ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Ing. Petr Vaněček, Ph.D.
Katedra informatiky a výpočetní techniky
Fakulta aplikovaných věd
Univerzitní 22, CZ-30614 Plzeň
Tel.: (+420) 377 63 2487
pvanecek@kiv.zcu.cz

Posudek oponenta bakalářské práce

Jakub Vašta
Nástroj pro editaci hladkých ploch ve virtuální realitě

Předložená bakalářská práce se zabývá návrhem a implementací editoru vybraných hladkých ploch v prostředí virtuální reality s ohledem na málo zkušené uživatele.

Práce je členěna do 11 kapitol. Po stručném úvodu, specifikacích požadavků na výsledný program a krátkém seznámení s pojmem „Virtuální realita", následuje kapitola věnovaná obecným vlastnostem parametrických ploch. Bakalant zde velmi stručně popisuje základní pojmy a požadavky na parametrické plochy. V 5. kapitole jsou porovnány vlastnosti některých uvažovaných ploch, možnosti jejich napojování a výhody/nevýhody jejich použití. 6. kapitola se věnuje modelování základních tvarů (především kuželoseček) pomocí ploch popsaných v kapitole 5. V závěru kapitoly je nepříliš zřejmě odůvodněno, které plochy byly nakonec vybrány pro vlastní implementaci v editoru. Domnívám se tak proto, že od této kapitoly dále jsou již uvažovány pouze Bezierovy a Coonsovy pláty. Kapitola 7 popisuje způsoby rozdělení vybraných typů plátů. Jedním z požadovaných nástrojů editoru byla i možnost manipulace s koncovým řídícím bodem a úprava tečné roviny. Této problematice se ve stručnosti věnuje kapitola 8, potřebné výpočty jsou pak uvedeny v příloze práce. Nejrozsáhlejší kapitolou práce je kapitola 9, věnovaná návrhu programu. V této kapitole se bakalant snažil postihnout všechny oblasti návrhu aplikace – od výběru technologie a zvolených plátů, přes uživatelské rozhraní, až po detaily týkající se vlastní implementace. Kapitola však díky tomuto širokému záběru trochu postrádá logickou návaznost a na mnoha místech je velmi strohá. Chybí mi například diskuze na téma uživatelského rozhraní a následný výběr vhodných metod. Kapitola 10 se věnuje návrhu testů použitelnosti a jejich vyhodnocení. Samotné testy a následné otázky jsou připravené vcelku rozumně, až na skutečnost, že testerům byla nejprve práce s programem vysvětlena. To samozřejmě ovlivní výsledky testů a budou se patrně lišit od výsledků testů uživatelů bez tohoto úvodu. V závěrečné kapitole pak bakalant shrnuje dosažené výsledky a navrhuje možné směry vylepšení.

V textu se vyskytují některé drobné nepřesnosti, které však nemají na práci zásadní dopad. Např.

- Str. 9 „K vytvoření VR se používají dva displeje, pro každé oko jeden…" Způsoby prezentace virtuální reality mohou být i jiné než za použití Head-Mounted Display
- Str 15. „Pláty Q1 a Q2 jsou C1 spojitě navázány ve směru u, pokud je jejich společná hrana G1 spojitá a…" Jedná se patrně o chybu při přepisu ze zdroje
- Str. 36 „Všechny tyto formáty umožňují uložit trojúhelníkovou síť jako seznam vrcholů a trojúhelníků." To však neplatí pro uvedený formát STL

Za velmi zásadní považuji množství doslovně zkopírovaného textu o parametrických plochách z použitých zdrojů, viz přiložené dokumenty. Protože se však jedná o obecně známá fakta, nejedná se o hlavní směr práce a u všech takto zkopírovaných bloků se vyskytuje odkaz na zdroj, nemyslím si, že by práce kvůli této skutečnosti neměla být doporučena k obhajobě.

V použité literatuře mi také chybí více prací o virtuální realitě a uživatelském prostředí.

Dodaný editor funguje vcelku rozumně. Protože v práci není detailně popsáno, jak se program ovládá, ocitl jsem se v roli testera, který neměl vstupní informace od instruktora. Uživatelské rozhraní působí většinou vcelku intuitivně. Na druhou stranu, v editoru je několik ne zcela logických prvků a ani přečtení nápovědy na tabuli nepomohlo. Tyto nedostatky by patrně byly odhaleny, pokud by navržené testy nezahrnovaly onu vstupní instruktáž. V návrhu rozhraní mi také vadí způsob ovládání, kdy se mi nezřídka stalo, že jsem místo výběru nástroje omylem přepnul na nástroj jiný. V editoru celkově chybí lepší odezvy na uživatelské akce – např. zapojení haptické odezvy by bylo velmi vhodné. Jedna z připomínek testerů zmíněná textu práce je, že za jednu z důležitých funkcí by uživatelé považovali manipulaci s celou skupinou spojených plátů. Nezbývá než s tímto návrhem souhlasit a je škoda, že se tato funkcionalita do výsledné aplikace nedostala. Jako problematické vidím naopak přidání funkce zvětšování plátů, alespoň v té podobě, ve které je v aplikaci. Namísto zvětšování plátu pomocí posouvání řídících bodů dochází ke změně měřítka celého modelu, což vede mj. i k deformaci řídících bodů.

Během testování se program choval celkem stabilně, několikrát jsem se ale dostal do stavu, kdy nešlo uchopit žádné řídící body. Při testování se mi nepodařilo rozběhat sdílení pracovního prostoru na více počítačích. Vzhledem k nastavení firewallů a struktuře sítě to však nemusí být nutně chyba bakalanta, přesto bych rád, aby se při obhajobě k tomuto bodu vyjádřil a zprostředkoval komisi nějaké postřehy z práce v síťovém prostředí (zpoždění, předávání autorit). Narazil jsem také na problém nefunkčního osvětlení plátů. Vypadá to, že se osvětlení nepočítá na základě skutečné geometrie plátu, ale výchozí geometrie (roviny).

Dodané zdrojové kódy postrádají takřka úplně dokumentaci. Samotný objektový návrh vypadá vcelku zdařile a zřejmě by neměl být problém rozšířit případně program o další typy ploch.

I přes zásadní výhrady ke způsobu používání informačních zdrojů a výhrady k implementovanému řešení, práci **doporučuji k obhajobě** a hodnotím klasifikačním stupněm

„dobře"

V Plzni 16. května 2018

Ing. Petr Vaněček, Ph.D.
(oponent BP)

Doplňující otázky:

1. Jaké možnosti uživatelského rozhraní bakalant zvažoval a proč vybral právě tyto?
2. Z textu práce mi není zcela zřejmé, jak se například řeší situace, kdy jeden uživatel pohybuje řídícím bodem jednoho plátu a druhý uživatel bodem, který zajišťuje hladké napojení druhého plátu. Předává se v takovém případě autorita na všechny vázané body?

Přílohy

Součástí posudku je 11 stránková příloha obsahující vyznačené doslovné shody mezi bakalářskou prací a některými citovanými zdroji.

4 Vlastnosti parametrických ploch

Jelikož navrhovaný modelovací program používá parametrické plochy, tak se v této sekci budeme zabývat pojmy a vlastnostmi, které jsou pro všechny parametrické plochy shodné.

[Žára, s. 199]

Bodovou rovnicí parametrické plochy $Q(u,v)$ dvou parametrů u a v budeme rozumět funkci

$$Q(u,v)) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)],$$

kde $x(u,v), y(u,v)$ a $z(u,v)$ jsou funkce dvou paramterů $u, v \in \langle 0,1 \rangle$. Bod Q o souřadnicích $[x,y,z]$ v trojrozměrném kartézském prostoru má souřadnice $[u,v]$ v prostoru parametrickém. Funkce $x(u,v), y(u,v)$ a $z(u,v)$ jsou obvykle polynomiální, s ohledem na výhodné vlastnosti při modelování a navazování [1].

Plochy jsou zadané **řídícími body**, kterým může být přiřazena určitá váha (racionální), a bázovými funkcemi. Bázové funkce jsou nejčastěji polynomy, pro jejich dobré vlastnosti (např. jako je jejich snadné vyčíslení a diferencovatelnost). Nejčastěji se používají, díky jejich vhodným vlastnostem, polynomy třetího stupně [1].

Parametrické plochy jsou často zadávány v **maticové formě**, jak demonstruje následující rovnice.

$$Q(u,v) = \vec{u}^T M_f^T P M_f \vec{v}, \tag{4.1}$$

kde M_f je matice formy, P je matice řídících bodů, $\vec{u} = (u^3, u^2, u, 1)$ a obdobně $\vec{v} = (v^3, v^2, v, 1)$

[Žára, s. 199]

Tečný vektor $\vec{q}_u(u,v)$ ve směru parametru u k ploše $Q(u,v)$ a tečný vektor $\vec{q}_v(u,v)$ ve směru parametru v jsou určeny vztahy [1]:

$$\vec{q}_u(u,v) = \frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}$$

$$\vec{q}_v(u,v) = \frac{\partial Q(u,v)}{\partial v}$$

Normála $\vec{n}$ k ploše v bodě Q se vypočte dle následujícího vzorce [1]:

$$\vec{n} = \frac{\vec{q}_u \times \vec{q}_u}{|\vec{q}_u \times \vec{q}_u|}$$

[Žára, s. 200,201]

Hlavní křivka plochy ve směru parametru u je každá křivka určená rovnicí $Q(u,k)$ pevného paramteru $v = k$ a proměnného parametru u (analogicky hlavní křivka plochy ve směru v) [1].

Rohy plochy jsou body $Q(0,0)$, $Q(0,1)$, $Q(1,0)$ a $Q(1,1)$. Strany plochy $Q(u,v)$ jsou hlavní křivky ve směru u pro hodnoty $v = 0$ a $v = 1$ a ve směru v pro hodnoty $u = 0$ a $u = 1$. Všechny strany plochy dohromady tvoří její okraj [1].

Skládání Plochy stejného typu se dají skládat do větších částí (částím, ze kterých je skládáme, říkáme pláty a samotnému procesu plátování). Inverzní operací, kterou můžeme provádět, je dělení plochy na více plátů [1].

4.1 Spojitost

- Dva pláty mají napojení C^0 , mají-li společnou stranu, která je křivkou třídy alespoň C^0 [1][2].
- Dva pláty mají spojité napojení C^1, mají-li společnou stranu (C^0 napojení) a jsou-li shodné příčné parciální derivace ve všech bodech společné strany prvního i druhého plátu [1][2].
- Dva pláty mají spojité napojení G^1, mají-li společnou stranu (C^0 napojení) a jsou-li příčné parciální derivace ve všech bodech společné strany prvního i druhého plátu lineárně závislé s koeficientem $k > 0$ [1][2]. Toto napojení je méně omezující než-li C^1 napojení.

[Žára, s. 202]

4.2 Často požadované vlastnosti

- Invariance k lineárním transformacím, která zaručuje, že transformace sítě řídících bodů a následné generování plochy má stejný výsledek, jako transformace každého bodu z vygenerované plochy [1].
- Vlastnost konvexní obálky (plocha leží v konvexní obálce tvořené jejími řídícími body)[1].

[Žára, s. 203]

- Lokalita změn - změnou polohy (u racionálních ploch i váhy) řídícího bodu se mění jen část plochy, nikoliv plocha celá [1].
- Plocha může procházet krajními body sítě řídících bodů [1].

5 Uvažované parametrické plochy

Nyní budou představeny specifické parametrické plochy. Následující výčet parametrických ploch není kompletní, ve smyslu že neobsahuje všechny známé parametrické plochy. Plochy budou představeny obecně, ale v modelovacím nástroji budou použity kubické plochy (třetího stupně).

5.1 Bézierova plocha

[Ježek, s.81]

Bézierovu plochu definujeme předpisem

$$Q(u,v) = B_m(u)PB_n^T(v), u \in \langle 0,1), v \in \langle 0,1), \tag{5.1}$$

kde

$$B_k(s) = [B_0^k(s), B_1^k(s), ..., B_k^k(s)],$$

B_k je vektorová funkce, která parametru s přiřazuje vektor, jehož složkami jsou hodnoty jednotlivých Bernsteinových polynomů (11.1) stupně k, a P je matice řídícíh bodů. V explicitním tvaru je rovnici Bézierovy plochy možné napsat ve tvaru

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} P_{i,j}B_i^m(u)B_j^n(v) \tag{5.2}$$

Bézierova plocha prochází rohovými body sítě a okrajové křivky plochy jsou Bézierovými křivkami pro okraj sítě [1][2].

5.1.1 Napojování plátů

[Žára, s. 213]

Mějme dva Bézierovy pláty $Q^{(1)}(u,v)$ a $Q^{(2)}(u,v)$. První z nich je určen sítí řídících bodů $P_{i,j}^{(1)}, i = 0,..,s, j = 0,..$ a druhý je určen jako $P_{i,j}^{(2)}, i = 0,..,t, j = 0,..$, tzn. počet bodů ve směru $\vec{v}$ je stejný pro oba pláty a je roven m. Pláty budeme navazovat ve směru $\vec{u}$ a požadujeme, aby jejich stupeň byl alespoň tři.

Pláty $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ jsou C^0 spojitě navázány ve směru $\vec{u}$, pokud je totožná jejich (alespoň C^0 spojitá) strana, tj. $Q^{(1)}(1,v) = Q^{(2)}(0,v)$. Této spojitosti

[Žára, s. 213]

Bézierových plátů docílíme ztotožněním řídících bodů, které určují příslušnou stranu.

$$P^{(1)}_{s,j} = p^{(2)}_{0,j}, j = 0,..,m$$

Pláty $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ jsou C^1 spojitě navázány ve směru $\vec{u}$, pokud je jejich společná hrana G^1 spojitá a jsou-li identické příčné tečné vektory ve směru $\vec{u}$ podél této strany. G^1 napojení plátů docílíme shodou G^1 spojité strany a následujícím vztahem pro body řídících sítí obou plátů

$$s * (P^{(1)}_{s,j} - P^{(1)}_{s-1,j}) = t * (P^{(2)}_{1,j} - P^{(2)}_{0,j}), j = 0,..,m$$

Pozn.: Řídící body $P^{(1)}_{s-1,j}$ a $P^{(2)}_{1,j}$ leží na přímce. Pokud jsou středově souměrné podle $P^{(1)}_{s,j}(= P^{(2)}_{0,j})$ (tzn. $s = t$), tak se jedná o C^1 spojitost [1][2].

5.1.2 Výhody

Tyto plochy nabízí poměrně intuitivní modelování ploch, které mimo jiné vyplývá ze skutečnosti, že plocha prochází svými krajními body. Dají se snadno dělit na n menších plátů, při zachování tvaru původního plátu. Existence trojúhleníkových Bézierových ploch (velmi podobné vlastnosti a přístup k modelování) je další výhodou, která by neměla být opomenuta.

5.1.3 Nevýhody

Při změně jediného řídícího bodu změní svůj tvar celá plocha. Z tohoto důvodu se Bézierovy plochy plátují. Bohužel, je-li požadavek na hladké navázání, tak jsou svázány body sousedních plátů a opět se tak snižují možnosti editace. Dokonce je možné se dostat do situace, kdy nebude možné další plát hladce napojit [1]. Samotné hladké napojování nepatří mezi nejjednodušší oproti jiným typům ploch. Další nevýhodou je, že pomocí Bézierových ploch nelze přesně modelovat kuželosečky. Tyto tvary lze pouze aproximovat (6.1).

5.2 Bézierův trojúhelník

Obecný Bézierův trojúhelník má tvar

$$Q(s,t,u) = (\alpha s + \beta t + \omega u)^n = \sum_{\substack{i+j+k=n \\ i,j,k \geq 0}} \binom{n}{ijk} s^i t^j u^k \alpha^i \beta^j \gamma^k, \quad (5.3)$$

5.3.3 Nevýhody

Modelování s B-spline plochami není tak intuitivní jako s Bézierovými (toto platí především v případě, že plochy neprochází svými krajními body). Stále není možné přesně reprezentovat kuželosečky (bude umožněno až při racionalizaci a neuniformním rozdložení), ale pouze aproximovat [11].

5.4 NURBS plochy

[Žára, s. 219]

Neunifromní racionální B-spline (NURBS) plochy jsou rozšířením B-spline ploch, kde každý řídící bod má navíc svoji váhu a uzlové vektory nemají uniformní rozdělení. Řídící body si můžeme představit jako body zadané v homogeních souřadnicích, kde hodnota ω udává váhu. Podobným přístupem lze samozřejmě získat i racionální Bézierovy plochy [2].

Obecnou NURBS plochu definujeme předpisem

$$Q(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \omega_{i,j} P_{i,j} N_i^n(u) N_j^m(v)}{\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \omega_{i,j} N_i^n(u) N_j^m(v)}, \quad (5.5)$$

kde $\omega_{i,j}$ jsou váhy bodů (homogení souřadnice) $P_{i,j}$ řídící sítě $\boldsymbol{P}$, n a m je počet řídících bodů, p a q jsou stupně polynomů a konečně $N_{i,p}(u)$, $N_{j,q}(v)$ jsou normalizované B-spline bázové funkce. NURBS plocha je dále určena dvěma uzlovými vektory - vektorem $\boldsymbol{U}$ délky $n+p+1$ a $\boldsymbol{V}$ délky $m+q+1$, kde n, resp. m je počet řídících bodů ve směru u, reps. v a p, reps. q je stupeň plochy ve směru u, reps v. Uzlové vektory ovlivňují průběhy jednotlivých bázových funkcí (viz Přílohu) a interval jejich vlivu.

Váhy $\omega_{i,j}$ určují vliv bodu na plochu. Pokud je váha rovna nule, nemá bod na plochu žádný vliv, s rostoucí váhou se plocha k bodu přimyká a pro hodnotu $\omega_{i,j} \to \infty$ plocha bodem prochází (B-Spline, Bézierovy plochy mají $\omega = 1$, lze tedy nahlédnout, že se jedná pouze o zobecnění) [1].

5.4.1 Výhody

Při změně jednoho řídícího bodu se mění tvar plochy pouze lokálně a toto chování lze dále upravovat pomocí váhy bodů. NURBS plochu umožňují přesně reprezentovat kuželosečky [1].

5.4.2 Nevýhody

Modelování s NURBS plochami není tak intuitivní jako s Bézierovými.

[Žára, s. 224]

6.2 Rotační šablonování

Jak již z názvu vychází, tak rotační těleso (základní tvar koule, kužel a válec) získáme rotací křivky kolem osy (v našem případě osy z), tato rotovaná (profilová) křivka může být libovolného tvaru. Při dalším postupu budeme vycházet z použití profilové křivky typu NURBS $P(v)$ stupně k v rovině xz zadanou body P_i a uzlovým vektorem $\vec{V}$.

Profilovou křivku podrobíme otáčení kolem osy z. Řídící síť výsledné rotační plochy získáme tak, že každý řídicí bod $P_i = [X_i, Y_i, Z_i, W_i]$ profilové křivky okopírujeme v rovině xy ve výšce Z_i sedmkrát tak, aby vzniklé řídicí body tvořily v rovině xy řídicí polygon kružnice.

Váhy $W_{i,j}$ nově vzniklých bodů se vypočítají z váhy W_i bodu T_i takto

$$W_{i,j} = \{W_i, W_i/2, w_i/2, W_i, w_i/2, w_i/2, W_i\}; j = 0, ..., 6.$$

Rovnice rotační plochy má tvar:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{6} P_{i,j} R_{i,3}(u) R_{j,k}(v) \tag{6.1}$$

s uzlovými vektory $U = \{0, 0, 0, 1/4, 1/2, 1/2, 3/4, 1, 1, 1\}$ (kružnice) a V (určen profilovou křivkou) [1].

6.3 Porovnání

Mohlo by se zdát, že vyjádřit kružnici přesně pomocí NURBS křivek (reps. vyjádřit rotační těleso pomocí NURBS ploch) je oproti aproximaci velmi výhodné, avšak je potřeba si uvědomit, že samotný hladký povrch námi uvažovaných ploch je v programu reprezentován trojúhelníkovou sítí. Jinými slovy, hladký povrch ploch také pouze aproximujeme. Dále by bylo vhodné udržovat v modelovacím programu plochy pouze určitého stupně (a se stejnými uzlovými vektory v případě B-spline), abychom je mezi sebou mohli snadno napojovat. Při rotačním šablonování by však vznikaly různé NURBS plochy. Z těchto poznatků vyplývá, že dobrá aproximace křivky (povrchu) je pro účely tohoto modelovacího nástroje zcela dostačující a nezavádí do programu mnoho druhů ploch s různými stupni.

Bernsteinovy polynomy

Přesněji baze prostory Bersteinových polynomů, jsou definované jako

$$B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$$

Pro barycentrické souřadnice α, β, γ definujeme zobecněný Bersteinův polynom vztahem

$$B_{i,j,k}^n(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{n!}{i!j!k!} \alpha^i \beta^j \gamma^k, \tag{11.1}$$

[1][2]

[Ježek, s.53,54]

B-spline baze

Označme $T = (t_0, ..., t_m)$ tzv. vektor parametrizace. Platí: $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$

B-spline baze je tvořena funkcemi (polynomy) N_i^k stupně k definovanými předpisem:

- pro $k = 0$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t \in \langle t_i, t_{i+1}) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- pro $k > 0$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1} N_{i+1}^{k-1}(t)},$$

Je nutné vzít v úvahu, že v tomto výrazu mohou vzniknout výrazy typu $\frac{a}{0}$, které definitoricky položíme rovny nule.

B-spline baze je tedy charakterizována:

- stupněm k polynomů
- vektorem parametrizace, tj.
  - číslem m - vektor parametrizace má (m + 1) složek
  - složkami $t_0 \leq t_1 \leq ... \leq t_m$
- číslem j - počet funkcí tvořících bazi.

  Musí platit $m \geq k + j$, stačí však volit $m = k + j$, tj. počet složek parametrického vektoru je roven součtu stupně B-spline baze a počtu funkcí baze [1][2].

[Žára, s.180, 181]

Spojitost křivky

Říkáme, že křivka $Q(t)$ je třídy C^n, má-li ve všech bodech spojité derivace podle parametru t do řádu n. Označení C^n se nazývá parametrická spojitost stupně n.

Geometická spojitost G^n v daném bodě je definována nezávisle na parametru t. Za předpokladu, že obě křivky jsou v místě spojení diferencovatelné, pak Q_1 a Q_2 splňují podmínku geometrické spojitosti G^n, pokud jsou v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ G^{n-1} spojité a platí

$$\left[\frac{\partial^n Q_1}{\partial x^n}, \frac{\partial^n Q_1}{\partial y^n}, \frac{\partial^n Q_1}{\partial z^n}\right]_{[x_0,y_0,z_0]} = h.\left[\frac{\partial^n Q_2}{\partial x^n}, \frac{\partial^n Q_2}{\partial y^n}, \frac{\partial^n Q_2}{\partial z^n}\right]_{[x_0,y_0,z_0]}, n, h > 0.$$

Ze subjektivního hlediska zaručuje G^1 spojitost 'skoro stejnou'hladkost jako C^1, z hlediska použití bývá daleko snažší zaručit spojitost G^1 nežli C^1. Spojitost C^1 implikuje G^1 s výjimkou jediného případu, kdy vektor rychlosti v místě spojení dvou segmentů je $(0, 0, 0)$ [1][2].

Výpočet bodů ovlivňujících tečnou rovinu v krajních bodech

Bézierovy plochy

Mějme Bézierovu kubickou plochu zadanou jako

$$Q(u, v) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} P_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v) \tag{11.2}$$

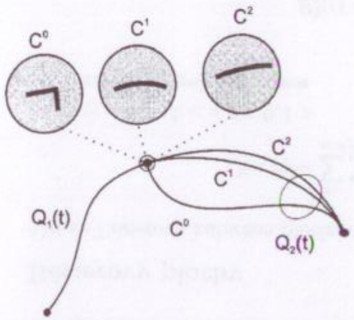
, kde $m = n = 3; v, u \in < 0, 1 >$
Bersteinovy polynomy jsou

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1-t)^3 \\ B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1-t) \\ B_3^3(t) &= t^3 \end{aligned} \tag{11.3}$$

Nejprve budeme hledat $\alpha(u, v) = \frac{\partial Q(u,v)}{\partial u}$

je tečný vektor v koncovém bodě segmentu Q_1 roven tečnému vektoru segmentu Q_2 v jeho počátečním bodě. Analogicky rovnost vektoru první a druhé derivace je požadována pro C^2 (obrázek 5.4), atd. Zkráceně zapisujeme

$$\vec{q_1}^{(i)}(1) = \vec{q_2}^{(i)}(0);\ \forall\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

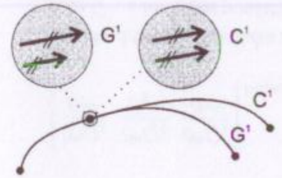


Obrázek 5.4: Spojitost C^0, C^1 a C^2

Čím vyšší spojitost je požadována, tím delší „dobu" (ve smyslu parametru t) se oba segmenty přimykají ke stejnému směru. Zjevně $C^{n+1} \Rightarrow C^n$. Ze spojitosti C^0 plyne, že bod se pohybuje po spojité dráze, ale v uzlu může měnit skokem směr pohybu, rychlost i zrychlení. Směr pohybu a velikost rychlosti se nemůže měnit skokem při spojitosti C^1 a zrychlení zůstává nezměněné při spojitosti C^2.

Hladkost navázání křivek můžeme také posuzovat podle *geometrické spojitosti* označované G^n, nejčastěji se používají geometrické spojitosti G^0 a G^1. Dva segmenty křivky $Q(t)$ jsou G^0 spojité, pokud je koncový bod Q_1 totožný s počátečním bodem Q_2. Dva segmenty jsou G^1 spojité, pokud jsou G^0 spojité a současně tečné vektory $\vec{q'}_1(1)$ segmentu Q_1 a $\vec{q'}_2(0)$ segmentu Q_2 jsou souhlasně kolineární, tj. platí:

$$\vec{q'}_1(1) = k\,\vec{q'}_2(0);\ k > 0. \tag{5.7}$$



Obrázek 5.5: Geometrická a parametrická spojitost. Lupa ukazuje tečné vektory

Tato spojitost zaručuje totožnost tečen (nikoli tečných vektorů). Pohybující se bod v uzlu nemůže změnit skokem směr, ale může změnit skokem rychlost, křivka je vizuálně hladká.

Geometrická spojitost G^n v daném bodě je definována nezávisle na způsobu, jakým byly obě stýkající se křivky vytvořeny, tj. nezávisle na parametru t. Za předpokladu, že obě křivky jsou v místě spojení diferencovatelné, pak Q_1 a Q_2 splňují podmínku geometrické spojitosti G^n, pokud jsou v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ G^{n-1} spojité a platí

$$\left[\frac{\partial^n Q_1}{\partial x^n}, \frac{\partial^n Q_1}{\partial y^n}, \frac{\partial^n Q_1}{\partial z^n}\right]_{[x_0,y_0,z_0]} = h.\left[\frac{\partial^n Q_2}{\partial x^n}, \frac{\partial^n Q_2}{\partial y^n}, \frac{\partial^n Q_2}{\partial z^n}\right]_{[x_0,y_0,z_0]},\ n > 0, h > 0.$$

[Vašta, s.50]

[Vašta, s.50]

Ze subjektivního hlediska zaručuje G^1 spojitost „skoro stejnou" hladkost jako C^1, z hlediska použití bývá daleko snažší zaručit spojitost G^1 nežli C^1. Spojitost C^1 implikuje G^1 s výjimkou jediného případu, kdy vektor rychlosti v místě spojení dvou segmentů je $(0, 0, 0)$. Obráceně toto neplatí, neboť geometrická spojitost nepostihuje rychlosti a zrychlení pohybu.

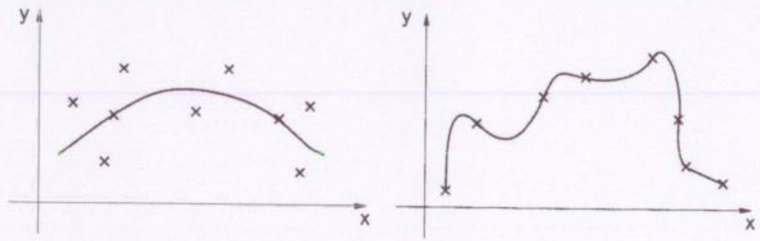
5.2 Modelování křivek

Základním druhem parametrických křivek používaných v počítačové grafice jsou křivky *polynomiální*

$$Q_n(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$$

Polynomiální křivky můžeme snadno vyčíslit a jejich další výhodou je, že jsou jednoduše diferencovatelné. Z polynomiálních křivek lze skládat křivky *po částech polynomiální*, to jsou křivky, jejichž segmenty jsou polynomiálními křivkami. Nejčastěji používané jsou křivky třetího stupně – *kubiky*, které poskytují dostatečně širokou škálu tvarů, jejich výpočet bývá nenáročný, lze s nimi snadno manipulovat a je u nich možné zaručit spojitost C^2, která je často požadovaná při modelování v CAD systémech.

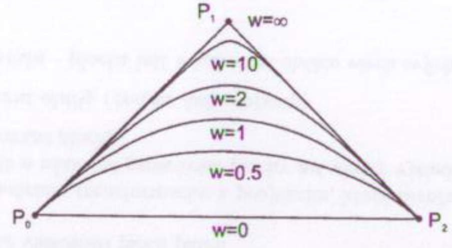
Modelování probíhá obvykle tak, že je definováno několik *řídicích bodů* (*řídicí polygon*) a matematický aparát z jejich polohy určí průběh křivky. Některé metody umožňují zadávání křivek též pomocí tečných vektorů, je možné zaručit spojitost a hladkost navázání aj.



Obrázek 5.6: Aproximační (vlevo) a interpolační křivka a jejich řídicí body

V dalším textu budeme křivku označovat $Q(t)$ a její řídicí body P_i. Pokud budeme hovořit o spojení dvou segmentů křivky, bude první segment označen $Q_1(t)$ a bude zadán řídicími body P_i, zatímco druhý segment budeme označovat $Q_2(t)$ a bude zadán řídicími body Q_i. Tečný vektor ke křivce budeme označovat $\vec{q'}(t)$ a druhou derivaci pak $\vec{q''}(t)$. Tečné vektory v řídicích bodech nebo uzlech, kterými křivka prochází, budeme označovat $\vec{p'}_i$, resp. $\vec{q'}_i$. Existují dva základní způsoby interpretace řídicích bodů a to *interpolace* a *aproximace* (viz obrázek 5.6).

Žára J., Beneš B., Sochor J., Felkel P., Moderní počítačová grafika. 2. vyd. 2004.



Obrázek 5.24: Vliv váhy bodu na racionální B-spline

Obrázek 5.24 ukazuje vliv váhy bodu P_1 na tvar křivky. Pro hodnotu $w = 0$ bod křivku žádným způsobem neovlivňuje [srovnej vztah (5.29)]. Váha bodu $w = 1$ odpovídá případu neracionální křivky. Se zvyšující se váhou se křivka k bodu přimyká, až konečně pro hodnotu $w = \infty$ křivka bodem prochází a dochází ke ztrátě spojitosti. Podmínka nezápornosti vah zaručuje umístění křivky v konvexní obálce.

5.5 Vlastnosti parametrických ploch

V této části popíšeme plochy nejčastěji používané v trojrozměrné počítačové grafice, způsob jejich zadávání a editace, principy jejich výpočtu, zobrazování a převodu na sítě trojúhelníků.

[Vašta, s.11]

Bodovou rovnicí parametrické plochy $Q(u,v)$ dvou parametrů u a v (srovnej odstavec 5.1) budeme rozumět funkci

$$Q(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)], \tag{5.35}$$

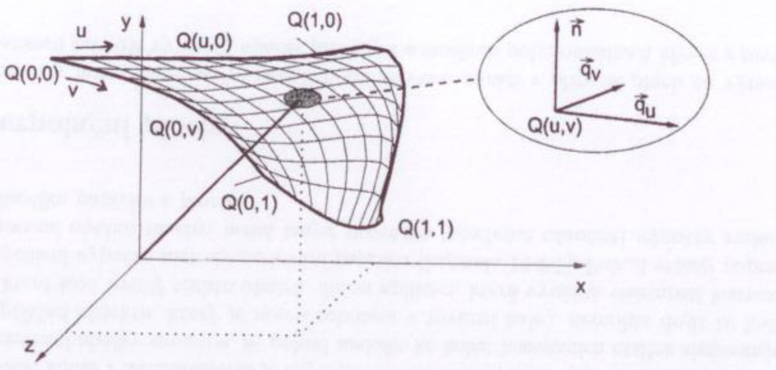
kde $x(u,v)$, $y(u,v)$ a $z(u,v)$ jsou funkce dvou parametrů $u, v \in \langle 0,1\rangle$. Bod Q o souřadnicích $[x,y,z]$ v trojrozměrném kartézském prostoru má souřadnice $[u,v]$ v prostoru parametrickém. Funkce $x(u,v)$, $y(u,v)$ a $z(u,v)$ jsou obvykle polynomiální, s ohledem na výhodné vlastnosti při modelování a navazování. Parametrické polynomiální plochy používají shodné matematické prostředky jako parametrické polynomiální křivky, viz část 5.

[Vašta, s.11]

Tečný vektor $\vec{q}_u(u,v)$ ve směru parametru u k ploše $Q(u,v)$ (viz obrázek 5.25) a tečný vektor $\vec{q}_v(u,v)$ ve směru parametru v jsou určeny vztahy

$$\vec{q}_u(u,v) = \frac{\partial Q(u,v)}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\right), \tag{5.36}$$

$$\vec{q}_v(u,v) = \frac{\partial Q(u,v)}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u,v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\right). \tag{5.37}$$



Obrázek 5.25: Parametrická plocha

Pokud bude z kontextu jasné že se jedná o plochu, budeme zápis $Q(u,v)$ zjednodušovat zápisem Q, analogicky budeme používat zápis $\vec{q}_u$ pro tečný vektor ve směru parametru u k ploše $Q(u,v)$ atp. Parametrická rovnice *tečné roviny* $T(r,s)$ k ploše Q je určena tečnými vektory $\vec{q}_u$ a $\vec{q}_v$, bodem $Q(u,v)$ a má tvar

$$T(r,s) = Q(u,v) + r\,\vec{q}_u + s\,\vec{q}_v;\ r,s \in R. \tag{5.38}$$

Při řešení úlohy navazování plátů mají také *význam zkruty, zkrutové vektory*, které charakterizují „vyklenutí" plochy v místech napojení. Jsou definovány pomocí smíšených parciálních derivací podle parametrů u a v vztahem

$$\vec{q}_{uv}(u,v) = \frac{\partial^2 Q(u,v)}{\partial u \partial v} = \left(\frac{\partial^2 x(u,v)}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 z(u,v)}{\partial u \partial v}\right). \tag{5.39}$$

Pro výpočet *normály* (kolmice) $\vec{n}$ k ploše v bodě Q (viz lupa na obrázku 5.25) využijeme znalosti tečných vektorů $\vec{q}_u$, $\vec{q}_v$ a normálu určíme jako jejich normalizovaný vektorový součin

$$\vec{n} = \frac{\vec{q}_u \times \vec{q}_v}{|\vec{q}_u \times \vec{q}_v|} \tag{5.40}$$

[Vašta, s.12]

Hlavní křivka plochy ve směru parametru u je každá křivka určena rovnicí $Q(u,k)$ pevného parametru $v = k$ a proměnného parametru u a analogicky hlavní křivka plochy ve směru

Žára J., Beneš B., Sochor J., Felkel P., Moderní počítačová grafika. 2. vyd. 2004.

plochy, tato plocha jimi však nemusí procházet. Pro napojování ploch je důležité, aby byly známé tečné podmínky na jejich stranách.

Stejně jako u křivek, tak i v případě ploch jsou bázové funkce nejčastěji polynomy, protože jsou snadno diferencovatelné a lze je rychle vyčíslit. Při pojmenování ploch se používá stupeň použitého polynomu, a protože se jedná o plochy, je nutné v jejich názvu uvést vždy dva údaje. Tak například plocha bikubická má jako hlavní křivky v obou směrech kubiky, řez plochou kvadraticko-lineární je kvadrikou ve směru parametru u, zatímco hlavními křivkami ve směru parametru v jsou úsečky, atp.

Nejčastěji se používají polynomy stupně tři. Polynom stupně menšího nežli tři nelze určit tak, aby při procházení dvěma body měl zároveň „vhodné" tečné vlastnosti. Kubika je polynom nejmenšího stupně, který tyto vlastnosti má, umožňuje C^1 a C^2 spojitost a poskytuje uspokojivé modelovací možnosti. Použití polynomů vyššího stupně vede ke zvýšení časové náročnosti výpočtů. Protože kubiky umožňují C^2 spojitost, je snadné jejich napojování – skládání složitých ploch z jednodušších (obyčejně bikubických) plátů.

Podobně jako u parametrických křivek se pro parametrické plochy volí reprezentace, ve které se místo uchování koeficientů jednotlivých polynomů kombinují řídicí body, tečné vektory a další geometrické parametry s bázovými funkcemi

$$Q(u,v) = \mathbf{U}\ \mathbf{M}_B P \mathbf{M}_B^T\ \mathbf{V}^T = [u^3 u^2 u\ 1]\ \mathbf{M}_B P \mathbf{M}_B^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{5.41}$$

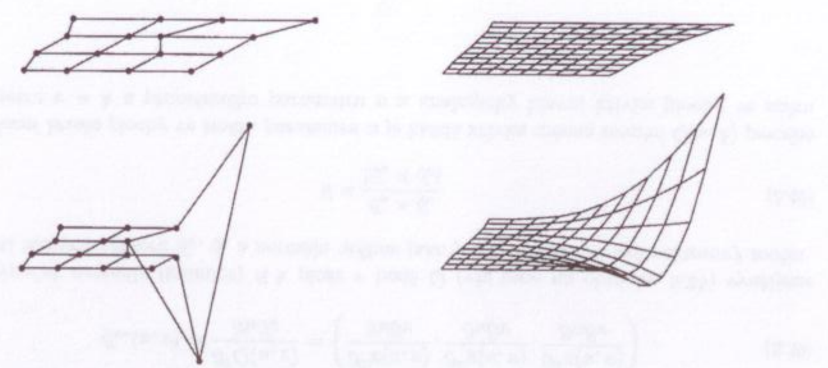
Matice P obsahuje řídicí body a případně další prvky určující geometrii plochy, bázová matice $\mathbf{M}_B$ obsahuje koeficienty a_i polynomů bázových funkcí. Bázová matice $\mathbf{M}_B$ se nemění, zatímco řídicí body $P_{i,j}$ svou polohou v prostoru určují tvar plochy. Konkrétní tvary matic $\mathbf{M}_B$ uvedeme v dalších odstavcích.

Modelování obvykle probíhá zadáváním a úpravami sítě řídicích bodů (viz obrázek 5.27), která tvoří v trojrozměrném prostoru mnohostěn. Změnou polohy řídicích bodů měníme tvar plochy.

Mezi často požadované vlastnosti ploch patří:

[Vašta, s.12]

1. *Invariance* k lineárním transformacím a projekcím, která zaručuje, že například otáčení sítě řídicích bodů a následné generování plochy má stejný výsledek, jako otáčení každého bodu z vygenerované plochy.
2. *Vlastnost konvexní obálky* (*convex hull property*)
   (a) *silná podmínka* – plocha leží v konvexní obálce všech svých řídicích bodů,



Obrázek 5.27: Editace Bézierovy bikubické plochy (vpravo). Řídicí síť se šestnácti body (vlevo) určuje změnu tvaru plochy po změně polohy dvou řídicích bodů

[Vašta, s.13]

   (b) *slabá podmínka* – část plochy leží v konvexní obálce některých řídicích bodů (typicky plát, v obálce svých řídicích bodů).
3. *Lokalita změn* – změnou polohy (u racionálních ploch i váhy) řídicího bodu se mění jen část plochy, nikoli plocha celá.
4. Plocha může *procházet krajními body* sítě řídicích bodů.

Podmínky konvexní obálky lze s výhodou využít k urychlení některých výpočtů. Například v robotice, v číslicově řízeném obrábění, nebo v trojrozměrné počítačové animaci lze využít toho, že výpočet kolize s mnohostěnem je obyčejně daleko snazší, nežli výpočet kolize s plochou. Podmínka konvexní obálky zaručuje, že pokud nedošlo ke kolizi konvexních obálek sledovaných objektů (například objektu, který je nesen robotem v tovární hale), nemohlo dojít ke kolizi s plochami, které jsou uvnitř těchto obálek. Jinou aplikací, která využívá vlastnosti konvexní obálky, je urychlení výpočtu metody sledování paprsku (kapitola 14.2.1). Pokud vržený paprsek nezasáhl konvexní obálku plochy, nemá smysl provádět (obyčejně náročné) výpočty vedoucí k získání průsečíku paprsku a plochy.

5.6 Interpolační plochy

Zobecnění metody interpolace posloupnosti bodů křivkou naráží v případě ploch na výrazné problémy. Zatímco existuje vyvinutý aparát pro popis a studium polynomiálních křivek v rovině

Žára J., Beneš B., Sochor J., Felkel P., Moderní počítačová grafika. 2. vyd. 2004.

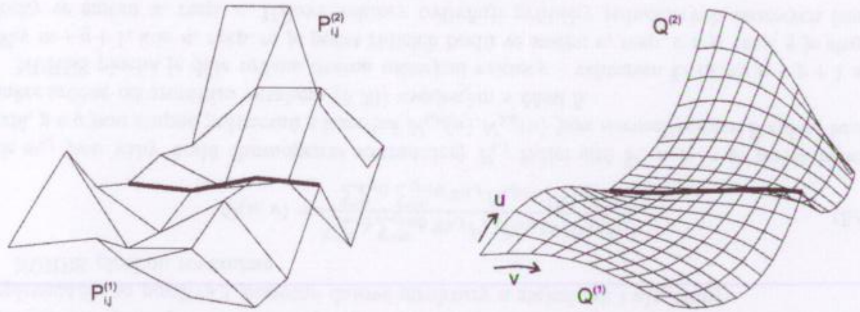
Bernsteinovy polynomy jsou nezáporné a jejich součet je roven jedné. Z těchto dvou vlastností lze dokázat [Fari93], že Bézierova plocha leží celá v konvexní obálce svých řídicích bodů.

Další vlastností Bézierovy plochy je, že změní celý svůj tvar při změně polohy jediného řídicího bodu. Tato vlastnost je nevýhodná a je jedním z důvodů, proč se Bézierovy plochy plátují. Při změně polohy jediného řídicího bodu se pak změní tvar pouze jediného plátu (není-li tento bod z důvodů spojitosti svázán s body ze sousedního plátu).

[Vašta, s.14,15]

Navazování Bézierových plátů

Mějme dva Bézierovy pláty $Q^{(1)}(u,v)$ a $Q^{(2)}(u,v)$. První z nich je určen sítí řídicích bodů $P^{(1)}_{i,j}$, $i = 0,\dots,s$, $j = 0,\dots,m$ a druhý je určen jako $P^{(2)}_{i,j}$, $i = 0,\dots,t$, $j = 0,\dots,m$. Počet bodů ve směru v je stejný pro oba pláty a je roven m. Pláty budeme navazovat ve směru u a požadujeme, aby jejich stupeň v tomto směru byl alespoň tři, tj. $s \geq 3$ a $t \geq 3$.



Obrázek 5.33: C^0 napojení dvou Bézierových plátů $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$. Silně zvýrazněná lomená čára v řídicí síti (vlevo) spojuje řídicí body Bézierovy kubiky zvýrazněné na druhém obrázku, která tvoří společnou stranu obou plátů.

Pláty $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ jsou C^0 spojitě navázány ve směru u (viz obrázek 5.33), pokud je totožná jejich (alespoň C^0 spojitá) strana, tj. $Q^{(1)}(1,v) = Q^{(2)}(0,v)$. Této spojitosti Bézierových plátů docílíme ztotožněním řídicích bodů, které určují příslušnou stranu

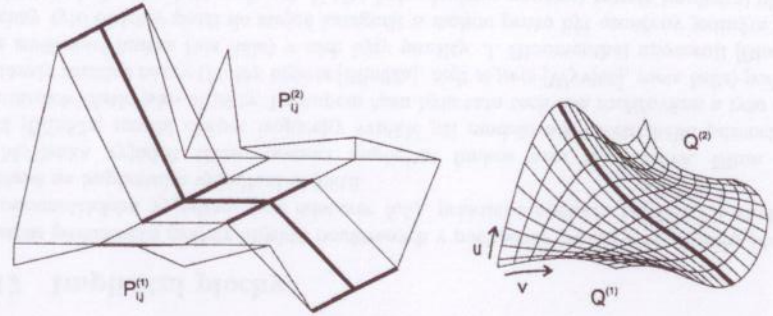
$$P^{(1)}_{s,j} = P^{(2)}_{0,j};\ j = 0,\dots,m. \tag{5.55}$$

Tento způsob spojení umožňuje vznik ostré hrany (viz obrázek 5.33 vpravo). Pláty $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ mají napojení C^1 (viz obrázek 5.26), pokud je jejich společná hrana C^1 spojitá a jsou-li identické

[Vašta, s.14,15]

příčné tečné vektory ve směru u podél této strany. C^1 napojení dvou plátů docílíme shodou C^1 spojité strany a následujícím vztahem pro body řídicích sítí obou plátů

$$s.(P^{(1)}_{s,j} - P^{(1)}_{s-1,j}) = t.(P^{(2)}_{1,j} - P^{(2)}_{0,j});\ j = 0,\dots,m. \tag{5.56}$$



Obrázek 5.34: C^1 spojení dvou Bézierových plátů

Z vlastností C^1 napojení dvou plátů plyne [Fari93], že hlavní křivky obou plátů ve směru napojení jsou C^1 křivkami.

Pláty $Q^{(1)}$ a $Q^{(2)}$ mají napojení G^1 (viz obrázek 5.35), pokud je jejich společná strana křivka třídy G^1 a příčné tečné vektory ve směru u jsou lineárně závislé s koeficientem $k > 0$ spojitě se měnícím podél společné strany. Toho dosáhneme společnou stranou, která je křivkou třídy alespoň G^1 a následujícím vztahem pro body řídicích sítí obou plátů

$$P^{(1)}_{s,j} - P^{(1)}_{s-1,j} = k.(P^{(2)}_{1,j} - P^{(2)}_{0,j});\ j = 0,\dots,m;\ k > 0. \tag{5.57}$$

Tato podmínka je méně omezující nežli C^1 spojitost, neboť umožňuje větší manipulaci s takto svázanými řídicími body (viz dále). Pokud položíme $k = 0$ přechází ve spojitost pouze C^0 a je-li společná strana třídy C^1, tak přechází tato spojitost při hodnotě $k = 1$ ve spojitost C^1.

Požadavek hladkého navázání spolu svazuje body sousedních plátů a snižuje tak možnosti jejich editace. Svázání několika bodů podmínkami (5.56), resp. (5.57) určuje polohu vždy skupiny řídicích bodů. Nejvýrazněji tato podmínka omezuje společný roh čtyř spojených plátů, kde je takto svázáno celkem devět řídicích bodů. V některých případech se proto podmínky

Žára J., Beneš B., Sochor J., Felkel P., Moderní počítačová grafika. 2. vyd. 2004.

nebo zápisem

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} P_{i,j}B_i(u)B_j(v), \tag{5.61}$$

kde bázové funkce jsou totožné s bázovými polynomy $BS_0(t)$, $BS_1(t)$, $BS_2(t)$ a $BS_3(t)$ Coonsových kubik v části 5 s průběhy na obrázku 5.17.

NURBS plochy

[Vašta, s.18]

Neuniformní racionální B-spline plochy – NURBS (*non uniform rational B-spline*) jsou zobecněním B-spline ploch a představují dnes průmyslový standard v geometrickém modelování. NURBS umožňují definovat širokou třídu ploch, mezi něž patří jak volně tvarovatelné plochy na bázi racionálních polynomů (*free form surfaces*), ale i plochy založené na přímkách, kuželosečkách apod. I tyto tvary se dají vyjádřit v NURBS reprezentaci, jak je ukázáno v části 5.4. Uživatel pracuje s těmito objekty v jednotné reprezentaci. Výhodné je, že z hlediska implementace se používají jednotné datové struktury a stejně tak i algoritmy.

NURBS plochou rozumíme

$$Q(u,v) = \frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{i,j}P_{i,j}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} w_{i,j}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)}, \tag{5.62}$$

kde $w_{i,j}$ jsou váhy bodů (homogenní souřadnice) $P_{i,j}$ řídicí sítě **P**, n a m je počet řídicích bodů, p a q jsou stupně polynomů a konečně $N_{i,p}(u)$,$N_{j,q}(v)$ jsou *normalizované B-spline bázové funkce* určené rekurentním vztahem (5.30) uvedeným v části 5.

NURBS plocha je dále určena dvěma uzlovými vektory – vektorem **U** délky $n+p+1$ a **V** délky $m+q+1$, kde n, resp. m je počet řídicích bodů ve směru u, resp. v a p, resp. q je stupeň plochy ve směru u, resp. v. Uzlové vektory ovlivňují průběhy jednotlivých bázových funkcí a interval jejich vlivu. Vlastnosti bázových funkcí jsou uvedeny v části 5.

Obdobně jako u NURBS křivek i u ploch využíváme zjednodušený zápis pomocí *racionální B-spline báze*:

$$R_{i,p}(t) = \frac{w_i N_{i,p}(t)}{\sum_{j=0}^{n} w_j N_{j,p}(t)}. \tag{5.63}$$

Rovnici (5.62) lze potom zapsat jednodušeji:

[Vašta, s.18]

$$Q(t) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{i=0}^{m} P_{i,j}R_{i,p}(u)R_{j,q}(v). \tag{5.64}$$

Váhy $w_{i,j}$ určují vliv bodu na plochu. Pokud je váha rovna nule, nemá bod na plochu žádný vliv, s rostoucí váhou se plocha k bodu přimyká a pro hodnotu $w_{i,j} \to \infty$ plocha bodem prochází. Příklad NURBS plochy a její změny podle váhy jednoho řídicího bodu, je na obrázku 5.38.

[Vašta, s.20]

Jako příklad uvedeme jednotný přístup při tvorbě rotačních ploch pomocí NURBS. Připomeňme, že v technologii NURBS máme k dispozici široký repertoár základních tvarů, od úseček a lomených čar, přes Hermitovské a Bézierovy křivky až po neuniformní neracionální B-spline křivky. Uvažujme například NURBS křivku $P(v)$ stupně k v rovině xz zadanou body P_i a uzlovým vektorem **V**. Tuto křivku podrobíme otáčení kolem osy z. Řídicí síť výsledné rotační plochy získáme tak, že každý řídicí bod $P_i = [x_i, y_i, z_i, w_i]$ profilové křivky okopírujeme v rovině xy ve výšce z_i sedmkrát tak, aby vzniklé řídicí body tvořily v rovině xy řídicí polygon kružnice podle obrázku 5.23.
Váhy $w_{i,j}$ nově vzniklých bodů se vypočítají z váhy w_i bodu T_i takto

$$w_{i,j} = \{w_i, w_i/2, w_i/2, w_i, w_i/2, w_i/2, w_i\};\ j = 0,\dots,6.$$

Rovnice rotační plochy má tvar

$$Q(u,v) = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{6} P_{i,j}R_{i,3}(u)R_{j,k}(v) \tag{5.66}$$

s uzlovými vektory $\mathbf{U} = \{0,0,0,1/4,1/2,1/2,3/4,1,1,1\}$ (kružnice) a **V** (určen profilovou křivkou). Bude-li například profilovou křivkou kružnice, která je posunutá o určitou vzdálenost od osy z, získáme její rotací kolem osy z anuloid (prstenec). Rotací úsečky rovnoběžné s osou z, která s touto osou nesplývá, lze získat válcovou plochu, rotací úsečky různoběžné s osou z lze získat otevřený kužel, rotací kružnice v základní poloze o 180 stupňů kouli, atp.

5.12 Implicitní plochy

Přestože geometrické modely objektů používaných v počítačové grafice jsou založeny především na parametrickém vyjádření (viz odstavec 5.5), praktické aplikace používají i modelování, založené na implicitním vyjádření objektů.

Myšlenka vyjádřit těleso pomocí implicitní funkce není nijak nová. Blinn v roce 1982 [Blin82a] navrhl chápat izoplochy vzniklé při modelovaní elektrického potenciálu elementárních částic jako objekty. Postupem času byla tato technika rozšiřována a tyto objekty dostávaly rozličné názvy (*blobby objects* [Blin82a], *Soft objects* [Wyvi86], *meta balls*) podle toho, jaké směšovací funkce (viz dále) v nich byly použity. J. Bloomenthal upozornil [Bloo88], že všechny tyto objekty patří do stejné kategorie a mohou proto být označeny jediným názvem *implicitní plochy* (*implicit surfaces*). V této knize budeme používat termín implicitní plocha, či implicitní těleso.

Implicitní plocha je množina bodů P ve třírozměrném prostoru, pro které platí

$$Q(P) = konst.$$

Žára J., Beneš B., Sochor J., Felkel P., Moderní počítačová grafika. 2. vyd. 2004.

[Vašta, s.14]

Kapitola 12

Plochy tenzorového součinu určené sítí bodů

Předpokládáme, že je dána síť $\mathcal{V}$ $(m+1)\times(n+1)$ bodů s polohovými vektory $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,1}$, …, $\mathbf{V}_{m,n}$, tj.

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{0,0} & \mathbf{V}_{0,1} & \dots & \mathbf{V}_{0,n} \\ \mathbf{V}_{1,0} & \mathbf{V}_{1,1} & \dots & \mathbf{V}_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{V}_{m,0} & \mathbf{V}_{m,1} & \dots & \mathbf{V}_{m,n} \end{bmatrix}$$

Předpokládáme, že se jedná o navzájem různé body.

12.1 Bézierovy plochy

V roce 1970 se začal ve francouzské automobilce Renault používat systém UNISURF, který k modelování tvaru karosérií využil ploch určených řídící sítí podle návrhu P. Béziera.

Bézierovu plochu definujeme předpisem

$$\mathbf{P}(u,v) = \mathbf{B}_m(u)\mathcal{V}\mathbf{B}_n^T(v), \qquad u \in \langle 0,1\rangle, v \in \langle 0,1\rangle,$$

kde

$$\mathbf{B}_k(s) = [B_0^k(s), B_1^k(s), \dots, B_k^k(s)],$$

tj. $\mathbf{B}_k$ je vektorová funkce, která parametru s přiřazuje vektor, jehož složkami jsou hodnoty jednotlivých Bernsteinových polynomů stupně k.

V explicitním tvaru je rovnici Bézierovy plochy možné napsat ve tvaru

$$\mathbf{P}(u,v) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \mathbf{V}_{i,j} B_i^m(u) B_j^n(v).$$

Věta 12.1 *Bézierova plocha prochází rohovými body sítě a okrajové křivky plochy jsou Bézierovými křivkami pro okraje sítě. Tečná rovina v bodě $\mathbf{V}_{0,0}$ sítě je určena body $\mathbf{V}_{0,0}$, $\mathbf{V}_{0,1}$, $\mathbf{V}_{1,0}$. Podobně pro další rohové body.*

[Vašta, s.49]

- pro $k = 0$

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } t_i \le t < t_{i+1} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

- pro $k > 0$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t) \tag{6.6}$$

Je nutné vzít v úvahu, že v tomto výrazu mohou vzniknout výrazy typu $\frac{0}{0}$, které definitoricky položíme rovny nule.

B-spline baze je tedy charakterizována:

- stupněm k polynomů,
- vektorem parametrizace, tj.
  - číslem m – vektor parametrizace má $(m+1)$ složek,
  - složkami $t_0 \le t_1 \le \ldots \le t_m$,
- číslem j – baze má $(j+1)$ funkcí.

Mezi uvedenými charakteristikami musí být, jak plyne ze vztahu (6.6), jistá vazba: Ke stanovení funkce N_i^k musí být v parametrickém vektoru k dispozici až složka t_{i+k+1}. Jelikož hodnota i nabývá maximální hodnoty j, musí platit $m \ge k+j+1$. Stačí však volit $m = k+j+1$, tj. počet složek parametrického vektoru je roven hodnotě $k+j+2$, což je součet řádu křivky (stupeň zvětšený o jedna) a počtu bázových funkcí.

Ukážeme nyní, že Bernsteinovy polynomy jsou speciální B-spline bazí. Pro Bernsteinovy polynomy stupně n platí $m = 2n+1$. Pro Bernsteinův polynom platí $t \in \langle 0,1\rangle$, proto volíme

$$t_0 = t_1 = \ldots = t_n = 0 \;\text{ a }\; t_{n+1} = t_{n+2} = \ldots = t_{2n+1} = 1$$

Matematickou indukcí podle stupně polynomu provedeme pro takto sestavený parametrický vektor důkaz, že B-spline baze splyne se systémem Bernsteinových polynomů:

1. Nechť $k = 1$, pak parametrický vektor $\mathbf{T} = (0,0,1,1)$ a

$$N_0^1(t) = \frac{t\,N_0^0(t)}{0} + \frac{(1-t)N_1^0(t)}{1-0} = (1-t)N_1^0(t),$$

tj. na intervalu $\langle 0,1)$ je $N_0^1(t) = (1-t) = B_0^1(t)$. Podobně zjistíme, že $N_1^1(t) = t = B_1^1(t)$.

2. Nechť nyní tvrzení platí pro $k = n_0$, tj. máme

$$N_i^{n_0+1}(t) = \frac{(t-t_i)B_i^{n_0}(t)}{t_{i+n_0+1} - t_i} + \frac{(t_{i+n_0+2} - t)B_{i+1}^{n_0}(t)}{t_{i+n_0+2} - t_{i+1}},$$

Jelikož pro $0 \le i \le n_0+1$ je $t_i = 0$ a $t_{i+n_0+2} = 1$, platí

$$N_i^{n_0+1}(t) = tB_i^{n_0}(t) + (1-t)B_{i+1}^{n_0}(t) = B_i^{n_0+1}(t)$$

a tvrzení je dokázáno.

Ježek F., Geometrické a počítačové modelování. verze 11, 2009.