

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

Bakalářská práce

$L(2,1)$ -ohodnocení grafů

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracovala samostatně za použití uvedených pramenů a literatury.

V Plzni dne

Podpis autora

Poděkování

Ráda bych touto cestou vyjádřila poděkování Doc. RNDr. Přemyslu Holubovi, Ph.D. za jeho cenné rady a trpělivost při vedení mé bakalářské práce, za vstřícnost a pomoc při získání potřebných informací a podkladů a za veškerý čas, který mi ochotně věnoval.

Abstrakt

Tato práce se zabývá $L(2, 1)$ -ohodnocením grafů a zkoumá horní a dolní mez pro číslo $\lambda_{2,1}$. Toto číslo symbolizuje minimální rozpětí $L(2, 1)$ -ohodnocení, kterým lze daný graf ohodnotit. Práce shrnuje známé výsledky v oblasti základních tříd grafů, rovinných grafů, produktů grafů, cirkulačních grafů, Kneserových grafů, podrozdělení grafů, zobecněných Petersenových grafů, prímů a regulárních sítí. V podkapitole 3.5.1 jsou uvedeny vlastní výsledky týkající se hledání horní hranice či přesné hodnoty $\lambda_{2,1}$ pro některé cirkulační grafy, které vylepšují doposud známou obecnou horní mez. V podkapitole 3.9 jsou dokázány horní meze pro $\lambda_{2,1}$ Kartézského produktu nekonečných regulárních sítí a nekonečné cesty.

Abstract

This thesis deals with a $L(2,1)$ -labelling of graphs and studies upper and lower bounds on the number $\lambda_{2,1}$. The number $\lambda_{2,1}$ denotes the minimum spread of a $L(2,1)$ -labellings of a given graph. The thesis summarizes known results on the number $\lambda_{2,1}$ of basic graphs classes, planar graphs, Cartesian products of graphs, circular graphs, Kneser graphs, subdivisions of graphs, generalized Petersen graphs, prisms and regular grids. In Paragraph 3.5.1, some new upper bounds or exact values on $\lambda_{2,1}$ for some circular graphs are shown. These bounds improve a previously known general bound. In Paragraph 3.9, we also prove some upper bounds for Cartesian products of infinite regular grids and the infinite path.

Obsah

1	Úvod	1
2	Definice pojmů	1
3	L(2,1)-ohodnocení grafů	2
3.1	Základní poznatky	2
3.2	Základní třídy grafů	3
3.3	Rovinné grafy	8
3.3.1	Vnějškově rovinné grafy	10
3.4	Produkty grafů	10
3.4.1	Kartézské produkty grafů	10
3.4.2	Korony	12
3.5	Cirkulační grafy	13
3.5.1	Vlastní výsledky	14
3.6	Kneserovy grafy	21
3.7	Podrozdělení grafu	22
3.8	Zobecněné Petersenovy grafy a prisky	24
3.9	Ohodnocení regulárních sítí	25
4	Závěr	31

1 Úvod

Pojmem $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů míníme přiřazení nezáporných hodnot vrcholům grafu G tak, aby se hodnoty sousedních vrcholů lišily alespoň o 2 a hodnoty na vrcholech ve vzdálenosti 2 lišily alespoň o jedna. Obecněji řečeno, $L(d_1, \dots, d_k)$ -ohodnocení je přiřazení nezáporných hodnot vrcholům tak, že hodnoty na vrcholech ve vzdálenosti i , $i = 1, \dots, k$, se liší minimálně o d_i . Maximální hodnota použitá v ohodnocení grafu je nazývána „rozpětí“ a cílem je minimalizovat takovéto rozpětí. Pro případ $L(2, 1)$ -ohodnocení je minimální rozpětí značeno číslem $\lambda_{2,1}(G)$.

Jednou z úloh, kterou lze řešit pomocí $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů, je například problém přiřazování frekvencí k rádiovým vysílačům na různých místech tak, aniž by se způsobovalo vzájemné rušení. Tento problém byl nejprve formulován jako problém barvení grafu (Hale, [16]). F. S. Roberts poté v soukromém dopise J. R. Griggsovi navrhl obměnu na problém přiřazování kmitočtů, ve kterém „blízké“ vysílače musí přijímat rozdílné kmitočty a „velmi blízké“ vysílače musí přijímat kmitočty, které jsou od sebe vzdálené alespoň dva kmitočty. Když tento problém přeložíme do teorie grafů, tak vysílače jsou zastoupeny vrcholy grafu; vrcholy jsou si „velmi blízké“, když spolu sousedí a „blízké“, když je jejich vzdálenost v grafu 2 (Griggs, [15]).

2 Definice pojmů

V této podkapitole uvedeme některé pojmy a značení z teorie grafů, které budeme v práci používat. Další značení je převzato především z [10], kde lze nalézt i základní definice z oblasti teorie grafů.

V této práci se zabýváme tzv. prostými grafy, tedy grafy bez smyček a násobných hran. V grafu G používáme značení $V(G)$ pro množinu vrcholů a $H(G)$ pro množinu hran. Hranu mezi vrcholy x a y zapisujeme xy . Pro maximální stupeň grafu G užíváme symbol $\Delta(G)$. Délkou cesty rozumíme počet hran cesty. Vzdálenost dvou vrcholů x, y v grafu G značíme $\text{dist}_G(x, y)$ a rozumíme jí délku nejkratší cesty mezi vrcholy x a y . Průměr grafu je maximální vzdálenost dvou vrcholů v grafu G . Délkou kružnice rozumíme počet hran kružnice. Obvod grafu $g(G)$ je délka nejkratší kružnice v grafu G . Chromatické číslo $\chi(G)$ grafu G je minimální počet barev, kterých je potřeba k obarvení grafu tak, aby každé dva vrcholy spojené hranou měly různé barvy. Podgraf grafu G indukovaný množinou S , $S \subseteq V(G)$, značíme $G[S]$. Perfektním párováním rozumíme 1-regulární faktor grafu G .

3 L(2,1)-ohodnocení grafů

Uvažujme $L(2,1)$ -ohodnocení grafu jako funkci f , která přiřazuje množině vrcholů $V(G)$ hodnoty z $\mathbb{N} \cup \{0\}$ tak, že pro každou dvojici sousedních vrcholů $x, y \in V(G)$ platí $|f(x) - f(y)| \geq 2$, a pro každou dvojici vrcholů x, y ve vzdálenosti 2 platí $|f(x) - f(y)| \geq 1$. Hlavním úkolem je nalézt číslo $\lambda_{2,1}(G)$, tedy nejmenší číslo m takové, že $L(2,1)$ -ohodnocující funkce f nabývá maximální hodnoty m , tj. $m = \max\{f(v) : v \in V(G)\}$. Ohodnocení $L(2,1)$ je speciálním případem $L(p, q)$ -ohodnocení, kde $p = 2$ a $q = 1$.

3.1 Základní poznatky

Nejdříve uvedeme omezení hledaného čísla $\lambda_{2,1}$ zdola. Pro všechny grafy G platí, že $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta(G) + 1$. Neboť označíme-li vrchol s maximálním stupněm $\Delta(G)$ jako x a ohodnotíme-li ho 0, potom žádný z $\Delta(G)$ jeho sousedních vrcholů nemůže nabývat hodnoty 1, proto sousedním vrcholům vrcholu x musí být přiřazeny navzájem různé hodnoty 2, 3, ..., $\Delta(G) + 1$. Pro graf, který obsahuje více vrcholů maximálního stupně a vrcholy s maximálním stupněm jsou sousední platí následující věta.

Věta 1 [15]. *Pokud graf G obsahuje 3 vrcholy maximálního stupně $\Delta \geq 2$ a jeden z nich je sousední se dvěma ostatními, potom $\lambda_{2,1}(G) \geq \Delta + 2$.*

Nyní budeme shora omezovat číslo $\lambda_{2,1}$, pro některé konkrétní třídy grafů přímo určíme jeho hodnotu. Pro každý graf G a jeho podgraf H platí následující tvrzení.

Lemma 2 [20]. *Pro každý podgraf H grafu G platí, že $\lambda_{2,1}(H) \leq \lambda_{2,1}(G)$.*

Griggs a Yeh dokázali následující hranici pro libovolný graf G .

Věta 3 [15]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ . Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + 2\Delta$.*

Těž se domnívali, že platí následující hypotéza, která je zatím prokázána např. pro grafy s průměrem 2, chordální grafy, tj. pro grafy neobsahující kružnici velikosti alespoň 4 jako indukovaný podgraf, Kneserovy grafy a pro zobecněné Petersenovy grafy.

Hypotéza 4 [15]. *Pro libovolný graf G s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$, je $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$.*

Jonas [22] zlepšil zmíněnou hranici dokázanou Griggsem a Yehem (viz věta 3) o 4, tj. dokázal, že $\lambda \leq \Delta^2 + 2\Delta - 4$ pro grafy s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$. V roce 1996 Chang and Kuo [20] snížili hranici na $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta$ pro všechny grafy

s maximálním stupněm Δ . V roce 2003 Král a Škrekovski [25] dokázali opět snížit horní hranici na $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 1$ pro všechny grafy s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$. A zatím nejlepší známá hranice je dokázána Goncalvesem v [14].

Věta 5 [14]. *Pro všechny grafy G s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$ platí $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2 + \Delta - 2$.*

3.2 Základní třídy grafů

Základními třídami grafů rozumíme například cesty, kružnice, stromy, hvězdy, úplné grafy, úplné k -partitní grafy, kola, hyperkrychle nebo grafy s průměrem 2. Problematikou $L(2, 1)$ -ohodnocení základních tříd grafů se zabývali především Griggs a Yeh v článku [15].

Nejjednodušším takovým typem grafů jsou cesty a kružnice. Pro cesty P_n , kde n je počet vrcholů a kružnice C_n , kde n je délka kružnice, dokázali Griggs a Yeh [15] následující hodnoty čísla $\lambda_{2,1}$.

Tvrzení 6 [15]. *Nechť P_n je cesta na n vrcholech. Potom $\lambda_{2,1}(P_1) = 0$, $\lambda_{2,1}(P_2) = 2$, $\lambda_{2,1}(P_3) = \lambda_{2,1}(P_4) = 3$, a pro $n \geq 5$ je $\lambda_{2,1}(P_n) = 4$.*

Tvrzení 7 [15]. *Nechť C_n je kružnice délky $n \geq 3$. Potom $\lambda_{2,1}(C_n) = 4$.*

Souvislé grafy bez kružnic se nazývají stromy.

Věta 8 [15]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 1$. Potom $\lambda_{2,1}(T) = \Delta + 1$ nebo $\lambda_{2,1}(T) = \Delta + 2$.*

Sstromy dělíme na dva typy podle hodnoty $\lambda_{2,1}(T)$. Na typ 1, kdy $\lambda_{2,1}(T) = \Delta + 1$ a na typ 2, kdy $\lambda_{2,1}(T) = \Delta + 2$. Wang [39] našel třídy stromů, které jsou typu 1 (viz následující věta a její důsledek).

Věta 9 [39]. *Pokud T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$ takový, že pro každou dvojici vrcholů s maximálním stupněm platí, že jejich vzdálenost není 1, 2 ani 4, potom T je typu 1.*

Důsledek 10 [39]. *Nechť T je strom s maximálním stupněm $\Delta \geq 3$. Pokud:*

- a) *strom T obsahuje pouze jeden vrchol s maximálním stupněm,*
- b) *nebo je-li vzdálenost každých dvou vrcholů s maximálním stupněm v T větší nebo rovna 5,*

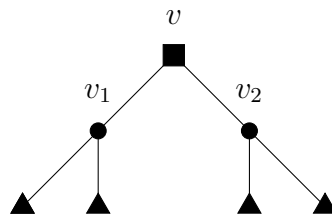
- c) nebo je-li vzdálenost $\text{dist}_T(x, y) \equiv 0 \pmod{3}$ pro každé dva vrcholy x, y s maximálním stupněm v T ,

potom strom T je typu 1.

V následující větě Wood [42] uvedl kritéria pro stromy s nejvýše 20 vrcholy a maximálním stupněm Δ na zařazení do skupiny typu 2. Poznamenejme, že v obrázcích 1 – 7 je použito značení vrcholů: $\blacksquare \dots$ vrchol stupně $\Delta - 2$, $\bullet \dots$ vrchol stupně $< \Delta$ a $\blacktriangle \dots$ vrchol s maximálním stupněm.

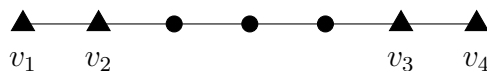
Věta 11 [42]. Pro strom T na $n \leq 20$ vrcholech s maximálním stupněm Δ platí, že T je typu 2, pokud T obsahuje libovolnou z uvedených struktur:

- 1) Strom T obsahuje cestu P_3 jako indukovaný podgraf na vrcholech s maximálním stupněm.
- 2) Strom T obsahuje jeden vrchol (ne maximálního stupně) v takový, že má za sousedy nejméně 3 vrcholy s maximálním stupněm.
- 3) Strom T obsahuje jeden vrchol maximálního stupně Δ , který má $\Delta - 1$ vrcholů s maximálním stupněm Δ ve vzdálenosti právě 2.
- 4) Strom T obsahuje jeden vrchol v stupně $\Delta - 2$, který má všechny sousední vrcholy $v_1, v_2, \dots, v_{\Delta-2}$ stupně 3 a každý vrchol $v_i, 1 \leq i \leq \Delta - 2$, je sousední s 2 různými vrcholy maximálního stupně Δ (viz následující obrázek 1).



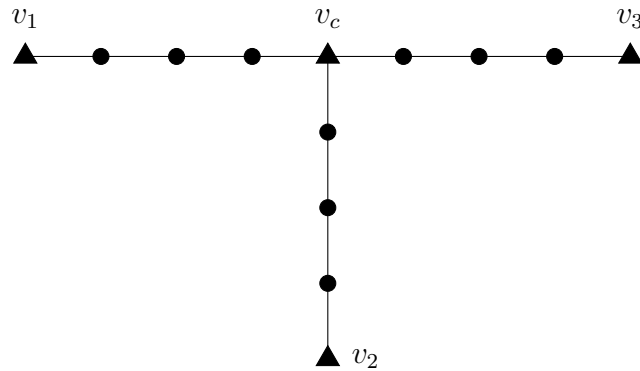
Obrázek 1: Graf znázorňující strukturu 4).

- 5) Strom T s $\Delta \leq 3$ obsahuje 4 vrcholy s maximálním stupněm v_1, v_2, v_3, v_4 tak, že $v_1v_2, v_3v_4 \in H(T)$ a $\text{dist}_T(v_2, v_3) = 4$ a $\text{dist}_T(v_1, v_4) = 6$ (viz obrázek 2).



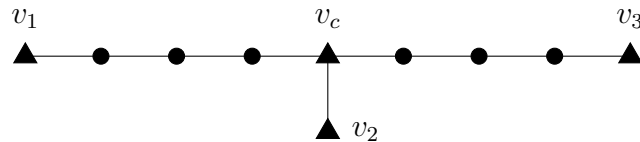
Obrázek 2: Graf znázorňující strukturu 5).

- 6) Strom T s $\Delta = 3$ obsahuje jeden vrchol s maximálním stupněm v_c takový, že má tři odlišné vrcholy s maximálním stupněm ve vzdálenosti 4. Jinak řečeno, v_c je koncovým vrcholem 3 cest (takových, že pouze koncové vrcholy mají maximální stupeň) délky 4. Popsaná struktura je znázorněna následujícím obrázkem 3.



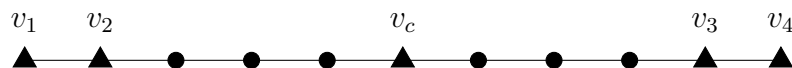
Obrázek 3: Graf znázorňující strukturu 6).

- 7) Strom T s $\Delta = 3$ obsahuje jeden vrchol v_c s maximálním stupněm takový, že má dva odlišné vrcholy s maximálním stupněm v_1, v_3 ve vzdálenosti 4 a jeden vrchol s maximálním stupněm v_2 ve vzdálenosti 1 tak, že v_2 nepatří do cesty mezi v_c a v_1 a ani do cesty mezi v_c a v_3 (viz obrázek 4).



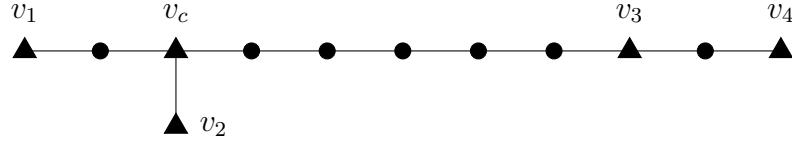
Obrázek 4: Graf znázorňující strukturu 7).

- 8) Strom T s $\Delta = 3$ obsahuje jeden vrchol s maximálním stupněm v_c takový, že má dva odlišné vrcholy s maximálním stupněm v_2, v_3 ve vzdálenosti 4, kde každý z vrcholů v_2, v_3 má za souseda jeden odlišný vrchol s maximálním stupněm v_1, v_4 tak, že vzdálenost $\text{dist}_T(v_c, v_1) = \text{dist}_T(v_c, v_4) = 5$, viz obrázek 5.



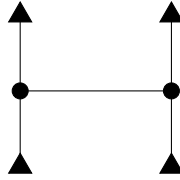
Obrázek 5: Graf znázorňující strukturu 8).

- 9) Strom T s $\Delta = 3$ obsahuje vrchol s maximálním stupněm v_c a vrcholy v_1, \dots, v_4 s maximálním stupněm takové, že $\text{dist}_T(v_c, v_2) = 1$, $\text{dist}_T(v_c, v_1) = 2$, $\text{dist}_T(v_c, v_3) = 5$ a $\text{dist}_T(v_c, v_4) = 7$, viz obrázek 6.



Obrázek 6: Graf znázorňující strukturu 9).

- 10) Strom T s $\Delta = 4$ obsahuje 2 cesty délky 2 s koncovými vrcholy maximálního stupně, jejichž vnitřní vrcholy mají stupeň 3 a jsou navzájem spojené hranou. Následující obrázek 7 ukazuje právě zmíněnou strukturu.



Obrázek 7: Graf znázorňující strukturu 10).

Speciálním případem stromů jsou hvězdy $K_{1,n}$, kde je $\Delta(K_{1,n}) = n$. Hvězdy dosahují nejmenší možné horní hranice pro $\lambda_{2,1}$, tj. $\lambda_{2,1}(K_{1,n}) = n + 1 = \Delta(K_{1,n}) + 1$ (viz [15]). Označme vrchol s maximálním stupněm jako vrchol v a přiřadme mu hodnotu 0. Potom každý ze zbylých vrcholů je sousedem vrcholu v a tudíž nemůžeme v grafu $K_{1,n}$ použít hodnotu 1. Sousední vrcholy vrcholu v ohodnotíme různými hodnotami $2, 3, 4, \dots, \Delta + 1$, neboť jsou navzájem ve vzdálenosti 2, tedy nemohou mít stejné hodnoty.

Pro úplný graf K_n na n vrcholech Yeh [43] dokázal, že platí $\lambda_{2,1}(K_n) = 2(n - 1)$. V úplném grafu jsou každé dva vrcholy $x, y \in V(G)$ spojeny hranou, tj. jejich vzdálenost je 1, proto se jejich hodnoty musí lišit minimálně o 2. Pro každý vrchol platí, že má $n - 1$ sousedů (každý soused blokuje 2 hodnoty). Z toho plyne, že $\lambda_{2,1}(K_n) \geq 2(n - 1)$. Ohodnotíme-li vrcholy např. $0, 2, 4, \dots, 2(n - 1)$, dostaneme $L(2, 1)$ -ohodnocení grafu, proto $\lambda_{2,1}(K_n) = 2(n - 1)$.

Nyní uvažujme úplný k -partitní graf. Graf G nazveme úplným k -partitním grafem, jestliže lze množinu vrcholů $V(G)$ rozdělit na k disjunktních podmnožin takových, že $V(G) = X_1 \cup X_2 \cup X_3 \cup \dots \cup X_k$ a žádné dva vrcholy v X_i nejsou spojeny hranou a navíc každý vrchol z X_i sousedí v G se všemi vrcholy z $\bigcup X_j$, $j \neq i$.

Značíme jej $K_{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k}$, kde $n_i = |X_i|$. Pro tyto grafy Griggs a Yeh [15] určili následující hodnotu $\lambda_{2,1}$.

Tvrzení 12 [15]. *Nechť K_{n_1, n_2, \dots, n_k} je úplný k -partitní graf a nechť $n = \sum_{i=1}^k n_i$, kde $n_i \in \mathbb{N}$. Potom $\lambda_{2,1}(K_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = n + k - 2$.*

Nyní se zaměříme na grafy zvané kola. Spojíme-li všechny vrcholy kružnice s jedním dalším vrcholem, dostaneme graf W_n nazývaný *kolo*, kde n je počet vrcholů kružnice, tj. $|V(W_n)| = n + 1$. Pro výše zmíněnou třídu grafů Yeh [43] dokázal, že platí $\lambda_{2,1}(W_3) = \lambda_{2,1}(W_4) = 6$ a $\lambda_{2,1}(W_n) = n + 1$ pro $n \geq 5$.

Dalším základním typem grafů jsou n -krychle (neboli n -rozměrné hyperkrychle). Hyperkrychlí Q_n rozumíme graf, jehož vrcholy jsou popsány všemi vektory o n složkách, které obsahují hodnoty 0 a 1. Dva vrcholy Q_n jsou spojeny hranou, liší-li se jejich vektory právě v jedné složce. Pro malá n určili hodnoty $\lambda_{2,1}$ u n -krychlí Griggs a Yeh [15]. Dokázali, že platí $\lambda_{2,1}(Q_1) = 2$, $\lambda_{2,1}(Q_2) = 4$, $\lambda_{2,1}(Q_3) = 6$, $\lambda_{2,1}(Q_4) = 7$, $\lambda_{2,1}(Q_5) = 8$.

Pro $n \geq 5$ určil spodní hranici $\lambda_{2,1}(Q_n)$ Jonas v [22]. Na něj navázali opět Griggs a Yeh (viz [15]), kteří se domnívali, že pro $n \geq 5$ $\lambda_{2,1}(Q_n) = n + 3$, ale shora se jim povedlo omezit číslo $\lambda_{2,1}$ jen na $2n + 1$.

Věta 13 [15, 22]. *Mějme n -krychli Q_n kde $n \in \mathbb{N}$. Potom pro všechna $n \geq 5$ platí, že $n + 3 \leq \lambda_{2,1}(Q_n) \leq 2n + 1$.*

Whittlesey zlepšil horní hranici ještě o jedna.

Věta 14 [41]. *Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí, že $\lambda(Q_n) \leq 2n$.*

Následující věta dává do souvislosti chromatické číslo grafu χ s námi hledaným číslem $\lambda_{2,1}$.

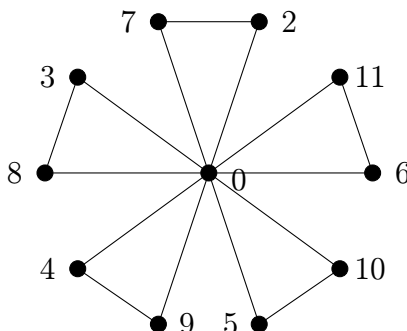
Věta 15 [15]. *Nechť G je graf na n vrcholech s chromatickým číslem $\chi(G)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq n + \chi(G) - 2$.*

Nyní uvedeme výsledek pro grafy, které mají průměr 2. Průměrem grafu rozumíme maximální vzdálenost dvou vrcholů v grafu G a značíme ho $\text{diam}(G)$. Griggs a Yeh [15] dokázali, že pro grafy s průměrem 2 a maximálním stupněm Δ platí $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$, tj. grafy s průměrem 2 splňují Griggsovu a Yehovu hypotézu 4.

Další speciální třídou grafů jsou grafy $C_n^{(k)}$, skládající se z k kružnic délky n , které (všechny) mají jeden společný vrchol. Pro $k = 2$ Vaida a Samir [38] dokázali následující větu.

Věta 16 [38]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $n \geq 3$. Potom platí $\lambda_{2,1}(C_n^{(2)}) = 5$.*

V článku [38] bylo rovněž dokázáno, že platí $\lambda_{2,1}(C_n^{(k)}) = 2k + 1$. Např. pro graf přátelství (tzv. Friendship graph, viz obrázek 8), kde $F_k = C_3^{(k)}$, platí $\lambda_{2,1}(F_k) = 2k + 1$.



Obrázek 8: Graf přátelství F_k , kde $k = 5$ a $\lambda_{2,1}(F_k) = 11$.

3.3 Rovinné grafy

Řekneme, že graf G lze uložit do roviny, jestliže existuje nějaké jeho rovinné nakreslení, tj. jestliže jej lze znázornit pomocí vrcholů a hran do roviny tak, že žádné dvě hrany nemají společný vnitřní bod. Řekneme, že G je rovinný, pokud ho lze uložit do roviny. Jestliže je graf G uložen do roviny, potom oblasti (části roviny), které jsou vymezeny hranami, se nazývají stěny grafu G . Poznamenejme že graf, kde každá stěna je tvořena trojúhelníkem, je triangulace.

Bella a spol. v [5] zkoumali rovinné grafy a získali následující výsledky pro grafy s maximálním stupněm $\Delta = 4, 5$. Z určených hranic vyplývá, že je zde opět splněna Griggsova a Yehova hypotéza 4.

Věta 17 [5]. *Pro každý rovinný graf G s maximálním stupněm $\Delta = 4$ je $\lambda_{2,1}(G) \leq 16$.*

Věta 18 [5]. *Pro každý rovinný graf G s maximálním stupněm $\Delta = 5$ je $\lambda_{2,1}(G) \leq 25$.*

Shao a spol. [36] dokázali omezit číslo $\lambda_{2,1}(G)$ pomocí hodnot daných násobky maximálního stupně rovinných grafů.

Věta 19 [36]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm $\Delta(G)$, potom*

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \begin{cases} 10\Delta, & \text{pokud } G \text{ je rovinný,} \\ 8\Delta, & \text{pokud } G \text{ je rovinný a žádné tři hrany netvoří trojúhelník.} \\ 12\Delta, & \text{pokud } G \text{ je toroidní (vrcholy jsou na torusu a hrany se nekříží).} \end{cases}$$

Jonas [22] pro rovinné grafy s maximálním stupněm $\Delta \geq 5$ zlepšil zmíněnou hranici rovinných grafů z věty 19. Dokázal, že $\lambda_{2,1}(G) \leq 8\Delta - 13$. Později Bodlaender a spol. [6] opět zlepšili horní hranici $\lambda_{2,1}(G)$ na $3\Delta + 28$ a v roce 2003 van den Heuvel and McGuinness [17] snížili horní mez pro $\lambda_{2,1}$ rovinných grafů na $2\Delta + 34$. Doposud nejlepší známý výsledek pochází od autorů Nolloy a Salavatipour, viz následující věta.

Věta 20 [31]. *Pro každý rovinný graf G platí, že $\lambda_{2,1}(G) \leq \frac{5}{3}\Delta(G) + 95$.*

Nyní uvedeme hranice pro námi hledané číslo $\lambda_{2,1}$ v případě, že známe obvod grafu G , tj. číslo $g(G)$. Shao a spol. dokázali následující větu, kde je číslo $\lambda_{2,1}(G)$ omezené velikostí obvodu $g(G)$ a maximálním stupněm $\Delta(G)$. A též omezili číslo $\lambda_{2,1}$ pouze pomocí maximálního stupně za předpokladu, že $g(G) \geq 4$ nebo $g(G) \geq 6$.

Věta 21 [36]. *Nechť G je rovinný graf s obvodem g a maximálním stupněm Δ . Potom platí, že $\lambda_{2,1}(G) \leq 2(\lceil \frac{2g}{g-2} \rceil - 1)\Delta$.*

Důsledek 22 [36]. *Pokud G je graf s obvodem g a maximálním stupněm Δ , potom*

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \begin{cases} 6\Delta, & \text{je-li } g \geq 4, \\ 4\Delta, & \text{je-li } g \geq 6. \end{cases}$$

Wangovi a Lihovi (viz [40]) se povedlo snížit horní mez $\lambda_{2,1}(G)$ z předchozího důsledku pro některé hodnoty obvodu g . Lze si povšimnout, že se snižujícím požadavkem velikosti g roste hranice omezující $\lambda_{2,1}(G)$.

Věta 23 [40]. *Nechť G je rovinný graf s maximálním stupněm Δ a obvodem g . Potom*

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \begin{cases} \Delta + 8, & \text{pokud } g \geq 7, \\ \Delta + 15, & \text{pokud } g \geq 6, \\ \Delta + 21, & \text{pokud } g \geq 5. \end{cases}$$

Nyní uvedeme horní hranici čísla $\lambda_{2,1}$ pro triangulaci rovinných grafů, tj. rovinných grafů, ve kterých je každá stěna grafu tvořena trojúhelníkem.

Věta 24 [6]. *Pro každou triangulaci rovinných grafů G platí $\lambda_{2,1}(G) \leq 3\Delta(G) + 22$.*

3.3.1 Vnějškově rovinné grafy

Vnějškově rovinné grafy jsou speciální podtřídou rovinných grafů. Jsou to grafy, které mají rovinné nakreslení takové, že všechny vrcholy leží na vnější stěně. Jonas určil horní hranici $\lambda_{2,1}$ vnějškově rovinných grafů na $2\Delta + 2$ [22]. Zlepšení dokázali Bodlaender a spol. v následující větě.

Věta 25 [7]. *Nechť G je vnějškově rovinný graf. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G) + 8$.*

Hranici následně zlepšili Calamoneri a Petreschi.

Věta 26 [9]. *Nechť G je vnějškově rovinný graf s maximálním stupněm Δ . Pokud $\Delta \geq 8$, potom $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta + 2$, jinak $\lambda_{2,1}(G) \leq 10$.*

Pro triangulaci vnějškově rovinných grafů dosáhneme následující horní hranice čísla $\lambda_{2,1}$.

Věta 27 [7]. *Nechť G je triangulace vnějškově rovinného grafu. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta(G) + 6$.*

Hranici opět následně zlepšili Calamoneri a Petreschi.

Věta 28 [9]. *Nechť G je triangulace vnějškově rovinného grafu s maximálním stupněm Δ . Pokud $\Delta \geq 8$, potom $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta + 1$, jinak $\lambda_{2,1}(G) \leq 9$.*

Všimněme si, že pro triangulace vnějškově rovinných grafů s $\Delta \geq 8$ platí nejnižší možná hranice pro hodnotu $\lambda_{2,1}$, tedy $\lambda_{2,1}(G) = \Delta + 1$.

3.4 Produkty grafů

3.4.1 Kartézské produkty grafů

Další zajímavou skupinou grafů jsou Kartézské produkty (resp. součiny) grafů. Mějme grafy G_1 a G_2 , potom Kartézským produktem těchto dvou grafů, značeným $G_1 \square G_2$, nazveme graf s množinou vrcholů $V(G_1 \square G_2) = \{(u, v) : u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$ a množinou hran $H(G_1 \square G_2) = \{(u, x)(v, y) : (u = v \wedge xy \in H(G_2)) \text{ nebo } (uv \in H(G_1) \wedge x = y)\}$.

Nejjednoduššími grafy této skupiny jsou produkty dvou cest, kterými se zabývali Whittlesey a spol..

Věta 29 [41]. *Nechť $P_m \square P_n$ je Kartézský produkt dvou cest a $m, n \geq 2$ značí přirozená čísla. Potom platí*

$$\lambda_{2,1}(P_m \square P_n) = \begin{cases} 5, & \text{pokud } n = 2 \text{ a } m \geq 3, \\ 6, & \text{pokud } n, m \geq 3. \end{cases}$$

Dále uvažujme Kartézský produkt n cest. Whittlesey a spol. [41] určili následující hodnoty $\lambda_{2,1}$ těchto grafů.

Věta 30 [41]. *Nechť $n \geq 2, m_i \geq 3$, pro všechna $1 \leq i \leq n$, kde $i, m_i, n \in \mathbb{N}$, a necht' existuje index j takový, že $m_j \geq 5$ nebo existuje index k různý od j takový, že $m_j = m_k = 4$. Potom $\lambda_{2,1}(P_{m_1} \square P_{m_2} \square \dots \square P_{m_n}) = 2n + 2$.*

Věta 31 [41]. *Nechť $n \geq 2, m_i \geq 3, m_n = 2$, pro všechna $1 \leq i \leq n - 1$, kde $i, m_i, n \in \mathbb{N}$, a necht' existuje j takové, že $m_j \geq 4$. Potom $\lambda_{2,1}(P_{m_1} \square P_{m_2} \square \dots \square P_{m_n}) = 2n + 1$.*

Kartézskými produkty $C_m \square P_n$ se zabývali Klavžar a Vesel ([24]). Dokázali určit hodnoty $\lambda_{2,1}$ pro všechny hodnoty $m \geq 3, n \geq 2$.

Věta 32 [24]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \geq 3$. Potom platí:*

(a)

$$\lambda_{2,1}(C_m \square P_2) = \begin{cases} 5, & \text{pokud } m \equiv 0 \pmod{3}, \\ 6, & \text{v jiném případě.} \end{cases}$$

(b)

$$\lambda_{2,1}(C_m \square P_3) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } m = 4 \text{ nebo } 5, \\ 6, & \text{v jiném případě.} \end{cases}$$

(c) Pro $n \geq 4$,

$$\lambda_{2,1}(C_m \square P_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } m \equiv 0 \pmod{7}, \\ 7, & \text{v jiném případě.} \end{cases}$$

Kuo a spol. [26] omezili hodnotu $\lambda_{2,1}$ Kartézského produktu dvou kružnic spodní hranicí a určili některé hodnoty m, n , pro které je $\lambda_{2,1}$ rovno této dolní hranici. Poznamenejme, že pro $m \geq 3$ a $n \geq 3$ platí, že $\lambda_{2,1}(C_m \square C_n) \geq 6$ podle věty 1.

Věta 33 [26]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, $n \geq 3$. Potom platí $\lambda_{2,1}(C_m \square C_n) \geq 6$. Rovnost nastává, právě když $m, n \equiv 0 \pmod{7}$.*

V článku [37] Schwarz a Troxell určili jednak horní mez, tj. $\lambda_{2,1}(C_m \square C_n) \leq 8$, a zároveň přesnou hodnotu hledaného čísla $\lambda_{2,1}(C_m \square C_n)$ v závislosti na m, n .

Věta 34 [37]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, $n \geq 3$. Potom platí:*

$$\lambda_{2,1}(C_m \square C_n) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } m, n \equiv 0 \pmod{7}, \\ 8, & \text{pokud } m, n \in A, \\ 7, & \text{v jiném případě,} \end{cases}$$

kde $A = \{\{3, i\} : i \geq 3 \text{ liché, nebo } i = 4, 10\} \cup \{\{5, i\} : i = 5, 6, 9, 10, 13, 17\} \cup \{\{6, 7\}, \{6, 11\}, \{7, 9\}, \{9, 10\}\}$.

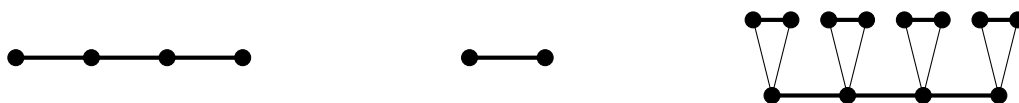
Georges a spol. v článku [13] určili hodnotu $\lambda_{2,1}$ Kartézského produktu dvou úplných grafů K_m a K_n .

Věta 35 [13]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$ a $m \geq 2, n \geq 2$. Potom*

$$\lambda_{2,1}(K_m \square K_n) = \begin{cases} 4, & \text{pokud } m=n=2, \\ mn - 1, & \text{v jiném případě.} \end{cases}$$

3.4.2 Korony

Nyní se budeme zabývat číslem $\lambda_{2,1}$ pro korony některých základních grafů. Nechť $V(G_1) = \{u_0, u_1, \dots, u_{n_1-1}\}$ a $V(G_2) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n_2-1}\}$. Potom korunou grafů G_1 a G_2 , značenou $G_1 \circ G_2$, je graf s množinou vrcholů $V(G_1 \circ G_2) = V(G_1) \cup \{v_{i,j} : 0 \leq i \leq n_1 - 1, 0 \leq j \leq n_2 - 1\}$ a s množinou hran $H(G_1 \circ G_2) = H(G_1) \cup \{v_{i,j_1} v_{i,j_2} : v_{j_1}, v_{j_2} \in H(G_2)\}_{i=0}^{n_1-1} \cup \{u_i v_{i,j} : 0 \leq j \leq n_2 - 1\}_{i=0}^{n_1-1}$ (definice je převzata z článku [32]). Příklad korony dvou cest $P_4 \circ P_2$ je na obrázek 9.



Obrázek 9: P_4 (vlevo), P_2 (uprostřed), korona $P_4 \circ P_2$ (vpravo)

Murugan v [32] se zabýval číslem $\lambda_{2,1}$ na korunách základních tříd grafů a pro korony všech dále uvedených grafů platí $\lambda_{2,1}(G) = \Delta + 2$.

Věta 36 [32]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom pro koronu $P_m \circ P_n$, $m, n \geq 5$, platí $\lambda(P_m \circ P_n) = n + 4 = \Delta + 2$.*

Věta 37 [32]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom pro koronu $P_m \circ C_n$, $m \geq 5, n \geq 6$, platí $\lambda(P_m \circ C_n) = n + 4 = \Delta + 2$.*

Věta 38 [32]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom pro koronu $P_m \circ K_{1,n}$, $m \geq 5, n \geq 3$, platí $\lambda(P_m \circ K_{1,n}) = n + 5 = \Delta + 2$.*

Věta 39 [32]. *Nechť $m, n \in \mathbb{N}$. Potom pro koronu $P_m \circ W_n$, $m \geq 5, n \geq 6$, platí $\lambda(P_m \circ W_n) = n + 4 = \Delta + 2$.*

3.5 Cirkulační grafy

Cirkulační graf $C(n, m)$ je graf s množinou vrcholů $\{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ a množinou hran $\{v_i v_{i+1}, v_i v_{i+m}, \text{ kde } i = 0, 1, \dots, n-1\}$, kde m, n jsou kladná celá čísla splňující $2 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ a indexy jsou modulo n . Pokud $n = 2m$, potom $C(2m, m)$ je 3-regulární graf a dle věty 1 je $\lambda_{2,1}(C(n, m)) \geq 5$. V ostatních případech jsou $C(n, m)$ 4-regulární, tedy $\lambda_{2,1}(C(n, m)) \geq 6$ podle věty 1. Poznamenejme, že pro $m > n/2$ by $C(n, m) \cong C(n, n-m)$. Definice je převzata z článku [29].

Nejprve se budeme zabývat horní hranicí pro cirkulační grafy $C(2m, m)$. Pokud $m = 2$, potom $C(4, 2)$ je úplný graf K_4 a víme, že pro úplné grafy platí $\lambda_{2,1}(K_n) = 2(n-1)$, proto $\lambda_{2,1}(C(4, 2)) = 6$ (viz [29]). Pokud $m = 3$, potom $C(6, 3)$ je úplný bipartitní graf $K_{3,3}$. Pro úplné bipartitní grafy na n vrcholech platí $\lambda_{2,1}(K_{n_1, n_2}) = n + 2 - 2$, proto $\lambda(C(6, 3)) = 6$ (viz [29]). Je-li $m = 4$, potom $C(8, 4)$ je graf, kde každé dva vrcholy jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše 2, tj. víme, že $\lambda(C(8, 4)) \leq 3^2$ (platí pro grafy s průměrem 2 - viz [15]). Rovněž víme, že žádné dva vrcholy nemohou být ohodnoceny stejnou hodnotou, proto $\lambda(C(8, 4)) \geq 7$ (viz [29]). Definujme nyní ohodnocení (viz [29]) $C(8, 4)$ následující funkcí $f: f(v_i) \equiv 3i \pmod{8}$ pro $i = 0, 1, 2, \dots, 7$. Potom f je $L(2, 1)$ -ohodnocující funkce grafu $C(8, 4)$, což znamená, že $\lambda_{2,1}(C(8, 4)) = 7$. Pro $m \geq 5$ autoři Ma a spol. dokázali následující výsledky.

Věta 40 [29]. *Nechť $m \geq 5$ je přirozené číslo. Potom $\lambda(C(2m, m)) = 6$.*

Věta 41 [29]. *Nechť $k \geq 3$ a $m \geq 3$ jsou přirozená čísla. Potom $\lambda_{2,1}(C(km, m)) \leq 9$.*

Věta 42 [29]. *Pro cirkulační grafy $s m \geq 3$, $k \geq 2$ a $1 \leq s \leq m-1$, kde $m, k, s \in \mathbb{N}$, platí $\lambda_{2,1}(C(km+s, m)) \leq 15$.*

Nyní se budeme zabývat cirkulačními grafy $C(n, 2)$. Je-li $n = 5$, potom $C(5, 2)$ je úplný graf K_5 a $\lambda(C(5, 2)) = 8$. Nechť $n = 6$. V článku [29] bylo uvedeno, že uplatněním věty 40 získáme $\lambda_{2,1}(C(4, 2)) = \lambda_{2,1}(C(6, 2)) = 6$. Ale toto tvrzení není správné, jelikož při ohodnocování grafu, který má 6 vrcholů (každý vrchol má 4 sousední vrcholy) bychom museli použít 3 po sobě jdoucí hodnoty a to nelze. Proto $\lambda_{2,1}(C(6, 2)) > 6$. Ohodnoťme vrcholy $\{v_0, \dots, v_5\}$ popořadě $\{0, 7, 4, 1, 6, 3\}$, dostaneme $L(2, 1)$ -ohodnocení grafu. Proto $\lambda_{2,1}(C(6, 2)) = 7$. Nyní se podívejme na případ $s n \geq 7$.

Věta 43 [29]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $n \geq 7$. Potom platí*

$$\lambda_{2,1}(C(n, 2)) = \begin{cases} 6, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{7}, \\ 7, & \text{pokud } n \not\equiv 0 \pmod{7} \text{ a } n \neq 9, 10, 11 \text{ a } 17, \\ 8, & \text{pokud } n = 9, 10, 11, 17. \end{cases}$$

Nyní se podíváme na číslo $\lambda_{2,1}$ u některých speciálních cirkulačních grafů. Ma a spol. dokázali výsledky uvedené v následujících větách.

Věta 44 [29]. *Pokud $n \equiv 0 \pmod{7}$, potom $\lambda_{2,1}(C(n, i)) = 6$, pro $i = 3, 4, 5$.*

Věta 45 [29]. *Nechť $m \geq 3$ a $k \geq 3$ jsou přirozená čísla. Potom platí:*

$$\lambda_{2,1}(C(n, m)) = \begin{cases} 7, & \text{pokud } n = 12k, m = 4, \\ 7, & \text{pokud } n = 24k, m = 6, \\ 7, & \text{kde } n = 3km \text{ a } m \equiv 4 \pmod{6}, m \neq 0 \pmod{7}. \end{cases}$$

Již bylo zmíněno, že grafy $C(2m, m)$ jsou 3-regulární, tj. $\Delta = 3$. Ukázali jsme, že pro všechny grafy $C(2m, m)$ platí $\lambda_{2,1}(C(2m, m)) \leq 9 (= \Delta^2)$ (viz věta 40). Dále z vět 41, 42 a 43 plyne, že pro všechny 4-regulární cirkulační grafy je $\lambda_{2,1}(C(n, m)) \leq 16 (= \Delta^2)$. To znamená, že cirkulační grafy vyhovují Griggsově a Yehově hypotéze 4.

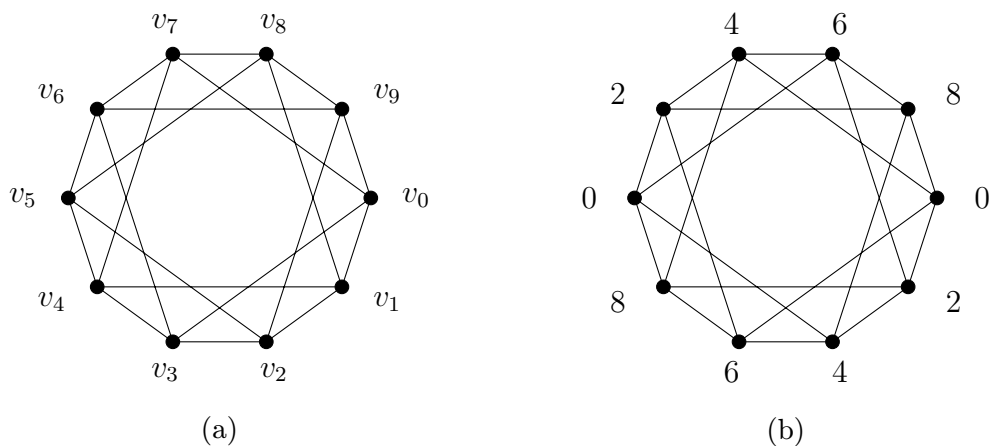
3.5.1 Vlastní výsledky

Podívejme se na cirkulační grafy $C(n, 3)$. Z definice cirkulačních grafů víme, že $n \geq 6$ ($n \geq 2m$). Je-li $n \equiv 0 \pmod{7}$, potom podle věty 44 je $\lambda_{2,1}(C(n, 3)) = 6$, a je-li $n = 3k$, pak podle 41 je $\lambda_{2,1}(C(n, 3)) \leq 9$. V následujících větách uvádíme grafy, pro které se nám povedlo snížit hranice čísla $\lambda_{2,1}$ z vět 41 nebo 42.

Věta 46. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Potom $\lambda_{2,1}(C(5k, 3)) \leq 8$.*

Důkaz. Označme $v_0, v_1, \dots, v_{5k-1}$ po řadě vrcholy grafu $C(5k, 3)$. Graf $C(5k, 3)$ ohodnotíme repetitivně k krát posloupností čísel 0, 2, 4, 6, 8 (viz ohodnocení grafu $C(10, 3)$ na obrázku 10b). Zvolme libovolně vrchol v_i . S vrcholem v_i jsou ve vzdálenosti nejvýše 2 vrcholy $v_{i-6}, v_{i-4}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+4}, v_{i+6}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_{12} . Jelikož v ohodnocení jsou použita pouze sudá čísla, není potřeba dělat rozdíl mezi vrcholem ve vzdálenosti 1 a 2 (různé hodnoty se liší vždy alespoň o 2). Hodnota vrcholu v_i je odlišná od hodnoty každého vrcholu z V_{12} . Z využívané posloupnosti čísel délky 5 vyplývá, že vrchol v_i bude ohodnocen stejnou hodnotou

jako vrcholy v_{i+5l} (resp. v_{i-5l}), kde $l \in \mathbb{N}$, které mají od sebe vzdálenost 3. Speciálně pro $k = 2$ je $v_{i-6} = v_{i+4}$, $v_{i-5} = v_{i+5}$ a $v_{i-4} = v_{i+6}$ (indexy u v_i jsou modulo 10). U grafů s $k > 2$, které mají větší počet vrcholů, už žádné dva z množiny V_{12} nejsou totožné. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(5k, 3)$. \square



Obrázek 10: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(10, 3)$.

Hodnota čísla $\lambda_{2,1}(C(8, 3))$ je omezena hodnotou 15 dle věty 42, následující tvrzení určí přesnou hodnotu hledaného čísla $\lambda_{2,1}$.

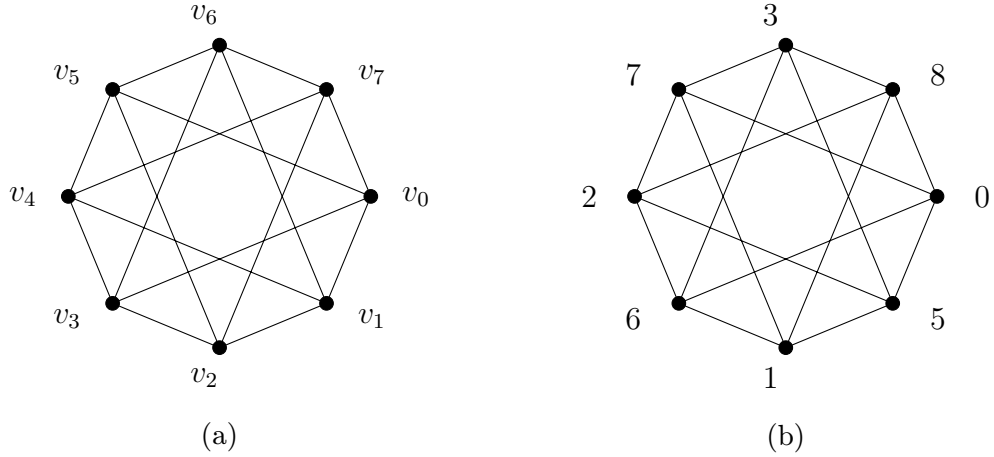
Tvrzení 47. *Nechť G je cirkulační graf $C(8, 3)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) = 8$.*

Důkaz. Graf $C(8, 3)$ je průměru 2 (viz obrázek 11a), tj. nelze v ohodnocení použít žádnou stejnou hodnotu. Tedy $\lambda_{2,1}(C(8, 3)) \geq 7$. Kdyby $\lambda_{2,1}(C(8, 3)) = 7$, museli bychom použít všechny hodnoty $0, 1, \dots, 7$. Zvolme vrchol v_i a ohodnotíme ho 4. Potom jeho 4 sousedé mají některé z hodnot $0, 1, 2, 6, 7$. Z této množiny musíme vybrat 4 hodnoty, tj. určitě vybereme 2 nebo 6. Ohodnotíme sousedy v_i tak, že sousední vrchol v_{i+1} má hodnotu 2 (resp. 6). V grafu nemůže existovat vrchol ohodnocený 3 (resp. 5), jelikož v_{i+1} má všechny neohodnocené vrcholy za sousedy. Tedy $\lambda_{2,1}(C(8, 3)) > 7$.

Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_7 grafu $C(8, 3)$ lze ohodnotit například posloupností čísel $0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8$ (viz obrázek 11b). Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(8, 3)$. \square

Číslo $\lambda_{2,1}(C(3k, 3)) \leq 9$, viz věta 41. Následující věta zlepšuje zmíněnou hranici pro $k \equiv 0 \pmod{3}$, tj. $\lambda_{2,1}(C(9k, 3)) \leq 8$. Pro $k = 1$ ukážeme, že nastává rovnost $\lambda_{2,1}(C(9, 3)) = 8$.

Věta 48. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a G je cirkulační graf $C(9k, 3)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$ a pro $k = 1$ nastává rovnost.*



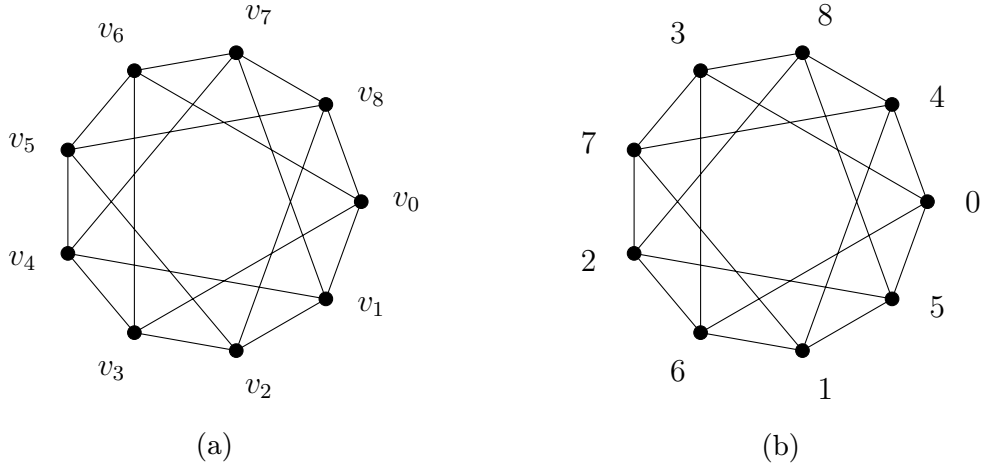
Obrázek 11: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(8, 3)$.

Důkaz. Nechť $k = 1$. Graf $G_1 = C(9, 3)$ je průměru 2 (viz obrázek 12a), tedy $\lambda_{2,1}(G_1) \geq 8$. Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_8 grafu G_1 lze například ohodnotit posloupností čísel 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, tj. $\lambda_{2,1}(G_1) = 8$ (viz obrázek 12b). Nechť $k \geq 2$. Potom graf $C(9k, 3)$ ohodnotíme k krát posloupností čísel (vzorem) použitou pro graf G_1 (tj. 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4). Vrchol v_i má za sousedy vrcholy $v_{i-3}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+3}$, množinu těchto vrcholů označíme V_1 . Ve vzdálenosti 2 od vrcholu v_i leží vrcholy $v_{i-6}, v_{i-4}, v_{i-2}, v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+6}$, jejich množinu označíme V_2 . Jelikož pro ohodnocení jsou podstatné vrcholy s rozdílem indexů nejvýše 6, stačí zkontrolovat podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení mezi 2 sousedními kopiemi vzoru, který má délku 9. Stejně hodnoty mají vždy vrcholy v_l a $v_{l'}$, kde $l - l' \equiv 0 \pmod{9}$, tedy vrcholy ve vzdálenosti 2 nikdy nebudou mít stejnou hodnotu. Pro vrcholy se sousedními indexy a pro vrcholy s indexy lišícími se o 3 - v_i a v_{i+3} (resp. v_{i-3}) - vždy platí, že jejich hodnoty mají rozdíl alespoň 2. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(9k, 3)$. \square

Nyní se zaměříme na ohodnocení grafů $C(11k, 3)$. Následující věta omezí hodnotu $\lambda_{2,1}$ z výše zmíněné meze 15 (viz věta 42) na 10.

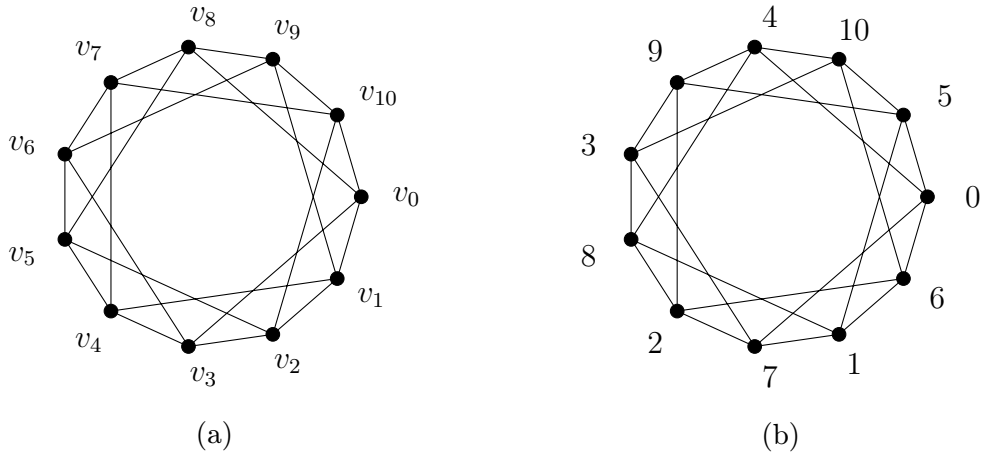
Věta 49. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a G je cirkulační graf $C(11k, 3)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq 10$ a pro $k = 1$ nastává rovnost.*

Důkaz. Nechť $k = 1$. Graf $G_1 = C(11, 3)$ je průměru 2 (viz obrázek 13a), tedy $\lambda_{2,1}(G_1) \geq 10$. Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_{10} grafu G_1 lze například ohodnotit posloupností čísel 0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5 (viz obrázek 13b). Nechť $k \geq 2$. Potom graf $C(11k, 3)$ ohodnotíme k krát posloupností čísel (vzorem) použitou pro graf G_1 . Vrchol v_i má za sousedy vrcholy $v_{i-3}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+3}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_1 . Ve vzdálenosti 2 od v_i leží vrcholy $v_{i-6}, v_{i-4}, v_{i-2}, v_{i+2}, v_{i+4}, v_{i+6}$, jejich množinu označíme



Obrázek 12: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(9, 3)$.

V_2 . Jelikož pro ohodnocení jsou podstatné pouze vrcholy s rozdílem indexů nejvýše 6, stačí zkontrolovat podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení mezi 2 sousedními kopiemi uvedeného vzoru. Vrcholy v_l a $v_{l'}$ mají vždy stejné hodnoty, kde $l - l' \equiv 0 \pmod{11}$, tedy vrcholy ve vzdálenosti 2 nikdy nebudou mít stejnou hodnotu. Pro vrcholy v_i a v_{i+1} (resp. v_{i-1}) a pro vrcholy s indexy lišícími se o 3 - v_i a v_{i+3} (resp. v_{i-3}) - vždy platí, že jejich hodnoty mají rozdíl alespoň 2. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(11k, 3)$. \square



Obrázek 13: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(11, 3)$.

Uvažujme nyní cirkulační grafy $C(n, 3)$ s $n \geq 12$. Poznamenejme, že grafy $C(n, 3)$ s $n \geq 12$ mají průměr větší než 2, tedy pro $k = 1$ v následující větě již nezískáme přesné hodnoty $\lambda_{2,1}$. Pro cirkulační graf $C(12k, 3)$ je horní mez 9 podle věty 41. Dokážeme, že horní mez je 7, tj. $\lambda_{2,1}(C(12k, 3)) \leq 7$. Pro graf $C(13k, 3)$ je opět

snížena horní mez 15 z věty 42, dokážeme že $\lambda_{2,1}(C(13k, 3)) \leq 9$. Pro grafy $C(14k, 3)$ a $C(15k, 3)$ nebyla nalezena zlepšení a horní hranice čísla $\lambda_{2,1}$ plynou z předchozích vět. Pro grafy $C(16k, 3)$ a $C(17k, 3)$ jsme opět snížili horní mez z věty 42. Výsledky grafů $C(18k, 3)$ plynou z již zmíněné věty 48 pro graf $C(9k, 3)$. Uvedené výsledky pro graf $C(19k, 3)$ jsou opět zlepšením věty 41 z horní hranice 15 na 7.

Věta 50. *Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom platí: $C(12k, 3) \leq 7$, $C(13k, 3) \leq 9$, $C(16k, 3) \leq 7$, $C(17k, 3) \leq 8$ a $C(19k, 3) \leq 7$.*

Důkaz. Nechť $k = 1$, potom vrcholy v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , kde $n = 12, 13, 16, 17$ a 19 v grafu $C(n, 3)$ lze ohodnotit např. následujícími posloupnostmi:

- 0, 3, 6, 2, 5, 0, 4, 7, 2, 6, 1, 4 (pro graf $C(12, 3)$),
- 0, 2, 5, 3, 6, 0, 7, 1, 4, 2, 5, 7, 9 (pro graf $C(13, 3)$),
- 1, 6, 2, 7, 3, 0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 0, 5 (pro graf $C(16, 3)$),
- 0, 4, 7, 2, 6, 0, 4, 8, 2, 6, 1, 5, 0, 3, 7, 2, 5 (pro graf $C(17, 3)$),
- 5, 2, 7, 3, 0, 5, 1, 6, 3, 7, 4, 1, 5, 0, 6, 2, 7, 4, 0 (pro graf $C(19, 3)$).

Nechť $k \geq 2$. Pro ohodnocení grafů použijeme k krát kopie výše uvedených posloupností (vzorů). Pro splnění podmínek stačí zkontrolovat pouze sousední kopie vzorů, které splňují podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení. \square

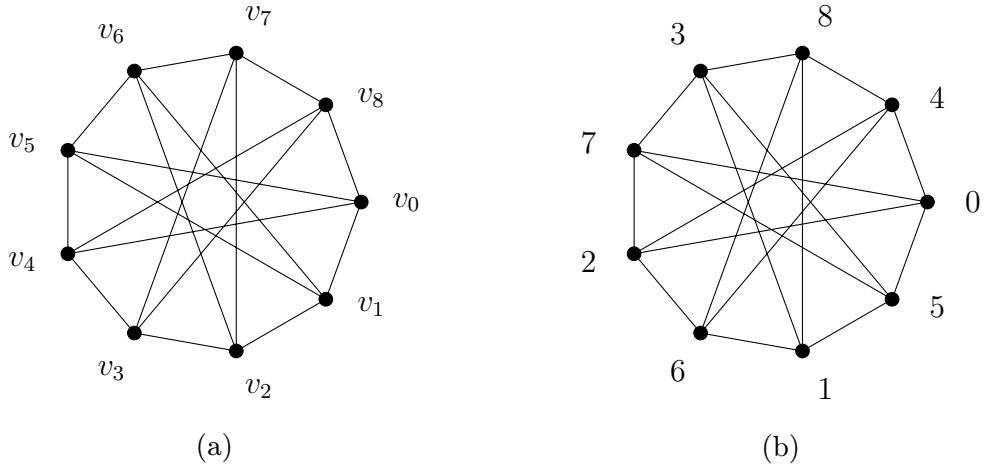
Ze zmíněného důkazu věty 50 lze vyvodit, že pokud máme ohodnocený cirkulační graf $C(n, 3)$ s $n \geq 12$, potom lze stejnou posloupností ohodnotit graf $C(nk, 3)$ tak, že použijeme k krát kopii posloupnosti.

Nyní se budeme zabývat hranicemi $\lambda_{2,1}$ pro cirkulační grafy $C(n, 4)$. Pro $n = 4k$ ($k \geq 3$) určuje horní hranici věta 41. Pro $n = 7k$ určuje horní hranici věta 44. Podařilo se nám zlepšit hranice cirkulačních grafů pro $n = 9k, 10k$ a $11k$ ($k \in \mathbb{N}$). Grafy $C(9, 4)$, $C(10, 4)$ a $C(11, 4)$ jsou průměru 2 a následující věty pro ně určují přesnou hodnotu čísla $\lambda_{2,1}$.

Věta 51. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a G je cirkulační graf $C(9k, 4)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$ a pro $k = 1$ nastává rovnost.*

Důkaz. Nechť $k = 1$. Graf $G_1 = C(9, 4)$ je průměru 2 (viz obrázek 14a), proto každému vrcholu musí být přiřazena jiná hodnota. Tedy $\lambda_{2,1}(G_1) \geq 8$. Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_8 grafu G_1 lze například ohodnotit posloupností čísel 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, tj. $\lambda_{2,1}(G_1) = 8$ (viz obrázek 14b). Nechť $k \geq 2$. Potom graf $C(9k, 4)$ ohodnotíme k krát posloupností čísel (vzorem) použitou pro graf G_1 . Vrchol v_i má za sousedy

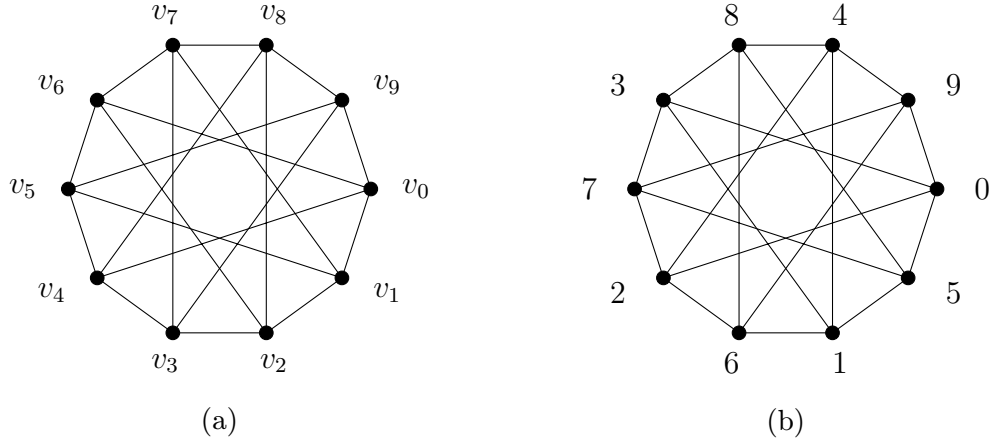
vrcholy $v_{i-4}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+4}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_1 . Ve vzdálenosti 2 leží od vrcholu v_i vrcholy $v_{i-8}, v_{i-5}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+5}, v_{i+8}$, jejich množinu označíme V_2 . Jelikož pro ohodnocení jsou podstatné vrcholy s rozdílem indexů nejvýše 8, stačí zkontrolovat podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení mezi 2 sousedními kopiemi uvedeného vzoru, který má délku 9. Stejně hodnoty mají vždy vrcholy v_l a $v_{l'}$, kde $l - l' \equiv 0 \pmod{9}$, tedy vrcholy ve vzdálenosti 2 nikdy nebudou mít stejnou hodnotu. Pro vrcholy se sousedními indexy a pro vrcholy s indexy lišícími se o 4 - v_i a v_{i+4} (resp. v_{i-4}) - vždy platí, že jejich hodnoty mají rozdíl alespoň 2. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(9k, 4)$. \square



Obrázek 14: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(9, 4)$.

Věta 52. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a G je cirkulační graf $C(10k, 4)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq 9$ a pro $k = 1$ nastává rovnost.*

Důkaz. Nechť $k = 1$. Graf $G_1 = C(10, 4)$ je průměru 2 (viz obrázek 15a), tedy $\lambda_{2,1}(G_1) \geq 9$. Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_9 grafu G_1 lze například ohodnotit posloupností čísel 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9, tj. $\lambda_{2,1}(G_1) = 9$ (viz obrázek 15a). Nechť $k \geq 2$. Potom graf $C(10k, 4)$ ohodnotíme k krát posloupností čísel (vzorem) použitou pro graf G_1 . Vrchol v_i má za sousedy vrcholy $v_{i-4}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+4}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_1 . Ve vzdálenosti 2 leží od vrcholu v_i vrcholy $v_{i-8}, v_{i-5}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+5}, v_{i+8}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_2 . Jelikož pro ohodnocení jsou podstatné vrcholy do vzdálenosti 8, stačí zkontrolovat podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení mezi 2 sousedními kopiemi uvedeného vzoru. Stejně hodnoty mají vždy vrcholy v_l a $v_{l'}$, kde $l - l' \equiv 0 \pmod{10}$, tedy vrcholy ve vzdálenosti 2 nikdy nebudou mít stejnou hodnotu. Pro vrcholy s indexy lišícími se o 1 - v_i a v_{i+1} (resp. v_{i-1}) - a pro vrcholy s indexy lišícími se o 4 - v_i a v_{i+4} (resp. v_{i-4}) - vždy platí, že jejich hodnoty mají rozdíl alespoň 2. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(10k, 4)$. \square



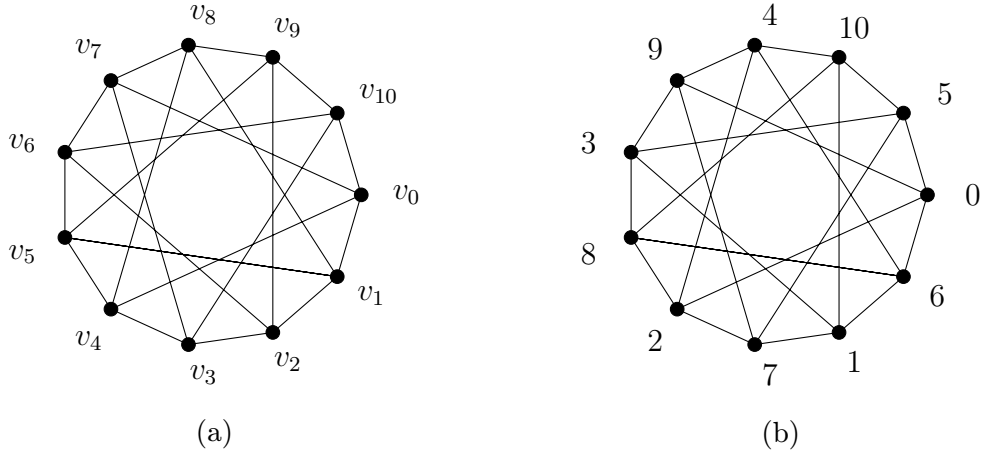
Obrázek 15: Neohodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(10, 4)$.

Věta 53. *Nechť $k \in \mathbb{N}$ a G je cirkulační graf $C(11k, 4)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) \leq 10$ a pro $k = 1$ nastává rovnost.*

Důkaz. Nechť $k = 1$. Graf $G_1 = C(11, 4)$ je průměru 2 (viz obrázek 16a), tedy $\lambda_{2,1}(G_1) \geq 10$. Vrcholy v_0, v_1, \dots, v_{10} grafu G_1 lze například ohodnotit posloupností čísel $0, 6, 1, 7, 2, 8, 3, 9, 4, 10, 5$, tj. $\lambda_{2,1}(G_1) = 10$ (viz obrázek 16a). Nechť $k \geq 2$. Potom graf $C(11k, 4)$ ohodnotíme k krát posloupností čísel (vzorem) použitou pro graf G_1 . Vrchol v_i má za sousedy vrcholy $v_{i-4}, v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+4}$. Množinu těchto vrcholů označíme V_1 . Ve vzdálenosti 2 leží od vrcholu v_i vrcholy $v_{i-8}, v_{i-5}, v_{i-3}, v_{i-2}, v_{i+2}, v_{i+3}, v_{i+5}, v_{i+8}$, jejich množinu označíme V_2 . Jelikož pro ohodnocení jsou podstatné vrcholy do vzdálenosti 8, stačí zkontrolovat podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení mezi 2 sousedními kopiemi uvedeného vzoru. Stejně hodnoty mají vždy vrcholy v_l a $v_{l'}$, kde $l - l' \equiv 0 \pmod{11}$, tedy vrcholy ve vzdálenosti 2 nikdy nebudou mít stejnou hodnotu. Pro vrcholy se sousedními indexy a pro vrcholy s indexy lišícími se o $4 - v_i$ a v_{i+4} (resp. v_{i-4}) - vždy platí, že jejich hodnoty mají rozdíl alespoň 2. Uvedené ohodnocení je zřejmě $L(2, 1)$ -ohodnocením grafu $C(11k, 4)$. \square

Horní mez čísla $\lambda_{2,1}$ pro grafy $C(12, 4)$ je již zahrnuta ve větě 41. Dále se podíváme na cirkulační grafy $C(n, 4)$ a $C(kn, 4)$ kde $n = 13, 15, 16, 17, 19$ a $k \in \mathbb{N}$. Konkrétně pro $n = 16$, tj. pro grafy $C(16k, 4)$ se povedlo snížit horní hranici uvedenou ve větě 41. Výsledky pro grafy $C(14k, 4)$ a $C(18k, 4)$ jsou již zahrnuty ve výše zmíněných větách 44 a 51. Dané výsledky se již dále nepovedlo zlepšit.

Věta 54. *Nechť $k \in \mathbb{N}$. Potom platí: $C(13k, 4) \leq 8$, $C(15k, 4) \leq 9$, $C(16k, 4) \leq 7$, $C(17k, 4) \leq 10$ a $C(19k, 4) \leq 10$.*



Obrázek 16: Nehodnocený a ohodnocený cirkulační graf $C(11, 4)$.

Důkaz. Nechť $k = 1$, potom vrcholy v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , kde $n = 13, 15, 16, 17$ a 19 v grafu $C(n, 4)$ lze ohodnotit např. následujícími posloupnostmi:

- $0, 6, 8, 1, 7, 2, 0, 6, 3, 8, 4, 2, 5$ (pro graf $C(13, 4)$),
- $0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9$ (pro graf $C(15, 4)$),
- $0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 7, 4, 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3$ (pro graf $C(16, 4)$),
- $0, 4, 1, 5, 2, 6, 3, 0, 4, 9, 5, 10, 1, 7, 2, 6, 3$ (pro graf $C(17, 4)$),
- $0, 3, 5, 7, 4, 6, 9, 0, 2, 10, 1, 3, 5, 0, 4, 6, 1, 8, 2$ (pro graf $C(19, 4)$).

Nechť $k \geq 2$. Pro ohodnocení grafů použijeme k krát kopie výše uvedených posloupností (vzorů). Pro splnění podmínek stačí zkontrolovat pouze sousední kopie vzorů a ty splňují podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení. \square

3.6 Kneserovy grafy

Kneserův graf $K(a, b)$ je graf, jehož vrcholy tvoří neuspořádané b -tice z a prvků. Hrany jsou pouze mezi disjunktními b -ticemi. Graf $K(a, 1)$ je úplný graf K_a na a vrcholech. Petersenův graf je Kneserův graf $K(5, 2)$. Pro případ $a < 2b$ by graf neměl žádnou hranu, budeme proto uvažovat $a \geq 2b$. Poznamenejme, že pro Kneserovy grafy platí $\Delta(K(a, b)) = \binom{a-b}{b}$. Obecnými Kneserovy grafy $K(a, b)$ se zabýval Shao a spol. a dokázali následující větu.

Věta 55 [35]. *Nechť $a, b \in \mathbb{N}$ a $b \geq 2$. Potom pro Kneserův graf $K(a, b)$ platí $\lambda_{2,1}(K(a, b)) \leq \binom{a}{b} - 1$ a rovnost nastává pro $a \geq 3b - 1$.*

Kang [23] se zabýval Kneserovými grafy $K(2b+1, b)$ (tj. pro $a = 2b+1$). Dokázal, že $\lambda_{2,1}(K(2b+1, b)) \leq 4b+2$. Pokud $a \geq 3b-1$, potom se jedná o graf s průměrem 2 (viz [35]), pro které víme, že platí Griggsova a Yehova hypotéza 4. Nyní uvedeme v následující větě (v posledních třech bodech) výsledky pro $2b \leq a < 3b-1$.

Věta 56 [35]. *Nechť G je Kneserův graf $K(a, b)$ s maximálním stupněm $\Delta \geq 2$ a $a, b \in \mathbb{N}$. Potom*

$$\lambda_{2,1}(G) \begin{cases} = \binom{a}{b} - 1 < \Delta^2 - 4.4\Delta, & \text{pokud } a \geq 3b-1 \text{ a } b \geq 3, \\ = \binom{a}{b} - 1 < \Delta^2 - 3.5\Delta, & \text{pokud } a > 3b-1 \text{ a } b = 2, \\ = 9 = \Delta^2, & \text{pokud } a = 3b-1 \text{ a } b = 2, \\ < \Delta^2 - \Delta(b(1 - (\frac{b}{a-b})^{a-2b}) - 1) + b < \Delta^2, & \text{pokud } 2b+2 \leq a \leq 3b-2, \\ \leq \Delta^2 - 2, & \text{pokud } a = 2b+1 \text{ a } b \geq 3, \\ = 2, & \text{pokud } a = 2b. \end{cases}$$

Pomocí předchozích zjištění a věty 56 jsme schopni tvrdit, že pro všechny Kneserovy grafy platí Griggsova a Yehova hypotéza 4.

3.7 Podrozdělení grafu

Nechť máme funkci $h : H(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Potom $G_{(h)}$ značí h -podrozdělený graf, který vznikne nahrazením každé hrany uv původního grafu G cestou délky h . Pokud $h(e) = c$, pro všechna $e \in H(G)$ (tj. pokud všechny hrany nahradíme stejně dlouhou cestou) budeme používat značení $G_{(c)}$ místo $G_{(h)}$. Poznamenejme, že $G_{(1)} = G$ a $G_{(2)}$ je graf, který získáme přidáním vždy jednoho vrcholu do každé hrany.

Nechť $c = 2$. Potom Whittlesey a spol. dokázali následující věty.

Věta 57 [41]. *Pro všechny grafy G s maximálním stupněm Δ platí, že $\lambda_{2,1}(G_{(2)}) \leq 2\Delta + 1$.*

Věta 58 [41]. *Nechť $k \geq 1$. Je-li G je k -regulární, potom platí $\lambda_{2,1}(G_{(2)}) \geq k + 2$.*

Věta 59 [41]. *Pokud G je k -regulární bipartitní graf, kde $k \geq 1$, potom $\lambda_{2,1}(G_{(2)}) = k + 2$.*

Nyní se budeme zabývat ohodnocením grafů $G_{(3)}$. Lu dokázal shora omezit číslo $\lambda_{2,1}$ následující větou.

Věta 60 [27]. *Pro libovolný graf G s maximálním stupněm Δ je $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) \leq \Delta + 4$.*

Též vyslovil domněnku o horní hranici grafů $G_{(3)}$.

Hypotéza 61 [27]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ , potom $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) \leq \Delta + 2$.*

Následující tvrzení určuje hodnotu čísla $\lambda_{2,1}$ pro grafy s maximálním stupněm grafu $\Delta(G) = 1, 2$.

Tvrzení 62 [19]. *Pokud G je graf s maximálním stupněm $\Delta \leq 2$, potom*

$$\lambda(G_{(3)}) = \begin{cases} 3, & \text{pokud } \Delta = 1 \text{ (tj. } 3 = \Delta + 2\text{),} \\ 4, & \text{pokud } \Delta = 2 \text{ (tj. } 4 = \Delta + 2\text{).} \end{cases}$$

Lin a Lu [28] dokázali zlepšit horní hranici $\lambda_{2,1}$ pro graf $G_{(3)}$, $\lambda(G_{(3)}) \leq \Delta(G) + 3$. Chang a spol. dokázali ještě více omezit číslo $\lambda_{2,1}$ za předpokladu $\Delta(G) \geq 4$.

Věta 63 [19]. *Nechť G je graf s $\Delta(G) \geq 4$, potom $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) = \Delta(G) + 1$.*

Poznamenejme, že zmíněné věty 62 a 63 korespondují s Luovou hypotézou 61, tj. ukázali, že tato hypotéza je splněna pro grafy $G_{(3)}$ s $\Delta(G) = 1, 2$ a $\Delta(G) \geq 4$. Pro $\Delta(G) \geq 4$ je ohodnocení grafů $G_{(3)}$ dokonce nejnižší možné (jelikož přidáním vrcholů do hran nezvýšíme stupeň grafu (s výjimkou grafu P_2), tj. $\Delta(G) = \Delta(G_{(3)})$). Nyní se budeme zabývat omezením čísla $\lambda_{2,1}$ u grafů s maximálním stupněm 3. Připomeňme, že $G[S]$ značí podgraf grafu G indukovaný množinou S , $S \subseteq V(G)$. Chang a spol. dokázali následující větu, kde perfektním párováním rozumíme 1-regulární faktor grafu G . Poznamenejme, že tato věta potvrzuje zmiňovanou hypotézu 61.

Věta 64 [19]. *Pokud G je 3-regulární, potom $\lambda_{2,1}(G_{(3)}) = 4$ v případě, že lze množinu $V(G)$ rozdělit na dvě množiny S_1 a S_2 takové, že $|S_1| = |S_2|$, a $M = \{uv : uv \in H(G), u \in S_1, v \in S_2\}$ je perfektní párování v G .*

Nyní budeme uvažovat obecnější případy, kdy $c \geq 4$.

Věta 65 [27]. *Nechť G je graf. Potom platí $\lambda_{2,1}(G_{(c)}) \leq \Delta(G) + 2$, kde $c \geq 4$.*

Pro grafy $G_{(h)}$ platí následující věta.

Věta 66 [19]. *Nechť G je graf s maximálním stupněm Δ a funkcí $h : H(G) \rightarrow \mathbb{N}$. Potom $\lambda_{2,1}(G_{(h)}) = \Delta + 1$, je-li $\Delta \geq 5, h(e) \geq 3, \forall e \in H(G)$ nebo $\Delta \geq 4, h(e) \geq 4, \forall e \in H(G)$.*

Pro grafy popsané výše uvedenou větou 66 platí $\lambda_{2,1}(G) = \Delta(G) + 1$, což je nejnižší možná hranice pro $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů.

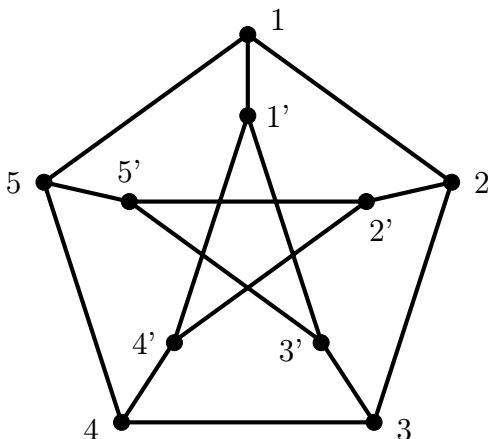
3.8 Zobecněné Petersenovy grafy a prismsy

Speciální třídou 3-regulárních grafů jsou zobecněné Petersenovy grafy a prismsy. Mějme 3-regulární graf G na $2n$ vrcholech, kde $n \geq 3$, potom tento graf nazveme zobecněným Petersenovým grafem a značíme jej $GPG(n)$, pokud G obsahuje 2 disjunktní kružnice $C(n)$ a $C'(n)$, zvané vnější a vnitřní, a mezi vrcholy vnitřní a vnější kružnice existuje perfektní párování. Vrcholy vnější kružnice značíme v_0, v_1, \dots, v_{n-1} , vrcholy vnitřní kružnice značíme $v'_0, v'_1, \dots, v'_{n-1}$. Definice převzata z [11].

Prisma je definována jako zobecněný Petersenův graf $C_n \square P_2$, značíme ji $Pr(n)$, kde n je počet vrcholů kružnice. Opět převzata z [11].

Georges a Mauro [11] dokázali, že platí $\lambda_{2,1}(G) \leq 9$ pro všechny zobecněné Petersenovy grafy $G \cong GPG(n)$. Tímto výsledkem zároveň prokázali, že pro $GPG(n)$ platí Griggsova a Yehova hypotéza 4, že $\lambda_{2,1}(G) \leq \Delta^2$, jelikož $GPG(n, k)$ jsou 3-regulární.

Věta 67 [11]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ a $G = GPG(n)$. Potom $\lambda_{2,1}(G) = 9$, pokud G je izomorfní s Petersenovým grafem (viz obrázek 17). Jinak $\lambda_{2,1}(G) \leq 8$.*



Obrázek 17: Petersenův graf

Ve stejném článku autoři zlepšili výše zmíněnou hranici za předpokladu, že $n = 3$ a $n = 4$.

Věta 68 [11]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $GPG(n)$ je zobecněný Petersenův graf. Potom platí*

$$\lambda_{2,1}(GPG(n)) \begin{cases} = 5, & \text{pokud } n = 3, \\ \leq 7, & \text{pokud } n = 4. \end{cases}$$

Adams a spol. v článku [2] omezili hodnotu $\lambda_{2,1}(GPG(n))$ pro $n = 5, 7$ nebo 8 .

Věta 69 [2]. *Nechť G je zobecněný Petersenův graf $GPG(5)$. Potom platí*

$$\lambda_{2,1}(G) \leq \begin{cases} 9, & \text{pokud } G \text{ isomorfní s Petersenovým grafem,} \\ 6, & \text{v ostatních případech.} \end{cases}$$

A pro $GPG(n)$, kde $n = 7, 8$ platí:

$$\lambda_{2,1}(GPG(n)) \leq \begin{cases} 6, & \text{pro } n = 7, \\ 7, & \text{pro } n = 8. \end{cases}$$

Autoři článku [3] určili hodnotu $\lambda_{2,1}(GPG(6)) \leq 6$. Adams a spol. (viz [1]) dokázali, že $\lambda_{2,1}(GPG(n)) \leq 6$, pro $n = 9, 10$ a 12 , čímž zlepšili hranici dokázanou autory Huang a spol. (viz [18]) $\lambda_{2,1}(GPG(n)) \leq 7$, pro $n = 9, 10, 11$ a 12 . Pro graf s $n = 11$ se Adamsovi a spol. nepovedlo snížit hranici $\lambda_{2,1}$.

Jha a spol. se v článku [21] zabývali hranicemi omezení čísla $\lambda_{2,1}$ u prisem. Dokázali následující větu.

Věta 70 [21]. *Nechť $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Potom*

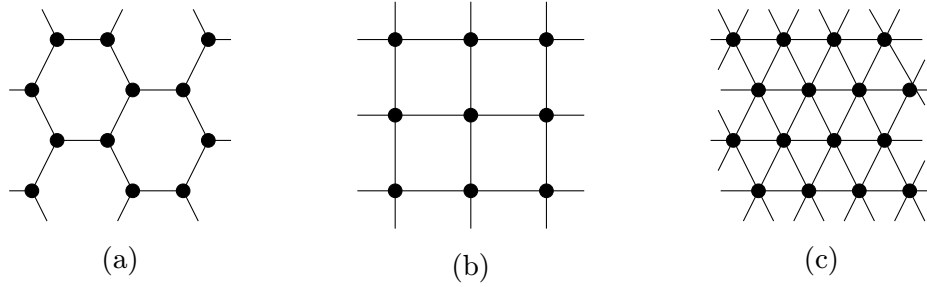
$$\lambda_{2,1}(Pr(n)) \begin{cases} = 5, & \text{pokud } n \equiv 0 \pmod{3}, \\ \leq 6, & \text{v jiném případě.} \end{cases}$$

Georges a Mauro [11] dokázali zlepšit zmíněnou větu 70. Nerovnost nahradili rovností.

3.9 Ohodnocení regulárních sítí

Regulárním grafem nazýváme graf, jehož všechny vrcholy mají stejný stupeň. O některých regulárních grafech jsme se již zmínili dříve, zde budeme zkoumat regulární sítě a Kartézské součiny regulární sítě a nekonečně dlouhé cesty. Označme po řadě G_3, G_4 a G_6 nekonečnou šestiúhelníkovou, čtvercovou a trojúhelníkovou síť (viz obrázek 18). Poznamenejme, že G_i je i -regulární, $i = 3, 4, 6$.

Pro $\lambda_{2,1}(G)$ těchto regulárních sítí je dokázáno $\lambda_{2,1}(G_i) = i + 2$, tj. $\lambda_{2,1}(G_3) = 5$, $\lambda_{2,1}(G_4) = 6$ a $\lambda_{2,1}(G_6) = 8$ (viz článek [9]). Pro ohodnocení používáme algoritmy založené na opakování určitého vzoru, který závisí na typu sítě (stupni grafu). Pro trojúhelníkové, čtvercové a šestiúhelníkové sítě je opakovací vzor ilustrován obrázky 19, 20 a 21 (opět viz článek [9]).



Obrázek 18: Část šestiúhelníkové (a), čtyřúhelníkové (b) a trojúhelníkové sítě (c).

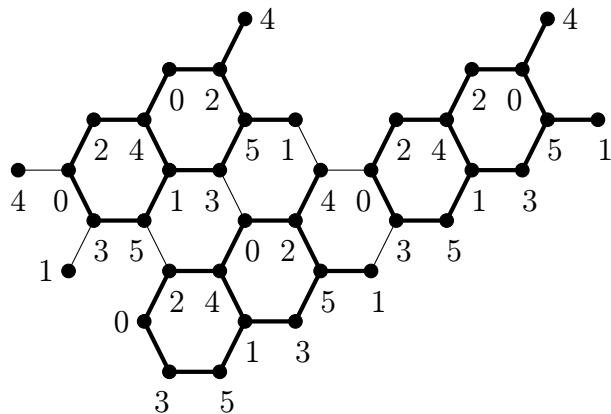
Nyní se zaměříme na Kartézský produkt nekonečné regulární sítě G_i a nekonečné cesty P_∞ , který označíme G'_i . Tedy $G'_i = G_i \square P_\infty$ a jednotlivé kopie G_i nazveme vrstvami. Vrcholy v k -té vrstvě označíme $g_{i,n}^k$, kde $i = 3, 4, 6$ značí typ sítě, $n = 1, 2, \dots$ daný bod v síti a $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ číslo vrstvy. Poznamenejme, že grafy G'_i jsou $(i + 2)$ -regulární, tj. $\Delta(G'_i) = i + 2$. Speciálně pro $i = 3$ graf G'_3 tvoří šestiboké hranoly, pro $i = 4$ je graf G'_4 tvořen krychličkami a G'_6 trojbokými hranoly.

Tvrzení 71. Platí, že:

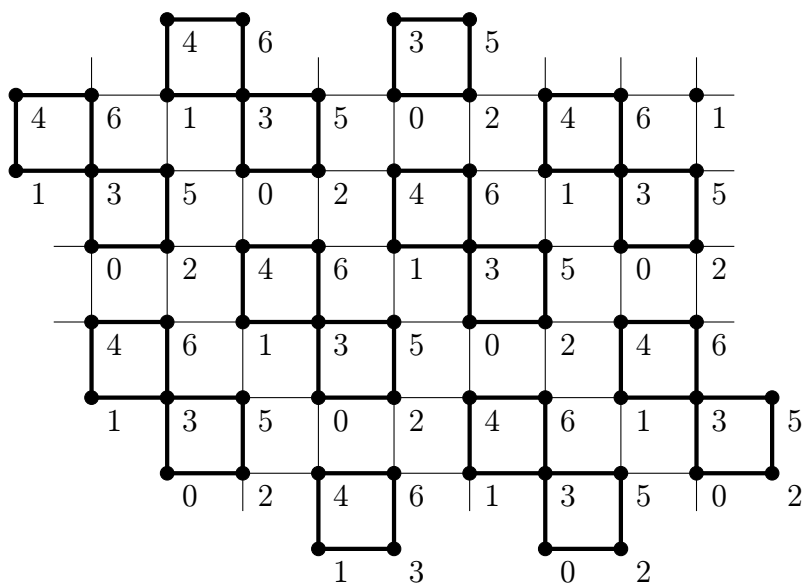
$$\lambda_{2,1}(G'_i) \leq \begin{cases} 19, & \text{pro } i = 3, \\ 22, & \text{pro } i = 4, \\ 28, & \text{pro } i = 6. \end{cases}$$

Důkaz. Pro ohodnocení grafů G'_i využijeme výše zmíněných schémat, o kterých víme, že splňující podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení. Vybereme libovolnou vrstvu (tj. nekonečnou síť G_i), nazveme ji nultou vrstvou a ohodnotíme ji podle principu popsaném v předchozím odstavci. V následujících 2 vrstvách, tj. v 1. a 2. vrstvě ohodnotíme vrcholy $g_{i,n}^1 = g_{i,n}^0 + i + 2 + 2$ (resp. $g_{i,n}^2 = g_{i,n}^0 + 2(i + 2 + 2)$), kde $i + 2$ (resp. $2(i + 2)$) je nejvyšší použitá hodnota v 0-té vrstvě. Další vrstvu můžeme ohodnotit stejně jako 0. vrstvu, protože 0. vrstva neposkytuje žádná omezení pro 3. vrstvu (vzdálenost mezi libovolnými 2 vrcholy z 0-té a 3. vrstvy je alespoň 3). Tj. všechny vrstvy $l \equiv 0 \pmod{3}$ jsou ohodnocené stejně (tj. jako startovací 0. vrstva), všechny vrstvy $l \equiv 1 \pmod{3}$ (resp. $l \equiv 2 \pmod{3}$) jsou ohodnocené jako 1. vrstva (resp. 2.).

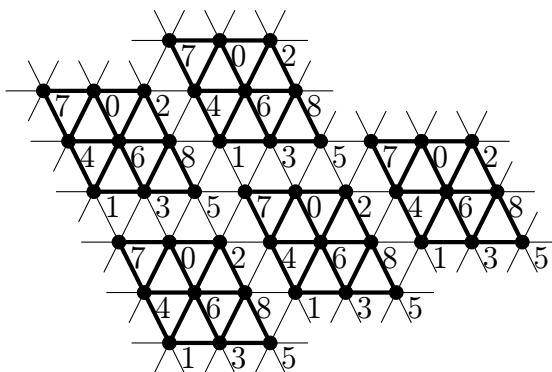
Podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení jsou zajištěny tak, že v jednotlivých vrstvách jsou použité vzory z již zmíněného $L(2, 1)$ -ohodnocení nekonečných sítí. Rozdíl hodnot libovolných vrcholů ze sousedních vrstev i z vrstev, jejichž indexy se liší o 2, je vždy alespoň 2. □



Obrázek 19: Tučně zvýrazněný ohodnocovací vzor pro šestiúhelníkovou síť G_3 .



Obrázek 20: Tučně zvýrazněný ohodnocovací vzor pro čtvercovou síť G_4 .



Obrázek 21: Tučně zvýrazněný ohodnocovací vzor pro trojúhelníkovou síť G_6 .

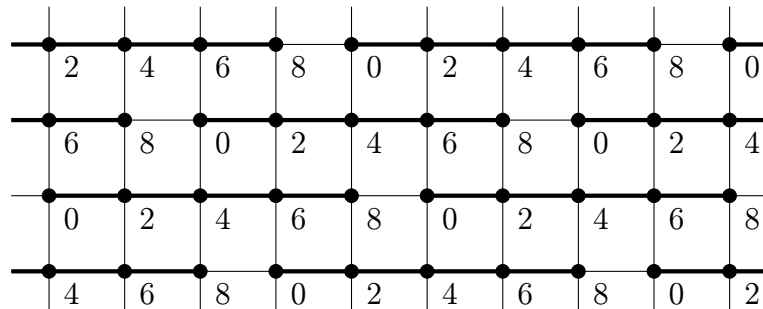
Výše popsaným jednoduchým způsobem lze uskutečnit $L(2, 1)$ -ohodnocení grafů, ale je velmi neefektivní. Proto uvedeme následující věty, ve kterých výrazně snížíme

horní hranici čísla $\lambda_{2,1}(G'_i)$.

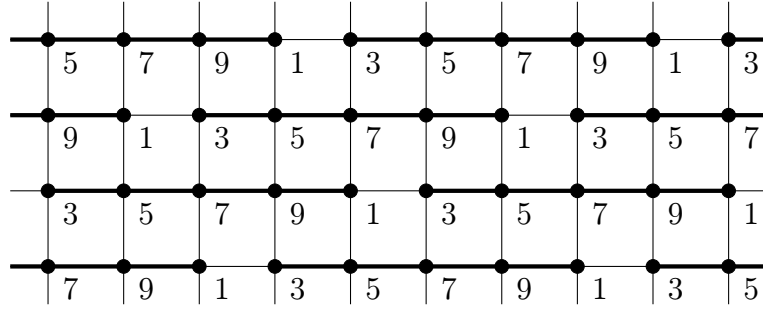
Věta 72. *Nechť G_4 je nekonečná čtvercová síť a $G'_4 = G_4 \square P_\infty$. Potom $8 \leq \lambda_{2,1}(G'_4) \leq 9$.*

Důkaz. Platí, že G'_i je 6-regulární a tudíž $\lambda_{2,1}(G'_4) \geq 8$ podle věty 1. Popíšeme algoritmus, který využívá rozsah 0 – 9, tj. $\lambda_{2,1}(G'_i) \leq 9$. Vybereme na začátek k -tou vrstvu (k je lib. sudé číslo) a ohodnotíme ji pouze sudými čísly v rozsahu 0 – 8 podle obrázku 22. Opět je ohodnocení provedeno pomocí opakování zvýrazněného vzoru (je rozdílný od použitého v G_4). Sousední vrstvu $k + 1$ ohodnotíme pouze lichými čísly (sudou vrstvu vždy ohodnocujeme sudými čísly a lichou vždy lichými). Vrstvy ohodnocujeme iteračně, vždy s využitím vrstvy předešlé. Iterační formule má tvar $g_{4,n}^{k+1} \equiv g_{4,n}^k + 3 \pmod{10}$, kde vrcholy $g_{4,n}^{k+1}$ a $g_{4,n}^k$ jsou spojeny hranou. V každém sloupečku vrcholů nad sebou (tj. kopii cesty P_∞) se tvoří posloupnost čísel $\dots, 0, 3, 6, 9, 2, 5, 8, 1, 4, 7, 0 \dots$. Ohodnocení $k + 1$ vrstvy ilustruje obrázek 23. Pro ohodnocení sousední vrstvy $k - 1$, použijeme iterační formuli $g_{4,n}^{k-1} \equiv g_{4,n}^k - 3 \pmod{10}$.

Pro $L(2, 1)$ -ohodnocení potřebujeme zajistit podmínku rozdílu hodnot sousedních vrcholů alespoň 2 a lišících se hodnot vrcholů ve vzdálenosti 2. V jednotlivých vrstvách je navržen vzor tak, aby tyto podmínky byly splněny. Je využito pouze sudých čísel nebo pouze lichých čísel v každé vrstvě, tj. vrcholy ve vzdálenosti 1 a zároveň 2 se vždy liší alespoň o číslo 2. Jelikož v každé následující vrstvě přičítáme hodnotu 3, nestane se, že by se vrcholy v sousedních vrstvách ve vzdálenosti 1 lišily o méně než 2 (jsou nad sebou, viz zmíněná posloupnost čísel) a vrcholy ve vzdálenosti 2 se musí lišit, jelikož střídáme použití sudých a lichých čísel, je tato podmínka splněna. Vrcholy ve vrstvě k a $k + 2$ nad sebou musí mít rozdílné hodnoty, to nám ale opět zajistí iterační formule. Nestane se, že by se porušily podmínky na $L(2, 1)$ -ohodnocení při počítání modulo 10 díky volbě hodnoty modulo a koeficientu, který přičítáme v každé následující vrstvě (jsou nesoudělná). \square



Obrázek 22: Ohodnocovací vzor pro startovací k -tou vrstvu grafu G'_4 .

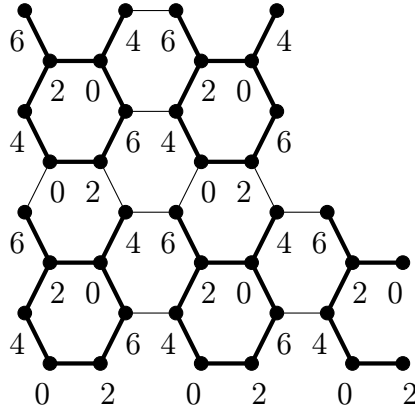


Obrázek 23: Ohodnocovací vzor pro vrstvu $k + 1$ grafu G'_4 .

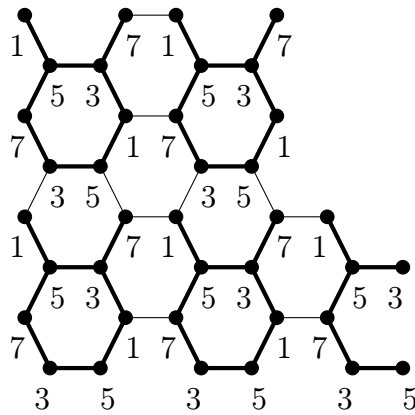
Věta 73. *Nechť G_3 je nekonečná šestiúhelníková síť a $G'_3 = G_3 \square P_\infty$. Potom $\lambda_{2,1}(G'_3) = 7$.*

Důkaz. Graf je 5-regulární a proto podle věty 58 musí být $\lambda_{2,1}(G'_3) \geq 7$ podle věty 1. Pro ohodnocení vybereme startovací k -tou vrstvu (k je lib. sudé číslo) a na ní aplikujeme podobný postup jako při ohodnocování grafu G_3 , tj. ohodnocujeme ji pomocí opakování vzoru z obrázku 24 (je rozdílný od výše zmíněného v grafu G_3). Poznamenejme, že opět sudou vrstvu vždy ohodnocujeme sudými čísly a lichou vždy lichými. Vrstvy ohodnocujeme s využitím iterační formule $g_{3,n}^{k+1} \equiv g_{3,n}^k + 3 \pmod{8}$, kde vrcholy $g_{3,n}^{k+1}$ a $g_{3,n}^k$ jsou sousední (pro vrstvu $k + 1$ je ohodnocení ilustrováno obrázkem 25). V každém sloupečku vrcholů nad sebou (tj. kopii cesty P_∞) se tvoří posloupnost čísel $\dots, 4, 7, 2, 5, 0, 3, 6, 1, 4, \dots$. Pro ohodnocení vrstvy $k - 1$ použijeme iterační formuli $g_{3,n}^{k-1} \equiv g_{3,n}^k - 3 \pmod{8}$.

Podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení jsou zajištěny ze stejných důvodů jako v důkazu předchozí věty. \square



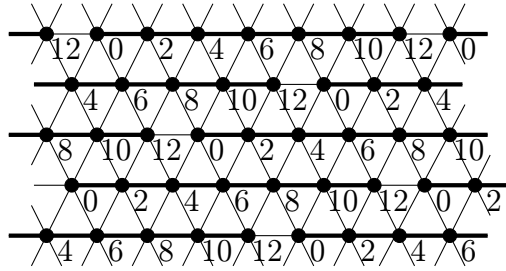
Obrázek 24: Ohodnocovací vzor pro ohodnocení startovací k -té vrstvy grafu G'_3 .



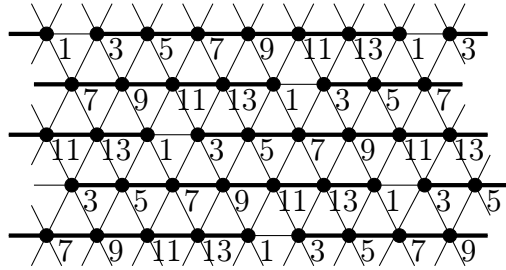
Obrázek 25: Ohodnocovací vzor pro ohodnocení vrstvy $k + 1$ grafu G'_3 .

Věta 74. *Nechť G_6 je nekonečná trojúhelníková síť a $G'_6 = G_6 \square P_\infty$. Potom $10 \leq \lambda_{2,1}(G'_6) \leq 13$.*

Důkaz. Graf G'_6 je 8-regulární a tudíž $\lambda_{2,1}(G'_6) \geq 10$ dle věty 1. Pro ohodnocení tohoto grafu nyní popíšeme algoritmus, který využívá rozsah $0 - 13$. Postup je velmi podobný předchozím dvěma. Vybereme na začátek k -tou vrstvu (k je libovolné sudé číslo) a ohodnotíme ji pouze sudými čísly v rozsahu $0 - 12$ podle obrázku 26. Vrstvu $k + 1$ ohodnotíme pouze lichými čísly podle iterační formule $g_{6,n}^{k+1} \equiv g_{6,n}^k + 3 \pmod{14}$. V každém sloupečku vrcholů nad sebou (tj. kopii cesty P_∞) se tvoří posloupnost čísel $\dots, 0, 3, 6, 9, 12, 1, 4, 7, 10, 13, 2, 5, 8, 11, 0, \dots$. Ohodnocení vrstvy $k + 1$ ilustruje obrázek 27. Pro ohodnocení vrstvy $k - 1$, použijeme iterační formuli $g_{6,n}^{k-1} \equiv g_{6,n}^k - 3 \pmod{14}$. Podmínky $L(2, 1)$ -ohodnocení jsou zajištěny ze stejných důvodů jako v důkazu věty 72. \square



Obrázek 26: Ohodnocovací vzor pro startovací k -tou vrstvu grafu G'_6 .



Obrázek 27: Ohodnocovací vzor pro vrstvu $k + 1$ grafu G'_6 .

4 Závěr

V této práci byly shrnuty a setřizeny základní poznatky z problematiky $L(2, 1)$ -ohodnocení grafu. Byla nalezena uvedená ohodnocení pro Kartézské produkty nekonečné regulární sítě a nekonečné cesty. Dále se v práci podařilo snížit horní hranici některých cirkulačních grafů. Další výzkum by mohl být zaměřen na další typy cirkulačních grafů nebo Kartézské produkty jiných grafů, než obsahuje tato práce.

Literatura

- [1] S. S. Adams, P. Bootha, H. Jaffe, D. S. Troxell, S. L. Zinnena. Exact λ -numbers of generalized Petersen graphs of certain higher-orders and on Möbius strips. *Discrete Applied Mathematics* **160** (2012), 436-447.
- [2] S. S. Adams, J. Cass, M. Tesch, D. S. Troxell, C. Wheeland. The minimum span of $L(2, 1)$ -labelings of certain generalized Petersen graphs. *Discrete Applied Mathematics* **155** (2007), 1314-1325.
- [3] S. S. Adams, J. Cass, D. S. Troxell. An Extension of the Channel-Assignment Problem: $L(2, 1)$ -Labelings of Generalized Petersen Graphs. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* **53** (2006), 1101–1107.
- [4] M. Beaudouin-Lafon, S. Chen, N. Karst, J. Oehrlein, D. S. Troxell. Labeling crossed prisms with a condition at distance two. *Involve, a Journal of Mathematics* **11/1** (2018), 67-80.
- [5] P. Bella, D. Král', B. Mohar, K. Quittnerová. Labeling planar graphs with a condition at distance two. *European Journal of Combinatorics* **28** (2007), 2201-2239.
- [6] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan, J. v. Leeuwen. λ -Coloring of Graphs. In: *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 1770, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. (2000) 395–406.
- [7] H. L. Bodlaender, T. Kloks, R. B. Tan, J. v. Leeuwen. Approximations for λ -Colorings of Graphs. *The Computer Journal* **47** (2004), 193–204.
- [8] F. Bonomo, M. R. Cerioli. On the $L(2, 1)$ -labeling of block graphs. *International Journal of Computer Mathematics* **88/3** (2011), 468-475.
- [9] T. Calamoneri, R. Petreschi. $L(h, 1)$ -labeling subclasses of planar graphs. *Journal of Parallel Distributed Computing* **64** (2004), 414–426.
- [10] R. Čada, T. Kaiser, Z. Ryjáček. Diskrétní matematika. *Plzeň : Západočeská univerzita*, 170 s. ISBN: 80-7082-939-7, 2004.
- [11] J. P. Georges, D. W. Mauro. On generalized Petersen graphs labeled with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* **259** (2002), 311-318.
- [12] J. P. Georges, D. W. Mauro. On regular graphs optimally labeled with a condition at distance two. *SIAM Journal Discrete Mathematics* **17/2** (2003), 320-331.

- [13] J. Georges, D. W. Mauro, M. Whittlesey. Relating path covering to vertex labellings with a condition at distance two. *Discrete Mathematics* **135** (1994), 103-111.
- [14] D. Goncalves. On the $L(p, 1)$ -labelling of graphs. *Discrete Mathematics* **308** (2008), 1405-1414.
- [15] J. R. Griggs, R. K. Yeh. Labelling graphs with a condition at distance 2. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **5/4** (1992) 586-595.
- [16] W. K. Hale. Frequency assignment: Theory and applications. *Proceedings of the IEEE* **68/12** (1980), 1497–1514.
- [17] J. v. den Heuvel, S. McGuinness. Coloring the Square of a Planar Graph. *Journal of Graph Theory* **42** (2003), 110–124.
- [18] Y. Huang, C. Chiang, L. Huang, H. Yeh. On $L(2, 1)$ -labeling of generalized Petersen graphs. *Journal of Combinatorial Optimization* **24** (2012), 266-279.
- [19] F.-H. Chang, M.-L. Chia, D. Kuo, S.-Ch. Liaw, M.-H. Tsai. $L(2, 1)$ -labelings of subdivisions of graphs. *Discrete Mathematics* **338/2** (2015), 248–255.
- [20] G. J. Chang, D. Kuo. The $L(2, 1)$ -labelling problem on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **9/2** (1996), 309-316.
- [21] P. K. Jha, A. Narayanan, P. Sood, K. Sundaram, V. Sunder. On $L(2, 1)$ -labeling of the Cartesian product of a cycle and a path. *Ars Combinatoria* **55** (2000), 81–89.
- [22] K. Jonas. Graph colorings analogues with a condition at distance two: $L(2, 1)$ -labelings and list λ -labelings. Ph.D. Thesis, Dept. of Math., Univ. of South Carolina, Columbia, SC, USA, 1993.
- [23] J.-H. Kang. $L(2, 1)$ -labeling on Kneser graph. Manuscript.
- [24] S. Klavžar, A. Vesel. Computing graph invariants on rotographs using dynamic algorithm approach: the case of $(2, 1)$ -colorings and independence numbers. *Discrete Applied Mathematics* **129** (2003), 449–460.
- [25] D. Král', R. Škrekovski. A theorem about the channel assignment problem. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **16/3** (2003) 426–437.
- [26] D. Kuo, J.-H. Yan. On $L(2, 1)$ -labelings of Cartesian products of paths and cycles. *Discrete Mathematics* **283** (2004), 137–144.

- [27] D. Lu. $L(2, 1)$ -labelings of the edge-path-replacement of a graph. *Journal of Combinatorial Optimization* **26** (2013), 385-392.
- [28] D. Lu, N. Lin. $L(d, 1)$ -labelings of the edge-path-replacement of a graph. *Journal of Combinatorial Optimization* **26** (2013), 819-831.
- [29] D. Ma, H. Ren, D. Lv. $L(2, 1)$ -labeling of a circular graph. *Ars Combinatoria* **123** (2015), 231–245.
- [30] N. Mandal, P. Panigrahi. On irreducible no-hole $L(2, 1)$ -coloring of subdivision of graphs. *Journal of Combinatorial Optimization* **33/4** (2017), 1421–1442.
- [31] M. Molloy, M. R. Salavatipour. A bound on the chromatic number of the square of a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory (Series B)* **94** (2005), 189–213.
- [32] M. Murugan. Distance two labeling on special family of graphs. *Le Matematiche* **70/2** (2015), 35–48.
- [33] F. S. Roberts (1988), private communication to J. R. Griggs.
- [34] D. Sakai. Labeling chordal graphs with a condition at distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **7** (1994), 133–140.
- [35] Z. Shao, I. Averbakh, R. Solis-Oba. $L(2, 1)$ -labeling of Kneser graphs and coloring squares of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics* **221** (2017), 106–114.
- [36] Z. Shao, R. K. Yeh. The $L(2, 1)$ -labeling on planar graphs. *Applied Mathematics Letters* **20** (2007), 222–226.
- [37] C. Schwarz, D. S. Troxell. $L(2, 1)$ -labelings of Cartesian products of two cycles. *Discrete Applied Mathematics* **154** (2006), 1522-1540.
- [38] S. K. Vaidya, D. D. Bantva. Labeling cacti with a condition at distance two. *LE Matematiche* **66/1** (2011), 29–36.
- [39] W.-F. Wang. The $L(2, 1)$ -labelling of trees. *Discrete Applied Mathematics* **154/3** (2006), 598–603.
- [40] W. F. Wang, K. W. Lih. Labelling planar graphs with conditions on girth and distance two. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **17/2** (2004), 264–275.
- [41] M. A. Whittlesey, J. P. Georges, D. W. Mauro. On the λ -number of Q_n and related graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **8/4** (1995), 499–506.

- [42] Ch. A. Wood, J. Jacob. A complete $L(2, 1)$ span characterization for small trees. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, **12/1** (2015), 26–31.
- [43] R. K. Yeh. Labeling graphs with a condition at distance two, Ph.D. thesis, Department of Mathematics, University of South Carolina, Columbia, SC, 1990.