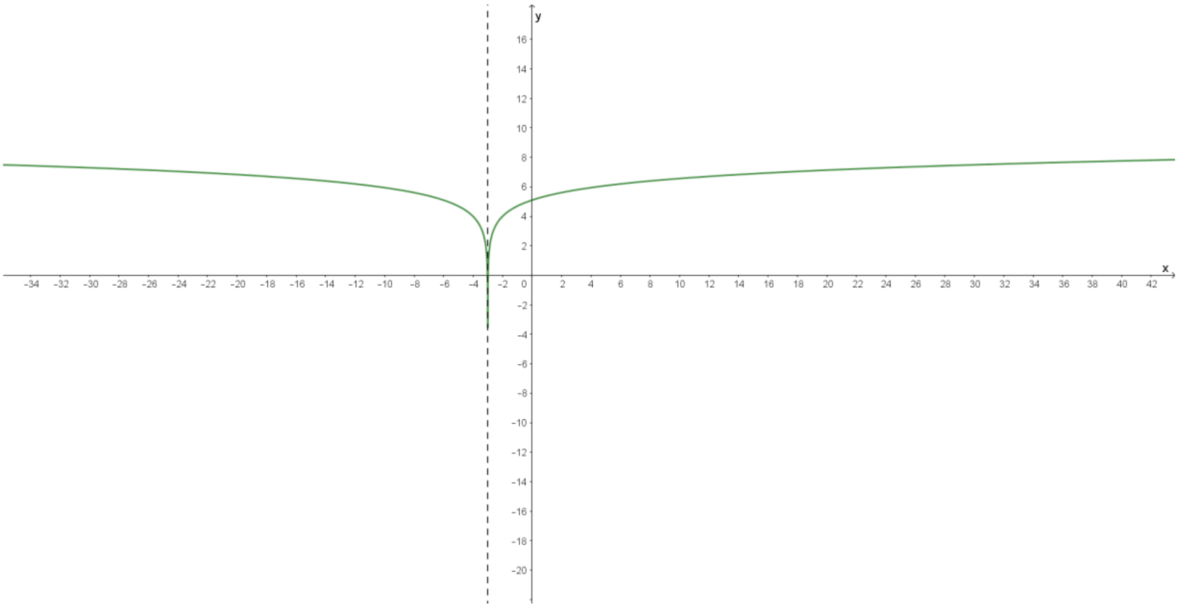
$$C = 4$$

Hledané partikulární řešení je tedy:

$$y = \ln|x + 3| + 4,$$

kde $x \neq -3$.

Grafické řešení:



Obrázek 4: Grafické řešení příkladu 2.1.4. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.1.5.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq 0$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2}$$

$$\int dy = \int \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2} dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2} dx = \int \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x^2} dx = \int \frac{x-3}{x^2} dx = \int \frac{x}{x^2} dx - \int \frac{3}{x^2} dx =$$

$$= \int \frac{1}{x} dx - 3 \int x^{-2} dx = \ln|x| - 3 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C_1 = \ln|x| + \frac{3}{x} + C_1\,,$$

$C_1 \in \mathbb{R}$

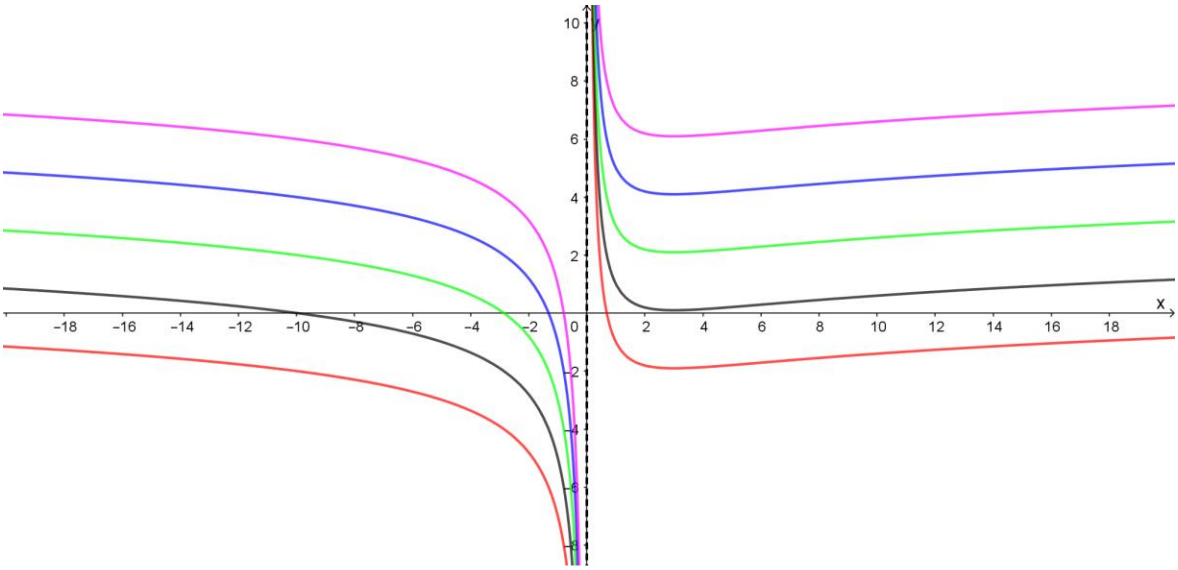
Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení:

$$y = \ln|x| + \frac{3}{x} + C,$$

kde $x \neq 0$, $C \in \mathbb{R}$.

Nyní bychom měli zjistit hodnotu konstanty C, abychom mohli nalézt partikulární řešení vzhledem k počátečním podmínkám. Takové řešení ale v tomto případě neexistuje, protože $x \neq 0$.

Grafická řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 5: Grafické řešení příkladu 2.1.5. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 2.1.6.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x^2}{x^2+1}$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.

<u>Řešení:</u>

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{x^2+1}$$

$$\int dy = \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{1}{x^2+1} dx = x - \operatorname{arctg}(x) + C_1\,, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení:

$$y = x - \operatorname{arctg}(x) + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = 0$, $y = 1$:

$$1 = 0 - \operatorname{arctg}(0) + C$$

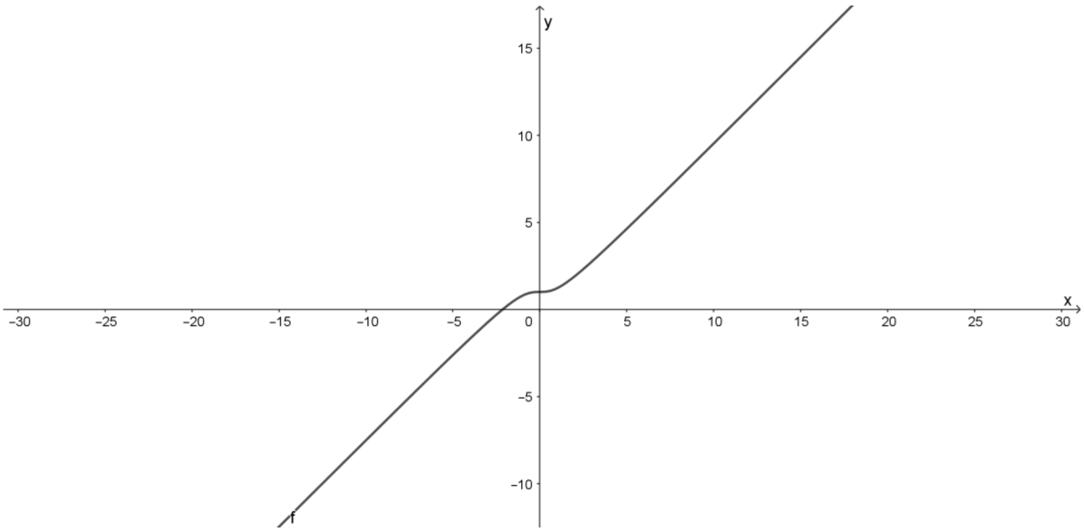
$$C = 1$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = x - \operatorname{arctg}(x) + 1,$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 6: Grafické řešení příkladu 2.1.6. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.1.7.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = e^x \left(1 + \frac{e^x}{3}\right)$$

s počáteční podmínkou $y(0) = 3$.

<u>Řešení:</u>

$$\frac{dy}{dx} = e^x \left(1 + \frac{e^x}{3}\right)$$

$$\int dy = \int e^x \left(1 + \frac{e^x}{3}\right) dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$\int e^x \left(1 + \frac{e^x}{3}\right) dx = \int e^x dx + \int \frac{e^{2x}}{3} dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x \\ du = 2dx \\ \frac{1}{2} du = dx \end{array} \right| = e^x + \frac{1}{3} \int e^u \frac{1}{2} du =$$

$$= e^x + \frac{1}{6} e^u + C_1 = e^x + \frac{1}{6} e^{2x} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice dostáváme obecné řešení rovnice:

$$y = e^x + \frac{1}{6}e^{2x} + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = 0$, $y = 3$:

$$3 = e^0 + \frac{1}{6}e^{2\cdot 0} + C$$

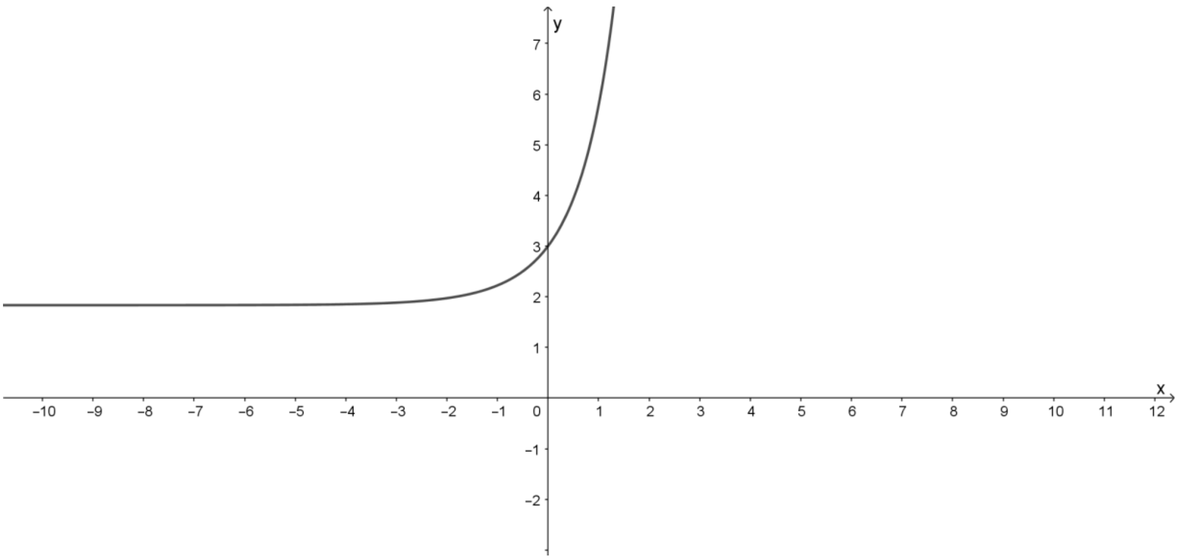
$$C = \frac{11}{6}$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = e^x + \frac{1}{6}e^{2x} + \frac{11}{6},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 7: Grafické řešení příkladu 2.1.7. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.1.8.

Najděte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \mathrm{tg}^2(x).$$

Řešení:

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}^2(x)$$

$$\int dy = \int \mathrm{tg}^2(x)\,dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice s využitím goniometrických vzorců:

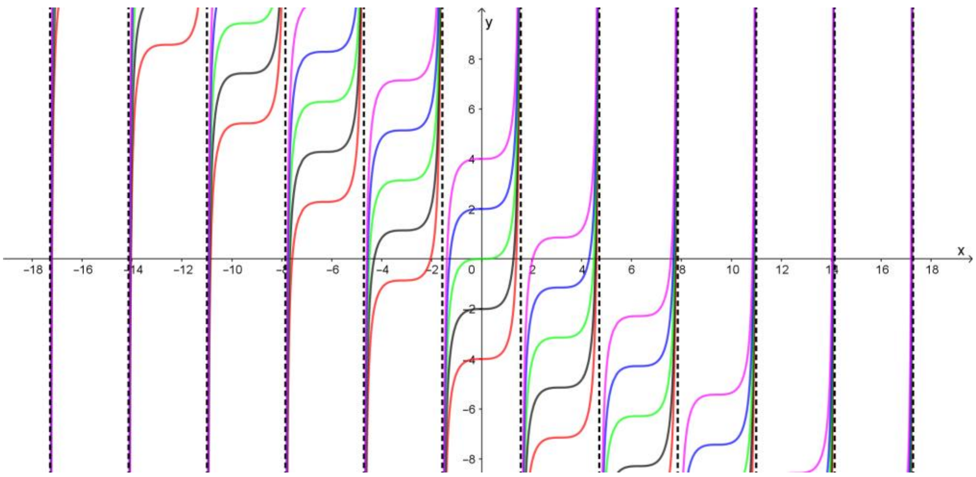
$$\int \mathrm{tg}^2(x)dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}dx - \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \mathrm{tg}(x) - x + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice najdeme obecné řešení rovnice:

$$y = \mathrm{tg}(x) - x + C,$$

kde $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 8: Grafické řešení příkladu 2.1.8. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.1.9.

Najděte všechna řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = \frac{\sin(2x)}{\sin x}.$$

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(2x)}{\sin x}$$

$$\int dy = \int \frac{\sin(2x)}{\sin x} dx$$

Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice s využitím goniometrických vzorců:

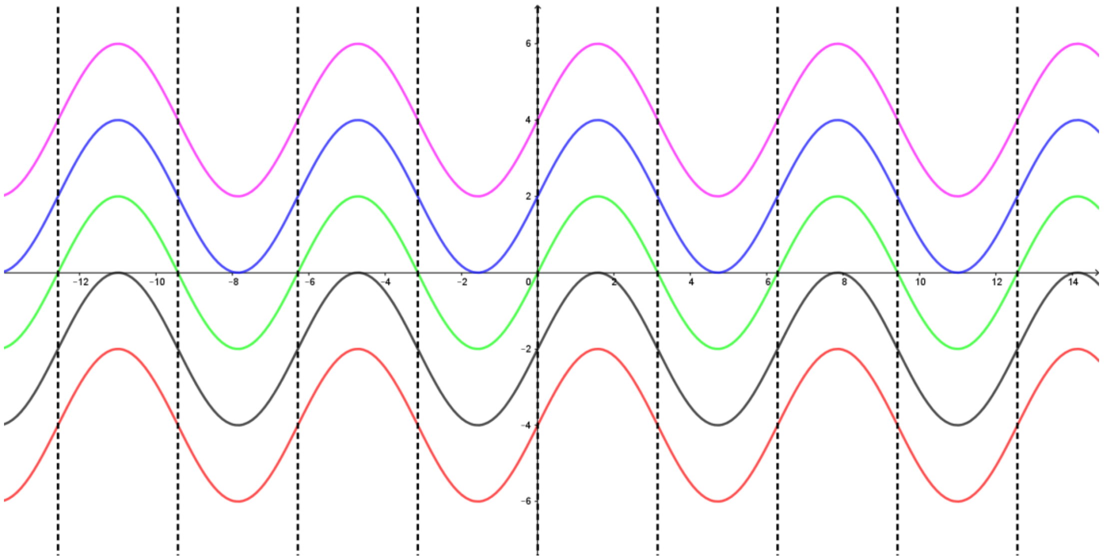
$$\int \frac{\sin(2x)}{\sin x} dx = \int \frac{2\sin x \cos x}{\sin x} dx = \int 2\cos x\, dx = 2\int \cos x\, dx = 2\sin x + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice najdeme obecné řešení rovnice:

$$y = 2\sin x + C,$$

kde $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 9: Grafické řešení příkladu 2.1.9. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.1.10.

Najděte partikulární řešení obyčejné diferenciální rovnice

$$y' = x^2 \cos x^3$$

s počáteční podmínkou $y(\pi) = 2$.

Řešení:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cos x^3$$

$$\int dy = \int x^2 \cos x^3 dx$$

Složitější integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou substituce:

$$\int x^2 \cos x^3 dx = \begin{vmatrix} u = x^3 \\ du = 3x^2 dx \\ \frac{1}{3} du = x^2 dx \end{vmatrix} = \int \frac{\cos u}{3} du = \frac{1}{3} \int \cos u \, du = \frac{\sin u}{3} + C_1 =$$

$$= \frac{\sin x^3}{3} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Po dosazení do rovnice najdeme obecné řešení rovnice:

$$y = \frac{\sin x^3}{3} + C,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = \pi, y = 2$:

$$2 = \frac{\sin \pi^3}{3} + C$$

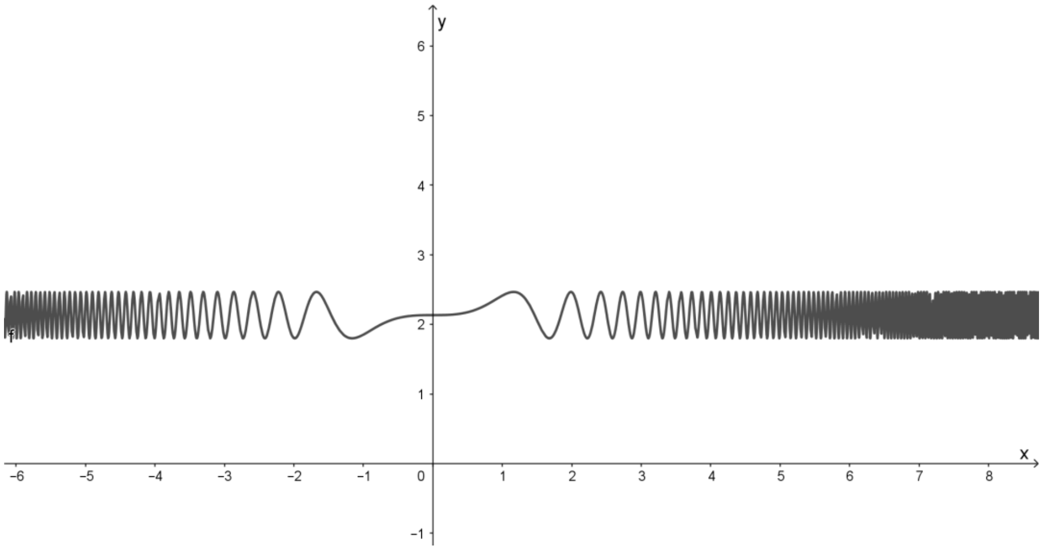
$$C = 2 - \frac{\sin \pi^3}{3}$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = \frac{\sin x^3}{3} - \frac{\sin \pi^3}{3} + 2,$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 10: Grafické řešení příkladu 2.1.10. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

PŘÍKLADY K SAMOSTATNÉMU PROCVIČENÍ:

1. $y' = e^x - \sin 2x$

$$\left[y = e^x + \frac{\cos 2x}{2} + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = \sqrt{3x}$

$$\left[y = \frac{2}{3}\sqrt{3x^3} + C, x \geq 0, C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y' = \frac{1}{x^2+4}$

$$\left[y = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\right]$$

4. $y' = \cos^2 x$

$$\left[y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\right]$$

5. $y' = \sin 3x$

$$\left[y = -\frac{1}{3}\cos(3x) + C, x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}\right]$$

6. $y' = 3x^2 - 4x,\ y(0) = 1$

$$[y = x^3 - 2x^2 + 1, x \in \mathbb{R}]$$

7. $y' = x^2 \ln x, \quad y(3) = 2$

$$\left[y = \frac{x^3}{3}\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + 5 - 9\ln 3\,, x \geq 0\right]$$

8. $y' = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,,\ \ y(0) = 4$

$$\left[y = \frac{1}{3}\arcsin(3x) + 4\,, x \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)\right]$$

9. $y' = e^{\cos x}\sin x, \quad y(2\pi) = 3$

$$[y = -e^{\cos x} + 3 + e, x \in \mathbb{R}]$$

2.2 OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE SE SEPAROVANÝMI PROMĚNNÝMI

V této podkapitole budeme řešit diferenciální rovnice se separovanými proměnnými. Jsou to rovnice zadané ve tvaru

$$y' = f(x)g(y).$$

Jedná se tedy o rovnice, ve kterých se nachází součin dvou funkcí, z nichž jedna závisí pouze na x a druhá pouze na y.

Nejprve budeme hledat řešení rovnice $g(y) = 0$. Tato řešení jsou konstantními řešeními diferenciální rovnice, ale nemusí nutně existovat v každém příkladu.

Dále budeme předpokládat, že $g(y) \neq 0$ a budeme pokračovat v hledání nekonstantního řešení. Podobně jako v předchozí kapitole nahradíme $y' = \frac{dy}{dx}$ a dosadíme do původního zadání, čímž dostáváme rovnici

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y).$$

Rovnici upravíme tak, aby na každé straně byla jen jedna proměnná a integrujeme

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x)dx.$$

Získáme obecné řešení v implicitním tvaru

$$G(y) = F(x) + C$$

s primitivními funkcemi $G(y)$ pro $\frac{1}{g(y)}$, $F(x)$ pro $f(x)$ a integrační konstantou C.

Vyjádřením y z obecného řešení v implicitním tvaru dostaneme explicitní tvar obecného řešení.

Vhodnou volbou konstanty C (případně K) se snažíme získat konstantní řešení, které by šlo zahrnout do obecného.

Rovnice ve tvaru $y' = f(\alpha x + \beta y + \gamma)$ lze převést na rovnice se separovanými proměnnými užitím substituce $u = \alpha x + \beta y + \gamma$. (KUFNER, 1993)

Test separovatelnosti proměnných

Diferenciální rovnice

$$y' = \varphi(x, y)$$

je rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když existují funkce $f(x)$ a $g(y)$ takové, že

$$\varphi(x, y) = f(x)g(y).$$

Pokud je φ nezáporná a dostatečně hladká na nějaké otevřené konvexní množině, je rovnice rovnicí se separovanými proměnnými právě tehdy, když platí

$$\begin{vmatrix} \varphi & \frac{\partial}{\partial x}\varphi \\ \frac{\partial}{\partial y}\varphi & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\varphi \end{vmatrix} = 0.$$

Věta o existenci a jednoznačnosti řešení

Je-li $g(y_0) \neq 0$, je řešení počáteční úlohy

$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0,$$

které obdržíme pomocí postupu z předchozích odstavců, definované a jednoznačně určené v nějakém okolí bodu x_0.

(JANKOVSKÝ, PECHOVÁ, & PRŮCHA, 1985)

Příklad 2.2.1.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = 6x^2(y-3).$$

<u>Řešení:</u>

$$f(x) = 6x^2$$

$$g(y) = y - 3$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y - 3 = 0$$

$$y = 3$$

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2(y-3)$$

$$\frac{1}{y-3}dy = 6x^2dx$$

$$\int \frac{1}{y-3}dy = \int 6x^2dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y-3}dy = \begin{vmatrix} u = y-3 \\ du = dy \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C_1 = \ln|y-3| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int 6x^2dx = 6\int x^2dx = 6\frac{x^3}{3} + C_2 = 2x^3 + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y-3| = 2x^3 + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y-3|} = e^{2x^3+C}$$

$$|y-3| = e^{2x^3} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{2x^3} + 3$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$, pak jsou řešením všechny funkce

$$y = Ke^{2x^3} + 3,$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.

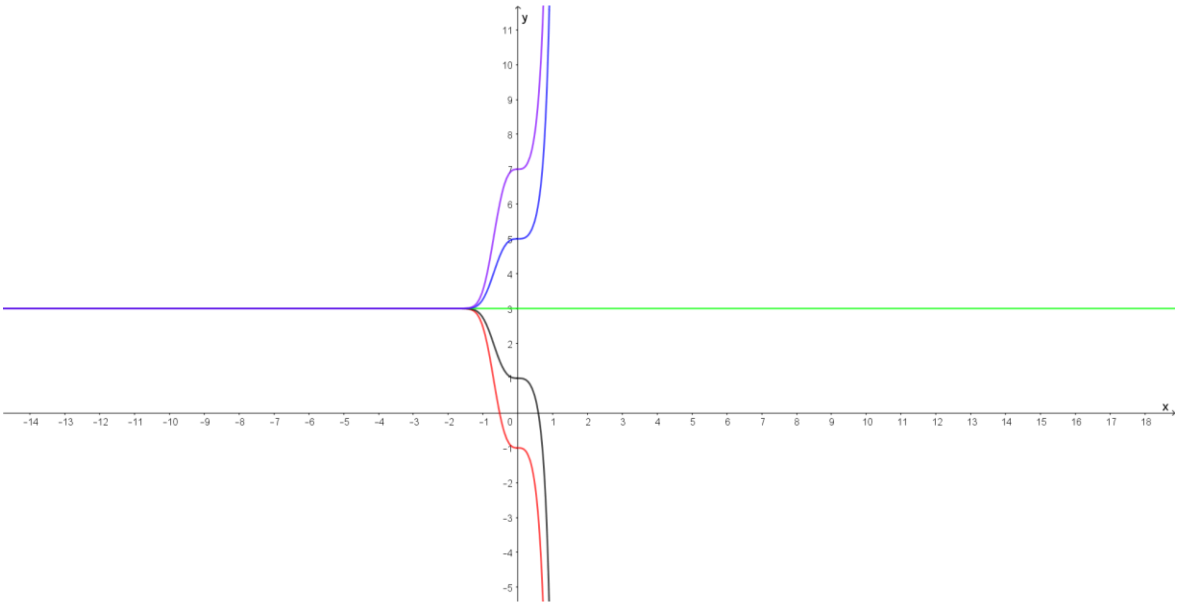
Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ dostáváme konstantní řešení $y = 3$, které můžeme zahrnout do obecného vzorce.

Výsledné řešení je tedy

$$y = Ke^{2x^3} + 3,$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 11: Grafické řešení příkladu 2.2.1. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.2.2.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = -2xy.$$

Řešení:

$$f(x) = -2x$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$\frac{1}{y}dy = -2xdx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -2xdx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int -2xdx = -2\frac{x^2}{2} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = -x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2+C}$$

$$|y| = e^{-x^2} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{-x^2}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$.

$$y = Ke^{-x^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, $K \neq 0$.

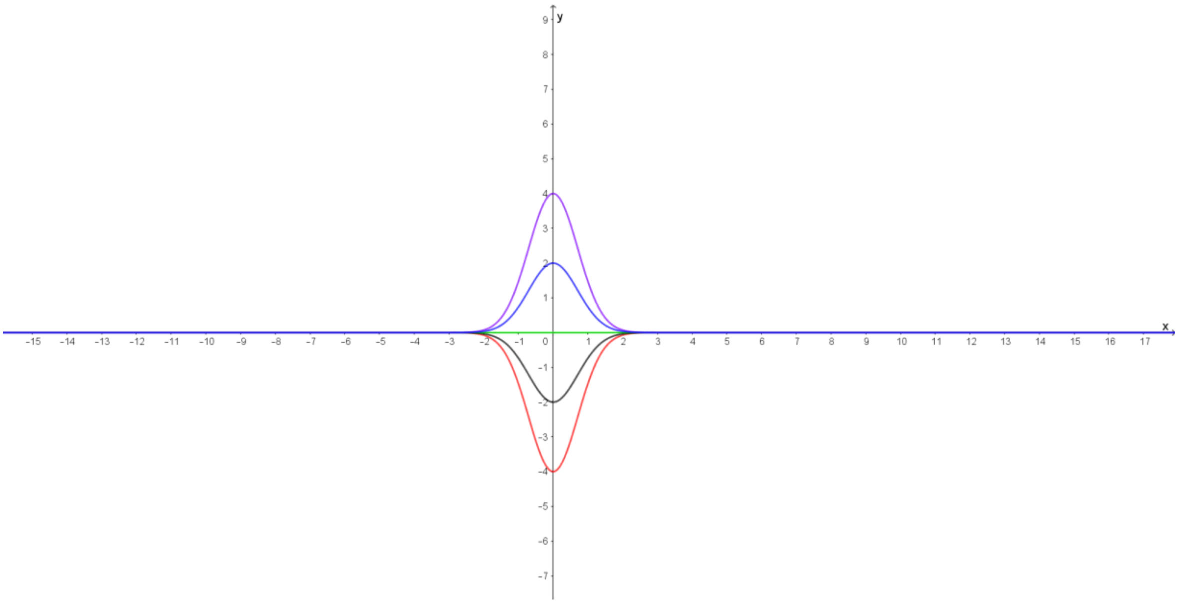
Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ dostáváme konstantní řešení $y = 0$, které můžeme zahrnout do obecného vzorce.

Výsledné řešení je tedy

$$y = Ke^{-x^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 12: Grafické řešení příkladu 2.2.2. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.2.3.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq 0$.

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} \cdot y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{2}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{2}{x} dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{2}{x} dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln|x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = 2 \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{2 \ln|x| + C}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln x^2} \cdot e^{C}$$

$$|y| = x^2 \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^C \cdot x^2$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$, pak jsou řešením všechny funkce

$$y = Kx^2,$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

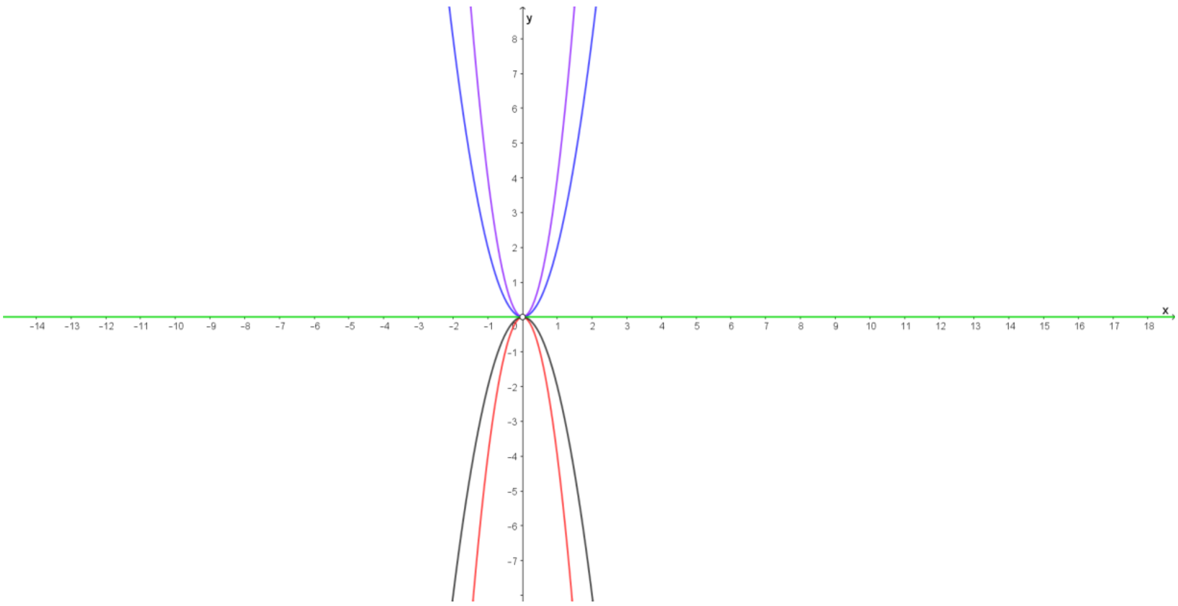
Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ dostáváme konstantní řešení $y = 0$, které můžeme zahrnout do obecného vzorce.

Výsledné řešení je tedy

$$y = Kx^2,$$

kde $x \neq 0, K \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 13: Grafické řešení příkladu 2.2.3. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 2.2.4.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y'\sin(x) = y\cos(x)$$

s počáteční podmínkou $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Řešení:

Přepíšeme danou rovnici na tvar

$$y' = y\frac{\cos x}{\sin x}$$

a zavedeme podmínku $x \neq k\pi, k \in Z$.

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = y\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Složitější integrál na pravé straně rovnice vyřešíme metodou substituce:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}dx = \left|\begin{matrix} u = \sin(x) \\ du = \cos(x)\,dx \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C_2 = \ln|\sin x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|\sin x| + C}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|\sin x|} \cdot e^{C}$$

$$|y| = \sin(x) \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot \sin(x)$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$, kde $K \neq 0$, pak jsou řešením všechny funkce

$$y = K \sin x,$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ dostáváme konstantní řešení $y = 0$, které můžeme zahrnout do obecného vzorce.

Obecné řešení je tedy

$$y = K \sin x,$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = \frac{\pi}{2}, y = 1$:

$$1 = K \sin \frac{\pi}{2}$$

$$1 = K \cdot 1$$

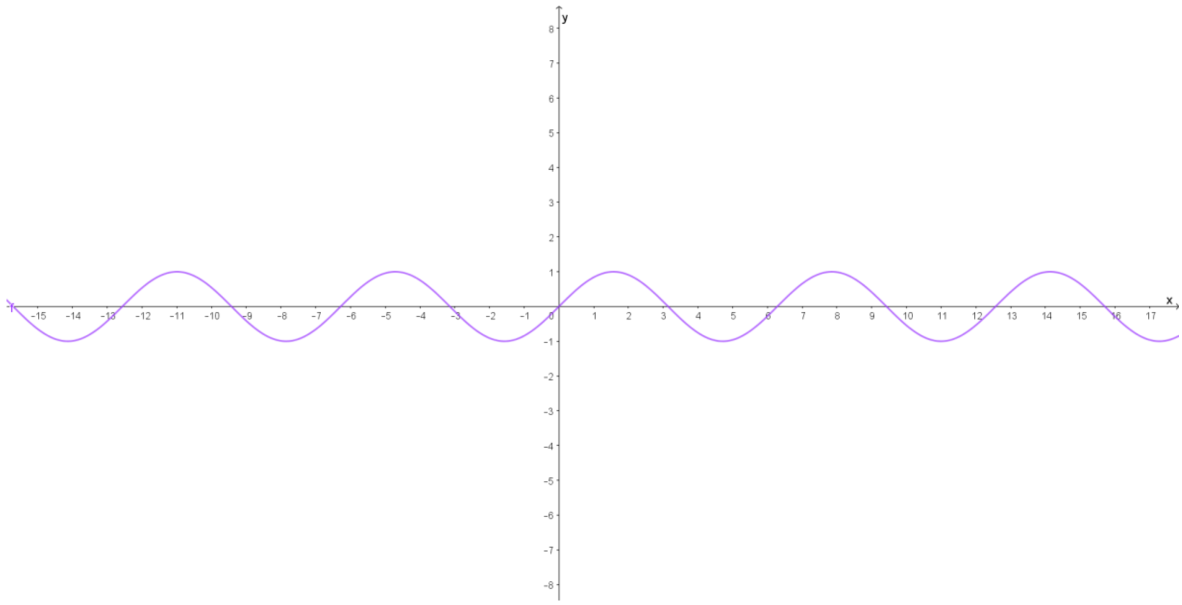
$$K = 1$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = \sin x,$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 14: Grafické řešení příkladu 2.2.4. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.2.5.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$\frac{y\prime}{y} = 6x.$$

<u>Řešení:</u>

Nejprve musíme vyřadit funkci $y = 0$.

Přepíšeme danou rovnici na tvar

$$y' = 6xy.$$

$$f(x) = 6x$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

Vidíme, že v tomto případě konstantní řešení neexistuje, protože funkci $y = 0$ jsme vyřadili.

- Nekonstantní řešení

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 6x$$

$$\frac{1}{y} dy = 6x\, dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int 6x\, dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int 6x\, dx = 6\int x\, dx = 6\frac{x^2}{2} + C_2 = 3x^2 + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = 3x^2 + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{3x^2+C}$$

$$|y| = e^{3x^2} \cdot e^C$$

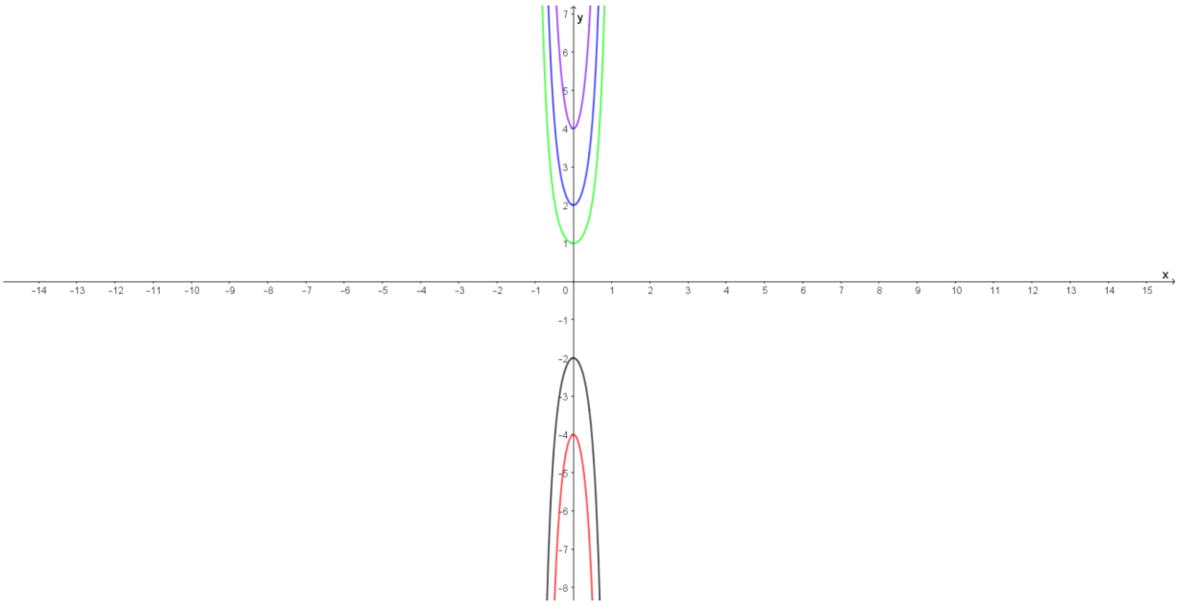
$$y = \pm e^C \cdot e^{3x^2}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$, pak jsou řešením všechny funkce

$$y = Ke^{3x^2},$$

kde $x \in \mathbb{R}, K \neq 0$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 1, 2, 4$.



Obrázek 15: Grafické řešení příkladu 2.2.5. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $y = 0$.

Příklad 2.2.6.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$\frac{1}{y}y' = \frac{4}{x^2}$$

s počáteční podmínkou $y(3) = 2$.

Řešení:

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq 0$ a musíme vyřadit funkci $y = 0$.

Přepíšeme danou rovnici na tvar

$$y' = \frac{4}{x^2}y$$

$$f(x) = \frac{4}{x^2}$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

Vidíme, že v tomto případě konstantní řešení neexistuje, protože funci $y = 0$ jsme vyřadili.

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^2} y$$

$$\frac{1}{y} dy = \frac{4}{x^2} dx$$

$$\int \frac{1}{y} dy = \int \frac{4}{x^2} dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y} dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{4}{x^2} dx = 4 \int x^{-2}\, dx = 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C_2 = \frac{-4}{x} + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = \frac{-4}{x} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{-4}{x} + C}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\frac{-4}{x}} \cdot e^{C}$$

$$|y| = e^{\frac{-4}{x}} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{\frac{-4}{x}},$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$, kde $K \neq 0$, pak jsou řešením všechny funkce

$$y = K e^{\frac{-4}{x}},$$

kde $x \neq 0, K \neq 0$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = 4$, $y = 2$:

$$2 = Ke^{\frac{-4}{4}}$$

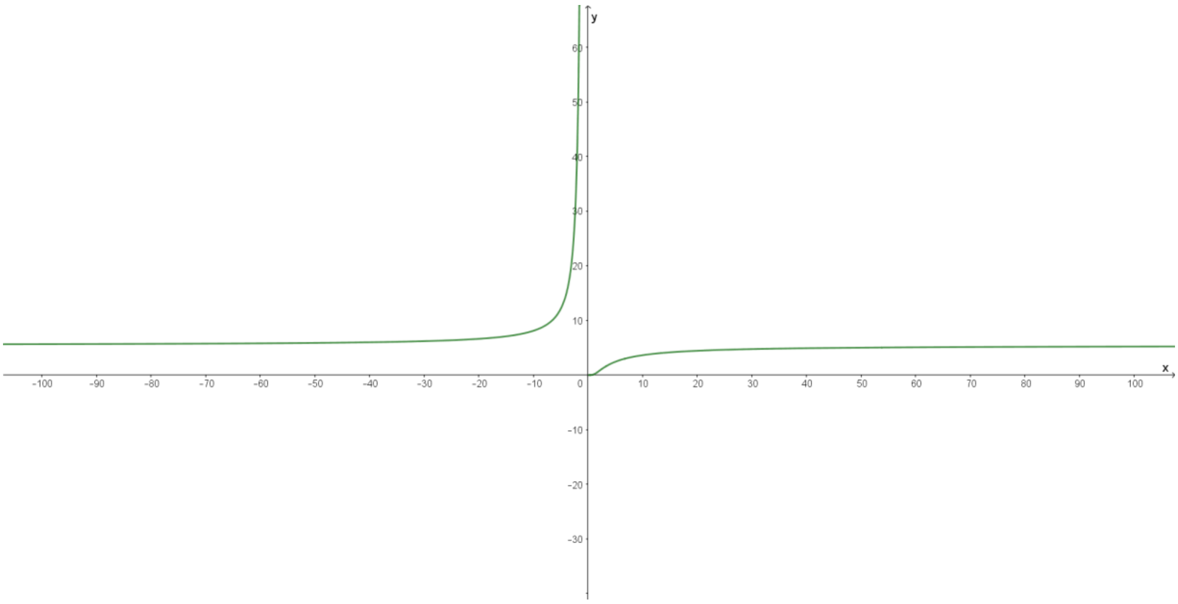
$$2 = K\frac{1}{e}$$

$$K = 2e$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = 2e \cdot e^{\frac{-4}{x}}$$

Grafické řešení:



Obrázek 16: Grafické řešení příkladu 2.2.6. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.2.7.

Najděte všechna řešení diferenciální rovnice

$$y' = 5\sqrt[5]{y^4}.$$

<u>Řešení:</u>

$$f(x) = 5$$

$$g(y) = y^{\frac{4}{5}}$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y^{\frac{4}{5}} = 0$$

$$y = 0$$

- Nekonstantní řešení

$$\frac{dy}{dx} = 5\sqrt[5]{y^4}$$

$$\frac{1}{y^{\frac{4}{5}}}dy = 5dx$$

$$\int y^{-\frac{4}{5}}dy = \int 5dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int y^{-\frac{4}{5}}dy = \frac{y^{\frac{1}{5}}}{\frac{1}{5}} + C = 5y^{\frac{1}{5}} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int 5\,dx = 5\int dx = 5x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$5y^{\frac{1}{5}} = 5x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$y^{\frac{1}{5}} = x + \frac{C}{5}$$

Konstanta násobená číslem je opět konstanta, budeme tedy v zápisu používat i nadále pouze označení C. (Takto budeme označovat konstantu i dalších příkladech, kde se vyskytne násobení konstanty číslem.)

$$y^{\frac{1}{5}} = x + C$$

$$y = (x + C)^5,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

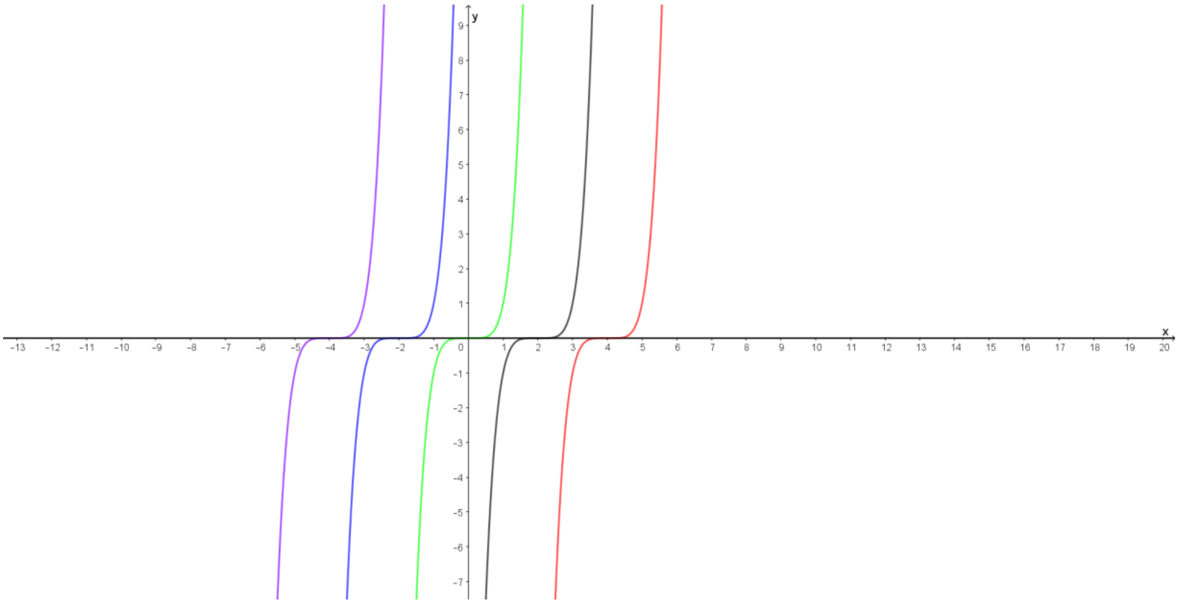
Konstantní řešení $y = 0$ nedostaneme žádnou volbou konstanty C, proto jej musíme připsat zvlášť.

Výsledné řešení je tedy

$$y = (x + C)^5 \text{ a } y = 0,$$

kde $x \in \mathbb{R}, C \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 17: Grafické řešení příkladu 2.2.7. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.2.8.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x - 1}$$

s počáteční podmínkou $y(2) = 3$.

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq 1$ a vyřadíme funkci $y = 0$.

Přepíšeme zadanou rovnici do tvaru

$$y' = \frac{2}{x-1}y$$

$$f(x) = \frac{2}{x-1}$$

$$g(y) = y$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y = 0$$

Vidíme, že v tomto případě konstantní řešení neexistuje, protože funkci $y = 0$ jsme vyřadili.

- Nekonstantní řešení

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x-1}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{2}{x-1}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{2}{x-1}dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{y}dy = \ln|y| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{2}{x-1}dx = 2\int \frac{1}{x-1}dx = \left| \begin{matrix} u = x-1 \\ du = dx \end{matrix} \right| = 2\int \frac{1}{u}du = 2\ln|u| + C_2 =$$
$$= 2\ln|x-1| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y| = 2\ln|x-1| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln(x-1)^2 + C}$$

$$|y| = (x-1)^2 \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot (x-1)^2$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C, K \neq 0$. Obecné řešení je tedy

$$y = K(x-1)^2,$$

kde $x \neq 1, K \neq 0$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = 2, y = 3$:

$$3 = K(2-1)^2$$

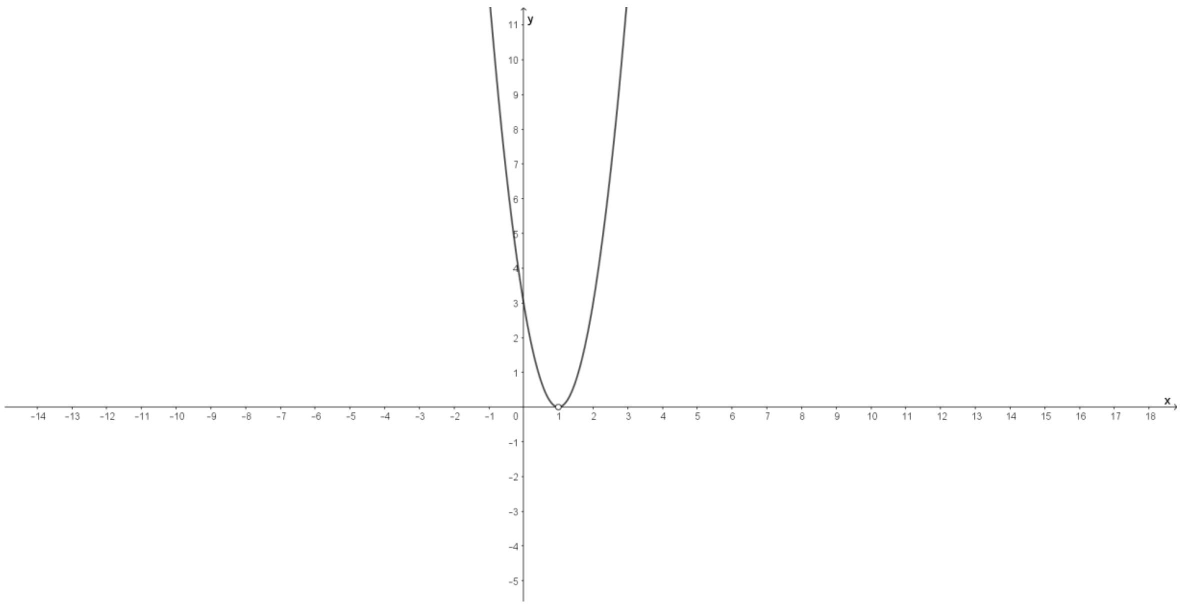
$$K = 3$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = 3(x-1)^2,$$

kde $x \neq 1$.

Grafické řešení:



Obrázek 18: Grafické řešení příkladu 2.2.8. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.2.9.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$y^2 y' = -\sin x$$

s počáteční podmínkou $y(\pi) = 2$.

Řešení:

$$y' = -\sin x \cdot \frac{1}{y^2}$$

$$f(x) = -\sin x$$

$$g(y) = \frac{1}{y^2}$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$\frac{1}{y^2} = 0$$

Víme, že jmenovatel zlomku se 0 rovnat nesmí, proto v tomto případě konstantní řešení vyjádřit nemůžeme.

- Nekonstantní řešení

$$y^2 \frac{dy}{dx} = -\sin x$$

$$y^2 dy = -\sin x \, dx$$

$$\int y^2 dy = \int -\sin x \, dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int y^2 dy = \frac{y^3}{3} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int -\sin x \, dx = \cos x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\frac{y^3}{3} = \cos x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$y^3 = 3\cos x + C$$

$$y = \sqrt[3]{3\cos x + C},$$

kde $x \in \mathbb{R}$, pak $C \geq 3$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty C s využitím počáteční podmínky $x = \pi$, $y = 2$:

$$2 = \sqrt[3]{3\cos(\pi) + C}$$

$$2 = \sqrt[3]{3 + C}$$

$$2^3 = 3 + C$$

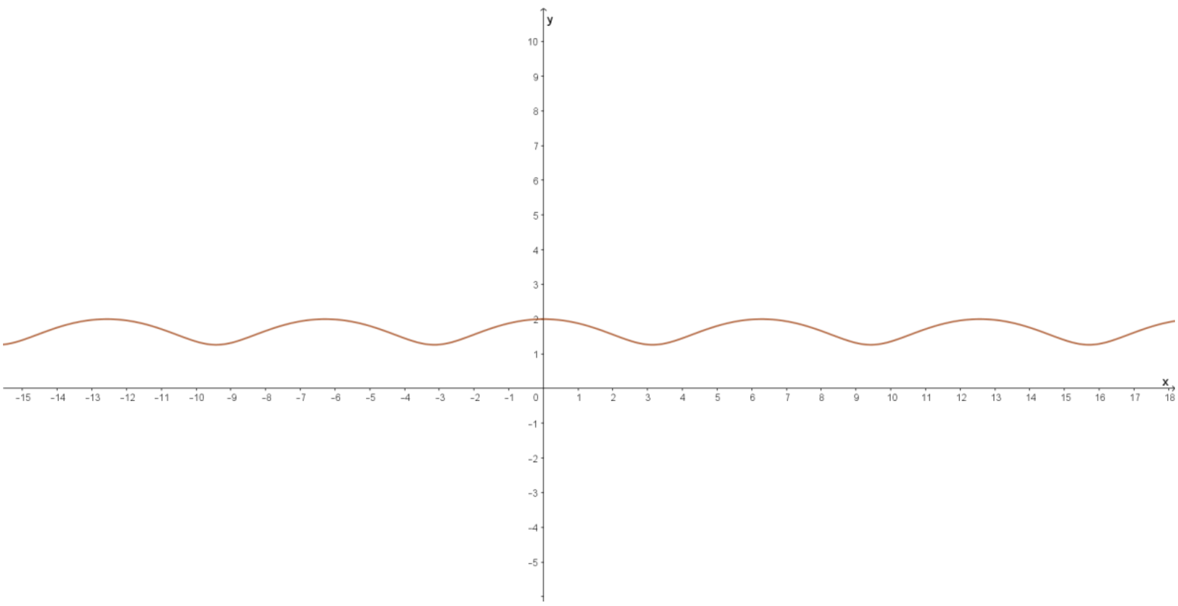
$$C = 5$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = \sqrt[3]{3\cos x + 5},$$

kde $x \in \mathbb{R}$.

Grafické řešení:



Obrázek 19: Grafické řešení příkladu 2.2.9. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.2.10.

Najděte partikulární řešení diferenciální rovnice

$$\frac{1}{y+1}y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

s počáteční podmínkou $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Řešení:

Nejprve stanovíme podmínku $\sin^2 x \neq 0 \to x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a vyřadíme funkci $y = -1$.

Upravíme si rovnici do tvaru

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}(y+1)$$

$$f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$g(y) = y + 1$$

- Konstantní řešení

$$g(y) = 0$$

$$y + 1 = 0$$

$$y = -1$$

Vidíme, že v tomto případě konstantní řešení neexistuje, protože funkci $y = -1$ jsme vyřadili.

- Nekonstantní řešení

$$\frac{1}{y+1} \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{y+1} dy = -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \int -\frac{1}{\sin^2 x} dx$$

Vyřešíme integrály na obou stranách rovnice

$$\int \frac{1}{y+1} dy = \begin{vmatrix} u = y + 1 \\ du = dy \end{vmatrix} = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C_1 = \ln|y+1| + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int -\frac{1}{\sin^2 x} dx = \mathrm{cotg} x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\ln|y+1| = \mathrm{cotg}x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y+1|} = e^{\mathrm{cotg}x + C}$$

$$|y+1| = e^C \cdot e^{\mathrm{cotg}x}$$

$$y+1 = \pm e^C \cdot e^{\mathrm{cotg}x}$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{\mathrm{cotg}x} - 1$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$.

Obecné řešení je

$$y = Ke^{\mathrm{cotg}x} - 1,$$

kde $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}, K \neq 0$.

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 2$:

$$2 = Ke^{\mathrm{cotg}x} - 1$$

$$2 = K - 1$$

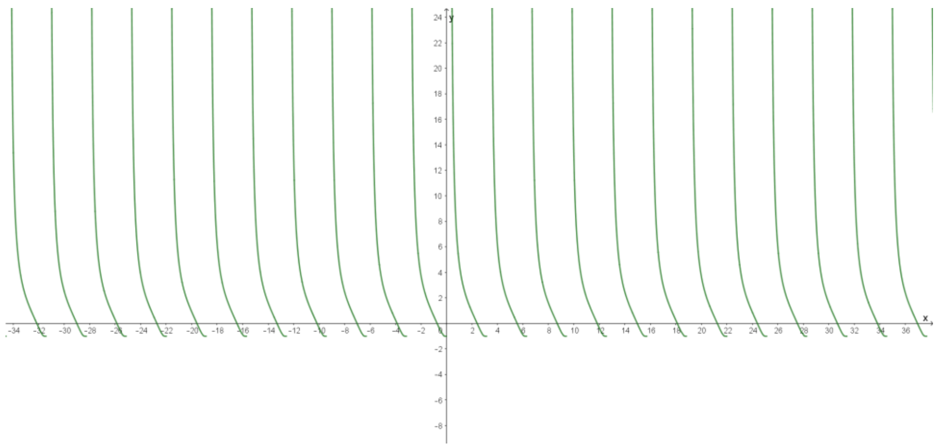
$$K = 3$$

Hledané partikulární řešení je tedy

$$y = 3e^{\mathrm{cotg}x} - 1,$$

kde $x \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Grafické řešení:



Obrázek 20: Grafické řešení příkladu 2.2.10. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

PŘÍKLADY K SAMOSTATNÉMU PROCVIČENÍ

1. $xy' - y = 0$

$$\left[y = Kx, x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R}\right]$$

2. $\frac{y'}{y} = 4x$

$$\left[y = Ke^{2x^2}, x \in \mathbb{R}, K \neq 0\right]$$

3. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{x-1}$

$$\left[y = K(x-1), x \neq 1, K \neq 0\right]$$

4. $y' = \mathrm{tg}x(2-y)$

$$\left[y = C \cdot \cos x + 2, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, C \in \mathbb{R}\right]$$

5. $y' = x^2 + x^2y^2$

$$\left[y = \mathrm{tg}\left(\frac{x^3}{3} + C\right), \frac{x^3}{3} + C \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right]$$

6. $xy' = -y$, $y(4) = 3$

$$\left[y = \frac{12}{x}, x \neq 0\right]$$

7. $y' = \frac{2x+1}{2(y-1)}$, $y(0) = 0$

$$\left[y = 1 - \sqrt{x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R}\right]$$

8. $y^2 - 1 + yy'(x^2 - 1) = 0$, $y(0) = 2$

$$\left[y = \sqrt{\frac{4+2x}{1-x}}, x \in (-1; 1)\right]$$

9. $(x-1)y' + y^2 = 0$, $y(2) = -1$

$$\left[y = \frac{1}{\ln(x-1) - 1}, x \in (1; 1+e)\right]$$

2.3 HOMOGENNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Homogenní diferenciální rovnice jsou rovnice ve tvaru

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Řešíme je pomocí substituce, tedy zavedením nové závislé proměnné u, pro kterou platí vztah

$$u = \frac{y}{x}$$

s podmínkou $x \neq 0$.

Zavedenou substituci můžeme napsat ve tvaru

$$y = ux$$

a následně provést derivaci

$$y' = u'x + u.$$

Po dosazení do původní rovnice dostaneme pro neznámou funkci u rovnici

$$u'x + u = f(u),$$

která je rovnicí se separovanými proměnnými

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \text{ neboli } \frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx.$$

Následně rovnici integrujeme

$$\int \frac{1}{f(u) - u} du = \int \frac{1}{x} dx,$$

vyjádříme u, dosadíme podle původní substituce $u = \frac{y}{x}$ a dostaneme obecné řešení zadané diferenciální rovnice.

Jestliže pro nějakou hodnotu u_0 platí $f(u_0) = u_0$, je konstantní funkce $u(x) = u_0$ dalším řešením rovnice $u' = \frac{f(u)-u}{x}$ a funkce $y(x) = u_0 x$ je pak dalším řešením naší výchozí rovnice $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. (KUFNER, 1993)

Příklad 2.3.1.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{y^2}{xy - x^2}.$$

Řešení:

Rovnici upravíme do tvaru

$$y' = \frac{y^2}{x^2\left(\frac{y}{x} - 1\right)}$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{\frac{y}{x} - 1}$$

Stanovíme podmínku $x \neq 0$ a můžeme zavést substituci.

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u$$

Nahradíme výrazy $\frac{y}{x}$ a dále upravujeme

$$u'x + u = u^2 \cdot \frac{1}{u - 1}$$

$$u'x = u^2 \cdot \frac{1}{u - 1} - u$$

$$u'x = \frac{u^2 - u(u - 1)}{u - 1} = \frac{u^2 - u^2 + u}{u - 1} = \frac{u}{u - 1}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{u - 1}$$

$$\frac{u - 1}{u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{u - 1}{u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu $u \neq 0$ a $u \neq 1$ a následně vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{u-1}{u} du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln|u| + C_1 , \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dále upravujeme

$$\mathrm{u} - \ln|u| = \ln|x| + C , \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$u = \ln|x| + \ln|u| + C$$

$$e^u = e^{\ln|x| + \ln|u| + C}$$

$$e^u = |xu| \cdot e^C$$

$$e^u = \pm e^C \cdot xu$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$.

$$e^u = Kxu$$

$$e^{\frac{y}{x}} = Kx\frac{y}{x}$$

$$e^{\frac{y}{x}} = Ky,$$

kde $x \neq 0, K \neq 0$.

V průběhu řešení jsme určili podmínku $u \neq 0$ a $u \neq 1$. K těmto funkcím se nyní vrátíme a po dosazení hodnoty do $y = ux$ zjistíme, zda jsou také řešením původní rovnice.

$$y = ux$$

$$u = 0 \rightarrow y = 0$$

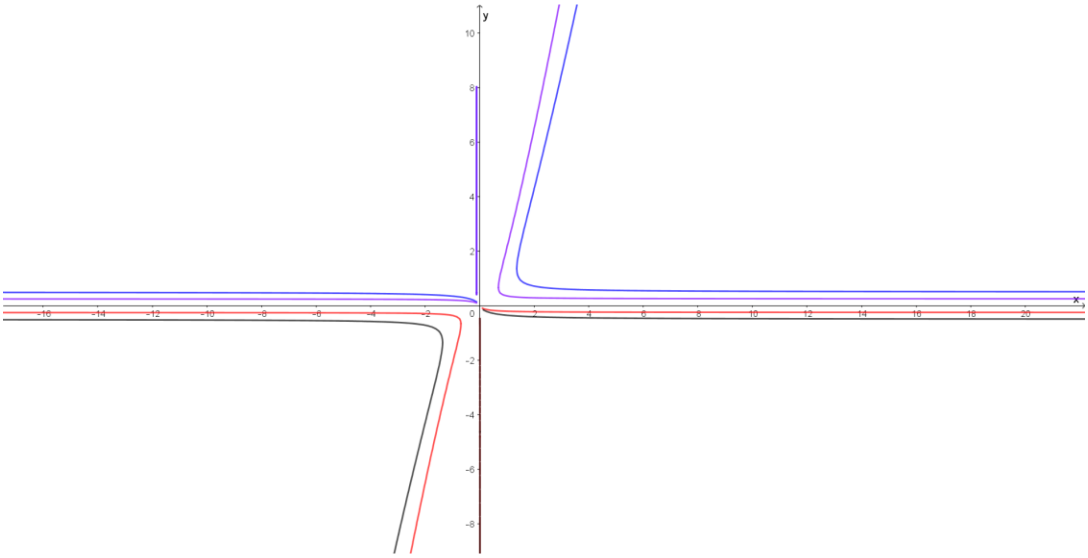
$$u = 1 \rightarrow y = x$$

Dosazením si ověříme, zda jsou obě funkce řešeními rovnice. Pro $y = x$ není rovnost splněna a tudíž funkce není jedním z řešení. Žádnou volbou konstanty K nezajistíme funkci $y = 0$ a je potřeba ji doplnit k řešení. Výsledné řešení zadané rovnice je

$$e^{\frac{y}{x}} = Ky \text{ a } y = 0,$$

kde $x \neq 0, K \neq 0$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 2, 4$:



Obrázek 21: Grafické řešení příkladu 2.3.1. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 2.3.2.

Řešte diferenciální rovnici

$$x^2y' + xy = x^2 + y^2.$$

<u>Řešení:</u>

Rovnici upravíme do tvaru

$$x^2y' = x^2 + y^2 - xy$$

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}$$

Stanovíme podmínku $x \neq 0$ a můžeme zavést substituci

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \to y' = u'x + u$$

Nahradíme výrazy $\frac{y}{x}$ a dále upravujeme

$$u'x + u = 1 + u^2 - u$$

$$u'x = 1 + u^2 - 2u$$

$$x\frac{du}{dx} = (u-1)^2$$

$$\frac{1}{(u-1)^2}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{(u-1)^2}du = \int \frac{1}{x}dx$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu $u \neq 1$ a následně vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{(u-1)^2}du = \left|\begin{matrix} t = u-1 \\ dt = du \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C_1 = -\frac{1}{t} + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dále upravujeme

$$-\frac{1}{t} = \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$t = -\frac{1}{\ln|x| + C}$$

$$u - 1 = -\frac{1}{\ln|x| + C}$$

$$u = 1 - \frac{1}{\ln|x| + C}$$

$$u = \frac{\ln|x| + C - 1}{\ln|x| + C}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\ln|x| + C - 1}{\ln|x| + C}$$

$$y = x \cdot \left(\frac{\ln|x| + C - 1}{\ln|x| + C}\right),$$

kde $x \neq 0, C \in R$.

V průběhu řešení jsme určili podmínku $u \neq 1$. K této funkci se nyní vrátíme a po dosazení hodnoty do $y = ux$ zjistíme, zda je také řešením původní rovnice.

$$y = ux$$

$$u = 1 \rightarrow y = x$$

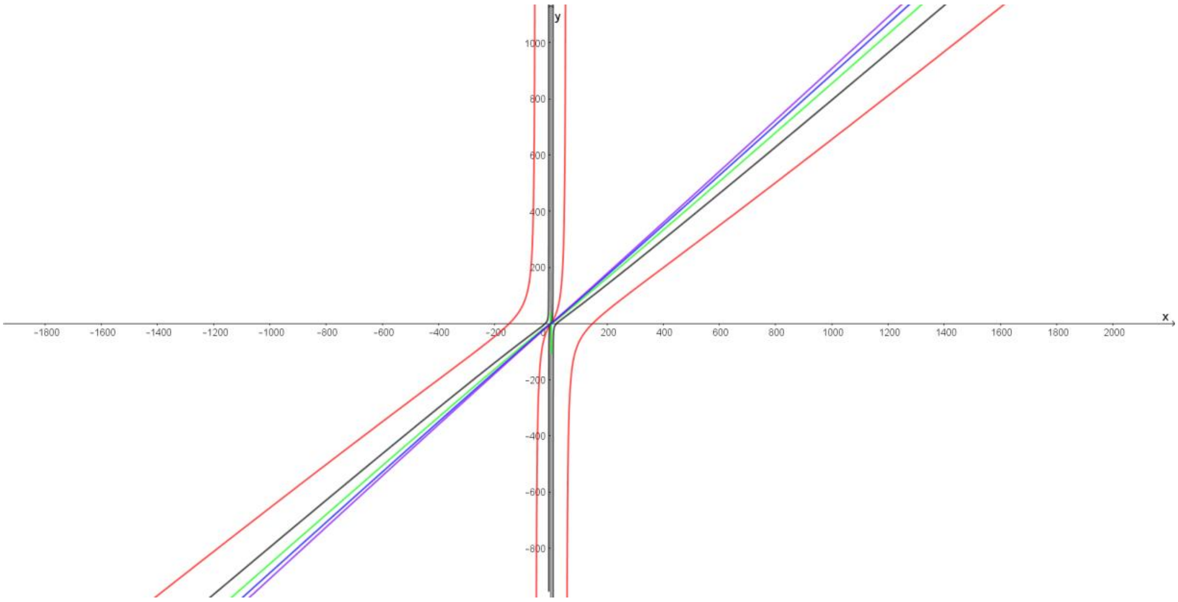
Dosazením si ověříme, že funkce je skutečně řešením rovnice. V tomto případě nelze nalézt konstantu C, která by zajistila zahrnutí do obecného vzorce, musíme tedy tuto funkci připsat zvlášť.

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je

$$y = \ x \cdot \left(\frac{\ln|x| + C - 1}{\ln|x| + C} \right) \ a \ y = x,$$

kde $x \neq 0, C \in R$.

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 22: Grafické řešení příkladu 2.3.2. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 2.3.3.

Řešte diferenciální rovnici

$$2xyy' = x^2 + y^2.$$

Řešení:

Rovnici upravíme do tvaru

$$y' = \frac{x^2}{2xy} + \frac{y^2}{2xy}$$

$$y' = \frac{x}{2y} + \frac{y}{2x}$$

$$y' = \frac{1}{\frac{2y}{x}} + \frac{y}{2x}$$

Stanovíme podmínku $x \neq 0$ a $y \neq 0$ a můžeme zavést substituci.

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u$$

Nahradíme výrazy $\frac{y}{x}$ a dále upravujeme

$$u'x + u = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2}$$

$$u'x = \frac{1}{2u} + \frac{u}{2} - u$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{1 + u^2 - 2u^2}{2u}$$

$$\frac{2u}{1 - u^2} du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$\int \frac{2u}{1 - u^2} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu $u \neq 0$ a $u \neq \pm 1$ a následně vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{2u}{1-u^2}du = \begin{vmatrix} t = 1-u^2 \\ dt = 2udu \\ -dt = 2udu \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t}\cdot(-1)dt = -\ln|t| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dále upravujeme

$$-\ln|t| = \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|t| = -\ln|x| + C$$

$$e^{\ln|t|} = e^{\ln\frac{1}{|x|}}\cdot e^{c}$$

$$|t| = \frac{1}{|x|}\cdot e^{c}$$

$$t = \pm e^{c}\cdot\frac{1}{x}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{C}$, kde $K \neq 0$.

$$t = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$1-u^2 = K\cdot\frac{1}{x}$$

$$u^2 = 1-K\cdot\frac{1}{x}$$

$$u = \pm\sqrt{1-\frac{K}{x}}$$

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{1-\frac{K}{x}}$$

$$y = \pm x\cdot\sqrt{1-\frac{K}{x}}$$

$$y = \pm\sqrt{x^2-Kx}$$

$$y = \pm\sqrt{x}\sqrt{x-K}$$

V průběhu řešení jsme určili podmínku $u \neq 0$ a $u \neq 1$. K těmto funkcím se nyní vrátíme a po dosazení hodnoty do $y = ux$ zjistíme, zda jsou také řešením původní rovnice.

$$y = ux$$

$$u = 0 \rightarrow y = 0$$

$$u = 1 \rightarrow y = x$$

$$u = -1 \rightarrow y = -x$$

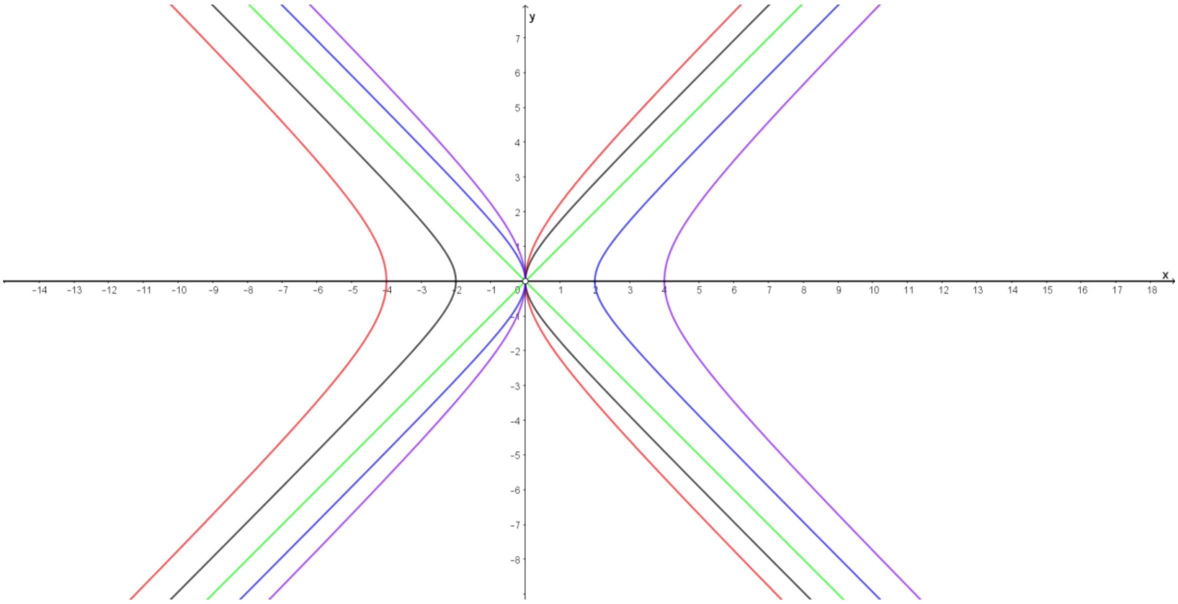
Dosazením si ověříme, zda jsou funkce řešeními rovnice. Pro $y = 0$ není rovnost splněna a tudíž funkce není jedním z řešení. Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ zajistíme funkce $y = \pm$ a můžeme je zahrnout do obecného vzorce.

Výsledné řešení zadané rovnice je

$$y = \pm\sqrt{x}\sqrt{x - K},$$

kde $x^2 - Kx \geq 0$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 23: Grafické řešení příkladu 2.3.3. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Příklad 2.3.4.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = 1 + \frac{2y}{x}.$$

Řešení:

Nejprve stanovíme podmínku $x \neq 0$ a zavedeme substituci

$$u = \frac{y}{x}$$

$$y = ux \rightarrow y' = u'x + u$$

Dosadíme a dále upravujeme

$$u'x + u = 1 + 2u$$

$$u'x = 1 + u$$

$$x\frac{du}{dx} = 1 + u$$

$$\frac{1}{1+u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{1+u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu a $u \neq -1$ a následně vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{1+u}du = \left| \begin{matrix} t = 1+u \\ dt = du \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dále upravujeme

$$\ln|t| = \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|t|} = e^{\ln|x|} \cdot e^{C}$$

$$|t| = |x| \cdot e^{C}$$

$$t = \pm e^{C} \cdot x$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, kde $K \neq 0$.

$$t = K \cdot x$$

$$1 + u = K \cdot x$$

$$u = K \cdot x - 1$$

$$\frac{y}{x} = K \cdot x - 1$$

$$y = x(K \cdot x - 1)$$

$$y = Kx^2 - x,$$

kde $x \neq 0, K \neq 0$.

V průběhu řešení jsme určili podmínku a $u \neq -1$. K této funkci se nyní vrátíme a po dosazení hodnoty do $y = ux$ zjistíme, zda je také řešením původní rovnice.

$$y = ux$$

$$u = -1 \rightarrow y = -x$$

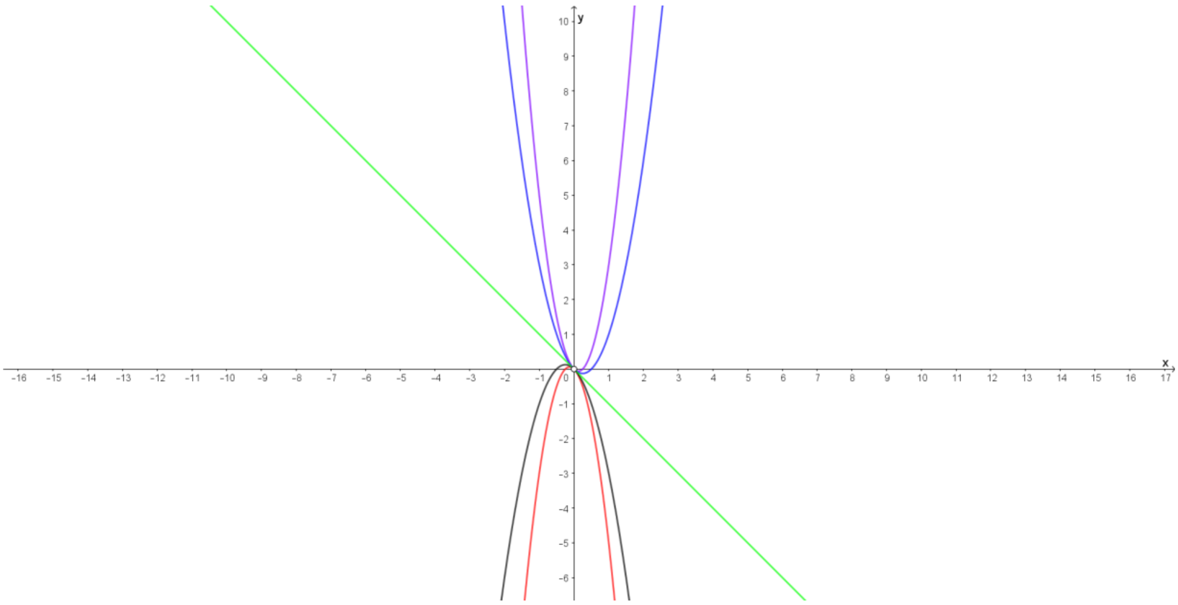
Dosazením si ověříme, že je funkce skutečně řešením rovnice. Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ zajistíme funkci $y = -x$ a můžeme ji zahrnout do obecného vzorce.

Výsledné řešení zadané rovnice je

$$y = Kx^2 - x,$$

kde $x \neq 0, K \in R$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 24: Grafické řešení příkladu 2.3.4. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímky $x = 0$.

Ke kapitole homogenní diferenciální rovnice přidáme ještě řešení rovnic ve tvaru $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{Ax+By+C}\right)$. Tuto rovnici lze převést na rovnici typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ substitucí, při níž zavedeme novou nezávisle proměnnou t (místo x) a novou závisle proměnnou – tj. funkci – u (místo y). Substituce má tvar

$$t = x - h$$

$$u = y - k,$$

kde h, k jsou řešení soustavy lineárních algebraických rovnic

$$\alpha h + \beta k + \gamma = 0$$

$$Ah + Bk + C = 0.$$

Protože pak je $u' = \frac{du}{dt} = y' = \frac{dy}{dx}$, přejde naše rovnice v rovnici tvaru

$$u' = f\left(\frac{\alpha t+\beta u}{At+Bu}\right) = f\left(\frac{\alpha+\beta\frac{u}{t}}{A+B\frac{u}{t}}\right) = F\left(\frac{u}{t}\right),$$

a to je již zmíněná rovnice typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

V případě, že by soustava lineárních algebraických rovnic nebyla řešitelná, lze rovnici převést na rovnici se separovanými proměnnými substitucí

$$u = \alpha x + \beta y,$$

kde u je nová neznámá funkce. (KUFNER, 1993)

Příklad 2.3.5.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{4x-3y-1}{3x+4y-7}.$$

Řešení:

Vidíme, že zadaná rovnice je typu $y' = f\left(\frac{\alpha x+\beta y+\gamma}{Ax+By+C}\right)$, kde $\alpha = 4$, $\beta = -3$, $\gamma = -1$, $A = 3$, $B = 4$ a $C = -7$.

Soustava lineárních algebraických rovnic má tvar

$$4h - 3k - 1 = 0$$

$$3h + 4k - 7 = 0$$

a její řešení je $h = 1$, $k = 1$.

Nyní můžeme zavést substituci

$$t = x - 1$$

$$u = y - 1$$

a dostáváme rovnici

$$u' = \frac{4t-3u}{3t+4u} = \frac{4-3\frac{u}{t}}{3+4\frac{u}{t}}.$$

Zavedeme další substituci ve tvaru

$$z = \frac{u}{t},$$

díky které se dostaneme k rovnici se separovanými proměnnými a dále už pokračujeme známým způsobem.

$$z't + z = \frac{4-3z}{3+4z}$$

$$t\frac{dz}{dt} = \frac{4-3z}{3+4z} - z$$

$$t\frac{dz}{dt} = \frac{4-3z-z(3+4z)}{3+4z}$$

$$t\frac{dz}{dt} = \frac{4-6z-4z^2}{3+4z}$$

$$\frac{3+4z}{4-6z-4z^2}dz = \frac{1}{t}dt$$

$$\int \frac{3+4z}{4-6z-4z^2}dz = \int \frac{1}{t}dt$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{3+4z}{4-6z-4z^2}dz = \int \frac{3+4z}{-2(2z^2+3z-2)}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{3+4z}{2z^2+3z-2}dz$$

$$= \begin{vmatrix} v = 2z^2+3z-2 \\ dv = (4z+3)dz \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{v}dv = -\frac{1}{2}\ln|v| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dále upravujeme

$$-\frac{1}{2}\ln|v| = \ln|t| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|v| = -2\ln|t| + C$$

$$e^{\ln|v|} = e^{\ln\frac{1}{t^2}} \cdot e^C$$

$$|v| = \frac{1}{t^2} \cdot e^C$$

$$v = \pm e^C \cdot \frac{1}{t^2}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$v = K \cdot \frac{1}{t^2}$$

$$2z^2 + 3z - 2 = \frac{K}{t^2}$$

$$(2z^2 + 3z - 2)t^2 = K$$

$$\left(2\frac{u^2}{t^2} + 3\frac{u}{t} - 2\right)t^2 = K$$

$$2u^2 + 3ut - 2t^2 = K$$

$$2(y-1)^2 + 3(y-1)(x-1) - 2(x-1)^2 = K$$

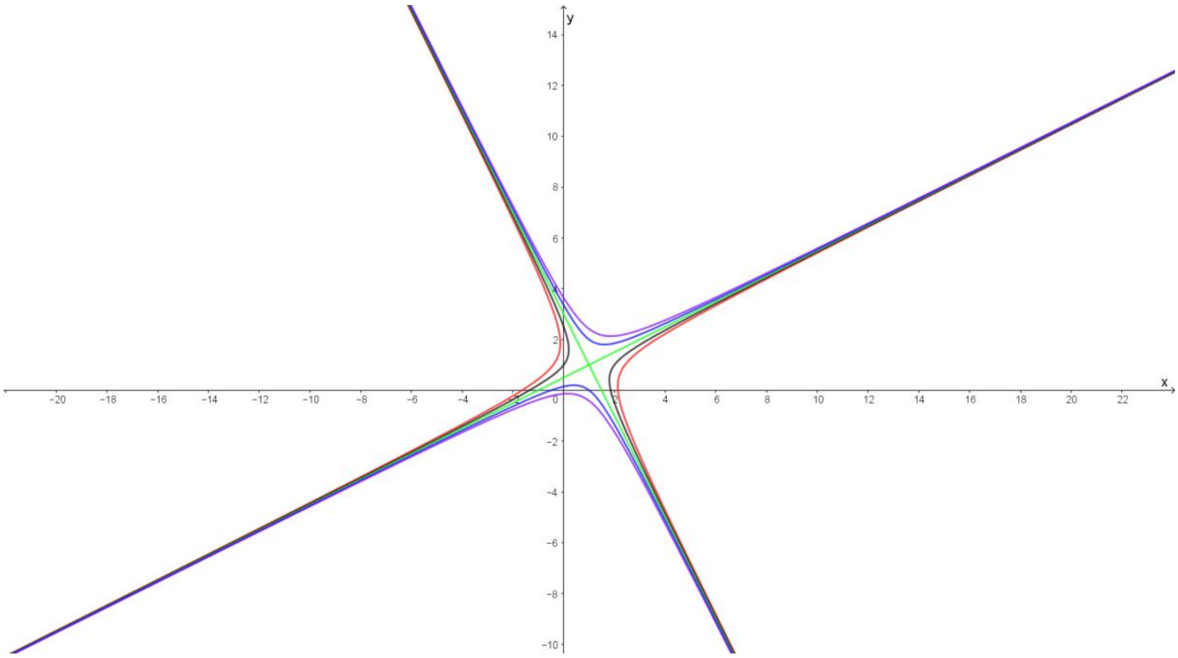
$$2(y^2 - 2y + 1) + 3(xy - y - x + 1) - 2(x^2 - 2x + 1) = K$$

$$2y^2 - 4y + 2 + 3xy - 3y - 3x + 3 - 2x^2 + 4x - 2 = K$$

Obecné řešení rovnice v implicitním tvaru je

$$2y^2 - 7y + 3xy - 2x^2 + x + 3 - K = 0.$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 25: Grafické řešení příkladu 2.3.5. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.3.6.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = (2x + 3y)^2 \,.$$

<u>Řešení:</u>

$\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = A = B = 0, C = 1$

$$2h + 3k = 0$$

$$1 = 0$$

Soustava není jednoznačně řešitelná, a proto zavedeme substituci

$$u = 2x + 3y$$

$$u' = 2 + 3y'.$$

Získáváme rovnici se separovanými proměnnými a dále už pokračujeme známým způsobem

$$u' = 3u^2 + 2$$

$$\frac{du}{dx} = 3u^2 + 2$$

$$\frac{1}{3u^2 + 2} du = dx$$

$$\int \frac{1}{3u^2 + 2} du = \int dx$$

Vyřešíme integrály z obou stran rovnice

$$\int \frac{1}{3u^2 + 2} du = \left| \begin{array}{c} v = \dfrac{\sqrt{3}u}{\sqrt{2}} \\ dv = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} du \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} dv = du \end{array} \right| = \int \frac{1}{2v^2 + 2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} dv = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \int \frac{1}{2(v^2 + 1)} dv$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \int \frac{1}{v^2 + 1} dv = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg}(v) + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět do rovnice a dále upravujeme

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}(v) = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg}(v) = \sqrt{6}(x + C)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(v)) = \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right)$$

$$v = \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}u = \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right)$$

$$u = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right)$$

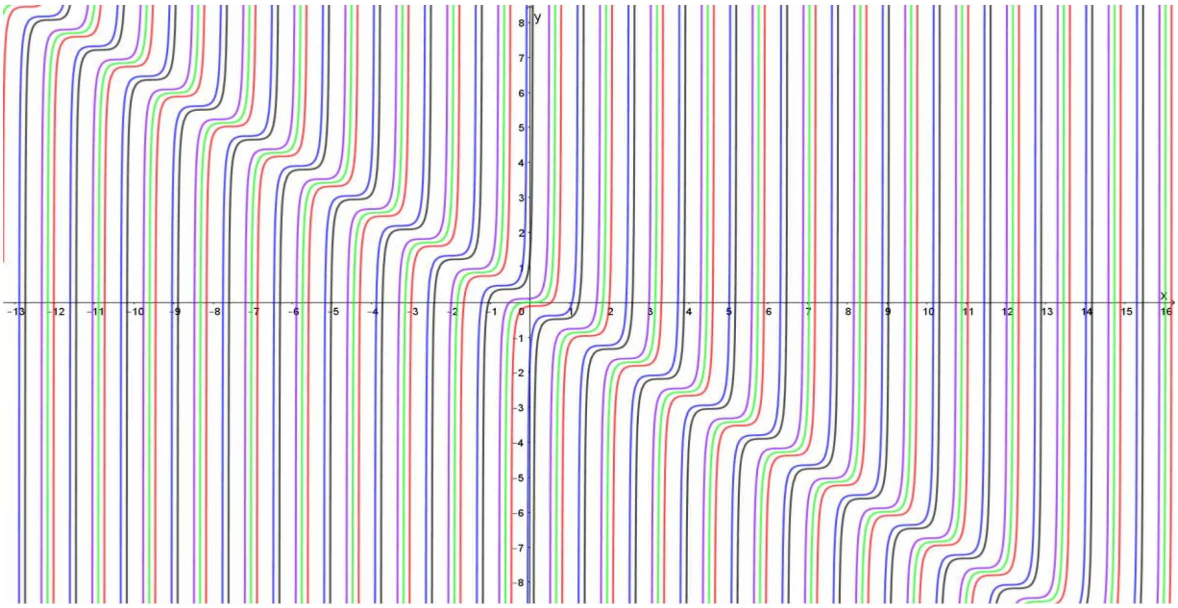
$$2x + 3y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right)$$

$$3y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right) - 2x$$

Výsledné obecné řešení rovnice je tedy

$$y = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\left(\sqrt{6}(x + C)\right) - 2x\right].$$

Grafické řešení pro vybraná $C = -4, -2, 0, 2, 4$.



Obrázek 26: Grafické řešení příkladu 2.3.6. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

PŘÍKLADY K SAMOSTATNÉMU PROCVIČENÍ

1. $xy' = 2x + y$

$$\left[y = x(2\ln|x| + C\,), C \in R, x \neq 0\right]$$

2. $xy' = y\ln\dfrac{y}{x}$

$$\left[y = x \cdot e^{Kx+1}\ a\ y = 0, K \in R, x \neq 0\right]$$

3. $y' = \dfrac{x}{y}$

$$\left[y = \pm\sqrt{x^2 - K}, x^2 - K > 0\right]$$

4. $xy' + y = x$

$$\left[y = \frac{x}{2} - \frac{K}{x}, K \in R, x \neq 0\right]$$

5. $2xyy' - y^2 + x^2 = 0$

$$\left[y = \pm\sqrt{Kx - x^2}, Kx - x^2 \geq 0\right]$$

2.4 LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Nazýváme tak rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde je f lineární funkcí proměnné y, tj. rovnice tvaru

$$y' = g(x)y + h(x) \quad \text{resp.} \quad y' - g(x)y = h(x),$$

kde g a h jsou dané funkce proměnné x a jsou spojité na intervalu $\langle a, b \rangle$.

Je-li $h(x) \equiv 0$, nazýváme rovnici homogenní a mluvíme o zkrácené lineární diferenciální rovnici

Je-li $h(x) \neq 0$, mluvíme o úplné diferenciální lineární rovnici.

HOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Tato rovnice má tvar

$$y' = g(x)y$$

a můžeme ji řešit metodou separace proměnných:

$$\int \frac{1}{y} dy = \int g(x) dx + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \int g(x) dx + C$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\int g(x)dx} \cdot e^{C}$$

$$y = \pm e^{C} \cdot e^{\int g(x)dx} = K e^{\int g(x)dx}, K \neq 0$$

Vhodnou volbou $K = 0$ získáváme $y = 0$, což je singulární řešení.

$$y = K e^{\int g(x)dx}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Počáteční úloha

$$y' = g(x)y, \;\; y(x_0) = y_0$$

má tedy řešení

$$y' = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} g(t)dt}.$$

NEHOMOGENNÍ LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Tyto rovnice se řeší tzv. metodou variace konstanty. Vyjdeme z řešení homogenní diferenciální rovnice

$$y = Ke^{G(x)},$$

kde G je primitivní funkce k funkci g:

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt.$$

Nahradíme konstantu K nějakou (spojitě diferencovatelnou) funkcí $u(x)$, kterou se pokusíme určit z podmínky, aby funkce $y(x) = u(x)e^{G(x)}$ řešila nehomogenní rovnici $y' = g(x)y + h(x)$.

Dosazením dostáváme

$$u'(x)e^{G(x)} + u(x)G'(x)e^{G(x)} = g(x)u(x)e^{G(x)} + h(x).$$

Protože je $G'(x) = g(x)$, dostáváme odtud pro neznámou funkci u diferenciální rovnici

$$u'(x) = h(x)e^{-G(x)}.$$

To je obyčejná diferenciální rovnice základního typu, kterou lze řešit přímou integrací:

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)e^{-G(t)}dt + C.$$

Po dosazení do rovnice $y(x) = u(x)e^{G(x)}$ dostáváme obecný tvar řešení diferenciální rovnice

$$y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} h(t)e^{-G(t)}dt + C\right]e^{G(x)},$$

kde C je libovolná reální konstanta a funkce G je dána vzorcem $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

Řešení počáteční úlohy

$$y' = g(x)y + h(x), \qquad y(x_0) = y_0$$

pak dostaneme, položíme-li $C = y_0$.

Věta

Buďte g, h funkce spojité na intervalu $I = (a, b)$. Budiž (x_0, y_0) bod v rovině $\mathbb{R}^2$ s $x_0 \in I$. Pak má počáteční úloha $y' = g(x)y + h(x)$, $y(x_0) = y_0$ právě jedno řešení $y(x)$, definované pro $x \in I$ vzorcem $y(x) = \left[\int_{x_0}^{x} h(t)e^{-G(t)}dt + C\right] e^{G(x)}$, kde funkce G je dána vzorcem $G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$.

Obecné řešení nehomogenní rovnice je tedy součtem obecného řešení homogenní rovnice $Ce^{G(x)}$ a partikulárního řešení nehomogenní rovnice. (KUFNER, 1993)

Příklad 2.4.1.

Řešte počáteční úlohu

$$xy' - y = 5x^2, \qquad y(1) = 0.$$

<u>Řešení:</u>

Rovnici nejprve převedeme na tvar

$$y' = \frac{5x^2 + y}{x}$$

$$y' = 5x + \frac{1}{x}y.$$

Jedná se o lineární rovnici kde $g(x) = \frac{1}{x}$ a $h(x) = 5x$. Tyto funkce jsou spojité na intervalech $I = (0, \infty)$ a $I = (-\infty, 0)$. Protože z počáteční podmínky vidíme, že $(x_0, y_0) = (1{,}0)$, tak zvolíme první interval.

Příklad nejprve vyřešíme s využitím výše zmíněné věty a poté i metodou variace konstanty.

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt = \int_{1}^{x} \frac{dt}{t} = \ln|x| - \ln 1 = \ln x\,, (x \in I)$$

$$y(x) = \left[\int_1^x 5te^{-\ln t}dt + 0\right]e^{\ln x} = \int_1^x 5t\frac{1}{t}dt \cdot x = 5x\int_1^x dt = 5x(x-1)$$

Metoda variace konstanty je podstatně delší, ale dovede nás ke stejnému výsledku.

$$y' - \frac{1}{x}y = 0$$

$$y' = \frac{1}{x}y$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \frac{1}{x}dx$$

Tuto úpravu můžeme provést pouze za předpokladu $y \neq 0$.

$$\ln|y| = \ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|} \cdot e^C$$

$$|y| = |x| \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot x$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$y = Kx$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $y = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$y = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$y = K(x)x$$

$$y' = K'(x)x + K(x)$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$x \cdot (K'(x)x + K(x)) - K(x)x = 5x^2$$

$$K'(x)x^2 + K(x)x - K(x)x = 5x^2$$

$$K'(x)x^2 = 5x^2$$

$$K'(x) = 5$$

$$K(x) = 5\int dx$$

$$K(x) = 5x + K$$

$$y = (5x + K)x$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = 5x^2 + Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = 1$, $y = 0$:

$$0 = 5 \cdot 1^2 + K \cdot 1$$

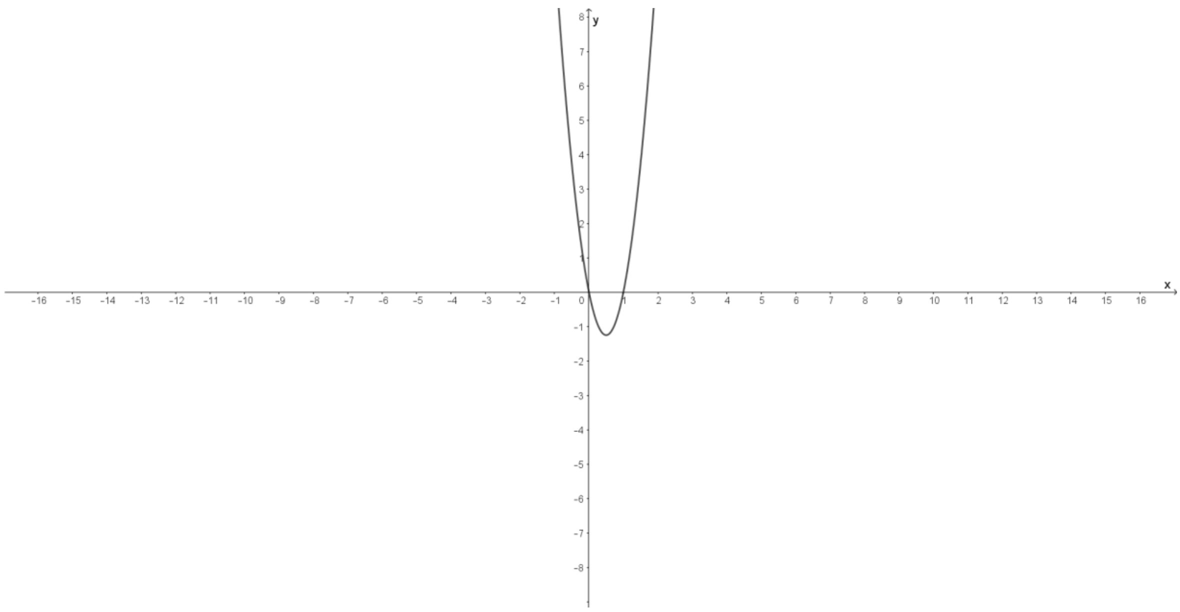
$$K = -5$$

Hledané partikulární řešení je

$$y = 5x^2 - 5x = 5x(x-1).$$

Výsledky obou postupů jsou shodné.

Grafické řešení:



Obrázek 27: Grafické řešení příkladu 2.4.1. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.4.2.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos x + y \sin x = 1.$$

Řešení:

Nejprve si rovnici upravíme do tvaru

$$y' \cos x = 1 - y \sin x$$

a za předpokladu $\cos x \neq 0 \rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ do tvaru

$$y' = \frac{1}{\cos x} - y\frac{\sin x}{\cos x},$$

kde $g(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$ a $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice

$$y' + y\frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$$y' = -y\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{\sin x}{\cos x}dx$$

Tuto úpravu lze provést za předpokladu $y \neq 0$. Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$-\int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ -dt = \sin x\, dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme a dále upravujeme

$$\ln|y| = \ln|t| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln|t|} \cdot e^C$$

$$|y| = |t| \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot t$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C, K \neq 0$.

$$y = Kt$$

$$y = K\cos x$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $y = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$y = K\cos x\,, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$y = K(x)\cos x$$

$$y' = K'(x)\cos x - K(x)\sin x$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$(K'(x)\cos x - K(x)\sin x)\cos x + K(x)\cos x\sin x = 1$$

$$K'(x)\cos^2 x - K(x)\sin x\cos x + K(x)\cos x\sin x = 1$$

$$K'(x)\cos^2 x = 1$$

$$K'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

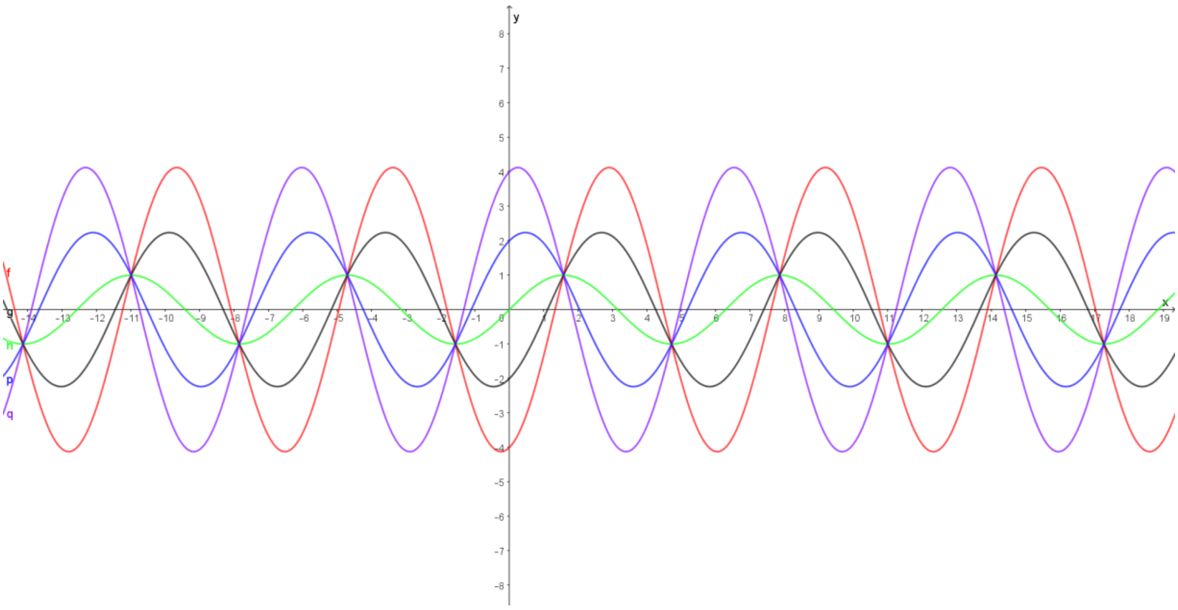
$$K(x) = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx$$

$$K(x) = \mathrm{tg}x + K$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je

$$y = (\mathrm{tg}x + K)\cos x = \sin x + K\cos x\,, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 28: Grafické řešení příkladu 2.4.2. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.4.3.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

Řešení:

Rovnici upravíme do tvaru

$$y' = xe^{-x^2} - 2xy,$$

kde $g(x) = 2x$ a $h(x) = xe^{-x^2}$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$y' + 2xy = 0$$

$$y' = -2xy$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\frac{1}{y}dy = -2xdx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -2\int x\,dx$$

Tuto úpravu lze provést za předpokladu $y \neq 0$.

$$\ln|y| = -x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{-x^2} \cdot e^C$$

$$|y| = e^{-x^2} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot e^{-x^2}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C, K \neq 0$.

$$y = Ke^{-x^2}$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $y = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$y = Ke^{-x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$y = K(x)e^{-x^2}$$

$$y' = K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$K'(x)e^{-x^2} + K(x)e^{-x^2} \cdot (-2x) + 2x \cdot K(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2}$$

$$K'(x) = x$$

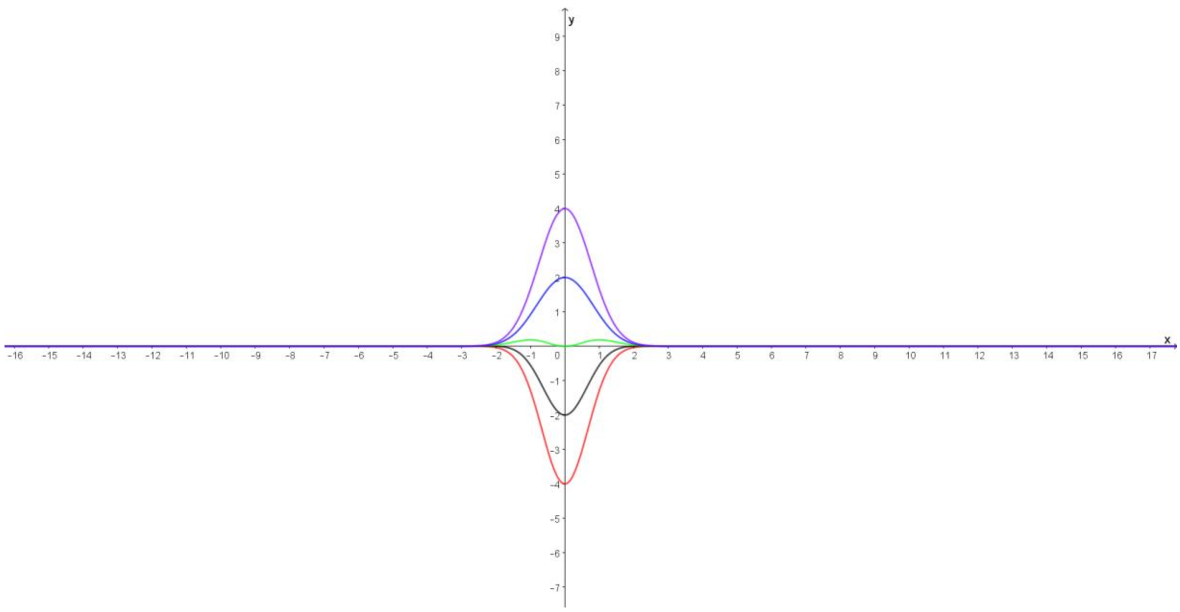
$$K(x) = \int x\,dx$$

$$K(x) = \frac{x^2}{2} + K$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + K\right)e^{-x^2}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 29: Grafické řešení příkladu 2.4.3. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.4.4.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' - y \cdot \mathrm{tg}x = 1 - x \cdot \mathrm{tg}x.$$

Řešení:

Nejprve určíme podmínku $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ a upravíme si rovnici do tvaru

$$y' = 1 - x \cdot \mathrm{tg}x + y \cdot \mathrm{tg}x,$$

kde $g(x) = \mathrm{tg}x$ a $h(x) = 1 - x \cdot \mathrm{tg}x$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$y' - y \cdot \mathrm{tg}x = 0$$

$$y' = y \cdot \mathrm{tg}x$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}x$$

$$\frac{1}{y}dy = \mathrm{tg}x dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int \mathrm{tg}x dx$$

Tuto úpravu lze provést za předpokladu $y \neq 0$. Vyřešíme složitější integrál z pravé strany rovnice:

$$\int \mathrm{tg}x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \begin{vmatrix} t = \cos x \\ dt = -\sin x \\ -dt = \sin x\, dx \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t} dt = -\ln|t| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme a dále upravujeme

$$\ln|y| = -\ln|t| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln\frac{1}{|t|}} \cdot e^C$$

$$|y| = \frac{1}{|t|} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot \frac{1}{t}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C, K \neq 0$.

$$y = K \cdot \frac{1}{t}$$

$$y = K \cdot \frac{1}{\cos x}$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $y = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$y = K \cdot \frac{1}{\cos x}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$y = K(x) \cdot \frac{1}{\cos x}$$

$$y' = \frac{K'(x)\cos x + K(x)\sin x}{\cos^2 x} = \frac{K'(x)}{\cos x} + \frac{K(x)\sin x}{\cos^2 x}$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$\frac{K'(x)}{\cos x} + \frac{K(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{K(x)}{\cos x} \cdot \mathrm{tg} x = 1 - x \cdot \mathrm{tg} x$$

$$\frac{K'(x)}{\cos x} + \frac{K(x)\sin x}{\cos^2 x} - \frac{K(x)}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 1 - x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{K'(x)}{\cos x} = 1 - x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$K'(x) = \cos x - x \cdot \sin x$$

$$K(x) = \int (\cos x - x \cdot \sin x)\, dx = \int \cos x\, dx - \int x \cdot \sin x\, dx$$

Druhý integrál vyřešíme metodou per partes:

$$\int x \cdot \sin x\, dx = \left| \begin{matrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{matrix} \right| =$$

$$= -x \cdot \cos x + \int \cos x\, dx = -x \cdot \cos x + \sin x + K_1, \qquad K_1 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme zpět a dořešíme rovnici:

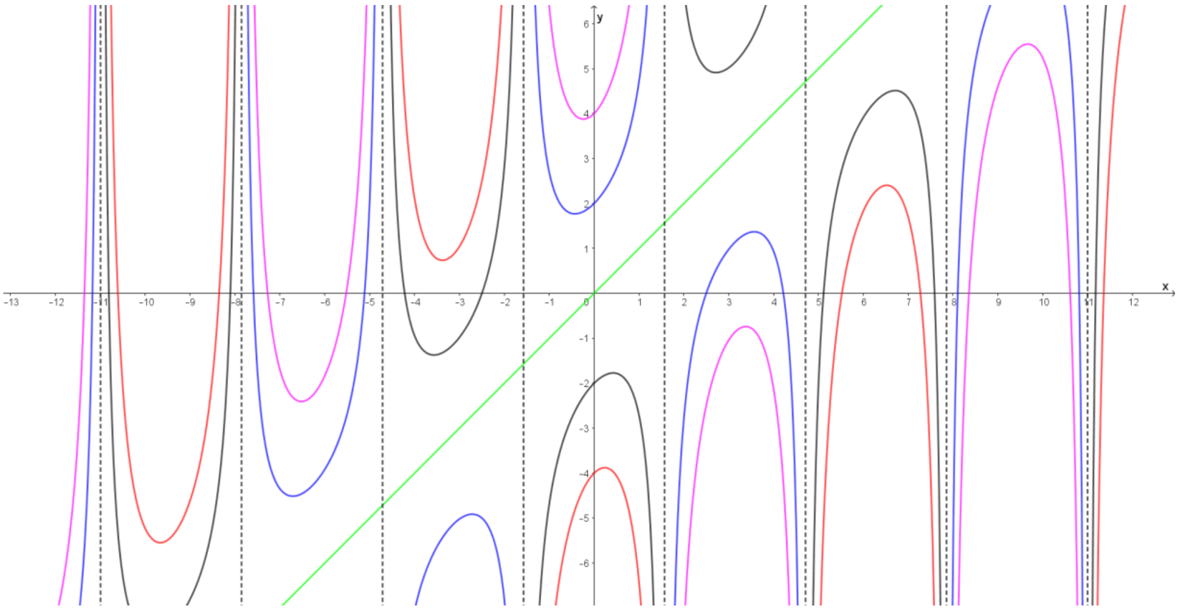
$$K(x) = \sin x - (-x \cdot \cos x + \sin x) + K$$

$$K(x) = x \cdot \cos x + K$$

Obecné řešení zadané diferenciální rovnice je

$$y = (x \cdot \cos x + K)\frac{1}{\cos x} = x + \frac{K}{\cos x}, \qquad K \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 30: Grafické řešení příkladu 2.4.4. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu kromě přímek $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 2.4.5.

Řešte diferenciální rovnici

$$xy' + y = \mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2}$$

s počáteční podmínkou $y(1) = \frac{\pi}{4}$.

<u>Řešení:</u>

Rovnici za předpokladu $x \neq 0$ upravíme do tvaru

$$y' = \frac{\mathrm{arctg}x + \frac{x}{1+x^2} - y}{x}$$

$$y' = \frac{\mathrm{arctg}x}{x} + \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x}y,$$

kde $g(x) = \frac{1}{x}$ a $h(x) = \frac{\mathrm{arctg}x}{x} + \frac{1}{1+x^2}$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$y' + \frac{y}{x} = 0$$

$$y' = -\frac{y}{x}$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x}$$

$$\int \frac{1}{y}dy = -\int \frac{1}{x}dx$$

Tuto úpravu můžeme provést pouze za předpokladu $y \neq 0$.

$$\ln|y| = -\ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|y|} = e^{\ln\frac{1}{|x|}} \cdot e^C$$

$$|y| = \frac{1}{|x|} \cdot e^C$$

$$y = \pm e^C \cdot \frac{1}{x}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$y = K \cdot \frac{1}{x}$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $y = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$y = K \cdot \frac{1}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$y = K(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{K'(x) \cdot x - K(x)}{x^2} = \frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$x\left(\frac{K'(x)}{x} - \frac{K(x)}{x^2}\right) + \frac{K(x)}{x} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$K'(x) - \frac{K(x)}{x} + \frac{K(x)}{x} = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$K'(x) = \operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}$$

$$K(x) = \int \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) dx$$

Vyřešíme integrál:

$$\int \left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) dx = \int \operatorname{arctg} x \, dx + \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} x & u' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ v' = 1 & v = x \end{matrix} \right| = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = \left| \begin{matrix} t = 1 + x^2 \\ dt = 2x dx \\ \frac{1}{2} dt = x dx \end{matrix} \right|$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln|t| + K_1 =$$

$$= x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K_1, \qquad K_1 \in \mathbb{R}$$

$$K(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + K$$

$$K(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x + K$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = (\ x \cdot \mathrm{arctg}x + K) \cdot \frac{1}{x} = \mathrm{arctg}x + \frac{K}{x}, \qquad K \in \mathbb{R}, x \neq 0.$$

Nyní zjistíme hodnotu konstanty K s využitím počáteční podmínky $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{arctg}(1) + \frac{K}{1}$$

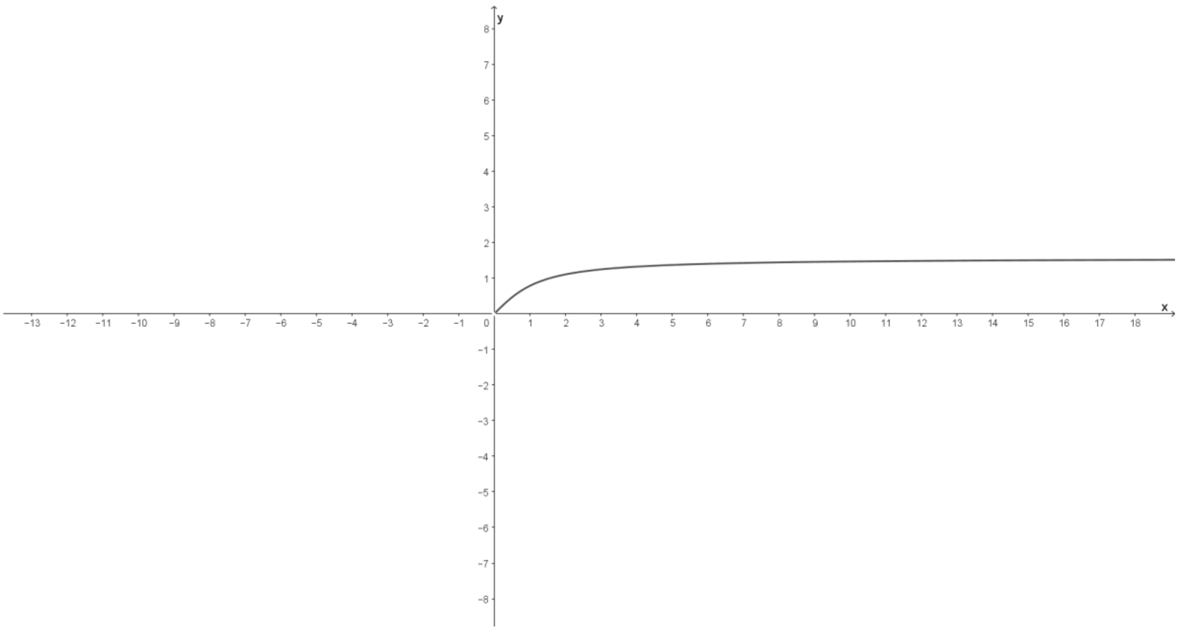
$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + K$$

$$K = 0$$

Hledané partikulární řešení je

$$y = \ \mathrm{arctg}x, \qquad x > 0.$$

Grafické řešení:



Obrázek 31: Grafické řešení příkladu 2.4.5. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

PŘÍKLADY K SAMOSTATNÉMU PROCVIČENÍ

1. $y' - xy = e^{\frac{x(x+2)}{2}}$

$$\left[y = (e^x + K)e^{\frac{x^2}{2}}, K \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' + 2y = 4x$

$$[y = 2x - 1 + Ce^{-2x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}]$$

3. $y'\mathrm{tg}x - y = 1$

$$\left[y = K\sin x - 1, K \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right]$$

4. $x^2y' - 2xy = -3$

$$\left[y = \frac{1}{x} + Cx^2, C \in \mathbb{R}, x \neq 0\right]$$

5. $(1+x)^2y' - 2xy = (1+x)^2$

$$[y = (x + K)(1 + x^2), K \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}]$$

2.5 BERNOULLIOVA DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE

Nazývá se tak rovnice tvaru

$$y' = g(x)y + r(x)y^{\alpha},$$

která pro $\alpha \neq 1$ a $\alpha \neq 0$ není lineární. Tuto rovnici lze substitucí

$$u(x) = y^{1-\alpha}(x)$$

převést na lineární diferenciální rovnici. Je pak totiž

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1-\alpha)y^{-\alpha}y' = (1-\alpha)y^{-\alpha}[gy + ry^{\alpha}] = (1-\alpha)(y^{1-\alpha}g + r) \\ &= (1-\alpha)gu + (1-\alpha)r \end{aligned}$$

a to je lineární diferenciální rovnice pro neznámou funkci u s $(1-\alpha)g$ místo g a s $(1-\alpha)r$ místo h. Hledané řešení y pak dostaneme pomocí vzorce

$$y(x) = [u(x)]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Tento vzorec i zavedená substituce mají obecně smysl jen tehdy, je-li $y(x) \geq 0$.

(KUFNER, 1993)

Příklad 2.5.1.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = y - y^2.$$

Řešení:

Za předpokladu $y \neq 0$ upravíme rovnici do tvaru

$$\frac{y'}{y^2} = \frac{1}{y} - 1,$$

odkud vidíme, že $\alpha = 2$ a zavedeme substituci

$$u = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{u}$$

$$u' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow y' = -u'y^2 = -u'\frac{1}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}.$$

Z upravené rovnice dostáváme tvar

$$-u' = u - 1$$

$$u' = 1 - u$$

$$\frac{du}{dx} = 1 - u$$

$$\frac{1}{1-u}du = dx$$

$$\int \frac{1}{1-u}du = \int dx$$

Tuto úpravu můžeme provést za předpokladu $u \neq 1$ a vyřešíme integrály z obou stran rovnice:

$$\int \frac{1}{1-u}du = \begin{vmatrix} t = 1 - u \\ dt = -du \\ -dt = du \end{vmatrix} = -\int \frac{1}{t}dt = -\ln|t| + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\int dx = x + C_2, \qquad C_2 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme a dále opravujeme

$$-\ln|t| = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$\ln|t| = -x + C$$

$$e^{\ln|t|} = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$|t| = e^{-x} \cdot e^{C}$$

$$t = \pm e^{C} \cdot e^{-x}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^{c}, K \neq 0$.

$$t = K \frac{1}{e^{x}}$$

$$1 - u = \frac{K}{e^{x}}$$

$$-u = \frac{K}{e^{x}} - 1$$

$$u = 1 - \frac{K}{e^{x}}$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $u = 1$.

$$u = 1 - \frac{K}{e^{x}}, \qquad K \in \mathbb{R}$$

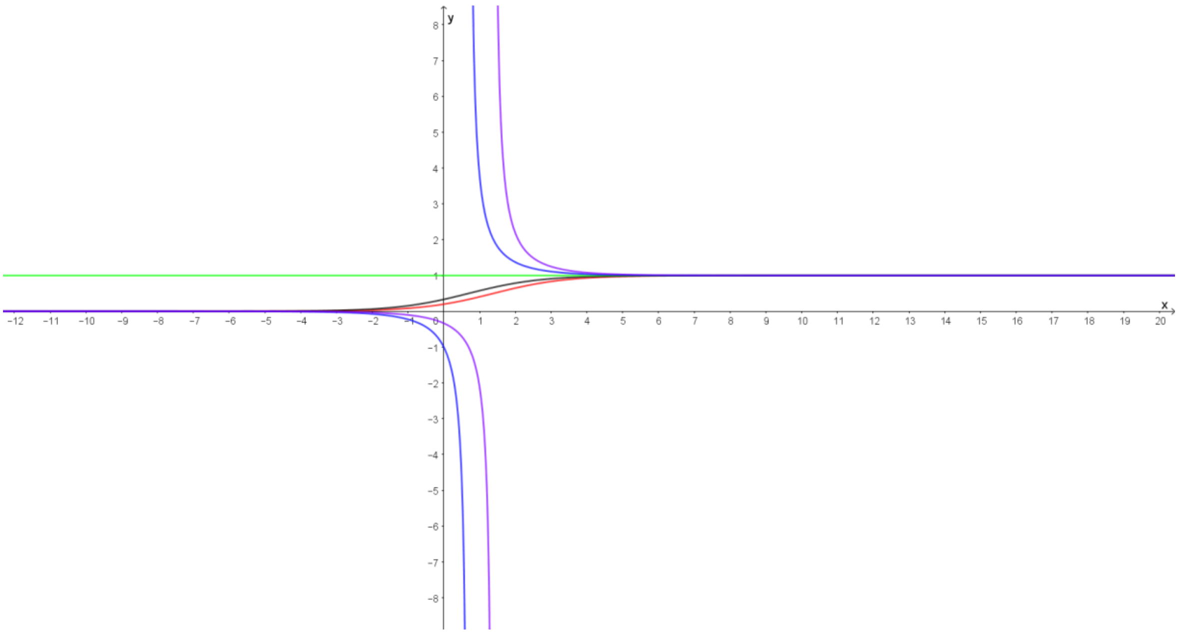
$$\frac{1}{y} = \frac{e^{x} - K}{e^{x}}$$

$$y = \frac{e^{x}}{e^{x} - K}$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = \frac{e^{x}}{e^{x} - K} \text{ a } y = 0, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 32: Grafické řešení příkladu 2.5.1. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Pokud bychom vykreslili všechna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou rovinu.

Příklad 2.5.2.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}xy^5.$$

<u>Řešení:</u>

Za předpokladu $y \neq 0$ upravíme rovnici do tvaru

$$y' = \frac{1}{4}xy^5 + \frac{1}{4}y$$

$$\frac{y'}{y^5} = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4y^4}.$$

Odtud vidíme, že $\alpha = 5$ a zavedeme substituci

$$u = \frac{1}{y^4}$$

$$u' = -4\frac{y'}{y^5}.$$

Z upravené rovnice dostáváme tvar

$$-\frac{1}{4}u' = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}u$$

$$u' = -x - u,$$

kde $g(x) = 1$ a $h(x) = x$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$u' + u = 0$$

$$u' = -u$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = -1$$

$$\frac{1}{u}du = -dx$$

$$\int \frac{1}{u}du = -\int dx$$

Tuto úpravu můžeme provést pouze za předpokladu $u \neq 0$.

$$\ln|u| = -x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|u|} = e^{-x+C}$$

$$|u| = e^C \cdot e^{-x}$$

$$u = \pm e^C \cdot e^{-x}$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$u = Ke^{-x}$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $u = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$u = Ke^{-x}, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$u = K(x)e^{-x}$$

$$u' = K'(x)e^{-x} + K(x)e^{-x} \cdot (-1)$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$K'(x)e^{-x} - K(x)e^{-x} = -K(x)e^{-x} - x$$

$$K'(x)e^{-x} = -x$$

$$K'(x) = -x\frac{1}{e^{-x}} = -xe^{x}$$

$$K(x) = \int -xe^{x}dx$$

Vyřešíme integrál metodou per partes:

$$\int -xe^{x}dx = -\int xe^{x}dx = \begin{vmatrix} t = x & t' = 1 \\ v' = e^{x} & v = e^{x} \end{vmatrix} = -\left(xe^{x} - \int e^{x}dx\right)$$
$$= -(xe^{x} - e^{x}) + K_1 = -xe^{x} + e^{x} + K_1, \qquad K_1 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme a dále upravujeme

$$K(x) = -xe^{x} + e^{x} + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$u = (-xe^{x} + e^{x} + K)e^{-x}$$

$$u = -x + 1 + Ke^{-x}$$

$$\frac{1}{y^4} = -x + 1 + Ke^{-x}$$

$$y^4 = \frac{1}{-x + 1 + Ke^{-x}}$$

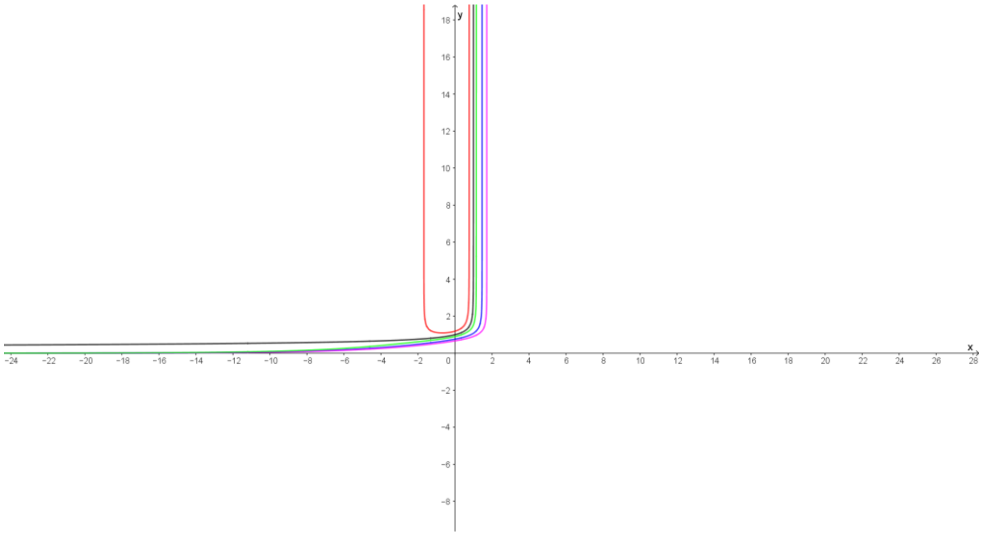
$$y = \sqrt[4]{\frac{1}{Ke^{-x} + 1 - x}}$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = \sqrt[4]{\frac{1}{Ke^{-x} + 1 - x}} \text{ a } y = 0,$$

kde $x \in \mathbb{R}$, pak $K > e^{x}(x - 1)$.

Grafické řešení pro vybraná $K = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 2, 4$:



Obrázek 33: Grafické řešení příkladu 2.5.2. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.5.3.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' + y + y^2 e^x = 0.$$

<u>Řešení:</u>

Nejprve rovnici upravíme do tvaru

$$y' = -y - y^2 e^x.$$

Odtud vidíme, že $\alpha = 2$ a zavedeme substituci za předpokladu $y \neq 0$ a $u \neq 0$.

$$u = \frac{1}{y} \rightarrow y = \frac{1}{u}$$

$$u' = -\frac{y'}{y^2} \rightarrow y' = -u'y^2 = -\frac{u'}{u^2}$$

Z upravené rovnice dostáváme tvar

$$-\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} e^x$$

$$u' = u + e^x,$$

kde $g(x) = 1$ a $h(x) = e^x$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$u' - u = 0$$

$$u' = u$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = 1$$

$$\frac{1}{u}du = dx$$

$$\int \frac{1}{u}du = \int dx$$

$$\ln|u| = x + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|u|} = e^{x+C}$$

$$|u| = e^x \cdot e^C$$

$$u = \pm e^C \cdot e^x$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$u = Ke^x$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $u = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$u = Ke^x, \qquad K \in \mathbb{R}$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$u = K(x)e^x$$

$$u' = K'(x)e^x + K(x)e^x$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme:

$$K'(x)e^x + K(x)e^x = K(x)e^x + e^x$$

$$K'(x)e^x = e^x$$

$$K'(x) = 1$$

$$K(x) = \int dx$$

$$K(x) = x + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$u = (x + K)e^x$$

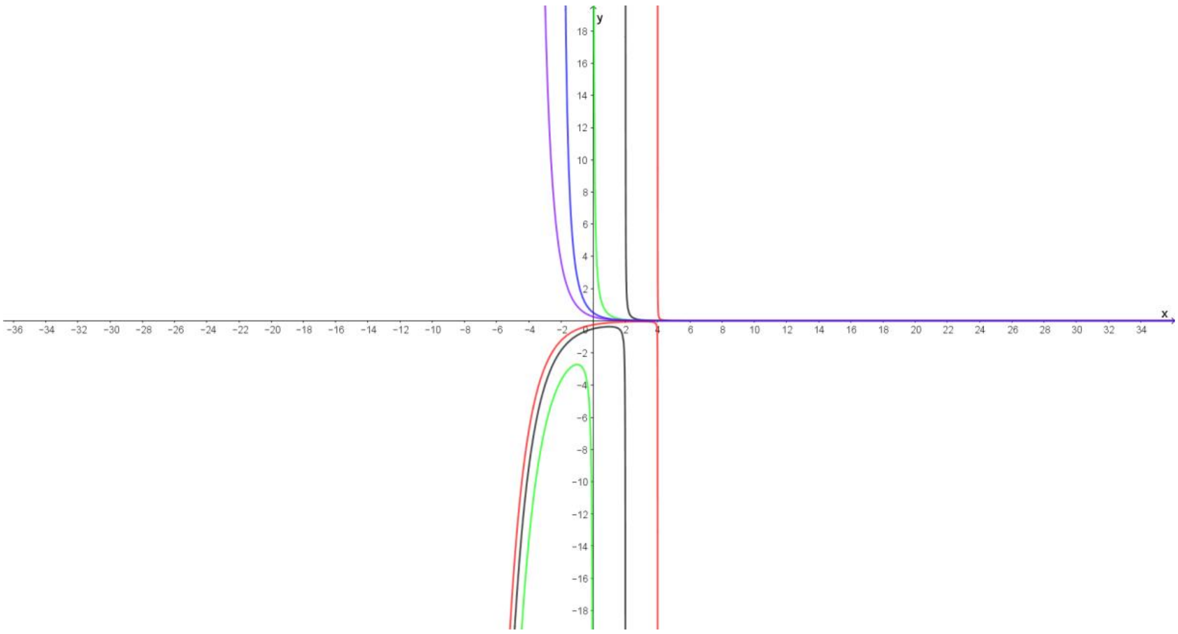
$$\frac{1}{y} = (x + K)e^x$$

$$y = \frac{1}{(x + K)e^x}$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = \frac{1}{(x + K)e^x} \text{ a } y = 0, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 34: Grafické řešení příkladu 2.5.3. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Příklad 2.5.4.

Řešte diferenciální rovnici

$$y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\ln x}{x}y^2.$$

<u>Řešení:</u>

Nejprve stanovíme podmínku $x > 0$.

Vidíme, že $\alpha = 2$ a zavedeme substituci za předpokladu $y \neq 0$ a $u \neq 0$.

$$u = \frac{1}{y} \to y = \frac{1}{u}$$

$$u' = -\frac{y'}{y^2} \to y' = -u'y^2 = -\frac{u'}{u^2}$$

Z upravené rovnice dostáváme tvar

$$-\frac{u'}{u^2} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{u} + \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{u^2}$$

$$u' = \frac{u}{x} - \frac{\ln x}{x},$$

kde $g(x) = \frac{1}{x}$ a $h(x) = \frac{\ln x}{x}$.

Nejprve určíme obecné řešení homogenní rovnice:

$$u' - \frac{u}{x} = 0$$

$$u' = \frac{u}{x}$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{u}du = \frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{u}du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\ln|u| = \ln|x| + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$e^{\ln|u|} = e^{\ln|x|+C}$$

$$|u| = |x| \cdot e^C$$

$$u = \pm e^C \cdot x$$

Zvolíme novou konstantu $K = \pm e^C$, $K \neq 0$.

$$u = Kx$$

Vhodnou volbou konstanty $K = 0$ doplníme funkci $u = 0$.

Řešení zkrácené lineární diferenciální rovnice je

$$u = Kx, \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Provedeme variaci konstanty a hledáme řešení nehomogenní rovnice.

$$u = K(x)x$$

$$u' = K'(x)x + K(x)$$

Dosadíme do původního zadání a dále upravujeme

$$K'(x)x + K(x) = \frac{K(x)x}{x} - \frac{\ln x}{x}$$

$$K'(x)x = -\frac{\ln x}{x}$$

$$K'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

$$K(x) = -\int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Vyřešíme integrál metodou per partes:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \begin{vmatrix} t = \ln x & t' = \dfrac{1}{x} \\ v' = \dfrac{1}{x^2} & v = -\dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = -\frac{1}{x}\ln x + \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + K_1, \qquad K_1 \in \mathbb{R}$$

Dosadíme a dále upravujeme

$$K(x) = -\left(-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x}\right) + K, \qquad K \in \mathbb{R}$$

$$K(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K$$

$$u = \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + K\right)x$$

$$u = \ln x + 1 + Kx$$

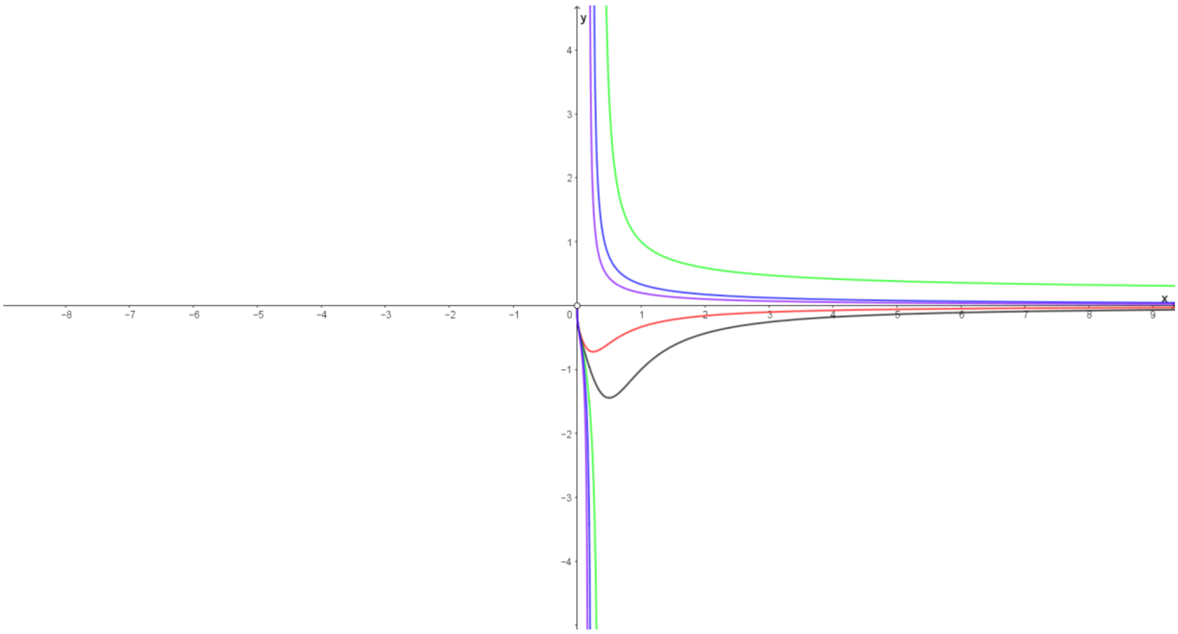
$$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + Kx$$

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Kx}$$

Obecným řešením zadané diferenciální rovnice je

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Kx} \text{ a } y = 0, \qquad K \in \mathbb{R}, x > 0.$$

Grafické řešení pro vybraná $K = -4, -2, 0, 2, 4$:



Obrázek 35: Grafické řešení příkladu 2.5.4. (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

Kdybychom vyreslili vchna řešení, pak by integrální křivky vyplnily celou polorovinu $x > 0$.

PŘÍKLADY K SAMOSTATNÉMU PROCVIČENÍ

1. $y' + \frac{y}{x+1} = -\frac{1}{2}(x+1)^3 y^3$

$$\left[y = \sqrt{\frac{2}{x^2 + 2x - C}} \cdot \frac{1}{x+1} \text{ a } y = 0, x \neq 1, \atop C \in \mathbb{R} \text{ za podmínky } \frac{2}{x^2 + 2x - C} \geq 0 \right]$$

2. $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}$

$$\left[y = \left(x^2 \ln K\sqrt{|x|} \right)^2, x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, K > 0 \right]$$

3. $x^2y^2y' + xy^3 = 1$

$$\left[y = \sqrt[3]{\frac{3}{2x} + \frac{C}{x^3}} \text{ a } y = 0, x \neq 0, C \in \mathbb{R} \right]$$

4. $y' + y = y^2$

$$\left[y = \frac{1}{Ke^x + 1}, x \in \mathbb{R}, K \in \mathbb{R} \right]$$

3 APLIKACE A VYUŽITÍ

Geometrický význam

Diferenciální rovnici $y' = \varphi(x, y)$ můžeme chápat jako předpis, který každému bodu $(x, y) \in D(\varphi)$ přiřadí směrnici tečny k integrální křivce, která tímto bodem prochází.

Pokud pro dostatečný počet bodů (x, y) nakreslíme krátké úsečky (tzv. lineární elementy) procházející těmito body a mající směrnici $\varphi(x, y)$ (jsou to tečny k integrálním křivkám), dostáváme tzv. směrové pole. Množinu bodů, kterým je přiřazen stejný směrový vektor nazýváme izoklinou. Někdy je možné tímto způsobem odhadnout tvar integrálních křivek. (JIRÁSEK, VACEK, & ČIPERA, 1989)

Příklad

Sestrojte směrové pole diferenciální rovnice

$$y' = \frac{x}{y}.$$

<u>Řešení:</u>

Směrové pole není definováno pro $y = 0$, tj. na ose x. Najdeme rovnice izoklin, křivek spojujících body, kde je derivace rovna konstantě:

$$y' = k \to k = -\frac{x}{y} \to y = -\frac{x}{k};$$

izokliny jsou přímky procházející počátkem $(k \neq 0)$; pro $k = 0$ je $x = 0$, tedy derivace je nulová ve všech bodech osy y (s výjimkou počátku, kde není směrové pole definováno), čili tečny k integrálním křivkám v bodech na ose y jsou rovnoběžné s osou x – integrální křivky protínají osu y pod pravým úhlem. Dále je

$$y' = 1 \text{ na přímce } y = -x,$$

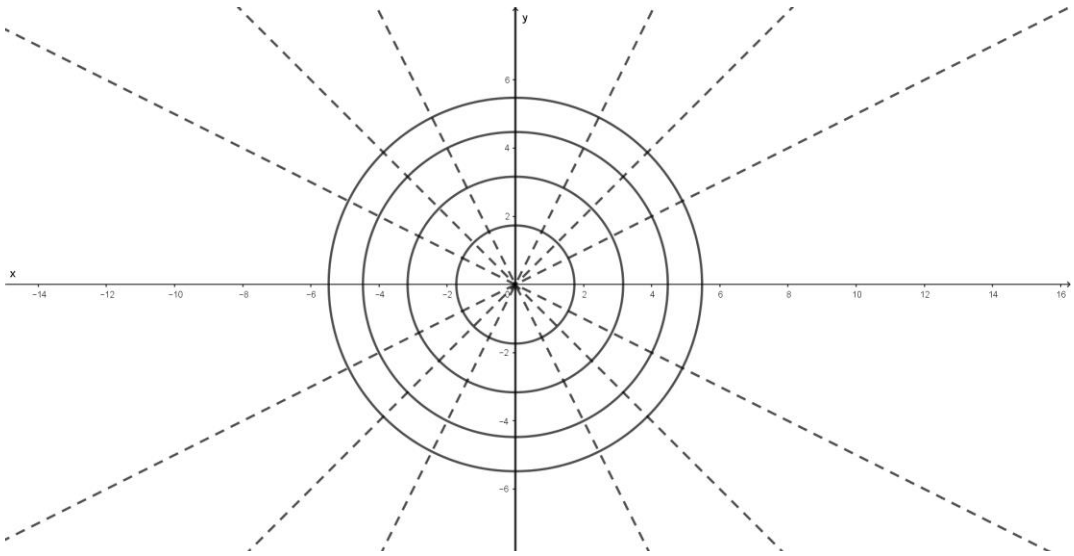
$$y' = 2 \text{ na přímce } y = -\tfrac{x}{2},$$

$$y' = \tfrac{1}{2} \text{ na přímce } y = -2x,$$

$$y' = k \text{ na přímce } y = -\tfrac{x}{k}.$$

V každém bodě přímky $y = -\frac{x}{k}$ je směrnice tečny k integrální křivce rovna k, tedy přímky a integrální křivky se protínají kolmo. Integrální křivky jsou kružnice se středem v počátku (osu x protínají kolmo, směrnice tečen není definována):

$$x^2 + y^2 = C.$$



Obrázek 36: Grafické znázornění příkladu (Zdroj: Vlastní zpracování v programu GeoGebra)

(JANKOVSKÝ, PECHOVÁ, & PRŮCHA, 1985)

Ortogonální trajektorie

Ortogonální trajektorie jsou křivky, které všechny křivky dané soustavy protínají pod pravým úhlem. Diferenciální rovnici ortogonálních trajektorií dostaneme tak, že do diferenciální rovnice dané soustavy křivek místo derivace y' dosadíme $-\frac{1}{y}$.

Příklad

Určete ortogonální trajektorie soustavy rovnoosých hyperbol $xy = k$.

Řešení:

Najdeme nejprve diferenciální rovnici soustavy hyperbol $xy = k$:

$$y = \frac{k}{x}$$

$$y' = -\frac{k'}{x^2}$$

Vyloučíme konstantu k:

$$y' = -\frac{y}{x}.$$

Nyní v této diferenciální rovnici píšeme $-\frac{1}{y'}$ místo y'

$$-\frac{1}{y'} = -\frac{y}{x}$$

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Tato rovnice je rovnicí soustavy hledaných ortogonálních trajektorií. Vyřešíme ji:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$ydy = xdx$$

$$\int ydy = \int xdx$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$$y^2 = x^2 + C_1, \qquad C_1 \in \mathbb{R}$$

$$y^2 - x^2 = C_1$$

Ortogonální trajektorie mají rovnici $y^2 - x^2 = C_1$, jsou to rovnoosé hyperboly s osami v souřadnicových osách. (JANKOVSKÝ, PECHOVÁ, & PRŮCHA, 1985)

Kromě matematického a geometrického využití se s diferenciálními rovnicemi setkáme i ve fyzice. Mnohé fyzikální zákony jsou popisovány pomocí diferenciálních rovnic – např. volný pád, Newtonův zákon ochlazování, logistická rovnice apod.

Ukážeme si příklad využití diferenciálních rovnic při výpočtu problému rozpadu radioaktivní látky.

Příklad

Rychlost rozpadu radioaktivní látky je úměrná množství přítomné látky. Předpokládáme, že v čase $t = t_0$ je m_0 jednotek látky. Máme vypočítat množství radioaktivní látky m v libovolném okamžiku t. Podle uvedeného zákona rozpadu platí

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

kde $m = m(t)$ je spojitá funkce, $k > 0$ je konstanta úměrnosti. Rovnici $\frac{dm}{dt} = -km$ spolu s počáteční podmínkou $m(t_0) = m_0$ vyhovuje funkce

$$m = m_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

ZÁVĚR

Hlavním cílem práce bylo vytvořit sbírku zaměřenou na konkrétní téma, která bude obsahovat jak teoretickou část, tak dostatek vyřešených příkladů s komentářem, který bude stačit k pochopení, případně procvičení dané látky. Tato bakalářská práce tedy může posloužit jako pomocný studijní materiál k doporučené literatuře v průběhu studia. Text je vhodný pro studenty jakéhokoliv matematického oboru, kteří již mají absolvované základy matematické analýzy. Důležité jsou znalosti především vlastností funkcí jedné proměnné a diferenciálního počtu jedné proměnné.

Dané téma jsem se snažila popsat dostatečně srozumitelně, v průběhu řešení nejsou vynechány žádné kroky, naopak jsem využila možnosti výsledky doplnit o grafické znázornění, které může pomoci k pochopení.

RESUMÉ

Práce se věnuje tématu diferenciálních rovnic prvního řádu ze tří různých pohledů. Uvádí základní teoretické pojmy a v další části využívá nově získaných znalostí při řešení konkrétních příkladů. Kromě teoretické a početní kapitoly je v práci také zahrnut popis využití diferenciálních rovnic v praxi.

Nejvýznamnější částí je kapitola s řešenými příklady, po jejímž prostudování by student měl být schopen určit, o jaký typ diferenciální rovnice se jedná a samostatně příklad vyřešit.

This bachelor thesis scrutinizes the subject of first order differential equations from three different perspectives. It introduces theoretical terms. In the following section it benefits from newly acquired knowledge when solving concrete exercises. Apart from a theoretical and a numeric chapter the essay also includes description of a practical use of differential equations.

A chapter with solved exercises represents the most significant part of the thesis, as the student should be able to identify the type of differential equation as well as individually solve the exercise after being acquainted with this chapter.

SEZNAM LITERATURY

1. BRABEC, Jiří, Zdeněk ROZENSKÝ a František MARTAN. *Matematická analýza: vysokoškolská učebnice pro elektrotechnické fakulty vysokých škol technických*. 2. upr. vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00044-0.

2. DRÁBEK, Pavel a Stanislav MÍKA. *Matematická analýza II*. 4. vyd. V Plzni: Západočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7082-977-x.

3. JANKOVSKÝ, Zdeněk, Emilie PECHOVÁ a Ladislav PRŮCHA. *Matematická analýza I - úlohy*. Dotisk. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 1985.

4. JIRÁSEK, František, Milan VACEK a Stanislav ČIPERA. *Sbírka řešených příkladů z matematiky: vysokoškolská učebnice pro skupinu studijních oborů strojírenství a ostatní kovodělná výroba*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1989. ISBN 80-03-00187-0.

5. KOJECKÁ, Jitka a Miloslav ZÁVODNÝ. *Příklady z diferenciálních rovnic I*. Olomouc: Univerzita Palackého, 2004. ISBN 80-244-0811-2.

6. KUFNER, Alois. *Obyčejné diferenciální rovnice*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1993. ISBN 80-7082-106-x.

7. MÍKA, Stanislav a Alois KUFNER. *Okrajové úlohy pro obyčejné diferenciální rovnice*. 2., upravené vyd. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1983. Matematika pro vysoké školy technické.

8. NAGY, Jozef. *Soustavy obyčejných diferenciálních rovnic: Vysokošk. příručka pro vys. školy techn. směru*. 2. vyd. Praha: SNTL, 1983. Matematika pro vysoké školy technické.

9. VEJMELKOVÁ, Eliška. *Aplikace diferenciálních rovnic*. Bakalářská práce. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2010.

SEZNAM OBRÁZKŮ