ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

ELIMINAČNÍ METODY V NOVOVĚKU

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Michal Fronk

Učitelství pro 2. stupeň ZŠ, obor Ma-Ge

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D.

Plzeň, 2018

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 25. dubna 2018

....

Michal Fronk

Děkuji své vedoucí diplomové práce Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za ochotu, strávený čas a za velmi užitečné připomínky, které mi věnovala při psaní mé práce.

Obsah

Úvod

Eliminační metody jsou známou aplikací, která je součástí algebry, a zabývají se jí matematici po mnoho století. V minulosti se matematici setkávali s mnohými komplikacemi a nacházeli nejrůznější kombinace soustav rovnic. Ty obsahovaly různý počet neznámých v mnoha stupních nebo různý počet rovnic v soustavě. Matematici se snažili neustále zdokonalovat postupy, prostředky k odstranění neznámých a nacházení těch nejpřesnějších výsledků.

Eliminačními metodami v novověku volně pokračujeme na předešlou bakalářskou práci z roku 2016, která nese název: *„Eliminační metody – historický pohled“*. V ní jsme se zaměřili podrobně na postupy od 17. století, konkrétně na metody Pierra de Fermata, Isaaca Newtona, Leonharda Eulera či Étienna Bézouta, na kterého navazujeme v první části této práce. Vybral jsem si podobné téma, jelikož jsem dostal před dvěma roky zajímavý náhled na celou problematiku a chtěl jsem si ho ještě více rozšířit.

Jak jsem již navodil, tak velká část práce je věnována Étienne Bézoutovi a jeho pohledu na úpravu rovnic. Jeho přínos v této oblasti algebry byl obrovský a myšlenky, které publikoval, byly důležité pro další matematiky, kteří se také zabývali podobnými problémy. Budeme zdůrazňovat jeho přístup k odstranění neznámé ze soustavy rovnic, které jsou v mnoha stupních. Dotkneme se otázky tzv. nadbytečných faktorů, které mohou vzniknout nesprávným použitím jedné z eliminačních metod. Nesmíme zapomenout mluvit o jeho návrhu pravidla, které se týká stupně rezultantu. Podle něho zjistíme, jakého stupně musí být. Vše se budeme snažit doložit i praktickými příklady, abychom mohli jednotlivé části porovnat. Při sepisování první kapitoly jsme vycházeli ze zdrojů [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [19], [22].

V druhé kapitole se zaměříme na vybrané ukázky eliminačních metod v historii dalších matematiků. Mezi ně zařadíme Josepha – Louise Lagrangeho, kde vycházíme z [12], [18], [21], [24], dále Jamese Josepha Sylvestera, kterého jsme převzali z [9], [10], [13], [14], [17], [20], [21], [23] a Arthura Cayleyho zpracovaného dle [8], [11], [15], [16], [21]. V části věnované Sylvesterovi bychom rádi ukázali postup, který by se dnes dal použít a je velice vhodný pro složitější soustavy dvou rovnic. U dvou dalších pánů uvedeme vždy obecný náhled.

Již při psaní bakalářské práce museli být často použity jiné než česky psané prameny a většinou se jednalo i o původní materiály s jiným značením neznámých. I teď se musíme zejména opřít o francouzsky a anglicky píšící autory. Mnoho publikací bohužel nemůžeme mít fyzicky, a proto si pomáháme ve velké míře internetovými zdroji, kde je možnost do materiálů nahlédnout. Veškeré příklady převzaté z literatury a z jiných zdrojů jsou řádně citovány, všechny ostatní jsou mým dílem.

Bohužel ani rozsah diplomové práce nedovolí dokončit celou historii eliminačních metod, jak bychom si přáli. Museli jsme vybrat jen některé matematiky, kteří se problematikou rovnic zabývali. Proto budeme navazovat na Étienne Bézouta a pokračovat dále v čase po stopách eliminačních metod, ale stále bude chybět popsat velké časové období včetně současnosti.

1. Étienne Bézout (1730–1783)

Francouzský matematik narozený 31. března 1730 se měl stát právníkem stejně jako jeho otec a dědeček. Nicméně se začal věnovat matematice potom, co ho oslovila práce Leonharda Eulera.

Bézout působil jako učitel na školách a spojil své znalosti s psaním učebnic pro studenty. Ty byly psané velmi srozumitelně, a proto není divu, že byly velice oblíbené a populární. V roce 1764 skloubil svoji práci s reorganizací studia námořních důstojníků a sepisováním kurzů pro ně. V rámci toho vydává dvě učebnice, kde jedna nese název *Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine* (Matematika pro strážce vlajky a válečného loďstva, 4 díly, 1764–1769) a druhá *Cours complet de mathématiques à l'usage de la marine et de l'artillerie* (Úplný kurz matematiky pro námořnictvo a dělostřelectvo, 6 dílů, 1770 –1782). Nevěnoval se jen školním záležitostem, ale také v rámci matematiky prováděl výzkumy. Ty byly v některých ohledech velice zvláštní a velmi specifické. Bézout stanovil některé obecné předpoklady, které následně více komplikoval, aby se dostal k pochopení problému. Po jejich nalezení mohl úlohu zjednodušit.

První publikace o teorii rovnic vyšla v roce 1762 a nesla pojmenování *Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique* (O některých třídách rovnic libovolného stupně, které připouštějí algebraické řešení). Práce se týká rovnic *n*-tého stupně o jedné neznámé. Jednu rovnici o jedné neznámé bere jako výsledek eliminace jedné neznámé ze dvou rovnic o dvou neznámých. Jestliže některá z rovnic o dvou neznámých má speciální tvar, můžeme určit řešení původní rovnice *n*-tého stupně. Příkladem může být rovnice:

$$x^6 + 18x^5 + 15x^4 + 60x^3 + 15x^2 + 18x + 1 = 0 \tag{1.1}$$

Jedná se o rovnici šestého stupně v neznámé *x*. Rovnici můžeme převést na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

$$y^6 - 2 = 0 \tag{1.2}$$

$$y = \frac{(x-1)}{(x+2)} \tag{1.3}$$

Snadno můžeme určit neznámou *y* a následně i neznámou *x* a tím bychom mohli spočítat i řešení původní rovnice šestého stupně. Místo řešení algebraické rovnice *n*-tého stupně, převádí problém na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

V roce 1764 předkládá královské akademii věd příspěvek *Sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues* (O stupni rovnic, které jsou výsledkem

„zmizení“ neznámých) týkající se eliminace neznámé ze soustavy rovnic. Výsledkem eliminace je rovnice neboli rezultant, který obsahuje jen jednu neznámou. V úvodu zmiňuje své předchůdce Newtona a Eulera, kteří řešili stejný problém, ale docházeli k výsledkům, které obsahovaly nadbytečné činitele, které nevedly k řešení původní soustavy rovnic. V této práci využil determinanty pro řešení soustavy lineárních rovnic.

V roce 1779 bylo v Paříži vydáno dílo *Théorie générale des équations algébraiques* (Obecná teorie algebraických rovnic). Představuje završení všech Bézoutových prací týkajících se teorie eliminace.

Étienne Bézout zemřel v roce 1783 v Basses – Loges (Francie).

1.1 Bézoutovy eliminační postupy publikované v r. 1764 a 1779

V následujícím textu popíšeme některé Bézoutovy postupy eliminace neznámé ze soustavy rovnic tak, jak je zveřejnil v pracích vydaných v roce 1764 (*Sur plusieurs classes d'équations de tous les degrés qui admettent une solution algébrique*) a 1779 (*Théorie générale des équations algébraiques*), a jeho úvahy vedoucí ke zjištění stupně a tvaru výsledné rovnice (rezultantu).

V práci z roku 1764 lze vymezit úvodní část, v níž popisuje podmínku existence netriviálního řešení homogenní soustavy lineárních rovnic pomocí determinantu a vlastnost součtů členů aritmetických řad, což využije k určení stupně rezultantu. V ústřední části se postupně zabývá eliminací jedné neznámé ze soustavy dvou, tří, čtyř, pěti, resp. n rovnic o dvou, třech, čtyřech, pěti, resp. n neznámých.

(a) Soustava dvou rovnic o dvou neznámých stupňů *m* a *m´* v eliminované neznámé *x*

Bézoutovy myšlenky se pokusíme průběžné demonstrovat na následující soustavě dvou rovnic o dvou neznámých:

$$-x^4.(y^3-2y)+2x^3.(y^4-1)-5x^2y^5+xy^6-2y^7=0 \qquad (1.1.1)$$

$$x^2.(y^2-1)-3x.(y^3-1)-2y^4=0 \qquad (1.1.2)$$

Bézout uvažuje rovnice v obecném tvaru.

$$Ax^m+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+Dx^{m-3}+Ex^{m-4}+\cdots+V=0 \qquad (1.1.3)$$

$$A'x^{m'}+B'x^{m'-1}+C'x^{m'-2}+D'x^{m'-3}+E'x^{m'-4}+\cdots+V'=0 \qquad (1.1.4)$$

Jedná se o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých, kde první rovnice je stupně m-tého v neznámé x a druhá rovnice je stupně m'-tého v neznámé x. Koeficienty obsažené v rovnicích jako *A, B, C,…,* respektive *A´, B´, C´,…* jsou polynomy v neznámé *y*, přičemž *A* je polynom stupně *p*, *B* stupně *p + 1*, *C* je stupně *p + 2* atd., *A´* je polynom stupně *p´*, *B´* stupně *p´ + 1*, *C´* je stupně *p´ + 2* atd. V našem příkladu je první rovnice stupně *m = 4* a druhá stupně *m´ = 2* v neznámé *x*. Koeficienty *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, resp. *A´*, *B´*, *C´* jsou polynomy v neznámé *y* stupňů *p = 3, 4, 5, 6, 7*, resp. *p‘ = 2, 3, 4*.

Bézout provádí eliminaci neznámé *x* metodou neurčitých koeficientů pomocí polynomů:

$$Mx^n + Nx^{n-1} + Px^{n-2} + Qx^{n-3} + Rx^{n-4} + \cdots + T \tag{1.1.5}$$

$$M'x^{n'} + N'x^{n'-1} + P'x^{n'-2} + Q'x^{n'-3} + R'x^{n'-4} + \cdots + T' \tag{1.1.6}$$

Nyní vynásobí rovnici (1.1.3) polynomem (1.1.5) a rovnici (1.1.4) polynomem (1.1.6) a výsledné rovnice sečte. Po roznásobení, dostává konečnou rovnici.

$$\begin{aligned}
&AMx^{m+n} + BMx^{m+n-1} + CMx^{m+n-2} + DMx^{m+n-3} + EMx^{m+n-4} + \cdots + VT \;= 0\\
&+A'M'x^{m'+n'} + ANx^{m+n-1} + BNx^{m+n-2} + CNx^{m+n-3} + DNx^{m+n-4} + \cdots + V'T'\\
&+B'M'x^{m'+n'-1} + APx^{m+n-2} + BPx^{m+n-3} + CPx^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'N'x^{m'+n'-1} + C'M'x^{m'+n'-2} + AQx^{m+n-3} + BQx^{m+n-4} + \cdots\\
&+B'N'x^{m'+n'-2} + D'M'x^{m'+n'-3} + ARx^{m+n-4} + \cdots\\
&+A'P'x^{m'+n'-2} + C'N'x^{m'+n'-3} + E'M'x^{m'+n'-4} + \cdots\\
&+B'P'x^{m'+n'-3} + D'N'x^{m'+n'-4} + \cdots\\
&+A'Q'x^{m'+n'-3} + C'P'x^{m'+n'-4} + \cdots\\
&+B'Q'x^{m'+n'-4} + \cdots\\
&+A'R'x^{m'+n'-4} + \cdots
\end{aligned}$$

Aby se v tomto součtu vyrušily všechny členy s neznámou *x*, musí platit:

$$AM + A'M' = 0$$

$$AN + A'N' + BM + B'M' = 0$$

$$AP + A'P' + BN + B'N' + CM + C'M' = 0$$

$$AQ + A'Q' + BP + B'P' + CN + C'N' + DM + D'M' = 0$$

$$AR + A'R' + BQ + B'Q' + CP + C'P' + DN + D'N' + EM + E'M' = 0$$

$$\vdots,$$

V důsledku předchozích vztahů platí i:

$$VT + V'T' = 0,$$

což je soustava lineárních rovnic, jejíž koeficienty jsou polynomy v proměnné y. Z první rovnice je zřejmé, že $m + n = m' + n'$, kde m, n, m', n' jsou stupně polynomů (1.1.5), (1.1.6).

Následně vyvozuje, jaký stupeň mají mít polynomy (1.1.5), (1.1.6). Nejvyšším stupněm ve výsledné rovnici je $m + n$, proto bude mít polynom $m + n + 1$ členů. Polynomy (1.1.5), (1.1.6), kterými násobíme rovnice, mají $n + 1$, respektive $n' + 1$ členů. Neurčité koeficienty polynomů (1.1.5), (1.1.6) se při součinu s danými rovnicemi objeví v každém členu, musí tedy platit: $m + n + 1 = (n + 1) + (n' + 1)$. Navíc připomíná podmínku: $m + n = m' + n'$. Dostaneme dvě rovnice.

$$3)\ m + n + 1 = (n + 1) + (n' + 1)$$
$$4)\ m + n = m' + n'$$

Z nichž plyne n' a n.

$$n' = m - 1$$
$$n = m' - 1$$

Polynom, jímž se násobí první rovnice má stupeň $m' - 1$. Polynom, kterým se násobí druhá rovnice má stupeň $m - 1$.

Uvažované rovnice (1.1.4) a (1.1.5) se budou vzhledem k právě zjištěnému po řadě násobit polynomem v x stupně $n = m' - 1 = 2 - 1 = 1$ a $n' = m - 1 = 4 - 1 = 3$.

$$Mx + N \tag{1.1.7}$$
$$M'x^3 + N'x^2 + P'x + Q' \tag{1.1.8}$$

Výpočet součtu součinů příslušných polynomů, který označíme r, si usnadníme např. v programu Mathematica. Zápisy necháme v podobě, v které je můžeme do programu vložit.

$r1 := -x\text{^}4 * (y\text{^}3 - 2 * y) + 2x\text{^}3 * (y\text{^}4 - 1) - 5 * x\text{^}2 * (y\text{^}5) + x * y\text{^}6 - 2y\text{^}7$

$r2 := x\text{^}2 * (y\text{^}2 - 1) - 3 * x * (y\text{^}3 - 1) - 2 * y\text{^}4$

$n1 := M * x + N$

$n2 := M' * x^3 + NN' * x^2 + P' * x + Q'$

$r = Expand[r1 * n1 + r2 * n2]$

Výsledkem je následující polynom.

$$-2Nx^3-2Mx^4+2Nx^4y+2Mx^5y-Nx^4y^3-Mx^5y^3+2Nx^3y^4+2Mx^4y^4 \\ -5Nx^2y^5-5Mx^3y^5+Nxy^6+Mx^2y^6-2Ny^7-2Mxy^7+3x^4M' \\ -x^5M'+x^5y^2M'-3x^4y^3M'-2x^3y^4M'+3x^3N'-x^4N'+x^4y^2N' \\ -3x^3y^3N'-2x^2y^4N'+3x^2P'-x^3P'+x^3y^2P'-3x^2y^3P'-2xy^4P' \\ +3xQ'-x^2Q'+x^2y^2Q'-3xy^3\,Q'-2y^4Q'$$

Zápis upravíme tak, aby byly lépe poznat koeficienty, jimiž jsou vynásobeny mocniny *x*:
Collect[r,{x, M, N, M´, N´, P´, Q´}]

$$-2Ny^7+x^5[M(2y-y^3)+(-1+y^2)M'] \\ +x^4[N(2y-y^3)+M(-2+2y^4)+(3-3y^3)M'+(-1+y^2)N'] \\ +x^3[-5My^5+N(-2+2y^4)-2y^4M'+(3-3y^3)N'+(-1+y^2)P'] \\ -2y^4Q'+x^2[-5Ny^5+My^6-2y^4N'+(3-3y^3)P'+(-1+y^2)Q'] \\ +x[Ny^6-2My^7-2y^4P'+(3-3y^3)Q']$$

Rovnice $r = 0$ nebude obsahovat *x*, když se vyruší všechny členy obsahující *x*, tj. budou-li splněny podmínky:

$$M(2y-y^3)+(-1+y^2)M'=0$$
$$M(-2+2y^4)+N(2y-y^3)+(3-3y^3)M'+(-1+y^2)N'=0$$
$$-5My^5+N(-2+2y^4)-2y^4M'+(3-3y^3)N'+(-1+y^2)P'=0$$
$$My^6-5Ny^5-2y^4N'+(3-3y^3)P'+(-1+y^2)Q'=0$$
$$-2My^7+Ny^6-2y^4P'+(3-3y^3)Q'=0$$

V takovém případě bude mít rovnice $r = 0$ tvar:

$$-2Ny^7-2y^4Q'=0,$$

což spolu s předchozími podmínkami vede k homogenní soustavě šesti lineárních rovnic v šesti neznámých *M*, *N*, *M´*, *N´*, *P´*, *Q´*, jejichž koeficienty jsou polynomy v proměnné *y*. Označme tuto soustavu (1.1.9) a pro přehlednost uveďme i její matici.

$$\alpha=\begin{pmatrix} 2y-y^3 & 0 & -1+y^2 & 0 & 0 & 0 \\ -2+2y^4 & 2y-y^3 & 3-3y^3 & -1+y^2 & 0 & 0 \\ -5y^5 & -2+2y^4 & -2y^4 & 3-3y^3 & -1+y^2 & 0 \\ y^6 & -5y^5 & 0 & -2y^4 & 3-3y^3 & -1+y^2 \\ -2y^7 & y^6 & 0 & 0 & -2y^4 & 3-3y^3 \\ 0 & -2y^7 & 0 & 0 & 0 & -2y^4 \end{pmatrix} \quad (1.1.10)$$

Jak je známo, tak homogenní soustava lineárních rovnic má netriviální řešení, pokud je determinant matice takové soustavy roven nule. Bézout ve své práci z r. 1764 uvažuje podobně. Popisuje, jak vyčíslit determinant matice homogenní soustavy o dvou až pěti neznámých pomocí permutací, tj. jako určitý součet součinů prvků matice.[1] Vzhledem k tomu, že prvky matice (1.1.10) jsou polynomy v proměnné y, je i její determinant polynomem pouze v y a představuje tak rezultant, výsledný polynom neobsahující neznámou x.

Pro výpočet rezultantu rovnic (1.1.1), (1.1.2) jako determinantu matice α využijeme software. Znovu je zápis zapsán ve tvaru, kdy jej snadno do programu můžeme vložit.

$$\begin{aligned}\alpha := \{&\{2*y-y\char`^3,0,y\char`^2-1,0,0,0\},\{-2+2*y\char`^4,2*y-y\char`^3,3-3*y\char`^3,y\char`^2\\ &-1,0,0\},\{-5*y\char`^5,-2+2*y\char`^4,-2*y\char`^4,3-3*y\char`^3,-1\\ &+y\char`^2,0\},\{y\char`^6,-5*y\char`^5,0,-2*y\char`^4,3-3*y\char`^3,-1+y\char`^2\},\{-2\\ &*y\char`^7,y\char`^6,0,0,-2*y\char`^4,3-3*y\char`^3\},\{0,-2*y\char`^7,0,0,0,-2*y\char`^4\}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Det\,[\alpha] = {}&108y^7-324y^8-108y^9-198y^{10}+1224y^{11}+770y^{12}-36y^{13}\\ &-2820y^{14}-1308y^{15}+700y^{16}+3150y^{17}+1284y^{18}-1158y^{19}\\ &-1876y^{20}+608y^{22}\end{aligned}$$

(b) Stupeň rezultantu dvou polynomů o dvou neznámých

Bézout vyvozuje maximální stupeň rezultantu dvou rovnic. Ke správnému výsledku se dostane možná překvapivě zkoumáním aritmetických řad se stejnou diferencí. Pokusme se vysvětlit, jak takový problém souvisí se stupněm rezultantu.

Rezultant odpovídá determinantu matice. Determinant čtvercové matice řádu k je roven součtu $k!$ součinů k prvků matice (opatřených znaménkem + nebo –), přičemž v každém z těchto součinů vystupuje jako činitel právě jeden prvek z každého řádku, a právě jeden prvek z každého sloupce. Například determinant matice

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & -2\\ 4 & -3 & 5\end{pmatrix}$$

řádu $k = 3$ bude vypočten pomocí $k! = 3! = 6$ součinů obsahujících tři činitele:

$$1.0.5,\quad 1.(-2).(-3),\quad (-1).3.5,\quad (-1).(-2).4,\quad 2.3.(-3),\quad 2.0.4$$

[1] Definici determinantu pomocí permutací viz např. [Be10, str. 164].

Každý z těchto součinů má tu vlastnost, že v něm žádné dva činitele nejsou ze stejného řádku a žádné dva nejsou ze stejného sloupce.

Zkusme vytvořit několik takových součinů prvků matice α řádu šest. Například z posledního řádku vybereme do součinu prvek $-2y^7$, z prvního prvek $y^2 - 1$, tím už do součinu nemůžeme zvolit žádný prvek z druhého a ani z třetího sloupce. Vybereme-li z druhého řádku prvek $y^2 - 1$ a stejný prvek i ze třetího a čtvrtého řádku, pak lze z pátého řádku vybrat jedině $-2y^7$. Jedním ze součinu je tedy

$$(-2y^7)^2.(y^2-1)^4.$$

Podobným způsobem můžeme najít i další součiny, například:

$$(-2y^4).(y^2-1)^3.(y^6)^2, (-2y^7).(y^2-1)^3.y^6.(-3y^3+3), (-2y^4)^4.(-y^3+2y)^2.$$

Všímejme si nejvyššího stupně každého z předchozích součinů, neboť je to zároveň maximální stupeň rezultantu. Nejvyšší stupeň součinu je dán součtem nejvyšších stupňů jeho činitelů. Ve všech případech je to *22*. Bézout ukazuje, že při přepisu čísel do tabulky, kde je ve sloupcích zapsáno n po sobě jdoucích členů n aritmetických posloupností se stejnou diferencí d (případně s rozdílným prvním prvkem), je součet n prvků vybíraných stejně jako při výpočtu determinantu (z každého řádku i sloupce pouze jeden prvek) konstantní. Nechť je např. $n = 4$, $d = -3$ a $2, -1, 4, 5$ jsou první členy aritmetických řad, pak dostaneme tabulku se čtyřmi aritmetickými posloupnostmi, jejíž první čtyři členy jsou zapsány do sloupců a následně se další řádky mění v závislosti na diferenci.

2	–1	4	5
–1	–4	1	2
–4	–7	–2	–1
–7	–10	–5	–4

Tabulka 1: První čtyři členy čtyř aritmetických posloupností se stejnou diferencí *d = –3*

Součet čísel na obou úhlopříčkách, což splňuje podmínku pro zařazení do součtu, neboť každý ze sčítanců je z jiného řádku i sloupce, se rovná se číslu *–8*. Stejný výsledek se získá z dalších deseti možných součtů čtyř čísel z tabulky, například:

$$-7 + (-1) + 1 + (-1) = -8.$$

Vyjádříme-li vše obecně, jak nám ukáže tabulka 2, můžeme si všimnout, že pro součet shodný pro všechny n! možností, jak vytvořit součet n prvků, je roven:

$$S + \frac{n}{2}.(n-1).d, \tag{1.1.11}$$

kde S je součet prvků v prvním řádku, n je počet řádků, resp. sloupců v tabulce a d je diference. Při výběru právě jednoho prvku z každého řádku a sloupce totiž postupně vybereme všechna a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, jako součást součtu $a_i + j.d$, a všechny možné j-násobky, $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, diference d. Proto jsou v souladu s (1.1.11) všechny možné součty rovny:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + 0.d + 1.d + \cdots + (n-1).d = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{n}{2}.(n-1).d$$

a_1	a_2	…	a_n
$a_1 + d$	$a_2 + d$	…	$a_n + d$
…	…	…	…
$a_1 + (n-1).d$	$a_2 + (n-1).d$	…	$a_2 + (n-1).d$

Tabulka 2: Zápis prvních *n* členů *n* aritmetických posloupností se stejnou diferencí *d*

Zbývá vysvětlit, jak zjištěný výsledek uplatnit na rezultant dvou polynomů. V matici α jsou polynomy v proměnné y. Všimněme si, že v každém sloupci matice α jsou tyto polynomy uspořádány vzestupně podle nejvyššího stupně, který je na každém dalším řádku o jedna větší. Například v prvním sloupci matice (1.1.10) tvoří nejvyšší stupně posloupnost *3, 4, 5, 6, 7,* v posledním posloupnost *2, 3, 4*. Pokaždé jde o posloupnost s diferencí jedna. Vytvořme třetí tabulku nejvyšších stupňů polynomů v proměnné y. V záhlaví prvního řádku jsou uvedeny neznámé koeficienty polynomů (1.1.7), (1.1.8) a v záhlaví prvního sloupce jsou sestupně zapsány odpovídající mocniny x.

	M	N	M'	N'	P'	Q'
x^5	3		2			
x^4	4	3	3	2		
x^3	5	4	4	3	2	
x^2	6	5		4	3	2
x	7	6			4	3
x^0		7				4

Tabulka 3: Zápis nejvyšších stupňů v proměnné *y* na jednotlivých pozicích v matici α

V tabulce tři chybí vyplnit některé členy aritmetických posloupností, aby byla kompletní, jako tabulka 1. Bézout píše, že vlastnost (1.1.11) zůstává zachována, když členy aritmetických řad doplníme. Abychom zachovali aritmetické posloupnosti s diferencí jedna, musíme první řádek doplnit čísly *2, 1, 0, –1*. V prvním řádku tabulky dostaneme následující řadu: *3,* ***2****, 2,* ***1****,* ***0****,* ***–1***. Dosaďme do (1.1.11) $n = 6$, $d = 1$ a $S = 3 + 2 + 2 + 1 + 0 + (-1)$:

$$S + \frac{n}{2}.(n-1).d = 3 + 2 + 2 + 1 + 0 + (-1) + \frac{6}{2}.(6-1).1 = 7 + 15 = 22$$

To je nejvyšší stupeň polynomu v proměnné *y*.

Ukažme nyní, že i v obecném případě, kdy jsou zadány libovolné polynomy příslušné rovnicím (1.1.3), (1.1.4), tvoří nejvyšší stupně polynomů v proměnné *y* aritmetickou posloupnost s diferencí jedna.

Podle předpokladu je *A* polynom stupně *p*, *B* stupně $p + 1$, *C* je stupně $p + 2$ atd., A' je polynom stupně p', B' stupně $p' + 1$, C' je stupně $p' + 2$ atd. v proměnné *y*. To znamená, že stupně tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí jedna. Součin polynomu příslušného rovnici (1.1.3) a polynomu (1.1.5) proveďme jako součet součinů polynomu příslušného rovnici (1.1.3) s jednotlivými členy polynomu (1.1.5):

$$\begin{aligned}&(Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \cdots + V).Mx^n + \\ &\quad +(Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \cdots + V).Nx^{n-1} + \\ &\quad\quad + \cdots \\ &\quad\quad\quad +(Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + Ex^{m-4} + \cdots + V).T\end{aligned}$$

Koeficienty každé z neznámých *M*, *N*, …, *T* jsou zapsány jako polynomy v neznámé *x*. Všechny takové polynomy mají stejné koeficienty *A*, *B*, …, *V* pro různé mocniny *x*, takže zůstává v platnosti vlastnost, že nejvyšší stupně polynomů v proměnné *y* tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí jedna. Vše platí i pro součin polynomu příslušného rovnici (1.1.4) a polynomu (1.1.6). Zapišme do další tabulky nejvyšší stupně polynomů v proměnné *y* podobně jako v tabulce tři. Do prvního řádku navíc doplňme první členy aritmetických posloupností stejně jako v předchozím případě.

	M	N	…	T	M'	N'	…	T'
x^{m+n}	p	$\boldsymbol{p-1}$	…	$\boldsymbol{p-n}$	p'	$\boldsymbol{p'-1}$	…	$\boldsymbol{p'-n'}$
x^{m+n-1}	$p+1$	p	…		$p'+1$	p'	…	
…	…	…	…	…	…	…	…	…
x^{m}	$p+n+1$	$p+n$	…	p	$p'+m'-1$	$p'+m'-2$	…	
$x^{n'}$	$p+n+2$	$p+n+1$		$p+1$	$p'+m'$	$p'+m'-1$	…	
…	…	…	…	…	…	…	…	…
$x^{m'}$	$p+m-1$	$p+m-2$						p'
x^{n}	$p+m$	$p+m-1$	…					$p'+1$
…	…	…	…	…				…
x^{0}				$p+m$				$p'+m'$

Tabulka 4: Zápis nejvyšších stupňů jednotlivých členů aritmetické posloupnosti v proměnné *y*

K určení největšího stupně rezultantu zbývá správně dosadit do (1.1.11).

$$S = p + (p-1) + \cdots + (p-n) + p' + (p'-1) + \cdots + (p'-n')$$

Sčítanec p, respektive p' je v součtu tolikrát, kolik členů má polynom (1.1.5), respektive (1.1.6). Polynom (1.1.5) je stupně $n = m' - 1$, proto má $n + 1 = m'$ členů. Podobně polynom (1.1.6) má $n' + 1 = m$ členů. Odtud je

$$\begin{aligned} S &= m'p - (1 + \cdots + n) + mp' - (1 + \cdots + n') = \\ &= m'p + mp' - \frac{1}{2}.[n(n+1) + n'(n'+1)] = \\ &= m'p + mp' - \frac{1}{2}.[(m'-1)m' + (m-1)m] \end{aligned}$$

Tabulka 4 obsahuje $m + n + 1 = m + m'$ aritmetických posloupností, proto

$$\frac{m+m'}{2}.(m+m'-1).1 = \frac{1}{2}.[(m+m')^2 - (m+m')]$$

odpovídá druhému sčítanci v předpisu (1.1.11). Nejvyšší stupeň rezultantu značí Bézout G, platí pro něj:

$$G = m'p + mp' - \tfrac{1}{2}.[(m'-1)m' + (m-1)m] + \tfrac{1}{2}.[(m+m')^2 - (m+m')] = m'p + mp' + \tfrac{1}{2}.[m^2 + 2mm' + m'^2 - m - m' - (m'^2 - m') - (m^2 - m)] = m'p + mp' + mm' \qquad (1.1.12)$$

V soustavě rovnic (1.1.1), (1.1.2) je $m = 4$, $p = 3$, $m' = 2$, $p' = 2$. Podle (1.1.12) je nejvyšší stupeň rezultantu $G = 2.3 + 4.2 + 4.2 = 22$, což je v souladu s předchozím zjištěním.

Poznamenejme na tomto místě, že pro $p = p' = 0$, tj. v případě, že polynomy v zadaných rovnicích jsou stupňů m a m', je stupeň rezultantu dán součinem stupňů zadaných polynomů. Tím je zároveň dokázáno, že rovinné křivky stupňů m, m' se protínají maximálně v $m.m'$ bodech. To je speciální případ tzv. Bézoutovy věty o počtu společných bodů dvou rovinných algebraických křivek.

Na závěr části věnované rovnicím o dvou neznámých Bézout píše (viz [5, str. 301]), že „předpis pro G udává správný stupeň výsledné rovnice pouze pro rovnice ve dvou neznámých, které jsou uvažovány v *největší obecnosti*[2]; zatímco ve speciálních případech může být stupeň rezultantu nižší“. Jako příklad uvádí soustavu:

$$a^3x^5y - 2a^4y^2x^3 + y^8x - a^9 = 0,$$
$$a^3x^3 - 3a^3xy^2 + y^5x - y^6 = 0, \qquad (1.1.13)$$

kde první rovnice je celkového stupně devátého a pátého vzhledem k x $(m = 5)$, druhá rovnice je celkového stupně šestého a třetího stupně vzhledem k x $(m' = 3)$. Rozdíl celkového stupně a stupně rovnice vzhledem k x, tj. $p = 9 - 5 = 4$ a $p' = 6 - 3 = 3$ v soustavě (1.1.13) bere jako stupeň v neznámé y. Předpis (1.1.12) dává hodnotu $G = 3.4 + 5.3 + 5.3 = 42$, ale stupeň rezultantu je pouze 36, jak je možné zjistit výpočtem podle odstavce **(a)**.

V práci z roku 1779 Bézout odlišuje soustavy rovnic uvažovaných *v největší obecnosti* (úplné rovnice, resp. polynomy) a ostatní rovnice (neúplné rovnice, resp. polynomy). Úplným polynomem stupně T v n neurčitých, úsporně píše $(u\ldots n)^T$, rozumí součet všech součinů mocnin neurčitých, tzv. monomů, jejichž celkový stupeň je nejvýše roven T, a koeficientů, tj.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=0}^{T} a_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1}.x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n}.$$

Důležité je zmínit, že všechny koeficienty $a_{k_1k_2\ldots k_n}$ musejí být různé od nuly. Jinak by došlo ke změně polynomu z úplného na neúplný. Úplný polynom stupně T tedy obsahuje všechny členy stupně T a všechny členy, které mají stupeň menší než T. Úplný polynom stupně dva ve dvou neurčitých x, y je polynom obsahující členy stupně dva: x^2, xy, y^2; členy stupně jedna: x, y; a člen stupně nula: 1.

[2] Bézout má patrně na mysli takové rovnice, které v práci z roku 1779 odpovídají tzv. úplným polynomům, viz text níže.

Uveďme i Bézoutův dnešní zápis:

$$(x \dots 2)^2 = \sum_{k_1+k_2=0}^{2} a_{k_1k_2}x^{k_1}.y^{k_2} = a_{00}x^0.y^0 + a_{10}x^1.y^0 + a_{01}x^0.y^1 + a_{20}x^2.y^0 + ax^1.y^1 + ax^0.y^2 = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + ax.y + ay^2$$

Úplný polynom (úplná rovnice) stupně tři ve dvou proměnných x, y, tj. $(x \dots 2)^3$, bude oproti předchozímu obsahovat členy třetího stupně: x^3, x^2y, xy^2, y^3. Polynomy příslušné rovnicím (1.1.18), (1.1.19) jsou příkladem úplných polynomů ve třech proměnných stupně dva, tj. $(x \dots 3)^2$, a polynom příslušný rovnici (1.1.17) je úplný polynom třetího stupně ve třech proměnných x, y, z.

V úvodní části práce z roku 1779 Bézout odvozuje rovněž počet členů takových polynomů a tento počet označuje $N(u \dots n)^T$. Například pro počet členů úplného polynomu stupně T ve dvou proměnných vyvodil $N(u \dots 2)^T = \frac{1}{2}(T+1).(T+2)$ a obecně pro počet členů úplného polynomu stupně T v n proměnných

$$N(u \dots n)^T = \frac{1}{n!}(T+1).(T+2) \dots (T+n)$$

Neúplný polynom (neúplnou rovnici) stupně T v n neurčitých získáme vypuštěním některého členu úplného polynomu (úplné rovnice) stupně T v n proměnných. Například $axy + by + e$ je neúplný polynom stupně dva ve dvou neurčitých. Polynom příslušný rovnici (1.1.1), resp. (1.1.2) je příkladem neúplného polynomu stupně sedm, resp. čtyři ve dvou proměnných x, y. V zápisech neúplných polynomů Bézout zohledňuje stupeň, kterého dosahuje každá z neznámých. Například $(u^A \dots n)^T$ představuje polynom celkového stupně T a stupně A vzhledem k proměnné u. Rovnici celkového stupně sedmého a čtvrtého vzhledem k x (takovou je např. rovnice (1.1.1)) by pak bylo možné zapsat ve tvaru $(x^4 \dots 2)^7 = 0$.

Ke zjištění počtu členů neúplného polynomu Bézout nejprve odvodil předpis pro počet členů polynomu, které jsou dělitelné určitou mocninou některé z proměnných. Například v polynomu $(x \dots 2)^3$ jsou členem x^2 dělitelné členy x^3, x^2y, x^2. Po vytknutí x^2 z nich získáme členy x, y, 1, tj. členy úplného polynomu stupně jedna ve dvou proměnných. Takových členů je $N(x \dots 2)^1 = 3$. Obecně pro polynom $(u \dots n)^T$ a počet členů, které jsou dělitelné u^P, platí $N(u \dots n)^{T-P}$.

(c) Soustavy většího počtu rovnic o větším počtu neznámých a odpovídající stupeň rezultantu

Metodu použitou pro dvě rovnice typu (1.1.3), (1.1.4) se v další části textu z roku 1764 snaží uplatnit pro větší počet rovnic s větším počtem neznámých. Shrneme pouze předpoklady, ze kterých Bézout vyšel, a zásadní výsledky, k nimž v takových případech dospěl.

V úloze týkající se tří rovnic o třech neznámých stupňů m, m', m'' v eliminované neznámé x předpokládá první dvě rovnice ve tvaru (1.1.3), (1.1.4) a třetí:

$$A''x^{m''} + B''x^{m''-1} + C''x^{m''-2} + D''x^{m''-3} + E''x^{m''-4} + \cdots + V'' = 0, \qquad (1.1.14)$$

přičemž A, B, C, …, A', B', C', …, A'', B'', C'', ... jsou polynomy v proměnných y a z takové, že jejich stupně jsou p, $p+1$, $p+2$, …, p', $p'+1$, $p'+2$, …, p'', $p''+1$, $p''+2$, … Eliminaci x provádí stejně jako v případě dvou rovnic. Rovnice (1.1.3), (1.1.4) vynásobí po řadě neurčitými polynomy (1.1.5), (1.1.6) a rovnici (1.1.14) polynomem:

$$M''x^{n''} + Nx^{n''-1} + Px^{n''-2} + Q''x^{n''-3} + R''x^{n''-4} + \cdots + T'' \qquad (1.1.15)$$

v proměnné x, součiny sečte a koeficienty členů obsahujících x položí rovny nule. Pro dvě rovnice bylo možné jednoznačně určit stupně n, n' neurčitých polynomů (1.1.5), (1.1.6), jimiž se rovnice násobí, tak, aby vznikla soustava lineárních rovnic se stejným počtem rovnic a neznámých. V případě tří rovnic nelze n, n', n'' určit jednoznačně. Lze stanovit pouze jisté omezující podmínky na vzájemné vazby mezi nimi a stupni rovnic. Různé volby stupňů neurčitých polynomů tak vedou k různým rezultantům.

Stupeň rezultantu určuje opět pomocí vlastnosti aritmetických posloupností. Pro tři rovnice ve třech neznámých vypočetl, že nejvyšší stupeň rezultantu bude:

$$G = mm' + mp' + m'p - (m + m' - m'' + p + p' - p'').(n'' + 1) + (n'' + 1)^2, \qquad (1.1.16)$$

ale jen za předpokladu, že $m + n = m' + n'$, $m + n \geq m'' + n''$, respektive

$$G = mm' + mm'' + m'm'' + mp' + mp'' + m'p + m'p'' + m''p + m''p' + pp'' + p'p'' + \frac{\alpha^4}{4} - \frac{1}{4}.(m + m' + m'' + p + p' + p'')^2,$$

kde α je nejmenší číslo splňující např. podmínku, aby stupně rovnic i neurčitých polynomů byla přirozená čísla. Vzhledem k tomu, co bylo uvedeno výše, nelze stupeň určit přesněji. O to se snaží v konkrétních příkladech.

Zabývá se např. třemi rovnicemi stejného stupně $m = m' = m''$ pro $p = p' = p'' = 0$. Bézout zvolil n, n', n'' co nejvhodněji, tj. tak, aby stupeň výsledné rovnice v neznámých y, z byl co nejmenší. Ve svých výpočtech dospěl k hodnotám $\frac{3}{4}m^2, \frac{3}{4}m^2 + 1$ pro sudé m, a pro liché m k hodnotě $\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{4}$. Následně uvažuje a přemýšlí nad tím, jaký bude stupeň rezultantu, který se získá ze dvou výsledných rovnic v y a z tak, aby jeho stupeň byl co nejmenší. Pro sudé m dospěl k tvaru $\frac{3}{4}m^2.\left(\frac{3}{4}m^2 + 1\right)$ a pro liché m $\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{4}\right)^2$. Všechny tyto hodnoty, které popisuje, jsou však menší než stupně, kterých dosahují „rezultanty" získané postupnou eliminací ze soustavy tří rovnic o třech neznámých. V soustavě tří úplných kvadratických rovnic ($m = m' = m'' = 2, p = p' = p'' = 0$) v neznámých x, y a z má podle (1.1.12) výsledná rovnice, kde eliminoval neznámou x z první a druhé rovnice, stupeň čtyři. Stejný stupeň má výsledná rovnice, když eliminujeme x například z první a třetí rovnice. Z toho vyplývá, že rezultant těchto dvou rovnic čtvrtého stupně bude mít stupeň 16. Avšak při výběru dvou výsledných rovnic v neznámých y, z s jejich nejmenším stupněm získaným násobením zadaných tří rovnic třemi neurčitými polynomy je stupeň rezultantu $\frac{3}{4}m^2.\left(\frac{3}{4}m^2 + 1\right) = \frac{3}{4}2^2.\left(\frac{3}{4}2^2 + 1\right) = 12$. Ani tento výsledek není správný. V Bézoutově práci z roku 1779 a z výsledků v ní zveřejněných se stupeň rezultantu tří kvadratických rovnic rovná číslu osm.

Uvažujme konkrétně soustavu tří rovnic v neznámých x, y, z, z nichž první je třetího stupně v neznámé x, druhá a třetí jsou druhého stupně v eliminované neznámé x.

<u>Příklad č. 1.1:</u> Ze soustavy tří rovnic eliminujte neznámou x.

$$x^3 + (2y - z + 1)x^2 + (-y^2 + 2yz + 2z^2 + 3y - 3z + 2)x - 2y^3 + y^2z + 3yz^2 - y^2 + 2yz + 3z^3 + 2z^2 - y + 5z - 8 = 0 \qquad (1.1.17)$$

$$5x^2 + (-2y + z - 3)x - 2y^2 - 2yz + 3z^2 - y + 4z - 7 = 0 \qquad (1.1.18)$$

$$3x^2 + (y - 2z + 1)x + 3y^2 + yz - 2z^2 + 3y + 2z - 6 = 0 \qquad (1.1.19)$$

V soustavě je $m = 3$, $m' = 2$, $m'' = 2$, $p = p' = p'' = 0$. Pro nalezení stupňů n, n', n'' neurčitých polynomů použijeme Bézoutovy obecné úvahy. Stupně vynásobených rovnic se musí rovnat, případně stupeň jednoho ze součinů může být menší než stupeň zbývajících dvou se stejným stupněm, tj. například $m + n = m' + n'$, $m + n \geq m'' + n''$, a tedy $3 + n = 2 + n'$, $3 + n \geq 2 + n''$, takže $n' = n + 1$, $n'' \leq n + 1$ pro hodnoty vyplývající z konkrétní soustavy. Víme z předcházejících úvah, že polynom stupně $m + n$ má $m + n + 1$ členů, a proto můžeme tvrdit, že součtem součinů tří rovnic s neurčitými polynomy se získá rovnice s $(n + 1) + (n' + 1) + (n'' + 1)$ členy. Obě hodnoty se musí rovnat, odtud můžeme napsat $n' = m - n'' - 2$ a $n = m' - n'' - 2$. Po dosazení za m a m' vyjde $n' = 3 - n'' - 2$ a $n = 2 - n'' - 2$, a tedy $n' = 1 - n''$, $n = -n''$, což jsou poslední podmínky, které potřebujeme k nalezení stupňů neurčitých polynomů n, n', n''. Všechny čtyři podmínky jsou $n' = n + 1$, $n'' \leq n + 1$, $n' = 1 - n''$, $n = -n''$. Ze čtvrté podmínky vyplývá $n = n'' = 0$, proto je $n' = 1$ dle třetí podmínky. Nalezené hodnoty n, n', n'' vyhovují první i druhé podmínce. Podmínky jsou splněny i pro $n = 0, n' = 0, n'' = 1$, zaměníme-li pořadí druhé a třetí rovnice. Zadané rovnice budeme násobit nejdříve neurčitými polynomy M, $M'x + N'$, M'' a následně polynomy M, M', $M''x + N''$. Pokud dosadíme do předpisu (1.1.16) $n = n'' = 0, n' = 1$ a následně $n = n' = 0, n'' = 1$, tak dostaneme v obou případech stupeň rezultantu roven číslu čtyři.

$$G = 3.2 + 3.0 + 2.0 - (3 + 2 - 2 + 0 + 0 - 0).(0 + 1) + (0 + 1)^2 = \mathbf{4}$$
$$G = 3.2 + 3.0 + 2.0 - (3 + 2 - 2 + 0 + 0 - 0).(1 + 1) + (1 + 1)^2 = \mathbf{4}$$

Výpočet rezultantů provedeme pomocí programu Mathematica.

$$\begin{aligned}\mathrm{a1} :=\ & \mathrm{x^\wedge 3 + (2*y - z + 1)*x^\wedge 2 + (-y^\wedge 2 + 2*y*z + 2*z^\wedge 2 + 3*y - 3*z + 2)} \\ & \mathrm{*x - 2*y^\wedge 3 + y^\wedge 2*z + 3*y*z^\wedge 2 - y^\wedge 2 + 2*y*z + 3*z^\wedge 3 + 2} \\ & \mathrm{*z^\wedge 2 - y + 5*z - 8}\end{aligned}$$

$$\mathrm{a2 := 5*x^\wedge 2 + (-2*y + z - 3)*x - 2*y^\wedge 2 - 2*y*z + 3*z^\wedge 2 - y + 4*z - 7}$$

$$\mathrm{a3 := 3*x^\wedge 2 + (y - 2*z + 1)*x + 3*y^\wedge 2 + y*z - 2*z^\wedge 2 + 3*y + 2*z - 6}$$

$$np11 \coloneqq \mathrm{M}$$

$$np12 := M' * x + N'$$

$$np13 := M''$$

$$Collect[a1 * np11 + a2 * np12 + a3 * np13, \{x, M, M', N', M''\}]$$

$$\begin{aligned}&M(-8 - y - y^2 - 2y^3 + 5z + 2yz + y^2z + 2z^2 + 3yz^2 + 3z^3) \\ &\quad + N'(-7 - y - 2y^2 + 4z - 2yz - 3z^2) \\ &\quad + M''(-6 + 3y + 3y^2 + 2z + yz - 2z^2) + x^3(M + 5M') \\ &\quad + x^2[M(1 + 2y - z) + M'(-3 - 2y + z) + 5N' + 3M''] \\ &\quad + x[M(2 + 3y - y^2 - 3z + 2yz + 2z^2) \\ &\quad + M'(-7 - y - 2y^2 + 4z - 2yz + 3z^2) + N'(-3 - 2y + z) + M''(1 + y \\ &\quad - 2z)]\end{aligned}$$

Následně zapíšeme polynom do matice v programu Mathematica a spočítáme její determinant.

$$alfa1 \coloneqq \{\{1,5,0,0\},\{1+2y-z,-3-2y+z,5,3\},\{2+3y-y^2-3z+2yz+2z^2,-7 -y-2y^2+4z-2yz+3z^2,-3-2y+z,1+y-2z\},\{-8-y-y^2 -2y^3+5z+2yz+y^2z+2z^2+3yz^2+3z^3,0,-7-y-2y^2+4z -2yz-3z^2,-6+3y+3y^2+2z+yz-2z^2\}\}$$

$$\text{Det[alfa1]} = 207+284y+761y^2+653y^3+95y^4-343z-285yz-214y^2z +22y^3z-189z^2-621yz^2+128y^2z^2+103z^3+215yz^3+140z^4$$

Teď budeme násobit jinými polynomy, abychom našli rezultant pro *n = 0*, *n´ = 0*, *n´´ = 1*, tj. pro případ, kdy se zaměnilo pořadí druhé a třetí rovnice.

$$np21{:}=M$$
$$np22{:}=M'$$
$$np23{:}=M'' * x + N''$$
$$\text{Collect[a1} * \text{np21} + \text{a2} * \text{np22} + \text{a3} * \text{np23}, \{\text{x}, \text{M}, \text{M}', \text{M}'', \text{N}''\}]$$

$$M(-8-y-y^2-2y^3+5z+2yz+y^2z+2z^2+3yz^2+3z^3) + M'(-7-y-2y^2+4z-2yz-3z^2) + N''(-6+3y+3y^2+2z+yz-2z^2)+x^3(M+3M'') + x^2[M(1+2y-z)+5M'+M''(1+y-2z)+3N''] + x[M(2+3y-y^2-3z+2yz+2z^2)+M'(-3-2y+z) + M''(-6+3y+3y^2+2z+yz-2z^2)+N''(1+y-2z)]$$

$$alfa2 \coloneqq \left\{\{1,0,3,0\},\{1+2y-z,5,1+y-2z,3\},\{2+3y-y^2-3z+2yz+2z^2,-3 -2y+z,-6+3y+3y^2+2z+yz-2z^2,1+y-2z\},\{-8-y-y^2 -2y^3+5z+2yz+y^2z+2z^2+3yz^2+3z^3,-7-y-2y^2+4z-2yz +3z^2,0,-6+3y+3y^2+2z+yz-2z^2\}\right\}$$

$$\text{Det[alfa2]} = -178-321y-458y^2-203y^3+40y^4+362z+234yz+180y^2z +71y^3z+223z^2+284yz^2-286y^2z^2-150z^3+11yz^3+31z^4$$

Vyšly dva rozdílné rezultanty čtvrtého stupně. Eliminací neznámé *y* bychom z nich získali jednu rovnici o neznámé *z* šestnáctého stupně. Podle Bézoutových výsledků z roku 1779 by měl být stupeň rezultantu součinem stupňů výchozích rovnic, tj. *3.2.2 = 12*.

Bézout v práci z r. 1764 postupuje induktivně, určuje stupeň rezultantu pro čtyři a pět neznámých, diskutuje různé případy v závislosti na stupni m, tj. nejvyšším stupni první rovnice vzhledem k eliminované neznámé x. Předpis pro stupeň rezultantu zobecňuje pro N neznámých.

Závažným zjištěním, k němuž Bézout v práci z r. 1764 dospěl, byla nutnost vyloučit ze tří (a více) rovnic o třech (a více) neznámých najednou dvě (a více) neznámých. Při postupné eliminaci neznámých totiž vznikají extrafaktory. V *Obecné teorii rovnic* (1779) se Bézout snaží nejprve určit stupeň rezultantu. Následně udává metody, jak k němu dospět. Předem známý stupeň rezultantu umožní vyhnout se nadbytečným činitelům. Pokusíme se na příkladu tří rovnic o třech neznámých ukázat některé z Bézoutových postupů pro výpočet rezultantu a jeho stupně.

Příklad č. 1.2: Určete stupeň rezultantu tří rovnic o třech neznámých. Ze soustavy eliminujte neznámé x, y.

$$x^3 + x^2(y+1) + x(y+2z-3) + 2y - 3yz + 1 = 0 \tag{1.1.20}$$

$$-x^3 + x^2(-2z+3) - x(2y-3z+1) + z - 1 = 0 \tag{1.1.21}$$

$$x^2 + x(-y+2z) + yz + y + 3 = 0 \tag{1.1.22}$$

Postupujme nejprve stejně jako v příkladu č. 1.1. V soustavě jsou dvě rovnice třetího a jedna rovnice druhého stupně v x, proto $m = m' = 3, m'' = 2$. Celkové stupně odpovídají stupňům v neznámé x, je tedy $p = p' = p'' = 0$. Podmínky na stupně $n, n', n'' \in N$ neurčitých polynomů vedou k soustavě: $m + n = m' + n'$, $m + n \geq m'' + n''$, $n' = m - n'' - 2$, $n = m' - n'' - 2$. Řešením jsou trojice $n = n' = 0, n'' = 1$ a $n = n' = 1, n'' = 0$. Podle první z nich násobíme rovnice (1.1.20) a (1.1.21) neurčitými polynomy nultého stupně a poslední rovnici soustavy polynomem prvního stupně. Determinant odpovídající matici soustavy lineárních rovnic v koeficientech neurčitých polynomů je jedním z rezultantů v neznámých y, z:

$$y^3(z^2-4z) + y^2(-2z^3+21z^2+16z-14) + y(-6z^3-35z^2+72z+4) + 4z^3 - 22z^2 - 24z + 64 \tag{1.1.23}$$

Celkový stupeň pět je v souladu s (1.1.16), neboť $G = mm' - (m + m' - m'').(n'' + 1) + (n'' + 1)^2 = 3.3 - (3 + 3 - 2).(1 + 1) + (1 + 1)^2 = 9 - 4.2 + 4 = 5$. Druhý polynom v neznámých y, z získáme podobně, ale vycházíme z trojice čísel $n = n' = 1$, $n'' = 0$, která představují stupně neurčitých polynomů, jimiž se násobí dané rovnice. Nejvyšší stupeň rezultantu v y, z je podle (1.1.16) roven $G = mm' - (m + m' - m'')\cdot(n'' + 1) + (n'' + 1)^2 = 3.3 - (3 + 3 - 2).(0 + 1) + (0 + 1)^2 = 9 - 4 + 1 = 6$. Vychází polynom

$$y^4(-2z - 2) + y^3(-2z - 20) + y^2(24z^3 - 29z^2 + 54z - 64) + y(-32z^4 + 55z^3 - 56z^2 + 84z - 32) - 6z^3 - 4z^2 - 32z + 64, \tag{1.1.24}$$

který je dokonce o jeden stupeň nižší než maximální možný. Na rezultanty (1.1.23) a (1.1.24) lze použít postup uvedený např. v odstavci **(a)**. Dle (1.1.12) bude mít rovnice pouze v neznámé z stupeň $G = m'p + mp' + mm' = 4.2 + 3.1 + 3.4 = 23$.

V práci z r. 1779 se Bézout nejprve zabývá úplnými polynomy a stanovuje pro ně stupeň rezultantu, který značí D, větou známou jako Bézoutova věta:

> *Stupeň rezultatnu libovolného počtu úplných rovnic libovolného stupně obsahujících stejný počet neznámých* [jako rovnic] *je roven součinu stupňů těchto rovnic.*[3] (Přeloženo podle [7, str. 24].)

Rovnice zadané v soustavě nejsou úplné, ale Bézoutova věta v takovém případě může posloužit jako horní odhad stupně rezultantu. Vzhledem k tomu, že $m = m' = 3$, $m'' = 2$ jsou stupně rovnic, nepřesáhne stupeň rezultantu $D = 3.3.2 = 18$, což je o pět stupňů lepší výsledek než stupeň získaný postupnou eliminací neznámých x a y.

Výpočet stupně rezultantu neúplných rovnic je komplikovanější, protože rovnice mohou být neúplné různým způsobem. Bézout určuje stupeň D rezultantu neúplných rovnic tvaru $(u^a \dots n)^t = 0$ obecně, ukazuje i konkrétnější výpočet pro tři rovnice o třech neznámých s přihlédnutím ke stupňům, ve kterých neznámé v rovnici vystupují. Abychom mohli použít Bézoutovy výsledky, přepíšeme rovnice soustavy z posledního příkladu pomocí jím zavedené symboliky.

[3] Věta je uvedena v odstavci (47.), viz [6, str. 32]: *Le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations complettes renfermant un pareil nombre d'inconnues, & de degrés quelconques, est égal au produit des exposans des degrés de ces équations.*

Rovnice	Bézoutovy zápisy	
	Obecně	konkrétně
$x^3+x^2(y+1)$ $+x(y+2z-3)$ $+\ 2y-3yz+1$ $=0$	$(u^a \dots n)^t=0$ $[(x^a,y^{a_1})^b,(x^a,z^{a_1})^{b_1},(y^{a_1},z^{a_1})^{b_1}]^c=0$	$(x^3 \dots 3)^3=0$ $[(x^3,y^1)^3,(x^3,z^1)^2,(y^1,z^1)^2]^3$ $=0$
$-x^3+x^2(-2z+3)$ $-x(2y-3z+1)$ $+z-1=0$	$(u^{a'} \dots n)^{t'}=0$ $\left[(x^{a'},y^{a_1'})^{b'},(x^{a'},z^{a_2'})^{b_1'},(y^{a_1'},z^{a_1'})^{b_1'}\right]^{c'}=0$	$(x^3 \dots 3)^3=0$ $[(x^3,y^1)^2,(x^3,z^1)^3,(y^1,z^1)^1]^3$ $=0$
$x^2+x(-y+2z)$ $+yz+y+3=0$	$(u^{a''} \dots n)^{t''}=0$ $\left[(x^{a''},y^{a_1''})^{b''},(x^{a''},z^{a_1''})^{b_1''},(y^{a_1''},z^{a_1''})^{b_2''}\right]^{c''}$ $=0$	$(x^2 \dots 3)^2=0$ $[(x^2,y^1)^2,(x^2,z^1)^2,(y^1,z^1)^2]^2$ $=0$

Tabulka 5: Bézoutovy zápisy rovnic z příkladu 1.2

V tabulce 5 si můžeme všimnout, že Bézout používá různě přesné zápisy rovnic. Zápis $(u^a \dots n)^t=0$ znamená, že jde o rovnici v n neznámých, jejíž celkový stupeň je t a první neznámá u je v rovnici v a-tém stupni. Výstižnější zápis $[(x^a,y^{a_1})^b,(x^a,z^{a_1})^{b_1},(y^{a_1},z^{a_1})^{b_1}]^c=0$ v případě první rovnice znamená, že obsahuje tři neznámé *x*, *y*, *z* v celkovém stupni $c=3$, přičemž první neznámá *x* má v rovnici stupeň $a=3$, druhá neznámá *y* je ve stupni $a_1=1$, stupeň členu obsahující *x* i *y* je nejvýše $b=3$, třetí neznámá *z* má v rovnici stupeň $a_2=1$, spolu s neznámou *x* je v rovnici nejvýše ve stupni $b_1=2$, členy obsahující neznámou *y* i *z* jsou nejvýše stupně $b_2=2$, členy obsahující všechny tři neznámé jsou nejvýše ve stupni $c=3$.

V odstavci (62.), viz [7, str. 34], vypočetl Bézout stupeň rezultantu *n* rovnic typu $(u^a \dots n)^t=0$ v závislosti na celkovém stupni těchto rovnic, na nejvyšších stupních, v nichž se v rovnicích nachází neznámá *u*, a za podmínek stanovených v odstavci (60.) následovně:

$$\begin{aligned} D = tt't''t''', \text{atd.} - (t-a)(t'-a')(t''-a'')(t'''-a'''), \text{atd.} \\ -(t-a_1)(t'-a_1{}')(t''-a_1{}'')(t'''-a_1{}'''), \text{atd.} \\ -(t-a_2)(t'-a_2{}')(t''-a_2{}'')(t'''-a_2{}'''), \text{atd.} \\ -(t-a_3)(t'-a_3{}')(t''-a_3{}'')(t'''-a_3{}'''), \text{atd.} \end{aligned}$$

Tento výsledek konkretizuje pro soustavu tří rovnic o třech neznámých v odstavcích (120.) až (127.) pro osm různých případů, které nastanou v souvislosti s celkovými stupni rovnic, nejvyššími stupni neznámých v rovnicích a stupni, v nichž mohou být kombinace dvou ze tří neznámých, tj. v závislosti na hodnotách t, t', t'', a, a_1, a_2, a', a_1', a_2', a'', a_1'', a_2'', b, b_1, b_2, b', b_1', b_2', b'', b_1'', b_2''.

Stupeň rezultantu soustavy rovnic z příkladu 1.2 je dán předpisem podle odstavce (120.):

$$
\begin{aligned}
D = t.t'.t'' - (t-a).(t'-a').(t''-a'') - (t-a_1).(t'-a_1').(t''-a_1'')& \\
- (t-a_2).(t'-a_2').(t''-a_2'') + (t-b).(t'-b').(t''-b'')& \\
+ (t-b_1).(t'-b_1').(t''-b_1'') + (t-b_2).(t'-b_2').(t''-b_2'')& \\
- (a+a_1-b).(t'-b').(t''-b'') - (a'+a_1'-b').(t-b).(t''-b'')& \\
- (a''+a_1''-b'').(t-b).(t'-b')& \\
- (a+a_2-b_1).(t'-b_1').(t''-b_1'')& \\
- (a'+a_2'-b_1').(t-b_1).(t''-b_1'')& \\
- (a''+a_2''-b_1'').(t-b_1).(t'-b_1')& \\
- (a_1+a_2-b_2).(t'-b_2').(t''-b_2'')& \\
- (a_1'+a_2'-b_2').(t-b_2).(t''-b_2'')& \\
- (a_1''+a_2''-b_2'').(t-b_2).(t'-b_2')&
\end{aligned}
$$

Z tabulky 5 lze zjistit $t = 3$, $t' = 3$, $t'' = 2$, $a = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a' = 3$, $a_1' = 1$, $a_2' = 1$, $a'' = 2$, $a_1'' = 1$, $a_2'' = 1$, $b = 3$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2$, $b' = 2$, $b_1' = 3$, $b_2' = 1$, $b'' = 2$, $b_1'' = 2$, $b_2'' = 2$.

$$D = 3.3.2 - 0 - 2.2.1 - 2.2.1 + 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 - 0 = 10$$

Výsledná rovnice, tj. rezultant soustavy bude pouze desátého stupně. Tím jsme splnili první část úkolu předloženého v příkladu 1.2. Zbývá určit rezultant soustavy.

V *Obecné teorii rovnic* můžeme podle [1, str. 61] rozlišit dvě metody výpočtu rezultantu:

(A) Každá z rovnic soustavy se vynásobí neurčitým polynomem, který obsahuje všechny neznámé. V součtu součinů se ponechají pouze členy obsahující neznámou, která byla zvolena jako neznámá rezultantu, koeficienty ostatních členů se položí rovny nule.

(B) Jedna z neznámých se předem určí jako neznámá rezultantu. Rovnice se uspořádají vzhledem k ostatním (eliminovaným) neznámým, jejich koeficienty budou polynomy ve zvolené neznámé. Každá rovnice se vynásobí neurčitým polynomem ve všech neznámých kromě neznámé vybrané pro výslednou rovnici. Součet součinů se uspořádá vzhledem k eliminovaným neznámým a koeficienty součtu se položí rovny nule.

Nejprve ukážeme, jak by se na rovnice z příkladu 1.2 použila metoda (A). Postup je popsán v odstavci (224.) – (229.), viz [7, str. 151 – 153]. Rovnice se vynásobí po řadě neurčitými polynomy:

$$Q_1 = [(x^{A+5}, y^{A_1+2})^{B+4}, (x^{A+5}, z^{A_1+2})^{B_1+5}, (y^{A_1+2}, z^{A_1+2})^{B_1+3}]^{C+5} = 0$$

$$Q_2 = \left[(x^{A+5}, y^{A_1+2})^{B+5}, (x^{A+5}, z^{A_1''})^{B_1+4}, (y^{A_1'+2}, z^{A_2''+2})^{B_1''+4}\right]^{C+5} = 0$$

$$Q_3 = \left[(x^{A+6}, y^{A_1+2})^{B+5}, (x^{A+6}, z^{A_2''})^{B_1+5}, (y^{A_1'+2}, z^{A_2''+2})^{B_1''+3}\right]^{C+6} = 0$$

Neurčité polynomy (násobitelé) jsou výsledkem eliminace členů součinu všech zadaných rovnic a rovnice $[(x^A, y^{A_1})^B, (x^A, z^{A_1})^{B_1}, (y^{A_1}, z^{A_1})^{B_1}]^C = 0$ postupně pomocí první, druhé a třetí rovnice. Stupně A, A_1, A_2, B, B_1, B_2, C jsou stanoveny tak, aby rezultant byl desátého stupně. Nevýhodou tohoto postupu a důvodem, proč neuvádíme celý výpočet rezultantu, je velký počet členů, s nimiž se pracuje, což vede k rozsáhlé matici soustavy lineárních rovnic, jejíž determinant je rezultantem.

Naznačme postup výpočtu rezultantu metodou (B). Předpokládejme, že chceme, aby rezultant byl v neznámé z. Rovnice soustavy z příkladu 1.2 přepíšeme vzhledem k x a y:

$$x^3 + x^2y + x^2 + xy + x(2z-3) + y(-3z+2) + 1 = 0$$

$$-x^3 + x^2(-2z+3) - 2xy - x(-3z+1) + z - 1 = 0$$

$$x^2 - xy + 2xz + y(z+1) + 3 = 0$$

Neurčité polynomy (násobitelé) budou pouze v neznámých x a y a jejich stupeň bude takový, aby po vynásobení s rovnicí dané soustavy dosáhl stupně deset. I v tomto případě je počet členů velký. Bézout se věnuje popisu těch členů, které lze vynechat, které se musí vynechat a které je vhodné ponechat z důvodů zjednodušení výpočtu. Metoda (B) je podle něj (viz odstavec (276.) v [7, str. 175]) kratší, ale může vést k nadbytečným faktorům.

(d) Zkrácená metoda pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých stejného stupně *m* v eliminované neznámé *x*

Na str. 319 v [4] se Bézout vrací k řešení soustav dvou rovnic o dvou neznámých. Dospěl totiž k tomu, že pro rovnice s vysokým stupněm jsou výpočty příliš složité a ukazuje jiný postup. Uvažuje dvě rovnice stupně m v neznámé x, jejichž koeficienty jsou polynomy v neznámé y:

$$Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + Dx^{m-3} + \cdots + T = 0 \quad (1.1.25)$$

$$A'x^m + B'x^{m-1} + C'x^{m-2} + D'x^{m-3} + \cdots + T' = 0 \quad (1.1.26)$$

První rovnici násobí polynomy stupně *0, 1, 2,…, m* a to s koeficienty, které jsou ve druhé rovnici *(A´, B´, C´,…)*. Podobným způsobem násobí druhou rovnici, akorát používá koeficienty z první rovnice *(A, B, C,…)*. Polynomy, které získá, od sebe odečítá. Bézout postup popisuje v několika krocích. Nejprve první rovnici (1.1.25) vynásobí *A´* a druhou rovnici (1.1.26) *A*.

$$AA'x^m + BA'x^{m-1} + CA'x^{m-2} + DA'x^{m-3} + \cdots + TA' = 0$$
$$A'Ax^m + B'Ax^{m-1} + C'Ax^{m-2} + D'Ax^{m-3} + \cdots + T'A = 0$$

Druhou rovnici odečte od první a dostane rovnici, která má stupeň *m – 1*.

$$(BA' - B'A)x^{m-1} + (CA' - C'A)x^{m-2} + (DA' - D'A)x^{m-3} + \cdots + (TA' - T'A) = 0 \tag{1.1.27}$$

V dalším kroku násobí rovnice lineárními polynomy – první rovnici (1.1.25) vynásobí *A´x + B´* a druhou rovnici (1.1.26) *Ax + B*.

$$AA'x^{m+1} + AB'x^m + BA'x^m + BB'x^{m-1} + CA'x^{m-1} + CB'x^{m-2} + DA'x^{m-2} + DB'x^{m-3} + \cdots + TA'x + TB' = 0$$
$$AA'x^{m+1} + A'Bx^m + B'Ax^m + BB'x^{m-1} + C'Ax^{m-1} + C'Bx^{m-2} + D'Ax^{m-2} + D'Bx^{m-3} + \cdots + T'Ax + T'B = 0$$

Opět druhou rovnici odečte od první a získá:

$$(A'C - AC')x^{m-1} + (CB' - BC' + DA' - D'A)x^{m-2} + (B'D - D'B)x^{m-3} + \cdots + +(TA' - T'A)x + (TB' - T'B) = 0. \tag{1.1.28}$$

Tato rovnice je také ve stupni *m – 1*. Poté by postupoval úplně stejně, jen by násobil rovnice (1.1.20), (1.1.21) výrazy $A'x^2 + B'x + C'$, respektive $Ax^2 + Bx + C$. Rovnice by od sebe odečetl a získá další rovnici stupně *m – 1*. Takto by mohl pokračovat dále až by měl *m* rovnic, kde každá nová rovnice bude mít stupeň *m – 1*. Každou mocninu *x* považuje za neznámou. Dále vyvozuje podmínku, aby soustava měla řešení. Tato podmínka už nebude obsahovat neznámou *x*, bude dávat rovnici v neznámé *y*. Postup si můžeme ukázat na jeho příkladu.

Příklad č. 1.3: Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou *x*.

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \tag{1.1.29}$$
$$A'x^2 + B'x + C' = 0 \tag{1.1.30}$$

První rovnici vynásobí A', druhou rovnici písmenem A a dostane.

$$A'Ax^2 + A'Bx + A'C = 0$$
$$A\,A'x^2 + AB'x + AC' = 0$$

Druhou rovnici odečte od první a získá novou rovnici.

$$(A'B - AB')x + A'C - AC' = 0 \qquad (1.1.31)$$

Následně vynásobí první rovnici (1.1.29) výrazem $A'x + B'$ a druhou rovnici (1.1.30) výrazem $Ax + B$.

$$AA'x^3 + AB'x^2 + BA'x^2 + BB'x + CA'x + CB' = 0$$
$$AA'x^3 + A'Bx^2 + B'Ax^2 + BB'x + C'Ax + C'B = 0$$

Znovu odečte druhou rovnici od první a získá druhou novou rovnici.

$$(A'C - AC')x + B'C - BC' = 0 \qquad (1.1.32)$$

Rovnice (1.1.31) a (1.1.32) převádí na rovnici, která neobsahuje neznámou x a je rovna nule.

$$(A'B - AB')(B'C - BC') - (A'C - AC')^2 = 0$$

Tato rovnice neobsahující neznámou x je stejná jako výsledná rovnice, která by se získala postupem uvedeným v části **(a)**, násobením zadaných rovnic neurčitými polynomy s koeficienty $M, N, \ldots, M', N', \ldots$ Bézout poznamenává, že právě vysvětlený druhý postup je mnohem kratší než první.

(e) Zkrácená metoda pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých stupňů *m* a *m′* v eliminované neznámé *x*

Dále uvažuje dvě rovnice stupňů m a m', kde platí $m > m'$ v neznámé x. Postup pro rovnice stejného stupně se mírně upraví. Rovnice s nižším stupněm se násobí stejnými polynomy, ale zvětšenými $x^{m-m'}$-krát. Následně postupuje tak, že v prvním kroku vynásobí první rovnici koeficientem A' a druhou výrazem $Ax^{m-m'}$ a odečte druhý součin od prvního. V dalším kroku násobí první rovnici výrazem $A'x+B'$ a druhou rovnici vynásobí výrazem $Ax^{m-m'+1} + Bx^{m-m'}$ a znovu je od sebe odečte stejným způsobem. Ve třetím kroku vynásobí první rovnici $A'x^2 + B'x + C'$ a druhou výrazem $Ax^{m-m'+2} + Bx^{m-m'+1} + Cx^{m-m'}$ a pokračuje dál, dokud se nezíská m' rovnic každá stupně $m-1$. Takto vytvořené rovnice se vynásobí neurčitým koeficientem a druhou ze zadaných rovnic vynásobí neurčitým polynomem $M'x^{m-m'-1} + N'x^{m-m'-2} + P'x^{m-m'-3} + \ldots$. Tyto součiny se všechny sečtou a koeficienty všech mocnin x se položí rovny nule. Přesněji postup ukazuje na následujícím příkladu.

Příklad č. 1.4: Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou *x*.

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{1.1.33}$$

$$A'x^2 + B'x + C' = 0 \tag{1.1.34}$$

První rovnici vynásobí koeficientem A' a druhou výrazem Ax^2, protože se jedná o rovnici, která má nižší stupeň než první rovnice.

$$A'Ax^4 + A'Bx^3 + A'Cx^2 + A'Dx + A'E = 0$$
$$A'Ax^4 + B'Ax^3 + C'Ax^2 = 0$$

Následně od sebe rovnice odečte a dostane novou rovnici, která musí být ve stupni $m - 1$.

$$(A'B - AB')x^3 + (A'C - AC')x^2 + A'Dx + A'E = 0 \tag{1.1.35}$$

Nyní vynásobí první rovnici (1.1.33) výrazem $A'x+B'$ a druhou rovnici (1.1.34) $Ax^3 + Bx^2$.

$$AA'x^5 + AB'x^4 + BA'x^4 + BB'x^3 + CA'x^3 + CB'x^2 + AD'x^2 + DB'x + A'Ex + B'E = 0$$
$$AA'x^5 + A'Bx^4 + B'Ax^4 + BB'x^3 + C'Ax^3 + C'Bx^2 = 0$$

Znovu od sebe odečte druhou rovnici od první a dostane novou rovnici stupně $m - 1 = 3$.

$$(A'C - AC')x^3 + (A'D + B'C - BC')x^2 + (A'E + B'D)x + B'E = 0 \tag{1.1.36}$$

Vzniklé rovnice (1.1.35) a (1.1.36) vynásobí neurčitými koeficienty M a M'':

$$M(A'B - AB')x^3 + M(A'C - AC')x^2 + MA'Dx + MA'E = 0$$
$$M''(A'C - AC')x^3 + M''(A'D + B'C - BC')x^2 + M''(A'E + B'D)x + M''B'E = 0$$

Rovnici (1.1.34) vynásobí neurčitým polynomem $M'x + N'$ a dostane třetí rovnici třetího stupně:

$$A'M'x^3 + A'N'x^2 + B'M'x^2 + B'N'x + C'M'x + C'N' = 0 \tag{1.1.37}$$

Takto připravené rovnice sečetl a dostane.

$$\begin{aligned} M(A'B - AB')x^3 + M(A'C - AC')x^2 + MA'Dx + MA'E + M''(A'C - AC')x^3 \\ + M''(A'D + B'C - BC')x^2 + M''(A'E + B'D)x + M''B'E + A'M'x^3 \\ + A'N'x^2 + B'M'x^2 + B'N'x + C'M'x + C'N' = 0 \end{aligned}$$

Dále potřebuje, aby v rovnici neměl neznámou *x*, a proto všechny koeficienty členů třetího, druhého, prvního a nultého stupně budou rovny nule. Získá soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých M, M', M'', N'.

$$M(A'B - AB') + M''(A'C - AC') + A'M' = 0$$
$$M(A'C - AC') + M''(A'D + B'C - BC') + A'N' + B'M' = 0$$
$$MA'D + M''(A'E + B'D) + B'N' + C'M' = 0$$
$$MA'E + M''B'E + C'N' = 0$$

Soustavu rovnic vyšších stupňů převedl na soustavu lineárních rovnic v neznámých M, M'', M', N'. Ta má netriviální řešení, pokud je determinant odpovídající matice roven nule. Determinant je polynom v A, B, C, D, E, A', B', C', takže pouze v neznámé y.

V této části ukážeme ještě jeden konkrétní příklad z části **(a)**, abychom mohli porovnat oba postupy a zjistit, zda vyjde stejný výsledek. Jedná se o soustavu rovnic (1.1.1) a (1.1.2), kde jedna z nich má stupeň čtyři a druhá stupně dva v neznámé *x*.

<u>Příklad č. 1.5:</u> Ze soustavy dvou rovnic (1.1.1) a (1.1.2) se má eliminovat neznámá *x*.

$$-x^4(y^3 - 2y) + 2x^3(y^4 - 1) - 5x^2y^5 + xy^6 - 2y^7 = 0$$
$$x^2(y^2 - 1) - 3x(y^3 - 1) - 2y^4 = 0$$

První rovnici vynásobíme výrazem $(y^2 - 1)$ a druhou $x^2.(-y^3 + 2y)$. Tím dostaneme u obou rovnic stejný koeficient u x^4.

$$-x^4(y^5 - 3y^3 + 2y) + x^3(2y^6 - 2y^4 - 2y^2 + 2) + x^2(-5y^7 + 5y^5) + x(y^8 - y^6) \\ - 2y^9 + 2y^7 = 0$$
$$-x^4(y^5 - 3y^3 + 2y) + x^3(3y^6 - 6y^4 - 3y^3 + 6y) + x^2(2y^7 - 4y^5) = 0$$

Dále podle Bézoutova postupu rovnice od sebe odečteme a dostaneme novou rovnici, která je ve třetím stupni.

$$x^3(-y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2) + x^2(-7y^7 + 9y^5) + x(y^8 - y^6) - 2y^9 + \\ 2y^7 = 0 \qquad (1.1.38)$$

Následně vynásobíme první rovnici (1.1.1) výrazem $x(y^2 - 1) - 3(y^3 - 1)$ a druhou rovnici (1.1.2) výrazem $x^3(-y^3+2y) + 2x^2(y^4 - 1)$.

$$-x^5(y^5 - 3y^3 + 2y) + x^4(3y^6 - 6y^4 - 3y^3 + 6y) + x^4(2y^6 - 2y^4 - 2y^2 + 2) \\ + x^3(-6y^7 + 6y^4 + 6y^3 - 6) + x^3(-5y^7 + 5y^5) + x^2(15y^8 - 15y^5) \\ + x^2(y^8 - y^6) + x(-3y^9 + 3y^6) + x(-2y^9 + 2y^7) + 6y^{10} - 6y^7 = 0$$
$$-x^5(y^5 - 3y^3 + 2y) + x^4(2y^6 - 2y^4 - 2y^2 + 2) + x^4(3y^6 - 6y^4 - 3y^3 + 6y) \\ + x^3(-6y^7 + 6y^4 + 6y^3 - 6) + x^3(2y^7 - 4y^5) + x^2(-4y^8 + 4y^4) = 0$$

Znovu od sebe odečteme druhou rovnici od první a dostaneme novou rovnici.

$$x^3(-7y^7 + 9y^5) + x^2(20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4) + x(-5y^9 + 2y^7 + 3y^6) + 6y^{10} - 6y^7 = 0 \qquad (1.1.39)$$

Vzniklé rovnice (1.1.38) a (1.1.39) vynásobíme neurčitými koeficienty M a M'', navíc rovnici (1.1.2) vynásobíme neurčitým polynomem $M'x + N'$ a dostaneme navíc ještě jednu další rovnici (1.1.40).

$$Mx^3(-y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2) + Mx^2(-7y^7 + 9y^5) + Mx(y^8 - y^6) - 2My^9 + 2My^7 = 0$$

$$M''x^3(-7y^7 + 9y^5) + M''x^2(20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4) + M''x(-5y^9 + 2y^7 + 3y^6) + 6M''y^{10} - 6M''y^7 = 0$$

$$M'x^3(y^2 - 1) + N'x^2(y^2 - 1) + M'x^2(-3y^3 + 3) + N'x(-3y^3 + 3) - 2M'xy^4 - 2N'y^4 = 0 \qquad (1.1.40)$$

Takto připravené rovnice sečteme.

$$\begin{aligned} x^3[M(-y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2) + M'(y^2 - 1) + M''(-7y^7 + 9y^5)] \\ + x^2[M(-7y^7 + 9y^5) + M'(-3y^3 + 3) + N'(y^2 - 1) \\ + M''(20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4)] \\ + x[M(y^8 - y^6) - 2M'y^4 - N'(-3y^3 + 3) + M''(-5y^9 + 2y^7 + 3y^6)] \\ + M(-2y^9 + 2y^7) - 2N'y^4 + M''(6y^{10} - 6y^7) = 0 \end{aligned}$$

Nyní se budeme snažit, aby rovnice neobsahovala neznámou *x*. Všechny koeficienty členů třetího, druhého, prvního a nultého stupně postupně budou rovny nule. Tím dostaneme soustavu čtyř rovnic o čtyřech neznámých *M, M′, M′′, N′*.

$$M(-y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2) + M'(y^2 - 1) + M''(-7y^7 + 9y^5) = 0$$
$$M(-7y^7 + 9y^5) + M'(-3y^3 + 3) + N'(y^2 - 1) + M''(20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4) = 0$$
$$M(y^8 - y^6) - 2M'y^4 - N'(-3y^3 + 3) + M''(-5y^9 + 2y^7 + 3y^6) = 0$$
$$M(-2y^9 + 2y^7) - 2N'y^4 + M''(6y^{10} - 6y^7) = 0$$

Soustavu rovnic vyšších stupňů jsme převedli na soustavu čtyř lineárních rovnic o čtyřech neznámých *M*, *M′′*, *M′*, *N′*. Stejně jako v části za **(a)** bychom zapsali soustavu ve formě matice a ta má netriviální řešení, pokud je její determinant roven nule.

$$\beta = \begin{pmatrix} A & y^2-1 & 0 & -7y^7+9y^5 \\ -7y^7+9y^5 & -3y^3+3 & y^2-1 & B \\ y^8-y^6 & -2y^4 & -3y^3+3 & -5y^9+2y^7+3y^6 \\ -2y^9+2y^7 & 0 & -2y^4 & 6y^{10}-6y^7 \end{pmatrix},$$

kde $A = -y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2$ a $B = 20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4$. Determinant β je polynom pouze v neznámé y.

$$\begin{aligned} Det\ \beta = {} & -108y^7 + 324y^8 + 108y^9 + 198y^{10} - 1224y^{11} - 770y^{12} + 36y^{13} \\ & + 2820y^{14} + 1308y^{15} - 700y^{16} - 3150y^{17} - 1284y^{18} + 1158y^{19} \\ & + 1876y^{20} - 608y^{22} \end{aligned}$$

Výsledek nám vyšel podobně jako v části za **(a)**, jen s opačnými znaménky u každého členu, což nám neovlivňuje výsledný stupeň rezultantu. Výhodou tohoto postupu je počítání nižšího řádu matice, než tomu bylo předtím. Naopak nevýhodou se může jevit časově náročnější výpočet tří rovnic o třech neznámých, které jsme dostali. Tím jsme dokázali, že i jiným postupem podle Bézouta dojdeme ke stejnému výsledku.

(f) Zkrácená metoda pro soustavu dvou rovnic o dvou neznámých stupňů *m* a *m´* v eliminované neznámé *x* s jiným dosazením

Předchozí postup je kombinací postupu použitého v části **(d)** pro rovnice stejného stupně a postupu z části **(a)**, který využívá násobení neurčitými polynomy. Chce se vyhnout tomuto dlouhému postupu a snaží se přijít na lepší způsob eliminace, aby dostal lineární rovnici. Navrhl z druhé rovnice stupně $m´$ vyjádřit $x^{m´}$ a dosadit za $x^{m´}, x^{m´+1}, \ldots, x^{m-1}$ do $m´$ rovnic získaných postupem popsaným v **(e)**. Tím dostává $m´$ rovnic, které jsou stupně $m´ - 1$. Každou mocninu x považuje za novou neznámou, tím dostává soustavu lineárních rovnic a pomocí determinantu její matice i rezultant, který už neobsahuje neznámou x. Postup si ukážeme na následujícím příkladu, který odpovídá příkladu č. 1.4.

<u>Příklad č. 1.6:</u> Ze soustavy dvou rovnic eliminujte neznámou x.

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{1.1.41}$$

$$A´x^2 + B´x + C´ = 0 \tag{1.1.42}$$

Z druhé rovnice, jak popisuje, se vyjádří nejvyšší mocnina.

$$x^2 = \frac{-B´x - C´}{A´}$$

A tento výraz dosadí do rovnic (1.1.35), (1.1.36), které získal pomocí neurčitých polynomů.

$$x(A'B - AB')\left(\frac{-B'x-C'}{A'}\right) + (A'C - AC')\left(\frac{-B'x-C'}{A'}\right) + A'Dx + A'E = 0 \qquad (1.1.43)$$

$$x(A'C - AC')\left(\frac{-B'x-C'}{A'}\right) + (A'D + B'C - BC')\left(\frac{-B'x-C'}{A'}\right) + (A'E + B'D')x + B'E = 0$$

(1.1.44)

Pomocí úprav dostaneme.

$$-A'BB'x^2 + AB'^2x^2 - C'A'Bx + AB'C'x - B'A'Cx + B'AC'x - A'C'C - AC'^2 + A'^2Dx + A'^2E = 0$$

$$-B'A'Cx^2 + AC'B'x^2 - A'C'Cx + AC'^2x + A'DB'x + B'^2Cx - BB'C'x - A'DC' - B'C'C + BC'^2 + A'^2Ex + A'B'Dx + A'B'E = 0$$

Je zřejmé, že obě dvě rovnice nejsou lineární, a proto bychom znovu dosadili do rovnic za x^2. A vyšla by soustava dvou rovnic, kde neznámá x je v první mocnině. Následně bychom sestavili determinant matice, jehož prvky jsou koeficienty těchto lineárních rovnic a určili výsledný rezultant.

Tento postup si názorně ukážeme na následujícím příkladu soustavy dvou rovnic v neznámé x. Použijeme rovnice (1.1.1) a (1.1.2) z části **(a)**.

<u>Příklad č. 1.7:</u> Ze soustavy dvou rovnic (1.1.1) a (1.1.2) se má eliminovat neznámá x.

$$-x^4(y^3 - 2y) + 2x^3(y^4 - 1) - 5x^2y^5 + xy^6 - 2y^7 = 0$$

$$x^2(y^2 - 1) - 3x(y^3 - 1) - 2y^4 = 0$$

Z druhé rovnice vyjádříme nejvyšší mocninu.

$$x^2 = \frac{3x(y^3 - 1) + 2y^4}{y^2 - 1}$$

A tento výraz dosadíme do rovnic (1.1.38), (1.1.39), které jsme spočítali v příkladu č. 1.5.

$$x(-y^6 + 4y^4 + 3y^3 - 2y^2 - 6y + 2).\left(\frac{3x(y^3 - 1) + 2y^4}{y^2 - 1}\right) + (-7y^7 + 9y^5).\left(\frac{3x(y^3 - 1) + 2y^4}{y^2 - 1}\right) + x(y^8 - y^6) - 2y^9 + 2y^7 = 0$$

$$x(-7y^7 + 9y^5).\left(\frac{3x(y^3 - 1) + 2y^4}{y^2 - 1}\right) + (20y^8 - y^6 - 15y^5 - 4y^4).\left(\frac{3x(y^3 - 1) + 2y^4}{y^2 - 1}\right) + x(-5y^9 + 2y^7 + 3y^6) + 6y^{10} - 6y^7 = 0$$

A následně obě rovnice upravíme.

$$x^2(-3y^9+12y^7+12y^6-6y^5-30y^4-3y^3+6y^2+18y-6)$$
$$+x(-22y^{10}+33y^8+27y^7-3y^6-39y^5+4y^4)-16y^{11}+22y^9$$
$$-2y^7=0$$
$$x^2(-21y^{10}+27y^8+21y^7-27y^5)$$
$$+x(41y^{11}+22y^9-102y^8-14y^7+45y^5+12y^4)+46y^{12}-8y^{10}$$
$$-36y^9-8y^8+6y^7=0$$

Jelikož nejsou obě rovnice lineární, musíme znovu dosadit za x^2 stejný výraz.

$$\left(\frac{3x(y^3-1)+2y^4}{y^2-1}\right).(-3y^9+12y^7+12y^6-6y^5-30y^4-3y^3+6y^2+18y-6)$$
$$+x(-22y^{10}+33y^8+27y^7-3y^6-39y^5+4y^4)-16y^{11}+22y^9$$
$$-2y^7=0$$
$$\left(\frac{3x(y^3-1)+2y^4}{y^2-1}\right).(-21y^{10}+27y^8+21y^7-27y^5)$$
$$+x(41y^{11}+22y^9-102y^8-14y^7+45y^5+12y^4)+46y^{12}-8y^{10}$$
$$-36y^9-8y^8+6y^7=0$$

A znovu upravíme.

$$x(-31y^{12}+91y^{10}+72y^9-54y^8-192y^7-38y^6+75y^5+140y^4-9y^3-18y^2$$
$$-54y+18)-22y^{13}+62y^{11}+24y^{10}-36y^9-60y^8-4y^7+12y^6$$
$$+36y^5-12y^4=0$$
$$x(-22y^{13}+62y^{11}+24y^{10}-12y^9-60y^8-28y^7+12y^6+36y^5-12y^4)+4y^{14}$$
$$+6y^{11}-12y^9+8y^8-6y^7=0$$

Po následných úpravách jsme obě rovnice převedli na soustavu dvou lineárních rovnic s neznámou *x*. Jako v předchozích případech soustavu zapíšeme do matice a vypočteme její determinant.

$$Det\ \gamma=-108y^7+324y^8+324y^9-450y^{10}-1836y^{11}+22y^{12}+3168y^{13}$$
$$+3598y^{14}-1716y^{15}-7878y^{16}-3714y^{17}+5288y^{18}+8190y^{19}$$
$$+1728y^{20}-5466y^{21}-5116y^{22}+1158y^{23}+3092y^{24}-608y^{26}$$

Bézout dále vyvozuje nedostatky tohoto postupu na příkladu dvou rovnic, kde jedna je devátého stupně a druhá stupně třetího. U našeho praktického příkladu rovnic (1.1.1) a (1.1.2) jsme již tyto nedostatky mohli odhalit, a to se jednalo o rovnice nižšího stupně, než sám použil. Pro tuto soustavu dvou rovnic jsme odhalili nadbytečné faktory při použití této metody, než tomu bylo v části **(a)** a **(e)**. Dochází k názoru, že stupeň rezultantu, který dostal pomocí postupu popsaného v příkladu č. 1.4 je menší než stupeň rezultantu získaného dalším postupem, který byl použit v příkladu č. 1.6. Zjistil, že druhou metodou dostane rezultant, který obsahuje nadbytečné činitele. Bézout dokonce vyvozuje tvar tohoto nadbytečného činitele, který je:

$$A'^{(m-m')(m'-1)} \tag{1.1.45}$$

Oba postupy jsme použili pro soustavu rovnic (1.1.1) a (1.1.2), kde jedna je čtvrtého a druhá druhého stupně v neznámé *x*. S výjimkou postupu popsaného v části **(f)** jsme dostali vždy stejné stupně rezultantu. Tento postup by měl tedy obsahovat nadbytečné činitele, o kterých Bézout mluví. Pokud do vzorečku (1.1.45) doplníme $A' = y^2 - 1$, $m = 4$ a $m' = 2$, dostaneme: $(y^2 - 1)^{(4-2).(2-1)} = (y^2 - 1)^2$. To znamená, že se v postupu podle textu z části **(f)** objevuje extrafaktor čtvrtého stupně. „Rezultant“ vypočtený podle **(f)** má skutečně o čtyři větší stupeň než rezultant určený podle **(a)** nebo **(e)**.

Z výrazu (1.1.45) pro výpočet nadbytečného faktoru plyne, že pokud budeme mít soustavu dvou rovnic, které jsou v neznámé ve stejném stupni, tj. $m = m'$, můžeme použít postup **(a)**, resp. **(e)** nebo **(f)** a dostaneme vždy stejný rezultant. Pro soustavy rovnic, jejichž stupně jsou různé a A' je aspoň stupně jedna v proměnné *y*, toto tvrzení neplatí, viz příklady č. 1.4 a č. 1.6.

Následně uvažuje rovnice ve třech a více neznámých. Konkrétně zmiňuje tři rovnice ve třech neznámých, které jsou vzhledem k *x* nejprve stejného stupně *m*, dále ve stupních m, m', m'' $(m > m' > m'')$. Ukazuje ty samé postupy jako pro dvě rovnice, stanovuje stupeň rezultantu a zjišťuje, že rezultant obsahuje nadbytečné činitele poměrně vysokého stupně. Podotýká, že je řada jiných postupů, jak eliminovat neznámou *x* z takových tří rovnic, které by vedly k lepším výsledkům.

Na závěr příspěvku z roku 1764 už jen krátce popisuje, že uvedené postupy kombinování rovnic a polynomů můžou vést k nalezení největšího společného dělitele. Už Johannes Hudde využíval eliminace rovnic k nalezení největšího společného dělitele a později se tato myšlenka objevuje u J. J. Sylvestera v roce 1853.

288 MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

RECHERCHES SUR LE DEGRÉ DES ÉQUATIONS RÉSULTANTES DE L'ÉVANOUISSEMENT DES INCONNUES,

Et ſur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces Équations.

Par M. BÉZOUT.

LES Recherches dont je vais expoſer les réſultats dans ce Mémoire, doivent naiſſance à celles dont je continue de m'occuper ſur la réſolution algébrique des équations; quelque route qu'on prenne pour réſoudre ce dernier problème, on aura toujours à éliminer pluſieurs inconnues dont les rapports ſeront exprimés par des équations plus ou moins élevées; c'eſt donc préparer les voies que de travailler à perfectionner les méthodes d'élimination; & pour y parvenir, le problème qu'on doit ſe propoſer eſt, ce me ſemble, *de déterminer à quel degré doit monter l'équation réſultante de l'élimination:* en effet, cette connoiſſance une fois établie, on a, ſi je puis m'exprimer ainſi, la pierre de touche à l'aide de laquelle on peut juger du mérite des méthodes qu'on ſe propoſe d'employer pour éliminer.

Si les méthodes d'élimination n'avoient d'autre utilité que leur application à la réſolution algébrique des équations, je me ſerois contenté de ce qui peut avoir rapport à ce dernier objet & je l'aurois réuni avec ce que j'ai pu trouver juſqu'à préſent ſur cette matière; mais ces méthodes ont une application beaucoup plus étendue & telle qu'elles deviennent indiſpenſables dans tous les problèmes où il y a plus d'une inconnue. En effet, ſi on a des méthodes pour réſoudre, par approximation, les problèmes déterminés lorſqu'on n'a qu'une ſeule équation, on n'en

Obrázek 1: Úvodní stránka Bézoutovy práce z roku 1764

(**Zdroj:** Převzato z [4, str. 523])

2. Další eliminační postupy

2.1 Joseph – Louis Lagrange (1736–1813)

Italsko – francouzský matematik, který se narodil 25. ledna 1736 v Turíně, strávil své dětství v Itálii. Informace o něm můžeme také najít pod jeho původním jménem Giuseppe Lodovico Lagrangia. Celý život se věnoval teorii čísel, analytické a nebeské mechanice. V roce 1788 vydává své nejdůležitější dílo *Mécanique analytique* (Analytická mechanika), jež byla podkladem pro další práce v této oblasti.

Jeho otec francouzského původu působil v úřadu krále Sardinie a měl na starosti spravování majetku. I přes jeho vysoké postavení nebyla rodina bohatá, protože otec ztratil velké množství peněz v neúspěšných finančních investicích. To možná Lagrangeovi pomohlo k tomu, že se začal věnovat matematice. Měl se totiž stát právníkem, což bylo velké přání jeho rodiny. V jeho životopisech se uvádí, že v této souvislosti řekl větu: *„Kdybych byl bohatý, pravděpodobně bych se nevěnoval matematice.“*[4] Studoval vysokou školu v Turíně, kde jeho zájem o matematiku vzrostl. Mimo tento obor se také věnoval fyzice a jeho učitelem byl fyzik Giovanni Battista Beccaria.

Od začátku se snažil věnovat své práci sám, bez jakékoliv pomoci. A možná i proto nebyly jeho první myšlenky ničím významné. Další svoje kroky se snažil společně konzultovat v různých korespondencích s Eulerem, ale po nějaké době zjistil, že jeho ideje se objevují i u jiných autorů. Bál se nařčení, že kopíruje jejich práce a mohl by být označen za podvodníka. Tato zkušenost ho podnítila ještě k většímu úsilí než doposud. Začal pracovat na tautochroně, což je křivka, po níž částice dorazí vždy do nejnižšího bodu za stejný čas nezávisle na počáteční pozici. Jednalo se o jeden z důležitých příspěvků v matematice. Bylo mu teprve 19 let a už prokázal svůj velký talent, který mu vynesl post profesora matematiky na Regie Scuole di Artiglieria e Fortificazione (Královská dělostřelecká škola) v Turíně. Dostalo se mu ještě větší pozornosti Leonharda Eulera a dalších. Byla mu nabízena různá místa v Evropě, kde by měl daleko lepší podmínky než v Itálii. On však zůstává a později se stává zakládajícím členem vědecké společnosti v Turíně. S jeho přispěním byl založen vědecký časopis *Miscellanea Taurinensia* známý též jako *Mélanges de Turin*, v němž publikoval nejrůznější témata, kterým se věnoval. Mezi ně patří práce o počtu pravděpodobnosti, počtu variací či teorie vibračních řetězců, kterými se zabývali již Newton, Bernoulli nebo právě Euler. Zde se objevila i jeho díla spojená s diferenciálními rovnicemi.

[4] Převzato z [18].

Jeho další práce se týkaly zkoumaní oběžných drah Saturnu a Jupitera či pohybu a postavení Měsíce, kde použil rovnice, které nesou dnes jeho jméno.

Neustále byl přesvědčován k tomu, aby opustil Turín a přestěhoval se do Berlína a působil na Berlínské akademii. Po mnoha dopisech od matematika Jeana d'Alemberta a po odchodu Eulera do Ruska se nakonec stává členem této akademie, a v roce 1766 navíc i jejím ředitelem. Zde strávil asi dvacet let svého života, během nichž stále publikoval a získával pravidelně ocenění od Akademie věd v Paříži. Jeho příspěvky se týkaly astronomie, mechaniky, pravděpodobnosti, teorie čísel a dalších. V roce 1770 uvedl svou důležitou práci *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, kde zkoumá rovnice až čtvrtého stupně, které se dají řešit v tzv. radikálech[5].

Lagrange zůstává v Berlíně až do roku 1787. Zde po smrti své ženy a dalších osobních problémech odchází do Paříže a stává se členem tamější akademie věd. O rok později vydává svou nejdůležitější práci *Mécanique analytique*, kde shrnuje veškerou práci v oblasti mechaniky a teorie diferenciálních rovnic. Tím přeměnil celou koncepci mechaniky na matematickou analýzu. Stal se také členem komise, která se zabývala váhami, mírami a metrickým systémem. Krátce po skončení těžkých obdobích francouzské revoluce se začaly otevírat nové školy, na kterých sám Lagrange učil a vychovával nové učitele matematiky. Nicméně dál publikoval a vydával například svazky s názvem *Théorie des fonctions analytiques* (1797) a *Leçons sur le calcul des fonctions* (1800). Zabýval se v nich teorií funkcí a diferenciálním počtem.

V roce 1808 Napoleon jmenoval Lagrange do čestné legie, udělil mu titul říšský Hrabě a za jeho dalšího působení se mu dostalo i dalšího ocenění. Joseph – Louis Lagrange zemřel 10. dubna 1813 v Paříži.

Přejdeme k ukázkám eliminace neznámých z rovnic podle Lagrangea, který navazuje na metody Švýcara Leonharda Eulera, Francouze Étienne Bézouta a na německého matematika Ehrenfrieda Walthera von Tschirnhausa. V jeho pracích se objevilo mnoho postupů a jsou většinou rozděleny do částí podle stupně příslušných soustav rovnic, například postup pro třetí stupeň nebo pro stupeň čtyři.

Tschirnhaus inspiroval Lagrangea metodou řešení kubické rovnice. Pro nalezení kořenů rovnice $y^3 - py - q = 0$ Tschirnhaus předpokládá, že $y^2 - ay - b - x = 0$. Eliminací y z takto vzniklé soustavy získá rovnici třetího stupně v x. Koeficienty u lineárního a

[5] Řešení polynomiální rovnice v radikálech znamená nalézt vzorce pro její kořeny vyjádřené pomocí jejich koeficientů, takže vzorec zahrnuje pouze operace sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování.

kvadratického členu položí rovny nule. Dostanou se tak hodnoty a, b. Navíc je při takové volbě kubická rovnice pro x ryze kubickou rovnicí, kterou lze snadno řešit. Ze známých hodnot a, b, x se již snadno určí řešení y. Řešení rovnice o jedné neznámé tak bylo převedeno na řešení soustavy rovnice třetího a druhého stupně o dvou neznámých. Přeznačme neznámé a ukažme vše na konkrétním příkladu.

<u>Příklad č. 2.1:</u> Řešte kubickou rovnici $x^3 + 2x - 3 = 0$ Tschirnhausovým postupem. Ke kubické rovnici přidáme rovnici druhého stupně v neznámé x, vycházíme tedy ze soustavy:

$$\begin{aligned} x^3 + 2x - 3 &= 0, \\ x^2 &= bx + a + y \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Dosazením za x^2 z druhé rovnice soustavy do první získáme rovnici, která je v x pouze lineární:

$$x(a + b^2 + 2 + y) = -ab + 3 + by \tag{2.1.2}$$

Nyní lze v druhé rovnici soustavy (2.1.1) dosadit za x, čímž dostaneme vztah obsahující pouze y, a, b:

$$\begin{aligned} &y^3 + (3a + 4)y^2 + (3a^2 + 8a + 2b^2 + 9b + 4)y + a^3 + 4a^2 + 4a + \\ &+2ab^2 + 9ab + 3b^3 + 6b - 9 = 0 \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Koeficienty kvadratického a lineárního členu položme rovny nule:

$$\begin{aligned} 3a + 4 &= 0, \\ 3a^2 + 8a + 2b^2 + 9b + 4 &= 0 \end{aligned}$$

Protože jsou nejvýše druhého stupně v proměnných a, b, snadno určíme, že pro $a = -\frac{4}{3}$, $b = -\frac{9}{4} \pm \frac{5}{12}\sqrt{33}$ je kubická rovnice (2.1.3) bez absolutního členu a má tvar:

$$y^3 - \frac{1375}{432}\left(55 \mp 9\sqrt{33}\right) = 0$$

Jeden z jejích kořenů, například pro $b = -\frac{9}{4} + \frac{5}{12}\sqrt{33}$ je $y = \frac{55}{12} - \frac{5}{12}\sqrt{33}$, dosaďme spolu s $a = -\frac{4}{3}$ do lineární rovnice (2.1.2). Vychází $x = 1$ jako jeden z kořenů zadané rovnice, ostatní jsou komplexní.

Lagrangeovy metody eliminace se v mnoha věcech nelišily od postupů, které byly již použity v minulosti. Pokud máme soustavu dvou rovnic stupně vyššího než dva, tak se snažil postupnými kroky o snížení jejich stupně, až došel k rovnici, která neznámou již neobsahovala, což je výsledek eliminace. Dokonce tvrdí, že tato metoda je v podstatě stejná jako nalezení největšího společného dělitele. Zbytky, které zbyly po úpravě rovnic se vždy budou rovnat nule, stejně jako výsledná rovnice, která neznámou neobsahuje. Předpokládejme, že jsou dány dvě polynomiální rovnice o jedné neznámé:

$$P(x) = 0,$$
$$Q(x) = 0.$$

Mají-li dva polynomy dva společné nulové body, jsou oba dělitelné činitelem druhého stupně. Tato myšlenka se objevuje už u Eulera v jeho práci z roku 1764, viz [str. 44, 12]. Pokud jsou x', x'', x''', ... kořeny polynomu Q, tak bude platit, že rovnice $Q(x) = 0$ odpovídá vztahu $P(x').P(x'').P(x''')... = 0$. Lagrange dále zpřesňuje Eulerův výsledek týkající se výsledné rovnice; pokud je $r = 0$ nutná podmínka pro to, aby rovnice $P = 0$ a $Q = 0$ měly společné řešení, pak bude mít za podmínek $r = 0$ a $r' = 0$ dvě společná řešení, za podmínek $r = 0$, $r' = 0$ a $r'' = 0$ tři společná řešení atd. Kdybychom měli více neznámých, bude platit to samé. Lagrange sice navazoval na již známé postupy, ale je nejspíš prvním, kdo použil termín „teorie eliminace".

Přistupme konkrétně k řešení rovnic podle Lagrangea. V každé algebraické metodě řešení hledá Lagrange takový výraz („résolvante") redukovaných řešení jako funkce řešení navržených. V příkladu 2.1.1. je takovým výrazem:

$$b = \frac{x'^2 + \alpha x''^2 + \alpha^2 x'''^2}{x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''},$$

kde α je primitivní třetí odmocnina z jedné. Výraz určí z druhé rovnice soustavy (2.1.1.), kde za x volí x', x'', x''' a za y řešení ryze kubické rovnice $y^3 + C = 0$, tj. $y = -\sqrt[3]{C}$.

$$x'^2 = bx' + a - \sqrt[3]{C}$$
$$x''^2 = bx'' + a - \alpha\sqrt[3]{C}$$
$$x'''^2 = bx''' = a - \alpha^2\sqrt[3]{C}$$

2.2 James Joseph Sylvester (1814–1897)

James Joseph Sylvester se narodil 3. září 1814 v Londýně, kde také nastoupil do základní školy v Highgate. V roce 1827 tuto školu mění za jinou v Islingtonu, ale jen na krátkou dobu. Po středoškolských studiích nastupuje na vysokou školu St John's College v Cambridge. Vzdělávání mu komplikuje mnoho zdravotních problémů a úmrtí jeho otce. I přes všechny komplikace měl v roce 1837 studium dokončit. Studenti však v té době museli před absolvováním složit církevní přísahu k anglikánské církvi, ale Sylvester byl Žid a odmítl. Proto nemohl absolvovat celé studium a k tomu byl vyškrtnut ze všech návrhů na ocenění za svoji práci při studiu. Tím se mu nedostávalo pracovních míst, kde by mohl učit. Až tři roky po těchto událostech nastoupil na univerzitu v Londýně, kde vyučoval fyziku, a dokonce jedním z kolegů byl Augustus De Morgan, který ho dříve i učil. Jenže byl lepší v matematice a chtěl se stát jejím profesorem na některé ze škol. Stále však neměl dokončenou vysokou školu, což se mu povedlo v roce 1841 na Trinity College v Dublinu, kde i Židé měli možnost absolvovat studium. Bylo mu 27 let a dostal vytoužené místo profesora matematiky, ale ne v Anglii, nýbrž ve Spojených státech amerických, konkrétně na University of Virginia v Charlottesvilu.

Konečně se mohl plně věnovat matematice ve všech směrech. Stal se vůbec prvním židovským profesorem v USA. Bohužel pár měsíců po jeho nástupu se stal incident, který ovlivnil jeho kariéru na delší dobu. Při jedné z jeho přednášek student nedával pozor a údajně si měl číst noviny. Sylvester ho měl slovně upozornit, aby přestal. Student byl dotčený tím, co si k němu profesor dovolil a vyzval ho k omluvě. Ta nepřišla a žák fyzicky Sylvestera napadl. Ten vzal hůl, v které měl schovaný malý nůž a bodnul ho do oblasti žeber. Studentovi se nakonec nic vážného nestalo, ale Sylvester měl veliké problémy. Přes veškerou snahu svědků incidentu a dalších učitelů na univerzitě Sylvester sám odchází.

Nějaký čas zůstal ještě v Americe, kde se snažil najít místo na jiné škole. Po dvou neúspěšných pokusech získat pracovní místo se rozhodl o návrat zpět do Anglie. Do Evropy se však informace o incidentu také dostaly, a proto musí hledat jiné zaměstnání než jako profesor matematiky. Po nějaké době se stal sekretářem ve společnosti *Equity Law a Life Assurance Company*. Při přípravě na život obhájce dával nějaké hodiny matematiky, ale jinak se snažil vyrovnat s koncem v oboru. V tomto období se setkal s dalším matematikem Arthurem Cayleym, který chtěl být rovněž právníkem. Stali se přáteli, a i díky němu se Sylvester vrátil ke svému původnímu oboru. Neustále si spolu vyměňovali názory a navzájem se v mnoha problémech doplňovali. Dokonce po nějaké době dostává práci na katedře matematiky na Royal Military Academy ve Woolwichi.

Sylvester se především zajímal o algebru. Nejdůležitější prací, kterou se v tomto období zabýval, je teorie matic. Dále přispíval k teorii čísel nebo objevil diskriminant pro kubickou rovnici a tento výraz použil i pro kvadratickou rovnici či rovnice vyšších řádů. Dostával plno ocenění a stal se členem Londýnské matematické společnosti a akademie věd v Paříži. V roce 1870 odešel do důchodu a vydal svoji jedinou knihu *The Laws of Verse* (Veršské zákony), která je poezií, nikoli matematickou publikací.

Postupně se přestal věnovat matematice, ale po navštívení jedné z přednášek Čebyševa se k ní znovu vrací na Johns Hopkins University v Baltimore. Založil první matematický časopis *American Journal of Mathematics* v USA, publikoval velké množství článků a společně se studenty vedl různé výzkumy. V roce 1892 se ještě stal zástupcem profesora v Oxfordu, ale už byl z části slepý a ztrácel paměť. Svůj život dožil v Anglii, kde 15. března 1897 zemřel.

Sylvester za svůj život vydal mnoho děl, která se zaměřovala na různé oblasti v matematice či fyzice a jeho přínos byl obrovský. Zajímal se také o algebru, jak jsme již zmínili a konkrétně i eliminací neznámých ze soustavy rovnic. Zabýval se i rezultantem, maticemi a determinantem pro výpočet rovnic různého řádu. Rádi bychom však ukázali postup řešení rovnic metodou, kterou sám Sylvester nevytvořil. Jedná se o postup převedení koeficientů soustavy dvou rovnic o jedné neznámé různých stupňů do matice. Nazýváme jí Sylvesterova matice na jeho počest za přínos v této oblasti matematiky. Matice má následující obecný tvar.

$$
\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix}
a_n & a_{n-1} & \vdots & \vdots & a_0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & a_n & a_{n-1} & \vdots & \vdots & a_0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & a_n & a_{n-1} & \vdots & \vdots & a_0 \\
b_m & b_{m-1} & \vdots & \vdots & b_0 & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & b_m & b_{m-1} & \vdots & \vdots & b_0 & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & b_m & b_{m-1} & \vdots & \vdots & b_0
\end{pmatrix}
$$

Jedná se o čtvercovou matici pro dva polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ a $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x^1 + b_0$. Můžeme si všimnout, že koeficienty jsou zapisovány postupně do jednotlivých řádků v matici. V prvních řádcích píšeme jen ty u výrazu $f(x)$ s tím, že je vždy na dalším řádku posouváme doprava. Na dalších se nám objevují koeficienty polynomu $g(x)$ úplně stejným způsobem. Do prázdných míst v matici se píší nuly. Při jejím sestavování musíme být opatrní na dodržení čtvercové matice a tím uzpůsobit posouvání koeficientů na dalších řádcích. Abychom mohli spočítat rezultant Sylvesterovy matice musíme spočítat její determinant $(res_x (f(x), g(x)) = 0)$.

Na příkladu si ukážeme, jak dnes můžeme matici využít při řešení rovnic. Jde o soustavu dvou kvadratických rovnic o jedné neznámé *x*.

<u>Příklad č. 2.2:</u> Vyřešte soustavu dvou rovnic o jedné neznámé *x* s parametrem a.

$$x^2 - 6x - 2a + 3 = 0 \tag{2.2.1}$$

$$x^2 + 3x - a = 0 \tag{2.2.2}$$

Použijeme Sylvesterovu matici. Do ní se postupně přidají koeficienty u neznámé *x*.

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2a+3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2a+3 \\ 1 & 3 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -a \end{pmatrix} \tag{2.2.3}$$

Dále spočítáme determinant matice (2.3.3).

$$Det\big(Syl(f,g)\big) = \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2a+3 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & -2a+3 \\ 1 & 3 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -a \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -6 & -2a+3 \\ 3 & -a & 0 \\ 1 & 3 & -a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -6 & -2a+3 & 0 \\ 1 & -6 & -2a+3 \\ 1 & 3 & -a \end{vmatrix}$$

Po výpočtech a úpravě dostaneme polynom s parametrem *a*.

$$a^2 - 114a + 90$$

Kořeny rovnice $a^2 - 114a + 90 = 0$ jsou dva, a to $a_1 = 57 + 9\sqrt{39}$ a $a_2 = 57 - 9\sqrt{39}$. Tyto dva kořeny postupně dosadíme do obou rovnic v soustavě a zjistíme, pro které *x* dává smysl. Pro $a_1 = 57 + 9\sqrt{39}$ má první rovnice (2.3.1) kořeny $x_1 = 12 + \sqrt{39}$ a $x_2 = -6 - \sqrt{39}$, druhá rovnice (2.3.2) má kořeny $x_3 = 3 + \sqrt{39}$ a $x_4 = -6 - \sqrt{39}$. Společným kořenem je $-6 - \sqrt{39}$ pro $\boldsymbol{a_1 = 57 + 9\sqrt{39}}$. To samé chybí udělat pro $a_2 = 57 - 9\sqrt{39}$, kde první rovnice (2.3.1) má kořeny $x_1 = 12 - \sqrt{39}$, $x_2 = \sqrt{39} - 6$ a druhá rovnice (2.3.2) má kořeny $x_3 = \sqrt{39} - 6$ a $x_4 = 3 - \sqrt{39}$. Zde je společným kořenem $\sqrt{39} - 6$ pro $\boldsymbol{a_2 = 57 - 9\sqrt{39}}$. Pomocí Sylvesterovy matice a následného determinantu jsme byli schopni získat ze soustavy rovnic polynom, který obsahoval jen parametr *a*.

Ten samý příklad můžeme vypočítat i podle vzorce, který se dnes využívá pro výpočet kvadratické rovnice. Využijeme toho a porovnáme, zda jsou výsledky stejné.

<u>Příklad č. 2.3:</u> Vyřešte soustavu dvou rovnic o jedné neznámé *x*.

$$x^2 - 6x - 2a + 3 = 0 \tag{2.2.4}$$

$$x^2 + 3x - a = 0 \tag{2.2.5}$$

Jelikož máme v soustavě dvě kvadratické rovnice, tak postupně vyjádříme $x_1 = 3 + \sqrt{6+2a}$, $x_2 = 3 + \sqrt{6+2a}$, $x_3 = \frac{-3+\sqrt{9+4a}}{2}$ a $x_4 = \frac{-3+\sqrt{9+4a}}{2}$ z obou rovnic. Výrazy obsahují stále parametr a, a tak musíme ověřit všechny případy, které mohou nastat. Postupně budeme řešit rovnosti $x_1 = x_3$, $x_1 = x_4$, $x_2 = x_3$ a $x_2 = x_4$. Po řadě výpočtů nám vyjde, že první dvě rovnosti nemají řešení, třetí má smysl pro $\boldsymbol{a = 57 + 9\sqrt{39}}$ a pro čtvrtou dostaneme $\boldsymbol{a = 57 - 9\sqrt{39}}$.

Získali jsme hodnoty parametru, které jsou stejné jako řešení pomocí Sylvesterovy matice. Tím jsme dokázali, že skutečně je postup velice vhodný a správný.

Ukažme si ještě na jednom příkladu využití Sylvesterovy matice. Tentokrát se bude jednat o soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*. Postup se nijak nebude lišit od toho, co jsme si uvedli. Rozdílný bude rezultant, který bude obsahovat jednu z neznámých. Záleží na tom, kterou si vybereme.

Příklad č. 2.4: Vyřešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.[6]

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{2.2.6}$$

$$x + 2y = 4 \tag{2.2.7}$$

Polynomy řešíme v neznámé *x* s koeficienty v T[y] znovu podle Sylvesterovy matice.

$$\mathrm{Syl}(f,g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & y^2-4 \\ 1 & 2y-4 & 0 \\ 0 & 1 & 2y-4 \end{pmatrix} \tag{2.2.8}$$

Vypočítáme determinant matice (2.3.8).

$$Det\big(Syl(f,g)\big) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y^2-4 \\ 1 & 2y-4 & 0 \\ 0 & 1 & 2y-4 \end{vmatrix}$$

Pokud determinant upravíme například pomocí Sarrusova pravidla, dostaneme po úpravě polynom.

$$5y^2 - 16y + 12.$$

Nulové body polynomu jsou $y_1 = 2$ a $y_2 = \frac{6}{5}$. Po dosazení za *y* do rovnic získáme $x_1 = 0$ a $x_2 = \frac{8}{5}$. Řešením soustavy rovnic jsou dvojice ***[0, 2]*** a $\boldsymbol{[\frac{8}{5}, \frac{6}{5}]}$.

Pokud opět vypočteme tento příklad i jiným způsobem, musíme dostat stejný výsledek.

---

[6] Převzato z [23]

<u>Příklad č. 2.5:</u> Vyřešte soustavu dvou rovnic o dvou neznámých *x* a *y*.

$$x^2 + y^2 - 4 = 0 \tag{2.2.8}$$

$$x + 2y = 4 \tag{2.2.9}$$

Jelikož je druhá rovnice lineární v obou neznámých, vyjádříme neznámou *x* a získáme

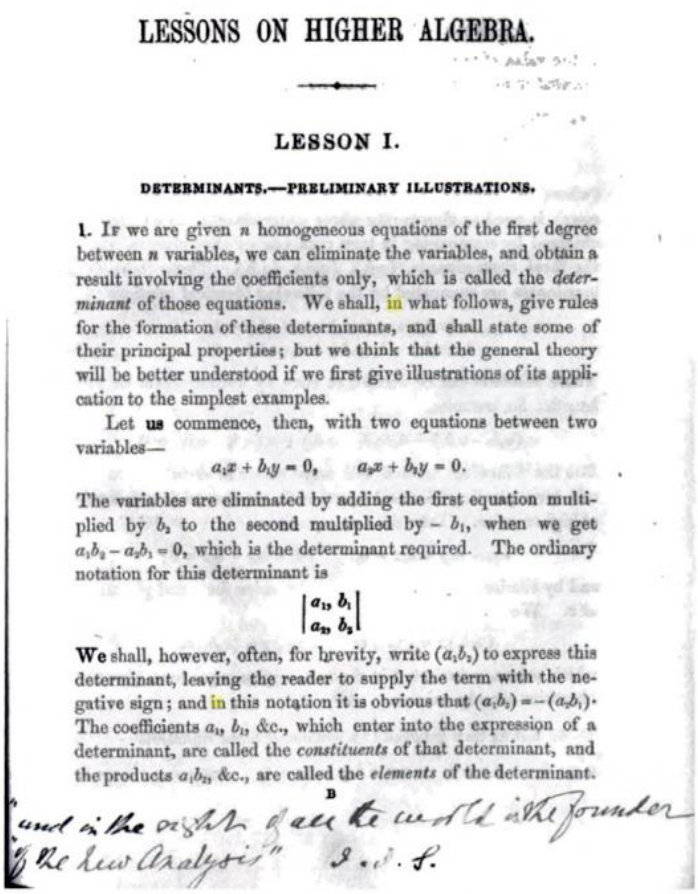
$$x = 4 - 2y.$$

Dosadíme do první rovnice a získáme kvadratickou rovnici.

$$5y^2 - 16y + 12 = 0$$

Je zřejmé, že obdržíme stejnou dvojici kořenů pro danou soustavu rovnic o dvou neznámých *x* a *y*, tedy ***[0, 2]*** a $\boldsymbol{[\frac{8}{5}, \frac{6}{5}]}$.

Chtěli jsme ukázat i jinou metodu pro úpravu rovnic, než tomu bylo doposud. Důvodem je možné využití postupu v dnešní době, a nejen pouhý náhled do minulosti eliminace, kde jsou některé věci příliš složité.



LESSONS ON HIGHER ALGEBRA.

LESSON I.

DETERMINANTS.—PRELIMINARY ILLUSTRATIONS.

1. If we are given *n* homogeneous equations of the first degree between *n* variables, we can eliminate the variables, and obtain a result involving the coefficients only, which is called the *determinant* of those equations. We shall, in what follows, give rules for the formation of these determinants, and shall state some of their principal properties; but we think that the general theory will be better understood if we first give illustrations of its application to the simplest examples.

Let us commence, then, with two equations between two variables—

$$a_1x + b_1y = 0, \qquad a_2x + b_2y = 0.$$

The variables are eliminated by adding the first equation multiplied by b_2 to the second multiplied by $-b_1$, when we get $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, which is the determinant required. The ordinary notation for this determinant is

$$\begin{vmatrix} a_1, & b_1 \\ a_2, & b_2 \end{vmatrix}$$

We shall, however, often, for brevity, write (a_1b_2) to express this determinant, leaving the reader to supply the term with the negative sign; and in this notation it is obvious that $(a_1b_2) = -(a_2b_1)$. The coefficients a_1, b_1, &c., which enter into the expression of a determinant, are called the *constituents* of that determinant, and the products a_1b_2, &c., are called the *elements* of the determinant.

B

"and in the sight of all the world the founder of the New Analysis" J. J. S.

Obrázek 2: Ukázka ze Sylvesterovy práce

(**Zdroj:** Převzato z [20, str. 224])

2.3 Arthur Cayley (1821–1895)

Arthur Cayley je anglický matematik, který se narodil 16. srpna 1821 v Richmondu. I když jeho rodina vždy žila v Anglii, tak Cayley strávil dětství v ruském Petrohradu. Důvodem byla pracovní nabídka otce, který se živil jako obchodník a v Rusku se mu naskytla příležitost. Když mu bylo sedm let, vrátili se zpět do Londýna. Arthur Cayley už od začátku nástupu do školy vynikal svým talentem nejen v oblasti matematiky, ale také v chemii či fyzice. Dokonce dostával různé ceny v těchto předmětech. Jeho učitelé se snažili doléhat na rodiče, aby ho povzbuzovali ve studiu těchto oborů na úkor otcových přání stát se obchodníkem.

V roce 1838 začal studovat vysokou školo Trinity College v Cambridge, kde více rozvíjel své myšlení v oblasti matematiky. Nejčastěji se zabýval lineárními transformacemi a analytickou geometrií, kde v této oblasti, ještě jako vysokoškolák publikoval. Školu absolvoval v roce 1842 a po další čtyři roky učil v Cambridge. Po celou dobu vydával svoje práce v časopise *Cambridge Mathematical Journal*. V pracích se objevila témata týkající se algebraických křivek, eliptických funkcí, determinantů a teorie integrace. Jako jiní matematici i on své ideje konzultoval v různých korespondencích, a to převážně s dalšími Angličany George Boolem a Jamesem Josephem Sylvesterem. Všichni tři patřili do stejné generace matematiků a jejich přínos v tomto oboru byl značný.

Kvůli rozdílným názorům na svém dosavadním pracovišti byl nucen odejít z Cambridge v roce 1846. Nejenom, že přišel o práci, ale také se začal věnovat právu. Na matematiku však nezanevřel a stále si vyměňoval názory při různých přednáškách. Po vystudování se živil 14 let jako právník, ale toto povolání bral spíše jako výdělek peněz, aby se mohl stále matematice věnovat. Neustále se pokoušel najit jiné akademické angažmá a chtěl se stát profesorem. V důsledku toho se snažil mezi roky 1853 a 1860 vydávat velké množství článků, prosadit svoje názory v oblasti geometrie a astronomie a usiloval o mnoho míst v čele různých institucí. Profesorem se stal až v roce 1863. Konkrétně je jmenovaný jako *Sadleirian professor of Pure Mathematics* v Cambridge. Věnoval se nejrůznějším tématům tehdejší moderní matematiky. Položil základy neeuklidovské, *n*-dimenzionální geometrie a algebry matic pro další významné osobnosti, jako byli Richard Feldmann nebo Werner Heisenberg. Mezi jeho nejdůležitější dokumenty patří tzv. *„Memoirs on Quantics“*, tedy *„Paměti kvantity“*, kde Cayelova „kvantita“ odpovídá tomu, co dnes označujeme jako forma nebo homogenní polynom, který příslušnou formu určuje (například kubická forma může být definována polynomem $x^3 - 2x^2y + 8xy^2 + y^3$, který je homogenní třetího stupně).

V následujících letech stále přednášel, mimo jiné i ve Spojených státech amerických, stal se předsedou Britské asociace pro rozvoj vědy a získal různá ocenění za svoje příspěvky v oblasti vědy. Nemůžeme opomenout nejvyšší vědecké ocenění Copleyovu medaili, kterou mu udělila Královská společnost pro podporu věd v Londýně.

Za svůj život, jak jsme uvedli, přispíval do řady časopisů a vydal přes 900 článků. Knihu napsal „pouze" jednu, název *An Elementary Treatise on Elliptic Functions* (Zásadní pojednání o eliptických funkcích) a byla vydána v roce 1876. Podílel se na velkém množství prací, které souvisely hlavně s matematikou. Stal se členem Královské společnosti, Londýnské matematické společnosti nebo Královské astronomické společnosti, dále získal mnoho ocenění a byl mu několikrát udělen čestný titul na různých univerzitách. Je po něm dodnes pojmenována řada věcí souvisejících s matematikou (Cayleyho věta, Cayley – Hamiltonova věta, Cayleyho tabulka, Cayleho algebra, Cayleyho čísla atd.) a také jeden z kráterů na Měsíci. Arthur Cayley zemřel dne 26. ledna v roce 1895.

Arthur Cayley v roce 1847 vydal *Recherches sur l'élimination et al théorie des courbes* (O eliminaci a teorii křivek), kde zavedl pojem redukovaný rezultant (resultant réduit), který souvisí s koeficienty uvažovaných polynomů. Koeficienty polynomů mohou obsahovat neznámé dvojího druhu – konstanty a proměnné. Redukovaný rezultant je tvořen pouze činiteli, které obsahují proměnné, faktory obsahující jen konstanty jsou vynechány jako nadbytečné faktory. Pojem se snaží ilustrovat na příkladu rovnice reciproké poláry křivky $U = 0$ v projektivní rovině, která je výsledkem eliminace x, y, z ze soustavy:

$$U = 0$$

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial x} + \beta \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

$$x(\beta\zeta - \gamma\eta) + y(\gamma\xi - \alpha\zeta) + z(\alpha\eta - \beta\xi) = 0,$$

kde x, y, z jsou neznámé, α, β, γ konstanty a ζ, η, ξ jsou proměnné.

V příspěvcích *On the theory of Involution in Geometry* (1847), *On the theory of elimination* (1848) pracuje Cayley se soustavou n forem v n neznámých. Všechny polynomy f_i příslušné dané soustavě násobil všemi součiny $x_1^{d_1} x_2^{d_2} \dots x_m^{d_m}$ mocnin všech neznámých dimenze $d = d_1 + d_2 + \dots + d_m$, $d = 0, 1, \dots$, dokud nedostal takový počet rovnic, který přesahoval počet součinů mocnin. Jednotlivé součiny mocnin nyní považuje za nezávislé proměnné. Tím obdrží soustavu lineárních rovnic v součinech mocnin neznámých. Eliminují se všechny součiny mocnin z vhodného počtu těchto rovnic, tak se dostane násobek rezultantu. Je otázkou, zda takto vytvořený rezultant obsahuje nadbytečné faktory. Cayley k tomu využívá teorii homogenních lineárních rovnic. Snažil se najít vzorec pro výpočet rezultantu, vyvodil ho ve tvaru:

$$R = \frac{Q_1 Q_3 \dots}{Q_2 Q_4 \dots},$$

kde Q_i jsou minory podobného typu jako determinant Sylvesterovy matice. Cayley neudává pravidlo pro volbu submatic. O důkaz správnosti vzorce se pokoušelo několik matematiků. Macaulay nakonec našel předpis ve tvaru $R = \frac{Q_1}{\Delta}$, který není tak obecný a při výpočtu Q_1 není možná tolik velká volnost volby jako u Cayleyova vzorce, ale je mnohem jednodušší. Správnost Cayleyova vzorce se podařilo dokázat až E. Fischerovi v roce 1926.

Závěr

Eliminační metody v novověku volně navazují na bakalářskou práci, která byla napsaná před dvěma lety. Cílem bylo ukázat čtenářům další postupy, které již nebyly do předchozí práce zařazeny a zároveň chce rozšířit povědomí o významných matematicích své doby a ukázat jejich přínos v této oblasti algebry.

V první části práce se podrobně věnujeme metodám Étienna Bézouta. Celou kapitolu jsme rozdělili do jednotlivých částí, aby bylo pochopitelnější se v postupech vyznat. Věnujeme se v nich soustavě dvou rovnic o dvou neznámých různého stupně, kde popisujeme obecný postup, jak pracovat s rovnicí a následně vše dokládáme praktickými příklady. Ukazujeme i další alternativy zkrácených postupů, které mohou být pro někoho pochopitelnější a srozumitelnější. Následně všechny postupy porovnáváme a snažíme se vyhodnotit, zda vychází stejné či jiné výsledky, tedy výsledný rezultant. Právě stupni rezultantu a vůbec pojmu se také věnujeme v jedné části práce. Řešíme ho pro dva polynomy se dvěma neznámými a pomocí Bézoutových zápisů odhalujeme obecný vzorec pro jeho výpočet, který demonstrujeme na příkladu a zjišťujeme, že se opíráme o vlastnosti aritmetické posloupnosti. V neposlední řadě se také zmiňujeme, jak postupovat v případě soustavy většího počtu rovnic o větším počtu neznámých.

V následující kapitole se věnujeme i dalším matematikům, kteří se eliminací zabývali. První se jmenuje Joseph – Louis Lagrange a ten se mimo jiné zabýval metodou řešení kubické rovnice o jedné neznámé. Převáděl problém na soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Jelikož jsme ve velké míře ukazovali metody poněkud náročné pro běžného čtenáře, chtěli jsme také zařadit jiný postup než ty, které běžně používáme na základních a středních školách. Popisujeme ho v části, která se týká Jamese Josepha Sylvestera. Jedná se o sestavení tzv. Sylvesterovi matice ze zadané soustavy dvou rovnic a následného vyřešení jejího determinantu. Díky němu můžeme v dalších krocích získat výsledek či výsledky celé soustavy. Postup také dokládáme názornými příklady. Dále je ukázán přínos Arthura Cayleyho, který se věnoval tzv. redukovanému rezultantu a také zmiňujeme snažení o nalezení vzorce pro výpočet rezultantu.

Samozřejmě zmiňovaní páni nebyli jedinými a ani posledními, kteří se eliminačními metodami tehdy i později zabývali. Uvedené matematiky jsem si vybral pro jejich významnost a důležitost, kterou odvedli při práci s rovnicemi a bohužel z důvodu rozsahu práce se nemohlo dostat například na Edwarda Waringa, Siméona Denise Poissona nebo Augustina Louise Cauchyho.

Téma diplomové práce jsem si zvolil z důvodu zájmu po nabití dalších poznatků o eliminaci rovnic v historii, kterým jsem se již v minulosti věnoval. Opravdu člověk musí smeknout před myšlenkami, které hrály významnou roli v budoucnu a znamenaly průlom v nahlížení na různé typy soustav rovnic v různých stupních s určitým počtem neznámých.

Resumé

This work builds on the author's bachelor thesis "Elimination Methods – Historical View" from 2016. It starts with a description of Etienne Bézout's procedures, which have been already shortly described at the end of the previous theses. Beside Bézout's procedures there are also presented methods of other mathematicians in the 18th and 19th centuries.

The diploma thesis is divided into two larger chapters. The first chapter is dedicated to the already mentioned French mathematician, Etienne Bézout, because his contribution in field of algebra was enormous. Described theory is complemented by practical examples and a comparison of different approaches. The second part of this work is devoted to Joseph – Louise Lagrange, Arthur Cayley and James Joseph Sylvester, whose procedure for modifying systems of two equations we can practically use today.

The aim of the work is to show readers other methods of elimination of unknowns from the system of equations than those they are familiar with and encounter in everyday life.

Seznam literatury

[1] ALFONSI, Liliane. Étienne Bézout: Analyse algébrique au siècle des Lumières. *Rev. Hist. Math* [online]. 2008, **14**(2), 211-287 [cit. 2016-04-11]. Dostupné z: http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0910/0910.3641.pdf

[2] BEČVÁŘ, Jindřich. Lineární algebra. Vyd. 3. Praha: Matfyzpress, 2005. ISBN 80-867-3257-6.

[3] BÉZOUT, É. Cours de mathématiques à l'usage des gardes du Pavillon et de la Marine. *Gallica The Bibliothèque nationale de France* [online]. Paris, 1766 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6104150x.r=Bezout%2C%20%C3%89tienne

[4] BÉZOUT, É. Histoire de l´Académie Royale des Sciences 1764 [online]. Paris, 1764 [cit. 2018-03-21]. Dostupné z: https://drive.google.com/file/d/1pNWIItHGAVYwyVQxSNUTNmiohfpKT3Vr/view

[5] BÉZOUT, É. Recherches sur le degree des equations resultantes de l'evanouissement des inconnues, et sur les moyens qu'il convient d'employer pour trouver ces equations. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* [online]. 1764, 288 - 338 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k35622

[6] BÉZOUT, É. Théorie générale des équations algébriques. Paris. *Gallica The Bibliothèque nationale de France* [online]. 1779 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k106053p.r=B%C3%A9zout

[7] BÉZOUT, Etienne a Eric FERON. *General theory of algebraic equations*. Princeton: Princeton University Press, c2006. ISBN 978-0-691-11432-3.

[8] CRILLY, Tony. Arthur Caley. Encyklopedie Britannica [online]. 2018 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Arthur-Cayley

[9] CRILLY, Tony. James Joseph Sylvester. Encyklopedie Britannica [online]. 2018 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/James-Joseph-Sylvester

[10] FEUR, Lewis S. Sylvester in Virginia. *The Mathematical Intelligencer*. 1987, **9**(2), 13 - 19.

[11] FISCHER, E. Über die Cayleysche Eliminationsmethode. Mathematische Zeitschrift. 1927, 26, 497—550.

[12] FRONK, Michal. Eliminační metody - historický pohled. Plzeň, 2016. Bakalářská práce. Pedagogická fakulta ZČU Plzeň.

[13] HORA, Jaroslav. O některých otázkách souvisejících s využíváním programů počítačové algebry ve škole: III. díl. Plzeň: Pedagogické centrum Plzeň, 2001.

[14] JAMES, I. M. James Joseph Sylvester, F.R.S. (1814-1897). *Notes and Records of the Royal Society of London* [online]. 1997, **51**(2), 247 - 261 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: http://www.jstor.org/stable/531990?seq=1#page_scan_tab_contents

[15] NETTO, E. Rationale Funktionen mehrerer Veränderlichen. 8. Cayley'sche und Sylvester'sche Methode. In: Molk, J., Encyclopédie sciences mathématiques pures et appliqués. Arithmetik und Algebra. Erster Teil. Leipzig: B. G. Teubner, 1898 -1904, s. 262 - 263. Dostupné z: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN360504671?tify=%7B%22view%22%3A%22toc%22%7D

[16] O´CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Arthur Cayley. MacTutor History of Mathematics archive [online]. 2014 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cayley.html

[17] O´CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. James Joseph Sylvester. MacTutor History of Mathematics archive [online]. 2005 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sylvester.html

[18] O´CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Joseph - Louis Lagrange. MacTutor History of Mathematics archive [online]. 1999 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lagrange.html

[19] O'CONNOR, John Joseph a Edmund Frederick ROBERTSON. Étienne Bézout. In: *MacTutor History of Mathematics archive* [online]. 2001 [cit. 2016-04-10]. Dostupné z: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Bezout.html

[20] PARSHALL, Karen Hunger. James Joseph Sylvester: Jewish Mathematician in a Victorian World [online]. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2006, s. 461 [cit. 2018-04-10]. ISBN 0-8018-8291-5. Dostupné z: https://books.google.cz/books?id=aVzbdXipb8MC&pg=PA357&lpg=PA357&dq=sylvester+in+virginia,+feuer&source=bl&ots=XVc3t2tmjZ&sig=FpJ8e0Ec7Es6HrjQcAHg2s32GwE&hl=cs&sa=X&ved=0ahUKEwjV5-rRnaXaAhXB2SwKHfbZBrkQ6AEIJzAA#v=onepage&q=sylvester%20in%20virginia%2C%20feuer&f=false

[21] PENCHÈVRE, Erwan. Histoire de la théorie de l'élimination [online]. Paříž [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: https://drive.google.com/file/d/1J4xO3FxgO_5QssAXAFX7UgCxbzG63dLi/view. Disertační práce. Université Paris Diderot.

[22] PENCHÈVRE, Erwan. L'élimination en algèbre aux XVIIe et XVIIIe siècles. *Historia scientiarum* [online]. 2004, **14**(2), 101-117 [cit. 2016-04-11]. Dostupné z: http://images.math.cnrs.fr/IMG/pdf/penchevre-04-elimination.pdf

[23] Soustavy lineární a kvadratické rovnice. Rovnice a nerovnice [online]. 2008 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: http://www.rovnice.kosanet.cz/soustavy_kvad.html

[24] STRUIK, Dirk Jan. Joseph - Louis Lagrange. Encyklopedie Britannica [online]. 2018 [cit. 2018-04-10]. Dostupné z: https://www.britannica.com/biography/Joseph-Louis-Lagrange-comte-de-lEmpire

Seznam obrázků

Seznam tabulek