

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Šíření elastických vln v jednorozměrných
homogenních a heterogenních prostředích**

Autor: Ondřej Kába
Vedoucí: Ing. Vítězslav Adámek, Ph.D.

Květen 2018

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 25. 5. 2018

Ondřej Kába

Poděkování

Rád bych touto cestou poděkoval svým rodičům, díky jejichž podpoře jsem se mohl dostat ve studiu a v životě tak daleko.

Chtěl bych také poděkovat Ing. Vítězslavu Adámkovi, Ph.D. za příkladné a odborné vedení k této práci, za jeho podnětné rady, připomínky a věnovaný čas. Dále děkuji Ing. Romanu Kroftovi za pomoc při návrhu experimentu, jeho realizaci a zpracování výsledků.

V neposlední řadě bych rád poděkoval všem svým blízkým za jejich podporu a pochopení pro mé časové vytížení.

V Plzni dne 25. 5. 2018

Ondřej Kába

Abstrakt

Tato bakalářská práce se zaměřuje na problematiku šíření nestacionárních vln v tenkých tyčích buzených rázovou silou. Pomocí Laplaceovy transformace, reziduové věty a věty o konvoluci je odvozeno analytické řešení odezvy homogenní a heterogenní tyče na zadané buzení. V rámci práce je dále vytvořen program umožňující vyčíslení odvozených vztahů a zobrazení analytických výsledků. V dalším kroku je provedeno řešení stejných úloh pomocí metody konečných prvků ve zvoleném softwaru a diskutován vliv některých parametrů vytvořených modelů na přesnost numerického řešení. V další části práce je představen experiment provedený za účelem verifikace odvozených vztahů a jejich vyčíslení. Jsou zde diskutovány některé aspekty ovlivňující přesnost měření a jejich vliv na získané výsledky. Analytické a experimentální výsledky byly následně využity k řešení inverzních úloh identifikace materiálových parametrů a průběhu rázové síly a byla diskutována přesnost a efektivita použité metody identifikace.

Abstract

This Bachelor Thesis is aimed at the problems of nonstationary stress wave propagation caused by an impact in thin rods. Analytical solution for the response to an impact force of both homogeneous and heterogeneous thin rods is derived using the Laplace transform, the theorem of residue and the convolution principle. An in-house code with GUI created for an easy calculation of these solutions and for analysing the rods' responses is presented. This work also contains the solution of the same problem using the finite element method in a professional software and a discussion of the effect of some FE model parameters on the accuracy of the results. An experiment which was carried out to verify the analytical solution is presented and the effect of some aspects of the experiment realization on the results is examined. In the last part, the experimental data and the analytical solution are used to solve inverse problems of identification of material parameters and of impact force reconstruction. The efficiency of the used procedure is discussed.

Obsah

1	Úvod	2
2	Shrnutí současného stavu řešené problematiky	3
3	Šíření nestacionárních podélných vln v tenké homogenní tyči	4
3.1	Formulace problému	4
3.2	Analytické řešení pro jednoduché typy buzení	4
3.3	Analytické řešení pro obecný typ buzení	13
3.4	Popis softwarového nástroje na vyčíslení a analýzu analytického řešení	15
3.5	Numerické řešení úlohy pomocí MKP	16
3.6	Porovnání analytického a numerického řešení	19
4	Šíření nestacionárních podélných vln v tenké elastické heterogenní tyči	24
4.1	Formulace problému	24
4.2	Analytické řešení pro obecný typ buzení	24
4.3	Porovnání analytického a numerického řešení	26
5	Experimentální vyšetřování šíření vln v tenkých tyčích	30
5.1	Popis experimentu a zpracování experimentálních dat	30
5.2	Odezva homogenní tyče - porovnání s analytickým řešením	32
5.3	Odezva heterogenní tyče - porovnání s analytickým řešením	34
6	Řešení inverzních úloh	37
6.1	Popis optimalizační úlohy	37
6.2	Řešení úlohy identifikace materiálových vlastností	37
6.3	Řešení úlohy identifikace buzení	40
7	Závěr	43
	Reference	44
A	Příloha	46
B	Příloha	47
C	Příloha	48
D	Příloha	49
E	Příloha	50
F	Příloha	51

1 Úvod

Tato práce se zabývá šířením napěťových vln v jednorozměrném ryze elastickém prostředí a různými metodami stanovení jeho odezvy na buzení rázového charakteru. Cílem této práce je odvození analytických vztahů popisujících odezvu homogenního a heterogenního 1D prostředí a využití těchto vztahů pro řešení inverzních úloh identifikace materiálových vlastností a průběhu budicí síly. Dalším cílem je řešení zmíněných úloh pomocí metody konečných prvků a porovnání výsledků obou metod s výsledky provedených experimentů.

V práci je nejprve provedeno shrnutí aktuálního stavu řešené problematiky, dále jsou představena již existující řešení podobných úloh a diskutovány možnosti využití teorie šíření vln v jednorozměrném prostředí. V následujících dvou kapitolách je provedeno odvození vztahů pro odezvu tenkých tyčí na předem definované jednoduché typy buzení a na buzení obecné. Dále je představen vytvořený softwarový nástroj umožňující jednoduché vyčíslení a zobrazení odezvy jak homogenních, tak heterogenních tyčí. Ve stejných kapitolách jsou také popsány konečnoprvkové modely sestavené za účelem řešení zmiňovaných nestacionárních úloh a je zkoumán vliv některých parametrů těchto modelů na jejich přesnost a výpočtovou náročnost. V páté kapitole je prezentován experiment, který byl proveden jak pro verifikaci analytických a numerických výsledků, tak pro využití naměřených dat při řešení inverzních úloh. Nejprve je popsána aparatura, která byla pro měření použita a dále je provedeno samotné porovnání experimentálních a analytických výsledků a diskutována míra jejich shody v souvislosti s charakterem budicího pulsu a geometrií tyčí. V šesté kapitole je pak popsán postup řešení vybraných inverzních úloh. V této části jsou analyticky odvozené vztahy a experimentální výsledky využity k řešení úlohy identifikace materiálových vlastností tyčí použitých při experimentu a průběhu budicí síly vyvolané rázovým kladívkem. Dále je diskutována přesnost získaných výsledků a efektivita řešení těchto inverzních úloh v souvislosti s jejich formulací.

Při odvozování analytických vztahů uvedených v práci byl využíván matematický software Maple 17. Softwarový nástroj pro vyčíslení těchto vztahů a algoritmus pro řešení inverzních úloh byl vytvořen v softwaru Matlab R2016a. Všechny výpočty pomocí metody konečných prvků byly provedeny řešičem Marc 2016 s pre a postprocesorem Mentat 2016.

2 Shrnutí současného stavu řešené problematiky

Problematika šíření napěťových vln v tenkých tyčích je řešena mnoha autory v různých podobách. Její nejjednodušší forma, tedy úloha homogenní prizmatické tenké tyče, byla řešena například docentem Breptou v [1]. Dále se touto problematikou zabývá Kolsky ve své práci [2] nebo Graff, který danou úlohu řeší v knize [3] pomocí metody charakteristik.

Složitější úloha neprizmatické tyče je řešena také v [3], a to konkrétně pro tyče s lineárně a exponenciálně se měnícím průřezem. Případem s lineární změnou průřezu se zabývá také práce [1]. Tato problematika je řešena např. i ve článku [4], kde je zkoumán vliv měnícího se průřezu tyče na přenosové vlastnosti tyče a potlačení určitých frekvencí.

Problém heterogenní tyče je řešen ve článku [5], kde je využíván jako zjednodušení problému tlumení rázu v neprůstředných vestách. Šíření vln v tenké tyči s proměnlivým modulem pružnosti je řešen ve zprávě ČSAV [6], kde autoři mimo jiné zmiňují, že pro obecnou spojitou změnu tohoto parametru vede problém na analyticky neřešitelné rovnice. Některé jevy způsobené nelinearitou materiálu v heterogenních tyčích jsou zkoumány v [7], kde je k řešení použita nespojitá Galerkinova metoda. Šíření zrychlení v tenké tyči složené ze tří různých materiálů s pomalu se měnícím průřezem je zkoumáno v [8]. Viskoelastickým problémem šíření vln v tenké tyči se zabývá článek [9], kde je problém řešen pomocí rozvoje rychlostí v tyči za čelem vlny do Taylorovy řady, dále je zde diskutována přesnost a stabilita tohoto řešení. Složitějším problémem šíření vln v tenké tyči vyrobené z viskoelastického materiálu s parametry závislými na teplotě se zabývá [10]. V této práci se propojují pohybové rovnice a rovnice vedení tepla v jednorozměrném prostředí a je zkoumáno šíření napěťových vln v mechanicky nebo teplotně zatížené tyči.

Jedním z nejrozšířenějších použití teorie šíření vln v tenkých tyčích je tzv. *split Hopkinson pressure bar* test. Tato technika je využívána k určení modulu pružnosti nebo celého pracovního diagramu materiálu v závislosti na rychlosti deformace. O tomto experimentálním využití pojednává článek [11]. Tento test je teoreticky možné využít i k získání jiných než osových parametrů materiálů. Práce [12] pojednává o možnosti využití SHPB testu k nalezení vlastností materiálu ve smyku.

3 Šíření nestacionárních podélných vln v tenké homogenní tyči

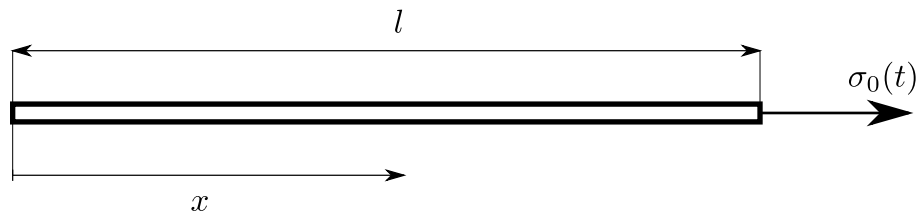
V následující kapitole bude odvozeno analytické řešení nestacionární napjatosti v tenké tyči pro různé okrajové podmínky a typy buzení. Dále bude popsán softwarový nástroj vytvořený za účelem vyčíslení analytických výsledků a porovnání těchto výsledků s numerickým řešením stejné úlohy pomocí metody konečných prvků.

3.1 Formulace problému

Jak již bylo uvedeno, odvození bude provedeno pro tenkou tyč, tedy takovou, jejíž příčný rozměr je výrazně menší, než vlnová délka nejkratší vlny, která se tyčí šíří (viz [1]). Tyč bude také uvažována prizmatická, tedy bude mít po celé délce stálý průřez $A(x) = A = konst.$

Při řešení problému budeme uvažovat teorii malých deformací a lineárně elastický a izotropní materiál. K popisu materiálu bude potřeba Youngův modul E , Poissonovo číslo ν a hustota ρ .

Na obr. 1 je zobrazeno schéma řešené úlohy se zavedeným souřadnicovým systémem. Je na něm zobrazena tenká tyč délky l , která buď ve směru osy x není upevněna (dále tyč s volným koncem) nebo má levý konec ($x = 0$) vetknutý. Na svém pravém konci ($x = l$) je buzena časově závislým napětím $\sigma_0(t)$.



Obrázek 1: Schéma řešeného problému

3.2 Analytické řešení pro jednoduché typy buzení

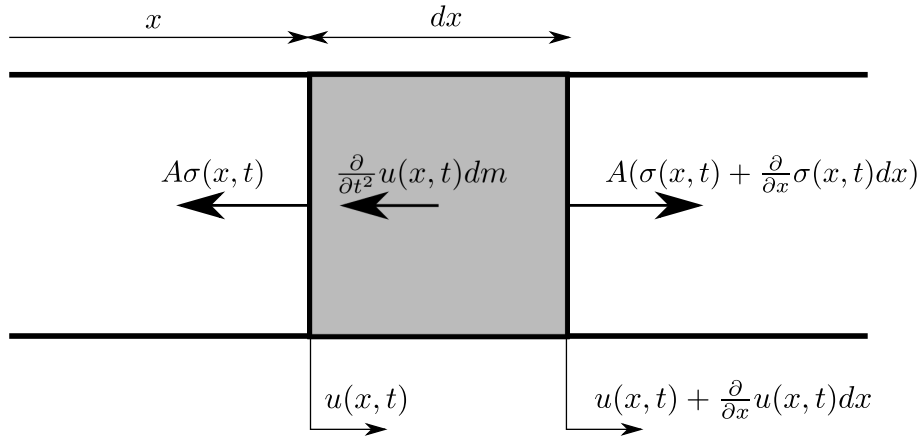
Pohybovou rovnicí popisující odezvu tenké tyče na libovolný typ buzení lze sestavit na základě diferenciální podmínky rovnováhy elementu tyče, kinematických a fyzikálních rovnic.

Na obr. 2 jsou zakresleny všechny síly působící na diferenciálně malý prvek o délce dx vyjmutý z tyče dvěma řezy kolmými na osu x . Funkce $u(x, t)$ představuje posun ve směru osy tyče, $\sigma(x, t)$ napětí v tyči a dm hmotnost daného prvku. Podmínka rovnováhy tohoto elementu lze formulovat ve tvaru

$$A\sigma(x, t) + dm \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - A \left(\sigma(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) dx \right) = 0, \quad (3.1)$$

což po roznásobení a úpravě lze přepsat jako

$$-A \left(\frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t) \right) dx + dm \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (3.2)$$



Obrázek 2: Diferenciálně malý prvek vyjmutý z tenké tyče

Díky tomu, že je tyč prizmatická a homogenní, je možné ve vztahu (3.2) využít rovnosti $dm = \rho dV = \rho A dx$. Po vydělení celé rovnice dx a A získáme výsledný tvar diferenciální podmínky rovnováhy

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \right) \rho = \frac{\partial}{\partial x} \sigma(x, t). \quad (3.3)$$

Kinematické rovnice obecně definují vztah mezi složkami deformace a posuvů. v tomto případě se bude jednat pouze o jednu rovnici popisující vztah mezi jedinou nenulovou složkou posuvu $u(x, t)$ a složkou osové deformace $\varepsilon(x, t)$. Na základě předpokladu malých deformací lze pak psát

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, t). \quad (3.4)$$

Vzhledem k tomu, že je materiál tyče uvažován lineární a elastický, budou fyzikální rovnice popsány Hookeovým zákonem. Jedinou nenulovou složkou napětí je v tomto případě osové napětí $\sigma(x, t)$, proto lze Hookeův zákon jednoduše zapsat jako

$$\sigma(x, t) = E \varepsilon(x, t). \quad (3.5)$$

Postupné dosazení vztahů (3.5) a (3.4) do podmínky (3.3) vede na rovnici

$$E \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) \right) \rho. \quad (3.6)$$

Pokud nyní zavedeme veličinu $c_0 = \sqrt{E/\rho}$ reprezentující rychlost šíření podélné vlny v tenké tyči, lze rovnici (3.6) přepsat do podoby

$$c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t), \quad (3.7)$$

což je známý tvar vlnové rovnice v 1D prostředí (viz [3]).

Pro úplnou formulaci problému je nutné ještě definovat počáteční a okrajové podmínky úlohy. Pro jednoduchost budeme nadále předpokládat nulové počáteční podmínky pro posuv i jeho první časovou derivaci, tedy

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)|_{t=0} = 0. \quad (3.8)$$

Okrajová podmínka pro levý konec tyče, tj. $x = 0$ (viz obr. 1), který je volný, má tvar

$$\sigma(0, t) = 0 \quad (3.9)$$

a lze ji s ohledem na Hookeův zákon přepsat jako

$$\frac{\partial}{\partial x}u(x, t)|_{x=0} = 0. \quad (3.10)$$

Pro tyč s vetknutým¹ levým koncem lze okrajovou podmínku formulovat následovně

$$u(0, t) = 0. \quad (3.11)$$

Okrajová podmínka pro pravý konec ($x = l$), na kterém je tyč buzena, má podobu

$$\sigma(l, t) = \sigma_0(t). \quad (3.12)$$

V dalším kroku bude hledáno řešení rovnice (3.7) pro výše uvedené počáteční a okrajové podmínky. K řešení této parciální diferenciální rovnice bude použita metoda integrálních transformací. Konkrétně bude aplikována Laplaceova transformace v časové oblasti. Tato transformace je definována předpisem [13]

$$U(x, p) = \int_0^{\infty} u(x, t)e^{-pt} dt, \quad (3.13)$$

kde $U(x, p)$ představuje Laplaceův obraz funkce $u(x, t)$ a $p \in \mathbb{C}$ je nová komplexní proměnná. Provedením Laplaceovy transformace pohybové rovnice (3.7) dostáváme

$$c_0^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) \right) = p^2 U(x, p) - \frac{\partial}{\partial t}u(x, t)|_{t=0} - pu(x, 0), \quad (3.14)$$

což po dosazení nulových počátečních podmínek (3.8) vede na obyčejnou diferenciální rovnici v komplexní oblasti ve tvaru

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} U(x, p) - \frac{p^2 U(x, p)}{c_0^2} = 0. \quad (3.15)$$

Obecné řešení rovnice (3.15) lze předpokládat ve tvaru

$$U(x, p) = B_1(p)e^{\lambda_1(p)x} + B_2(p)e^{\lambda_2(p)x}, \quad (3.16)$$

¹V tomto případě se nejedná o skutečné vetknutí, ale o podmínku předepisující nulový osový posuv.

kde $\lambda_1(p)$ a $\lambda_2(p)$ jsou kořeny charakteristické rovnice odpovídající rovnici (3.15) a $B_1(p)$ a $B_2(p)$ jsou prozatím neznámé funkce. Je zřejmé, že charakteristická rovnice k rovnici (3.15) má podobu

$$\lambda(p)^2 - \frac{p^2}{c_0^2} = 0. \quad (3.17)$$

Její kořeny jsou $\lambda_1(p) = \frac{p}{c_0}$ a $\lambda_2(p) = -\frac{p}{c_0}$. Obecné řešení (3.16) lze tedy pro libovolné okrajové podmínky přepsat do tvaru

$$U(x, p) = B_1(p)e^{\frac{px}{c_0}} + B_2(p)e^{-\frac{px}{c_0}}. \quad (3.18)$$

Exponenciální funkce figurující v (3.18) lze pomocí hyperbolických funkcí vyjádřit jako [14]

$$e^{\frac{px}{c_0}} = \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) + \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right), \quad e^{-\frac{px}{c_0}} = \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right) - \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right). \quad (3.19)$$

Zavedením (3.19) do (3.18) lze tedy psát

$$U(x, p) = (B_1(p) - B_2(p))\sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) + (B_1(p) + B_2(p))\cosh\left(\frac{px}{c_0}\right), \quad (3.20)$$

což lze ekvivalentně přepsat do podoby

$$U(x, p) = C_1(p)\sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) + C_2(p)\cosh\left(\frac{px}{c_0}\right), \quad (3.21)$$

kde $C_1(p)$ a $C_2(p)$ jsou nové neznámé funkce. Jejich podobu určíme pomocí okrajových podmínek (3.9), (3.11) a (3.12). Za tímto účelem je nutné tyto podmínky nejprve transformovat

$$\Sigma(0, p) = 0, \quad (3.22)$$

$$U(0, p) = 0, \quad (3.23)$$

$$\Sigma(l, p) = \Sigma_0(p), \quad (3.24)$$

kde $\Sigma_0(p)$ je Laplaceův obraz buzení $\sigma_0(t)$ a $\Sigma(x, p)$ je obraz funkce osového napětí $\sigma(x, t)$.

Vzhledem k tomu, že v transformovaných podmínkách (3.22) a (3.24) figuruje Laplaceův obraz osového napětí, je nutné vyjádřit obecnou podobu obrazu funkce osového napětí. To provedeme dosazením kinematické rovnice (3.4) do konstitutivní rovnice (3.5) a provedením Laplaceovy transformace získaného vztahu. Po transformaci dostaneme

$$\Sigma(x, p) = E \frac{\partial}{\partial x} U(x, p). \quad (3.25)$$

Po dosazení (3.21) do (3.25) a po provedení příslušné derivace získáme výsledný vztah pro Laplaceův obraz osového napětí

$$\Sigma(x, p) = \frac{Ep}{c_0} \left(C_1(p) \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right) + C_2(p) \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) \right). \quad (3.26)$$

Dosazením obecných vztahů (3.21) a (3.26) do okrajových podmínek (3.22) a (3.24) budou nalezeny konkrétní funkce $C_1(p)$ a $C_2(p)$ potřebné pro vyjádření obrazů funkcí posuvů a napětí. Pro případ volné tyče lze tímto postupem odvodit

$$C_1(p) = 0, \quad C_2(p) = \frac{\Sigma_0(p)c_0}{Ep \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.27)$$

Konkrétní řešení lze pak v Laplaceově oblasti pro volnou tyč zapsat jako

$$U(x, p) = \frac{\Sigma_0(p)c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{Ep \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}, \quad \Sigma(x, p) = \frac{\Sigma_0(p) \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{\sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.28)$$

Analogickým postupem lze pro vetknutou tyč z podmínek (3.23) a (3.24) odvodit funkce

$$C_1(p) = \frac{\Sigma_0(p)c_0}{Ep \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}, \quad C_2(p) = 0. \quad (3.29)$$

Dosazením těchto vztahů do (3.21) a (3.26) získáme řešení pro vetknutou tyč

$$U(x, p) = \frac{\Sigma_0(p)c_0 \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{Ep \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}, \quad \Sigma(x, p) = \frac{\Sigma_0(p) \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{\cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.30)$$

Jak bylo zmíněno dříve, funkce $\Sigma_0(p)$ představuje ve vztazích (3.28) a (3.30) Laplaceův obraz buzení $\sigma_0(t)$. Lze tedy pro ni psát

$$\Sigma_0(p) = \int_0^\infty \sigma_0(t) e^{-pt} dt. \quad (3.31)$$

Pokud bude tyč zatížena jednotkovým skokem s amplitudou σ_0 , tj. $\sigma_0(t) = \sigma_0 H(t)$, lze pro funkci $\Sigma_0(p)$ psát

$$\Sigma_0(p) = \frac{\sigma_0}{p}. \quad (3.32)$$

V případě uvažování buzení ve tvaru obdélníkového pulsu o stejné amplitudě σ_0 a době trvání t_0 , tj. $\sigma_0(t) = \sigma_0(H(t) - H(t - t_0))$, lze obraz buzení vyjádřit ve tvaru

$$\Sigma_0(p) = \frac{\sigma_0}{p} (1 - e^{-pt_0}). \quad (3.33)$$

Poslední krok, který je nutné provést pro nalezení reálné odezvy tyče, je zpětná Laplaceova transformace obrazů $U(x, p)$ a $\Sigma(x, p)$. Řešení v časové oblasti lze vyjádřit pomocí tzv. Bromwich-Wagnerova integrálu (viz [3]), který definuje zpětnou Laplaceovu transformaci. Pro funkci posuvu $u(x, t)$ lze potom psát

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{d-\infty i}^{d+\infty i} U(x, p) e^{pt} dp \right), \quad (3.34)$$

kde d je reálná konstanta určující vzdálenost integrační cesty od imaginární osy Gaussovy komplexní roviny. Za účelem přesného vyčíslení integrálu (3.34) je vhodné doplnit integrační cestu o kruhový oblouk tak, aby takto vzniklá uzavřená a po částech hladká křivka c ohraničovala oblast, ve které leží všechny singulární body integrandu (3.34). Dále lze ukázat, že funkce $U(x, p)e^{pt}$ je holomorfní a spojitá v oblasti ohraničené křivkou c vyjma konečného počtu singulárních bodů. Tím jsou ale splněny předpoklady tzv. reziduové věty [15], podle které lze přesnou hodnotu integrálu (3.34) vyjádřit jako

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_c U(x, p)e^{pt} dp = \sum_{k=1}^n \operatorname{res} (U(x, p)e^{pt})|_{p=p_k}. \quad (3.35)$$

Výraz na pravé straně představuje součet reziduí integrandu (3.34) v jeho singulárních bodech p_k ($k = 1, \dots, n$).

Zaměříme se nejprve na funkci $U(x, p)$ odpovídající tyči s volným koncem buzenou skokovým zatížením. Podle (3.28)₁ a (3.32) lze psát

$$U(x, p)e^{pt} = \frac{\sigma_0 c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right) e^{pt}}{p^2 E \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.36)$$

Ze vztahu (3.36) vyplývá, že všechny singulární body této funkce lze nalézt řešením rovnice

$$p^2 \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right) = 0. \quad (3.37)$$

Z rovnice (3.37) je zřejmé, že prvním hledaným singulárním bodem je $p = 0$. Povahu tohoto singulárního bodu určíme z rozvoje funkce (3.36) v Laurentovu řadu (viz [15]). Z rozvoje, který byl proveden v systému Maple vyplývá, že bod $p = 0$ je pól 3. řádu². Hodnotu rezidua funkce (3.36) v tomto bodě určíme z definice (viz [15]) jako koeficient členu $1/p$ v provedeném Laurentově rozvoji. Pak pro reziduum v bodě $p = 0$ platí

$$\operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=0} = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 c_0^2 t^2}{El} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 (x^2 - \frac{1}{3} l^2)}{El} = \frac{\sigma_0}{2El} \left(c_0^2 t^2 + x^2 - \frac{1}{3} l^2 \right). \quad (3.38)$$

Zbývající singulární body funkce (3.36) lze nalézt řešením rovnice

$$\sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right) = 0. \quad (3.39)$$

V tomto případě je vhodné si uvědomit, že hledané kořeny p musí být ryze imaginární, neboť se jedná o šíření vln v čistě elastickém prostředí. Pokud by hledané body p byly obecně komplexní, tj. i jejich reálná část by byla nenulová, nastal by jeden z následujících případů:

²Rozvoje funkcí v Laurentovy řady nebudou v práci uvedeny pro svoji značnou délku.

$\operatorname{Re}(p) > 0$ - amplituda odezvy v tyči by s rostoucím časem t rostla k nekonečnu díky členu e^{pt} , což není fyzikálně přípustné.

$\operatorname{Re}(p) < 0$ - amplituda odezvy v tyči by s rostoucím časem t klesala k nule díky členu e^{pt} , což také není fyzikálně přípustné, neboť je řešen čistě elastický problém, tj. nemůže docházet k disipaci energie.

Z výše uvedené úvahy tedy vyplývá, že zbývající singulární body p musí mít podobu

$$p = i\xi, \quad (3.40)$$

kde $\xi \in \mathbb{R}$ a i reprezentuje imaginární jednotku. Po dosazení (3.40) do (3.39) a po úpravě dostáváme rovnici

$$i \sin\left(\frac{\xi l}{c_0}\right) = 0. \quad (3.41)$$

Z vlastností funkce sinus je zřejmé, že rovnice (3.41) je splněna pro všechna

$$\xi_n = \frac{n\pi c_0}{l}, \quad \text{neboli} \quad p_n = i \frac{n\pi c_0}{l}, \quad (3.42)$$

kde $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ³. K určení povahy singulárních bodů p_n (3.42) a ke stanovení hodnot reziduí v těchto bodech byl opět proveden Laurentův rozvoj v okolí p_n pomocí systému Maple. Z hodnot koeficientů u členů $1/(p - p_n)$ v získaných řadách bylo zjištěno, že pro $n > 0$ lze po úpravě reziduum vyjádřit jako

$$\operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} = -\frac{\sigma_0 l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{En^2\pi^2 c_0 (-1)^n} e^{\frac{in\pi c_0 t}{l}}. \quad (3.43)$$

V případě záporné hodnoty n lze reziduum vyjádřit jako

$$\operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = -\frac{\sigma_0 l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{En^2\pi^2 c_0 (-1)^n} e^{-\frac{in\pi c_0 t}{l}}. \quad (3.44)$$

Pro součet těchto reziduí (3.43) a (3.44) lze tedy psát

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} + \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = \\ -\frac{\sigma_0 l \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{En^2\pi^2 c_0 (-1)^n} \left(e^{\frac{in\pi c_0 t}{l}} + e^{-\frac{in\pi c_0 t}{l}}\right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

což po využití rovnosti $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$ lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} + \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = \\ -\frac{2\sigma_0 l}{En^2\pi^2 c_0 (-1)^n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c_0 t}{l}\right). \end{aligned} \quad (3.46)$$

³Případ $n = 0$ zde není uvažován, neboť hodnota rezidua v tomto singulárním bodě byla již nalezena.

Pomocí vztahů (3.38) a (3.46) lze již nyní vyjádřit odezvu volné tyče v časové oblasti jako

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\sigma_0 c_0^2 t^2}{El} + \frac{1}{2} \frac{\sigma_0}{El} \left(x^2 - \frac{1}{3} l^2 \right) - \frac{2\sigma_0 l}{E\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi c_0 t}{l}\right) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n^2} \right). \quad (3.47)$$

Po jisté úpravě vztahu (3.47) lze dojít k funkci $u(x, t)$, která se shoduje s řešením publikovaným v práci [1]. V této práci lze také nalézt fyzikální význam jednotlivých členů (3.47). První člen představuje posuv tyče jako tuhého tělesa vyvolaný konstantní silou σ_0/A . Druhý sčítanec reprezentuje posuv odpovídající elastické deformaci tyče vyvolané spojitě rozloženými setrvačnými účinky. Poslední sčítanec obsahující nekonečnou sumu vyjadřuje posuv vyvolaný nestacionárním pohybem vln v tyči.

Odezvu tyče na skokové zatížení lze v napětí nyní již snadno vyjádřit pomocí vztahů (3.4), (3.5) a (3.47). Dosazením (3.47) do (3.4) a následně do (3.5) získáme výsledný vztah pro osově napětí v tyči

$$\sigma(x, t) = \frac{\sigma_0 x}{l} - \frac{2\sigma_0}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} -\frac{(-1)^n \cos\left(\frac{n\pi c_0 t}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)}{n} \right). \quad (3.48)$$

Analytické řešení úlohy vetknuté tyče zatížené skokovým buzením lze odvodit analogicky. V tomto případě má funkce, jejíž rezidua hledáme, tvar

$$U(x, p)e^{pt} = \frac{\sigma_0 c_0 \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) e^{pt}}{p^2 E \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.49)$$

Z (3.49) je zřejmé, že prvním singulárním bodem je opět bod $p = 0$. V tomto případě se však jedná o pól prvního řádu, jak ukázal rozvoj v Laurentovu řadu. Hodnota rezidua v tomto bodě je

$$\text{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=0} = \frac{\sigma_0 x}{E}. \quad (3.50)$$

Zbývající singulární body lze pak najít řešením rovnice

$$\cos\left(\frac{\xi l}{c_0}\right) = 0. \quad (3.51)$$

Je zřejmé, že platí

$$\xi_n = \frac{n\pi c_0}{2l}, \quad \text{neboli} \quad p_n = i \frac{n\pi c_0}{2l}, \quad (3.52)$$

kde $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$, protože funkce kosinus má nulové body v lichých násobcích $\pi/2$. Provedením Laurentova rozvoje funkce (3.49) v bodech p_n (3.52) získáme hodnoty reziduí pro kladná a záporná n ve tvaru

$$\text{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} = -\frac{4l \sin\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi x}{l}\right)}{n^2 \pi^2 c_0 (-1)^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}} e^{\frac{i n \pi c_0 t}{2l}}, \quad (3.53)$$

$$\text{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = -\frac{4l \sin\left(\frac{1}{2} \frac{n\pi x}{l}\right)}{n^2 \pi^2 c_0 (-1)^{\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}}} e^{-\frac{i n \pi c_0 t}{2l}}. \quad (3.54)$$

Pro součet reziduí pro kladné a záporné n (3.53) a (3.54) po použití vztahu $\cos(x) = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$ lze tedy psát

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} + \operatorname{res}(U(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = \\ - \frac{8l}{n^2\pi^2c_0(-1)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}} \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi c_0 t}{l}\right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

kde $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Odezva vetknuté tyče na skokové buzení může tedy být zapsána jako součet (3.50) a (3.55). Odezvu v napětí opět snadno získáme použitím vztahů (3.4) a (3.5) a odpovídající odezvy v posuvech. Posuvy a napětí ve vetknuté tyči buzené skokovým napětím lze tedy vyjádřit jako

$$u(x, t) = \frac{\sigma_0 x}{E} - \frac{8\sigma_0 l}{E\pi^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c_0 t}{2l}\right)}{n^2(-1)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}} \right), \quad (3.56)$$

$$\sigma(x, t) = \sigma_0 - \frac{4\sigma_0}{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi x}{2l}\right) \cos\left(\frac{n\pi c_0 t}{2l}\right)}{n(-1)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}}} \right). \quad (3.57)$$

přičemž sčítání nekonečných sum v obou vztazích probíhá pouze přes lichá n .

Pro odvození odezvy tenké tyče na buzení obdélníkovým pulsem o amplitudě σ_0 a délce trvání t_0 pro obě definované okrajové podmínky budou využity již nalezené odezvy na skokové buzení. Označme U_{Hf} , resp. U_{Hc} , obraz odezvy volné, resp. vetknuté, tyče na skokové buzení. Podle výše uvedeného lze tedy psát

$$U_{Hf}(x, p) = \frac{\sigma_0 c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{p^2 E \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}, \quad (3.58)$$

$$U_{Hc}(x, p) = \frac{\sigma_0 c_0 \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{p^2 E \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.59)$$

Obrazy odezvy na buzení obdélníkovým pulsem U_f , resp. U_c , pro volnou, resp. vetknutou, tyč lze potom podle (3.33), (3.28)₁ a (3.58), resp. (3.33), (3.30)₁ a (3.59), zapsat jako

$$U_f(x, p) = \frac{\sigma_0 c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right) (1 - e^{-pt_0})}{p^2 E \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)} = U_{Hf} (1 - e^{-pt_0}), \quad (3.60)$$

$$U_c(x, p) = \frac{\sigma_0 c_0 \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) (1 - e^{-pt_0})}{p^2 E \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)} = U_{Hc} (1 - e^{-pt_0}). \quad (3.61)$$

Díky linearitě a použití věty o translaci (viz [13]) lze pak pro odezvu volné (u_f) a vetknuté (u_c) tyče v časové oblasti psát

$$u_f(x, t) = u_{Hf}(x, t) - H(t - t_0) u_{Hf}(x, t - t_0), \quad (3.62)$$

$$u_c(x, t) = u_{Hc}(x, t) - H(t - t_0) u_{Hc}(x, t - t_0), \quad (3.63)$$

kde u_{Hf} je definované vztahem (3.47) a u_{Hc} vztahem (3.56). Obdobně pro napětí ve volné (σ_f), resp. vetknuté (σ_c), tyči platí

$$\sigma_f(x, t) = \sigma_{Hf}(x, t) - H(t - t_0) \sigma_{Hf}(x, t - t_0), \quad (3.64)$$

$$\sigma_c(x, t) = \sigma_{Hc}(x, t) - H(t - t_0) \sigma_{Hc}(x, t - t_0), \quad (3.65)$$

kde σ_{Hf} je definované vztahem (3.48) a σ_{Hc} vztahem (3.57).

3.3 Analytické řešení pro obecný typ buzení

V předchozí části bylo nalezeno řešení odezvy tenké tyče na buzení ve tvaru skokové funkce a obdélníkového pulsu. Nyní bude provedeno odvození odezvy tyče na obecné buzení popsané funkcí $\sigma_0(t)$. Vyjdeme z věty o konvoluci, podle které obecně platí [13]

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = F(p) \cdot G(p), \quad (3.66)$$

kde symbol $*$ značí konvoluci dvou funkcí $f(t)$ a $g(t)$ a funkce $F(p)$ a $G(p)$ jsou jejich Laplaceovy obrazy. Na základě této věty lze pak pro inverzní Laplaceovu transformaci součinu dvou komplexních funkcí psát

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(p) \cdot G(p)\} = f(t) * g(t), \quad (3.67)$$

Konvoluce funkcí $f(t)$ a $g(t)$ ve vztazích (3.66)-(3.67) je přitom definována jako

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau. \quad (3.68)$$

V případě tyče s volným koncem je nutné najít originál k Laplaceově obrazu funkce dané vztahem (3.28)₁. Je zřejmé, že se jedná o součin funkce $\Sigma_0(p)$, jejíž originál je znám, tj. $\mathcal{L}^{-1}\{\Sigma_0(p)\} = \sigma_0(t)$, a funkce

$$U_{pf}(x, p) = \frac{c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right)}{Ep \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.69)$$

Originál k této funkci (3.69) lze nalézt opět pomocí reziduové věty. Tentokrát tedy hledáme rezidua k funkci

$$U_{pf}(x, p)e^{pt} = \frac{c_0 \cosh\left(\frac{px}{c_0}\right)e^{pt}}{Ep \sinh\left(\frac{pl}{c_0}\right)}. \quad (3.70)$$

Ze vztahu (3.70) je zřejmé, že singulární body jsou totožné s těmi nalezenými pro funkci (3.36), tedy

$$p_0 = 0, \quad p_n = i\frac{n\pi c_0}{l}, \quad \text{kde } n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots \quad (3.71)$$

Z Laurentova rozvoje funkce (3.70) v bodě $p = 0$, který je pólem druhého řádu, získáme odpovídající hodnotu rezidua

$$\operatorname{res}(U_{pf}(x, p)e^{pt})|_{p=0} = \frac{c_0^2 t}{El}. \quad (3.72)$$

Rozvojem funkce (3.70) ve zbývajících bodech p_n získáme dále pro kladná a záporná n následující předpisy pro rezidua

$$\operatorname{res}(U_{pf}(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} = -\frac{i(-1)^n c_0}{nE\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{\frac{in\pi c_0 t}{l}}, \quad (3.73)$$

$$\operatorname{res}(U_{pf}(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = \frac{i(-1)^n c_0}{nE\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{in\pi c_0 t}{l}}. \quad (3.74)$$

Po sečtení reziduí (3.72)-(3.74) a při využití vztahu $2i \sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$ lze originál funkce (3.69) v časové oblasti psát ve tvaru

$$u_{pf}(x, t) = \frac{c_0^2 t}{El} + \frac{2c_0}{E\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi c_0 t}{l}\right) \right). \quad (3.75)$$

Pomocí věty o konvoluci je tedy možné psát odezvu tyče na libovolné buzení v obecném tvaru

$$u(x, t) = \int_0^t \sigma_0(t - \tau) u_{pf}(x, \tau) d\tau, \quad (3.76)$$

což po dosazení (3.75) vede na výsledný vztah

$$u(x, t) = \frac{c_0}{E} \int_0^t \sigma_0(t - \tau) \left(\frac{c_0 \tau}{l} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{n} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi c_0 \tau}{l}\right) \right) \right) d\tau. \quad (3.77)$$

Použitím vztahu (3.77) a rovnic (3.4)-(3.5) lze pro napětí ve volné tyči jako odezvu na obecné buzení $\sigma_0(t)$ psát

$$\sigma(x, t) = -\frac{2c_0}{l} \int_0^t \sigma_0(t - \tau) \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi c_0 \tau}{l}\right) \right) d\tau. \quad (3.78)$$

Analogickým postupem je možné dojít k odezvě ve vetknuté tyči. V tomto případě je nutné najít rezidua funkce

$$U_{pc}(x, p)e^{pt} = \frac{c_0 \sinh\left(\frac{px}{c_0}\right) e^{pt}}{Ep \cosh\left(\frac{pl}{c_0}\right)} \quad (3.79)$$

vyplývající ze vztahu (3.30)₁. Singulární body této funkce jsou stejné jako v případě funkce (3.49), tj.

$$p = 0, \quad p_n = i \frac{n\pi c_0}{2l}, \quad (3.80)$$

kde $n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$. Lichost n vychází z vlastností funkce kosinus, která má nulové body v lichých násobcích $\pi/2$. Z Laurentova rozvoje funkce (3.79) v bodě $p = 0$ je zřejmé, že tento bod je pól nultého řádu a odpovídající reziduum je tedy nulové. Rozvojem (3.79) v bodech p_n získáme pak rezidua pro kladné a záporné hodnoty n ve tvaru

$$\operatorname{res}(U_{pc}(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n+}} = -\frac{2i(-1)^{\frac{1}{2}(1-n)}c_0}{nE\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{l}\right) e^{\frac{in\pi c_0 t}{2l}}, \quad (3.81)$$

$$\operatorname{res}(U_{pc}(x, p)e^{pt})|_{p=p_{n-}} = \frac{2i(-1)^{\frac{1}{2}(1-n)}c_0}{nE\pi} \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{l}\right) e^{-\frac{in\pi c_0 t}{2l}}. \quad (3.82)$$

Po sečtení všech reziduí, použití vzorce $2i \sin(x) = e^{ix} - e^{-ix}$ a věty o konvoluci (3.66) lze odezvu vetknuté tyče v posuvech vyjádřit jako

$$u(x, t) = \frac{4c_0}{E\pi} \int_0^t \sigma_0(t - \tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}(n+1)}}{n} \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi c_0 \tau}{l}\right) d\tau, \quad (3.83)$$

kde sumace probíhá pouze přes lichá n . Využitím odezvy (3.83) a rovnic (3.4)-(3.5) je možné pro napětí ve vetknuté tyči odvodit výsledný vztah

$$\sigma(x, t) = \frac{2c_0}{l} \int_0^t \sigma_0(t - \tau) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \cos\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{1}{2}\frac{n\pi c_0 \tau}{l}\right) d\tau, \quad (3.84)$$

přičemž sumace probíhá opět pouze přes lichá n .

3.4 Popis softwarového nástroje na vyčíslení a analýzu analytického řešení

V této části budou popsány základní funkce a možnosti softwarového nástroje pro vyčíslení odezvy tenké tyče, který byl naprogramován v prostředí Matlab. Tento nástroj umožňuje řešit odezvu volné nebo vetknuté tyče na buzení definované skokovou funkcí, obdélníkovým pulsem nebo obecnou funkcí. Výsledky jsou prezentovány pomocí časové animace rozložení posuvů, napětí, rychlostí nebo zrychlení v tyči. Animaci lze pozastavit, upravit její rychlost, případně posouvat po krocích. Alternativní možností zobrazení odezvy je statický graf v časoprostorové oblasti $x-t$.

Řešený problém je definován zadáním hodnot parametrů l, ρ a E a výběrem vazby typu volného nebo vetknutého konce pro $x = 0$. Dále je specifikována budicí funkce $\sigma_0(t)$, tedy jsou zadány parametry σ_0 a t_0 . V případě obecného buzení je možné definovat funkci $\sigma_0(t)$ jejím předpisem v závislosti na čase t nebo interpolací konečného počtu diskrétních bodů reprezentujících její funkční hodnoty. Tyto body je možné zadat přímo do prostředí nástroje nebo načíst z *mat* souboru. Graf funkce buzení je pro kontrolu zadání v prostředí následně zobrazen. Nástroj dále umožňuje zvolit maximální čas simulace t_{max} a počet bodů v prostoru a v čase, ve kterých bude odezva vypočtena. V programu je také možné zvolit počet členů sčítaných v sumách ve vztazích (3.47)-(3.48), (3.56)-(3.57), (3.77)-(3.78) a (3.83)-(3.84) a nastavit počet nebo velikost integračního kroku a dále zvolit metodu pro numerickou integraci.

V programu je implementováno vyčíslení výše zmíněných analytických vztahů, ale také výpočtově rychlejší metoda využívající pro inverzi vztahů (3.28) a (3.30) numerickou zpětnou Laplaceovu transformaci. V tomto případě je použit algoritmus založený na kombinaci rychlé Fourierovy transformace a tzv. ε -algoritmu (blíže viz [16]). Součástí nástroje je dále pak modul pro numerickou integraci, který slouží k vyčíslení konvolutorních integrálů ve vztazích (3.77)-(3.78) a (3.83)-(3.84) a k Laplaceově transformaci funkce buzení $\sigma_0(t)$ pomocí definičního vztahu (3.31). Tento obraz $\Sigma_0(p)$ je pak využit při numerické zpětné Laplaceově transformaci vztahů (3.28) a (3.30). V nástroji je pro integraci implementováno obdélníkové, lichoběžníkové a Simpsonovo pravidlo (viz [14]).

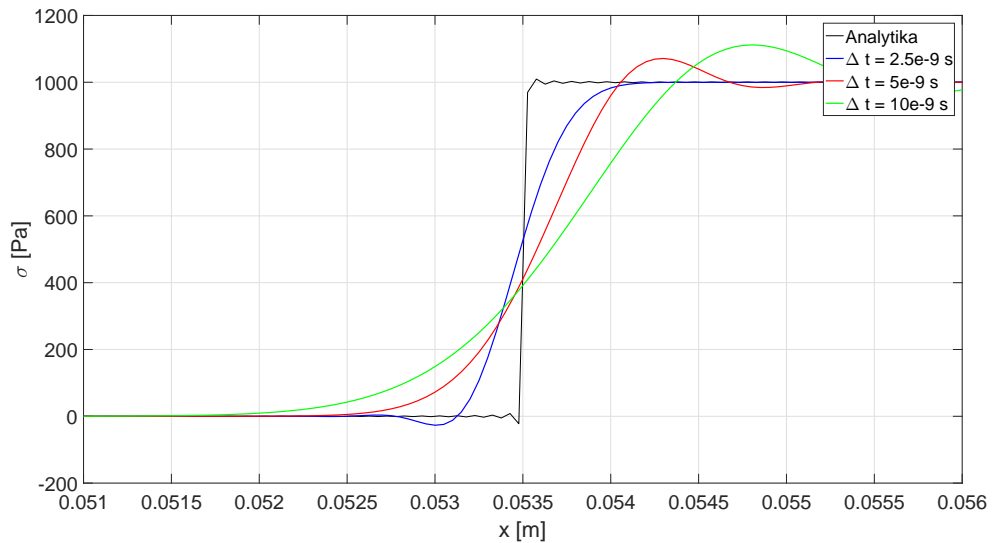
Program kromě vyčíslení a vykreslení odezvy umožňuje dále vypočtené výsledky uložit ve formě *mat* souboru pro pozdější načtení. Tento soubor obsahuje také všechny potřebné parametry úlohy i vlastního výpočtu. Další možností je uložení výsledků v konkrétním čase jako obrázku do formátu *fig*, popřípadě celé animace do *avi* souboru. Prostředí nástroje i s příkladem nastavení a zobrazení výsledků pro případ vetknuté tyče zatížené sinovým pulsem je zobrazeno v Příloze A.

3.5 Numerické řešení úlohy pomocí MKP

Jedním z cílů práce bylo i provedení numerického řešení zadané úlohy. Za tímto účelem byly v profesionálním konečnoprvkovém softwaru MSC.Marc sestaveny příslušné modely. Výsledky získané z těchto modelů posloužily jako ověření správnosti odvození a vyčíslení analytického řešení. Na druhou stranu, analytické řešení posloužilo k nalezení takových parametrů vytvořených modelů, aby byly numerické výsledky zatíženy co nejmenší chybou.

Při modelování úloh elastodynamiky pomocí metody konečných prvků je přesnost modelu ovlivněna zejména volbou velikosti prvků, typem prvků (tedy typem básových funkcí), použitou metodou pro integraci v časové oblasti a velikostí integračního kroku. V této podkapitole bude nejdříve provedena analýza vlivu velikosti integračního kroku Δt na přesnost výsledků pro tři různé metody integrace, kterými budou Newmarkova (NM), Houboltova (HB) a metoda centrálních diferencí (CD). Tyto metody pak mezi sebou pro zvolený integrační krok budou porovnány. Nakonec bude pro nejvhodnější metodu analyzován vliv velikosti prvku na přesnost výsledků. Všechny modely budou vytvořeny pomocí lineárních prutových prvků, které nesou v softwaru označení 9 (viz [17]). Vliv typu básových funkcí na výsledky tedy v této práci zkoumán nebude. Tyč délky $l = 0,1$ m s plochou průřezu $A = 1$ m² bude modelována lineárně elastickým materiálem s parametry $E = 210$ GPa, $\rho = 7870$ kg/m³ a $\nu = 0,3$. Tyč je buzena konstantní silou $F_0 = 1$ kN, která je definována pomocí uzlového zatížení ve směru osy x . Podle $\sigma_0 = F_0/A$ je tedy zatížena konstantním napětím $\sigma_0 = 1$ kPa. Porovnávání přesnosti numerických výsledků bude provedeno pro rozložení napětí v tyči v čase $9 \mu\text{s}$, kdy vlna poprvé prochází tyčí a její čelo se nachází přibližně ve vzdálenosti $x = 53,5$ mm a postupuje směrem k levému konci ($x = 0$).

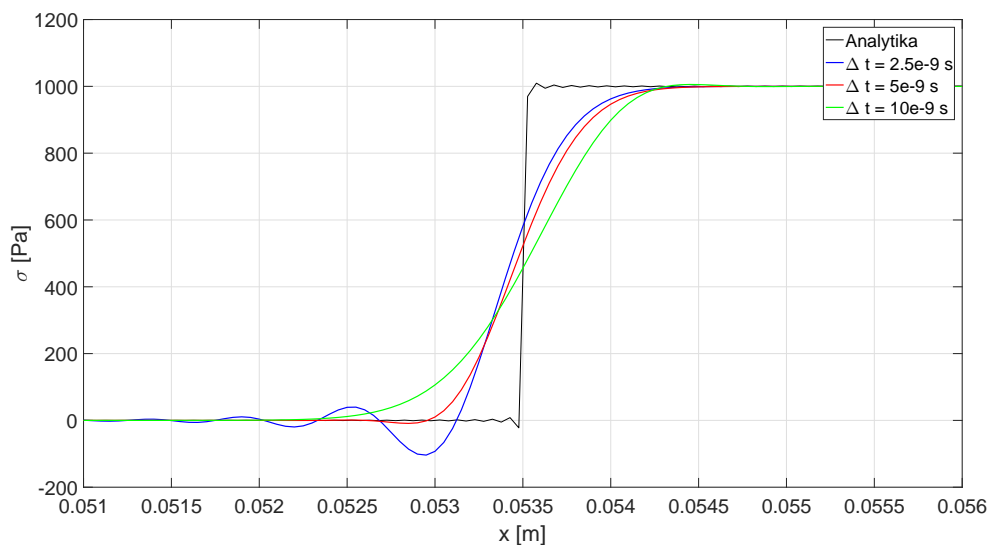
Pro analýzu integračního kroku Δt pro NM, HB a CD integrační metody byla zvolena velikost prvku $l_e = 5 \cdot 10^{-5}$ m. Maximální stabilní integrační krok vypočtený použitým softwarem pro metodu CD a tuto velikost prvku je $5 \cdot 10^{-9}$ s. Pro implicitní



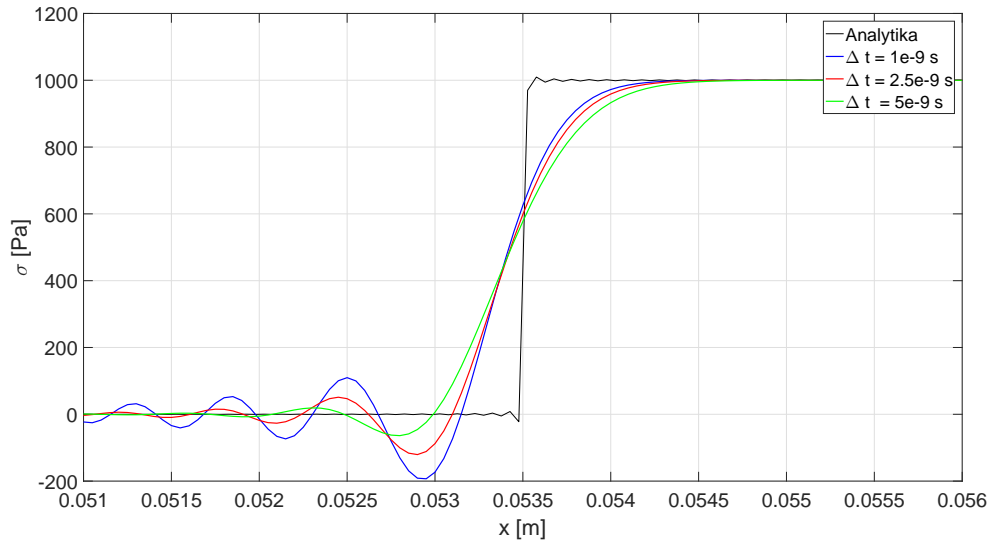
Obrázek 3: Vliv velikosti integračního kroku Houboltovy metody na přesnost výsledků

metody NM a HB bude provedeno porovnání pro tento, poloviční a dvojnásobný integrační krok. Pro metodu CD bude zkoumán pouze vliv zmenšování Δt , neboť se jedná o explicitní metodu a volba delšího než maximálního stabilního Δt není možná.

Z analýzy výsledků provedených výpočtů vyplývá, že zatímco u metody HB dochází ke zpřesnění výsledků při použití kratšího než stabilního Δt (viz obr. 3), u zbylých dvou analyzovaných metod získáme nejpřesnější výsledky při použití právě stabilního Δt (viz obr. 4 a 5). Pro HB (obr. 3) a NM (obr. 4) je také možné sledovat



Obrázek 4: Vliv velikosti integračního kroku Newmarkovy metody na přesnost výsledků

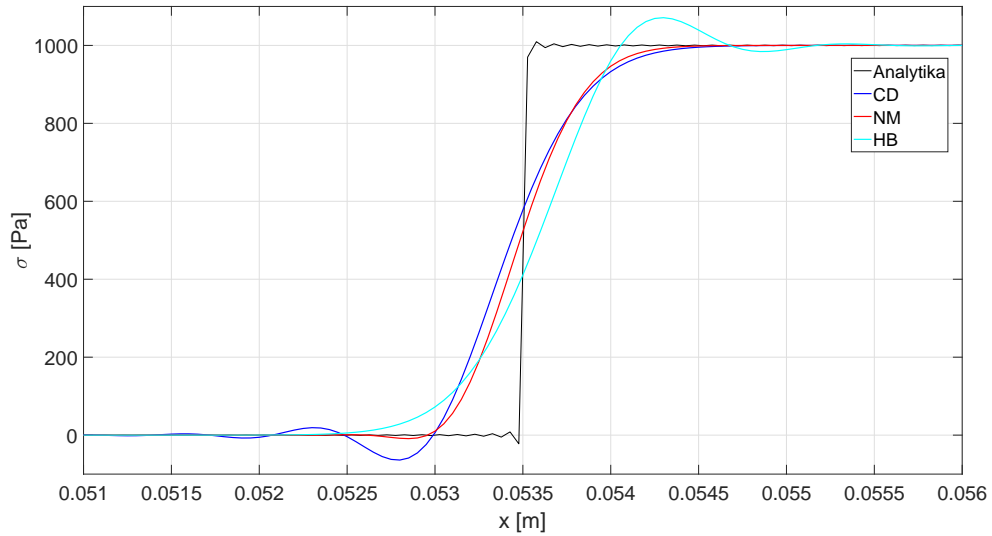


Obrázek 5: Vliv integračního kroku u Centrálních diferencí

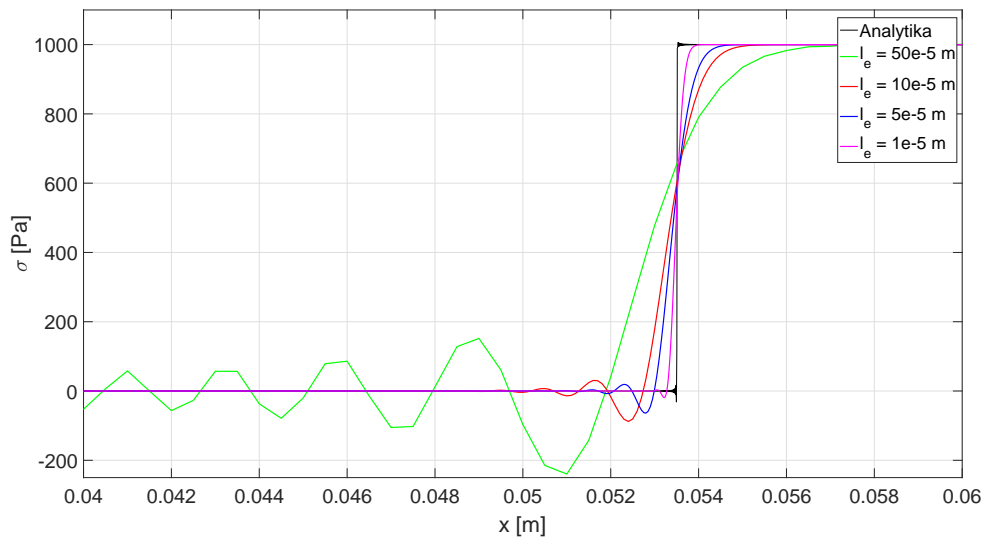
změnu místa oscilací výsledků pro různé integrační kroky. Zatímco pro kratší než stabilní Δt výsledky kmitají před čelem vlny, pro delší se oscilace vyskytují za jejím čelem. Metoda CD vykazuje při všech volbách integračního kroku oscilace před čelem vlny. Při zmenšování Δt však oscilace podstatně narůstají. Ve všech případech je zřejmé, že zmenšování integračního kroku způsobuje větší strmost čela vlny.

Z předchozí analýzy sice vyplývá, že při použití HB dochází s klesajícím Δt ke zpřesňování výsledků, zároveň ale značně narůstá výpočtový čas. Při porovnání přesnosti integračních metod pro různé velikosti prvků bude tedy pro všechny metody volen Δt roven stabilnímu integračnímu kroku CD. Nejprve bylo provedeno porovnání metod na modelu s prvky o velikosti $l_e = 5 \cdot 10^{-4}$ m. Výsledky získané všemi metodami byly v tomto případě prakticky identické. Porovnání dalších výsledků pro prvky o velikosti $l_e = 5 \cdot 10^{-5}$ m je zobrazeno na obr. 6. Je zřejmé, že NM metoda je v tomto případě nejpřesnější, díky menším oscilacím výsledků a větší strmosti čela. Dále je na obr. 6 možné vidět různé umístění oscilací výsledků pro různé metody. Jak je zřejmé již z obr. 3, výsledky získané HB oscilují pro stabilní integrační krok za čelem vlny, zatímco ty ze zbylých dvou metod kmitají před čelem. S dalším zmenšováním prvků rozdíl mezi CD a NM mizí, zatímco výpočtový čas NM zůstává vždy přibližně 1,5 krát delší. Z tohoto důvodu bude pro všechny další výpočty použita metoda centrálních diferencí.

Poslední porovnání přesnosti numerických řešení bude provedeno pro různé velikosti prvků. Integrační krok Δt metody CD bude přitom vždy roven stabilnímu kroku. Lze očekávat, že čím menší prvky jsou v modelu použity, tím je chyba modelu menší. Výsledky analýzy na obr. 7 toto tvrzení potvrzují. Je zřejmé, že pro menší prvky je čelo vlny strmější a přesněji odpovídá analytickému řešení. Také oscilace numerického řešení před čelem šířící se vlny významně klesají. Diskuze volby dostatečně přesné a zároveň výpočtově efektivní velikosti prvku pro konkrétní typ úlohy bude provedena v následující části.



Obrázek 6: Vliv integrační metody na přesnost výsledků



Obrázek 7: Vliv velikosti prvku na přesnost výsledků

3.6 Porovnání analytického a numerického řešení

V této kapitole bude provedeno porovnání analytických výsledků s odezvou vypočtenou metodou konečných prvků pro tři různé typy buzení $\sigma_0(t)$. Pro zvolené budicí funkce bude diskutován vliv velikost prvků na přesnost numerických výsledků v souvislosti s amplitudovým spektrem buzení. Pro všechny zvolené typy buzení budou porovnávány výsledky získané z konečnoprvkových modelů s velikostí prvků $\{4, 8, 16, 32\} \cdot 10^{-5}$ m. Porovnání bude provedeno, stejně jako v předchozích případech, pro rozložení osového napětí v tyči v čase $9 \mu\text{s}$, kdy se čelo vlny nachází přibližně ve vzdálenosti $x = 53,5$ mm.

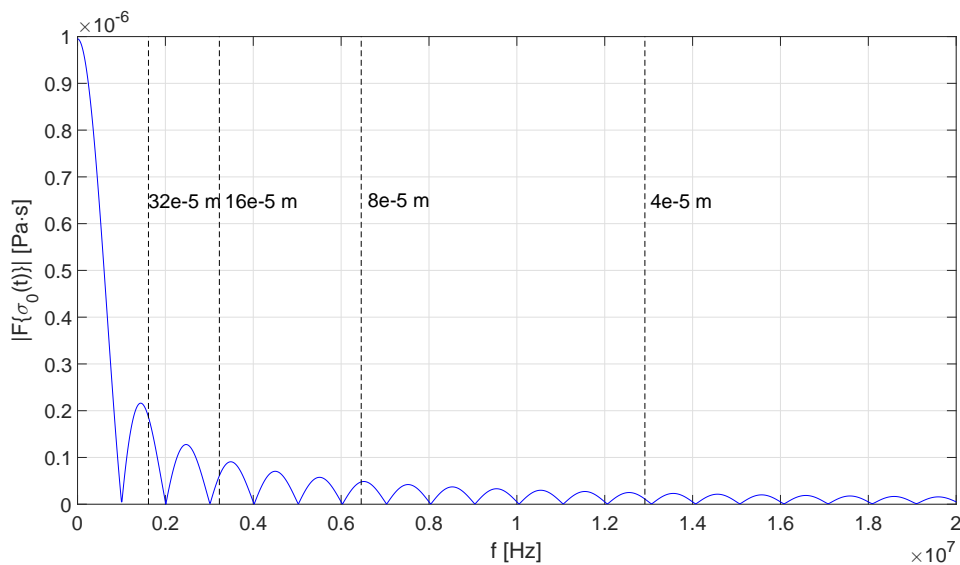
V prvním případě bude buzení uvažováno ve tvaru obdélníkového pulsu ve tvaru

$\sigma_0(t) = \sigma_0 (H(t) - H(t - t_0))$ o délce trvání $t_0 = 1 \mu\text{s}$ a s amplitudou $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$. Amplitudové spektrum tohoto pulsu je znázorněno na obr. 8. Svislými čárkovanými čarami jsou v tomto obrázku vyznačeny maximální frekvence, které by měly být dostatečně přesně popsatečné modely s uvedenými velikostmi prvků. Hodnoty těchto mezních frekvencí byly stanoveny na základě velikosti rychlosti c_0 a faktu, že by velikost prvků měla být přibližně desetkrát menší než vlnová délka nejkratší vlny popisované modelem (viz [18]). Pomocí tohoto grafu je možné odhadnout, jak dobře bude v modelu popsán charakter šířícího se pulsu a jak přesné výsledky budou získány. Je zřejmé, že model s největšími prvky nebude schopný charakter pulsu dobře podchytit, zatímco model s nejmenšími prvky by kromě čel měl tvar pulsu zachytit poměrně dobře. Obr. 9 potvrzuje tuto domněnku. Pro největší prvky je tvar pulsu značně zkreslený (viz obr. 9a) a v oblasti jeho čel dosahuje velikost relativní chyby mezi analytickým a numerickým řešením hodnoty více než 65% (obr. 9b). Pro menší prvky je chyba v oblasti čel menší, i tak ale pro nejmenší zvolené prvky dosahuje až 55%. I přes vysokou maximální relativní chybu je z obr. 9 zřejmé, že čím menší prvky jsou v modelu použity, tím strmější jsou čela v místech skokových změn napětí, díky schopnosti modelu popsat vyšší frekvence obsažené v šířícím se pulsu. Mimo oblast čel je rozdíl v přesnosti numerických výsledků získaných pro různá l_e výraznější. Zatímco u modelu s prvky o velikosti $l_e = 32 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ rozkmitáním řešení před pulsem vzniká chyba přes 10%, v modelu s nejmenšími prvky je tato hodnota dvakrát menší.

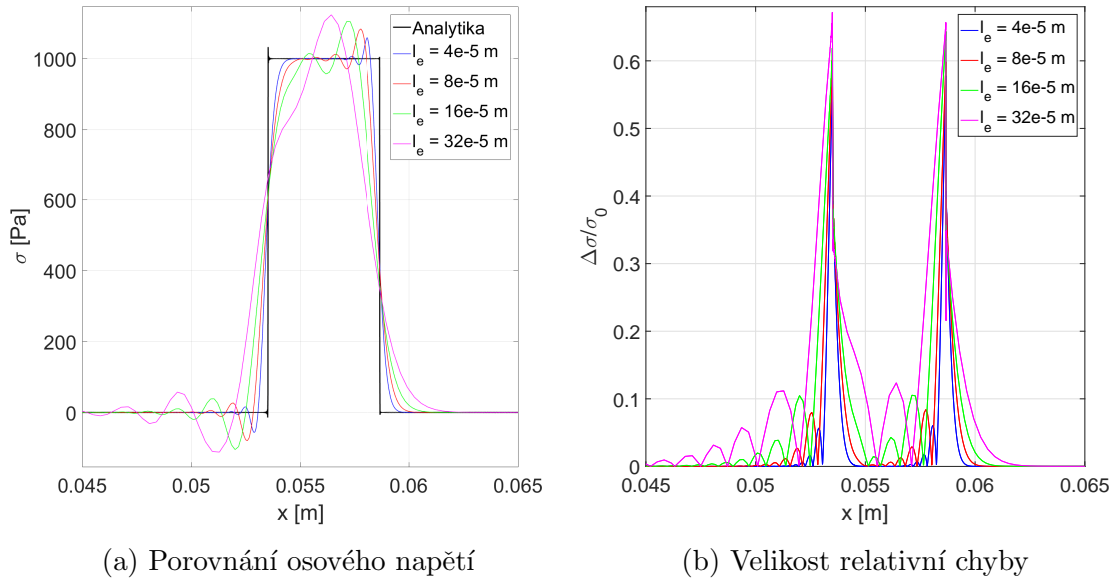
Pro další porovnání analytického a numerického řešení zvolíme budící puls ve tvaru

$$\sigma_0(t) = \sigma_0 \sin\left(\frac{\pi t}{t_0}\right) (H(t) - H(t - t_0)), \quad (3.85)$$

kde $t_0 = 1 \mu\text{s}$ a $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$, tj. délka i amplituda tohoto pulsu jsou stejné jako v předchozím případě. Na obr. 10 je amplitudové spektrum funkce (3.85). Z tohoto

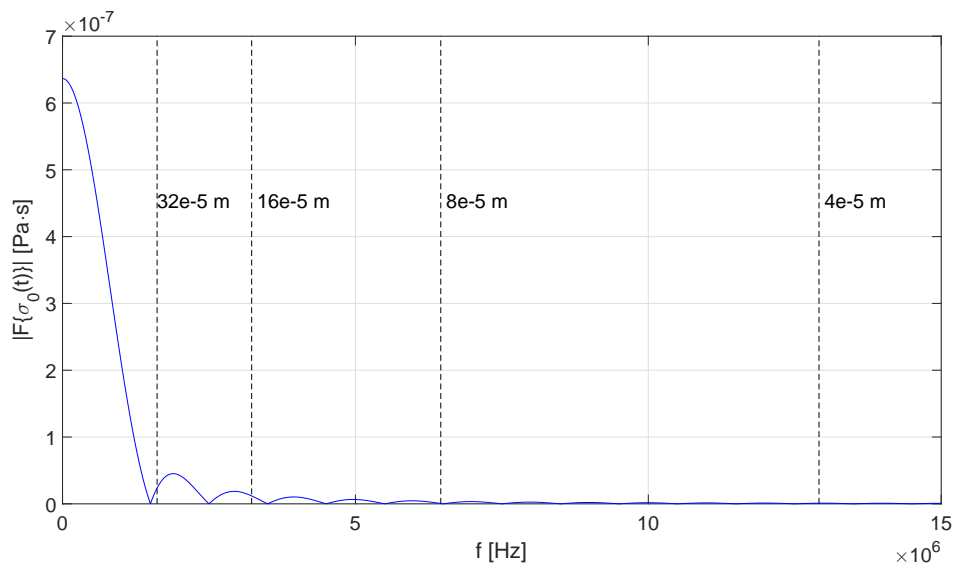


Obrázek 8: Amplitudové spektrum obdélníkového pulsu pro $t_0 = 1 \mu\text{s}$

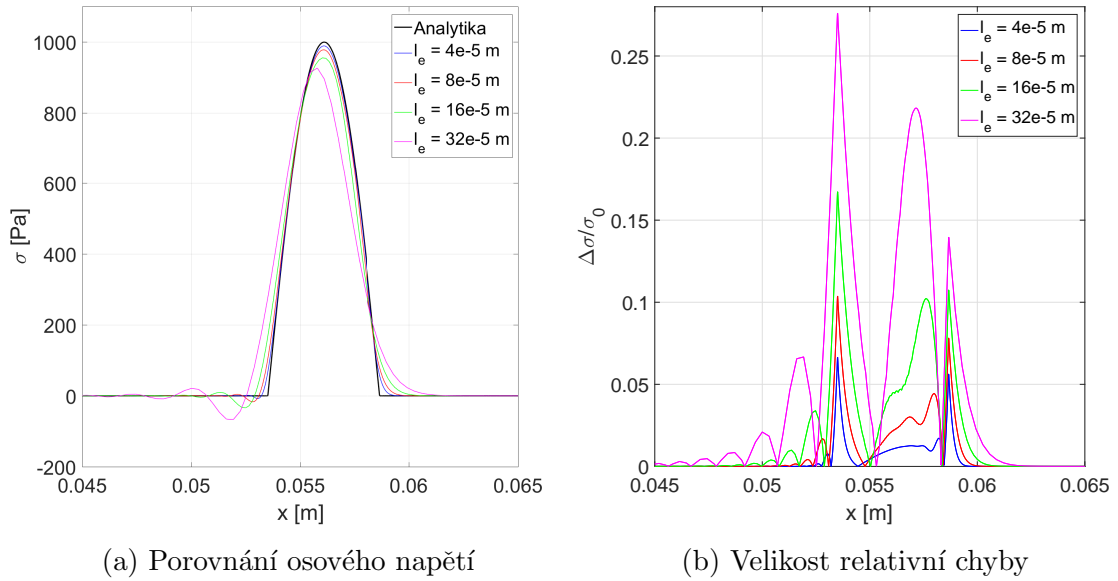


Obrázek 9: Porovnání numerických a analytických výsledků pro obdélníkový puls o délce trvání $t_0 = 1 \mu\text{s}$ pro různé velikosti prvků

obrázku je zřejmé, že i model s prvky o velikosti $l_e = 16 \cdot 10^{-5}$ m by měl poměrně přesně popsat tvar tohoto pulsu. Model s nejmenšími zvolenými prvky by měl vést k velmi přesným výsledkům, pouze v oblasti čel pulsu lze očekávat chyby větší. Při pohledu na porovnání průběhů napětí vůči analytickým výsledkům a grafy relativních chyb na obr. 11 se opět tato domněnka potvrzuje. U modelu s největšími prvky odpovídá maximální relativní odchylka v místě čela pulsu přibližně 27%, což je přibližně třikrát menší chyba, než vykazoval stejný model při buzení obdélníkovým pulsem o stejném t_0 . Je zřejmé, že model s nejmenšími prvky je opravdu velice



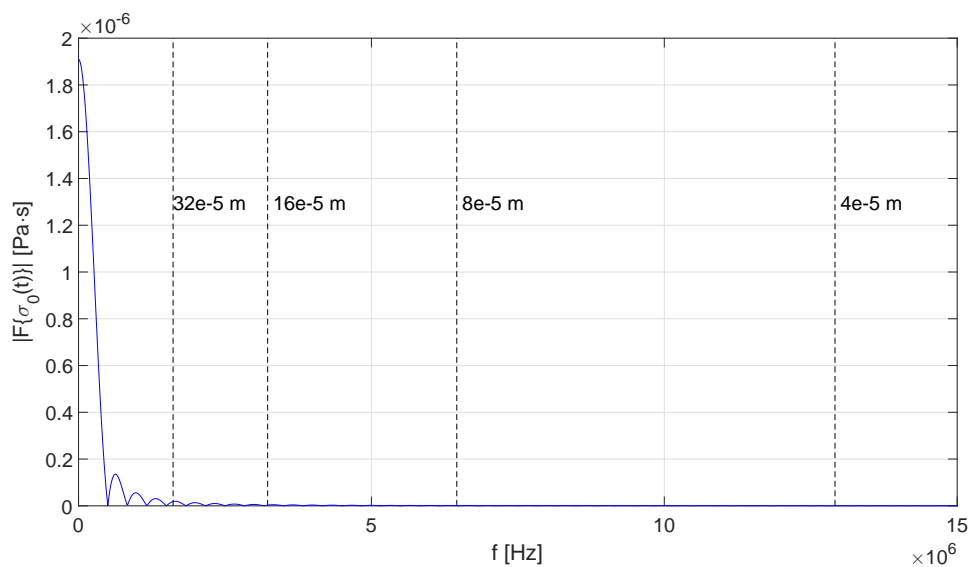
Obrázek 10: Amplitudové spektrum sinového pulsu pro $t_0 = 1 \mu\text{s}$



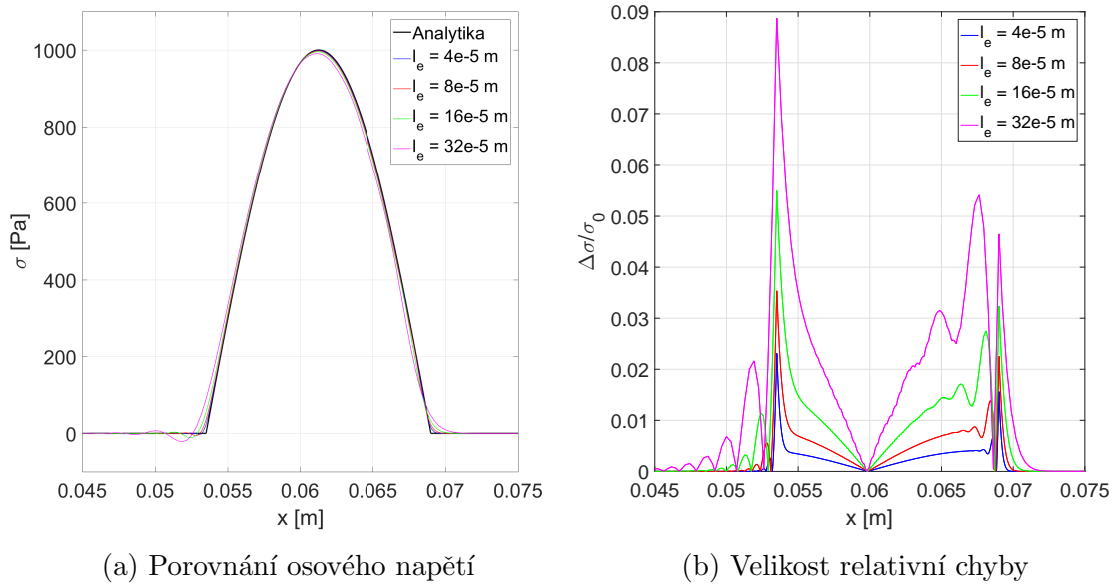
Obrázek 11: Porovnání numerických a analytických výsledků pro sinový puls o délce trvání $t_0 = 1 \mu\text{s}$ pro různé velikosti prvků

přesný a ve svém maximu (v místě čela pulsu) má relativní chyba hodnotu okolo 7%. Mimo čela vlny se chyba tohoto modelu pohybuje do 2%.

Poslední porovnání bude provedeno pro puls daný předpisem (3.85) s $t_0 = 3 \mu\text{s}$ a $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$. Tedy se stejným tvarem i amplitudou jako v předchozím případě, ale s třikrát delší dobou trvání. Při pohledu na frekvenční spektrum tohoto pulsu na obr. 12 je zřejmé, že obsahuje nižší frekvence než oba pulsy v předešlých případech. Podle spektra by měl být s velice malými chybami popsán modely se všemi testovanými velikostmi prvků. Porovnání na obr. 13a ukazuje, že tvar pulsu je opravdu velice



Obrázek 12: Amplitudové spektrum sinového pulsu pro $t_0 = 3 \mu\text{s}$



Obrázek 13: Porovnání numerických a analytických výsledků pro sinový puls o délce trvání $t_0 = 3 \mu\text{s}$ pro různé velikosti prvků

dobře podchycen i modelem s největšími prvky. Při pohledu na obr. 13b je zřejmé, že hodnot chyb, kterých u třikrát kratšího pulsu dosahoval model s velikostí prvků $8 \cdot 10^{-5}$ m je pro tento puls možné dosáhnout modelem se čtyřikrát většími prvky. Ten ve svém maximu v místě čela pulsu dosahuje necelých 9%. Model s nejmenšími prvky v tomto případě celý puls popisuje s chybou do 2%, přičemž jeho chyba je mimo zlom v místě čela do 0,5%.

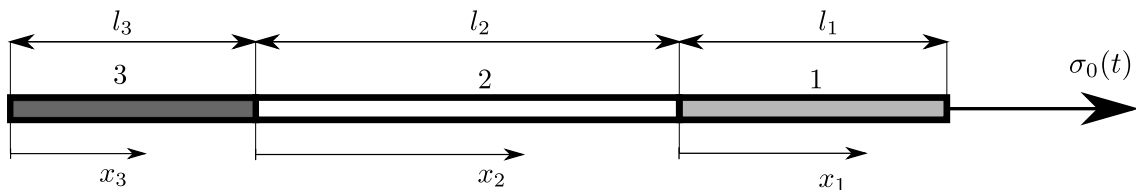
Z analýz provedených v této podkapitole tedy vyplývá, že složení amplitudového spektra budicí funkce $\sigma_0(t)$ má zásadní význam pro správnou volbu velikosti prvků modelu a tedy i pro časovou náročnost prováděného výpočtu.

4 Šíření nestacionárních podélných vln v tenké elastické heterogenní tyči

V této kapitole bude prezentováno odvození analytického řešení nestacionární napjatosti v tenké heterogenní tyči složené ze tří částí z různých materiálů. Dále bude popsáno rozšíření SW nástroje pro vyčíslení odezvy pro tento druh úlohy a provedeno porovnání analytických výsledků s numerickým řešením stejné úlohy získaným pomocí metody konečných prvků.

4.1 Formulace problému

Výše zmíněná heterogenní tyč je zobrazena na obr. 14. V podstatě se jedná o tři tyče délek l_i spojené za sebou. Pro každou z tyčí budou platit předpoklady uvedené v podkapitole 3.1, tj. každá tyč bude tenká, prizmatická, lineárně elastická a budeme uvažovat pouze její malé deformace. Tyče označíme postupně od pravého konce indexy $i = 1, 2, 3$ a materiál každé z nich bude charakterizován materiálovými konstantami E_i , ρ_i a ν_i . Pro každou tyč zavedeme souřadnicový systém x_i podle obr. 14. Tyč 3 bude v bodě $x_3 = 0$ opět buď volná nebo vetknutá. Tyč 1 je v bodě $x_1 = l_1$ buzena osovým napětím $\sigma_0(t)$.



Obrázek 14: Schéma problému heterogenní tyče

4.2 Analytické řešení pro obecný typ buzení

Při odvození analytického řešení je možné vyjít z úvahy, že šíření vln v každé ze tří tyčí je možné popsat stejnou parciální diferenciální rovnicí jako v případě jediné tyče v kapitole 3. Tedy i obecné řešení pro i -tou tyč lze zapsat stejně jako v případě homogenní tyče. Pro Laplaceův obraz posuvu a napětí v i -té tyči tedy platí

$$U_i(x_i, p) = A_i(p) \sinh\left(\frac{px_i}{c_{0,i}}\right) + B_i(p) \cosh\left(\frac{px_i}{c_{0,i}}\right), \quad (4.1)$$

$$\Sigma_i(x_i, p) = \frac{E_i p}{c_{0,i}} \left(A_i(p) \cosh\left(\frac{px_i}{c_{0,i}}\right) + B_i(p) \sinh\left(\frac{px_i}{c_{0,i}}\right) \right), \quad (4.2)$$

kde $c_{0,i} = \sqrt{\frac{E_i}{\rho_i}}$. Tato řešení pro jednotlivé tyče následně propojíme pomocí okrajových podmínek formulovaných na základě předpokladu spojitosti posuvů a napětí na rozhraních jednotlivých tyčí. Tyto podmínky mají následující tvar

$$u_1(0, t) = u_2(l_2, t), \quad \sigma_1(0, t) = \sigma_2(l_2, t), \quad (4.3)$$

$$u_2(0, t) = u_3(l_3, t), \quad \sigma_2(0, t) = \sigma_3(l_3, t). \quad (4.4)$$

Připojením okrajové podmínky buzení

$$\sigma_1(l_1, t) = \sigma_0(t) \quad (4.5)$$

a podmínky volného, resp. vetknutého, konce

$$\frac{\partial}{\partial x_3} u_3(x_3, t)|_{x_3=0} = 0, \quad \text{resp.} \quad u_3(0, t) = 0, \quad (4.6)$$

tak dostáváme 6 okrajových podmínek pro stejný počet neznámých komplexních funkcí $A_i(p)$ a $B_i(p)$. Pro nalezení těchto funkcí je nutné provést Laplaceovu transformaci okrajových podmínek (4.3)-(4.6) a následně do nich dosadit obecná řešení (4.1)-(4.2). Z důvodu zjednodušení zápisu výsledné soustavy a jejího řešení je účelné zavést následující označení

$$sh_i = \sinh\left(\frac{pl_i}{c_{0,i}}\right), \quad ch_i = \cosh\left(\frac{pl_i}{c_{0,i}}\right), \quad f(p) = \frac{\Sigma_0(p)}{p}, \quad z_i = c_{0,i}\rho_i, \quad (4.7)$$

kde z_i představuje charakteristickou impedanci i -tého materiálu. Po provedení výše uvedených kroků a po jistých úpravách získáme pro tyč s volným koncem soustavu rovnic

$$\begin{bmatrix} z_1 ch_1 & z_1 sh_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -sh_2 & -ch_2 & 0 & 0 \\ z_1 & 0 & -z_2 ch_2 & -z_2 sh_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -sh_3 & -ch_3 \\ 0 & 0 & z_2 & 0 & -z_3 ch_3 & -z_3 sh_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1(p) \\ B_1(p) \\ A_2(p) \\ B_2(p) \\ A_3(p) \\ B_3(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(p) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.8)$$

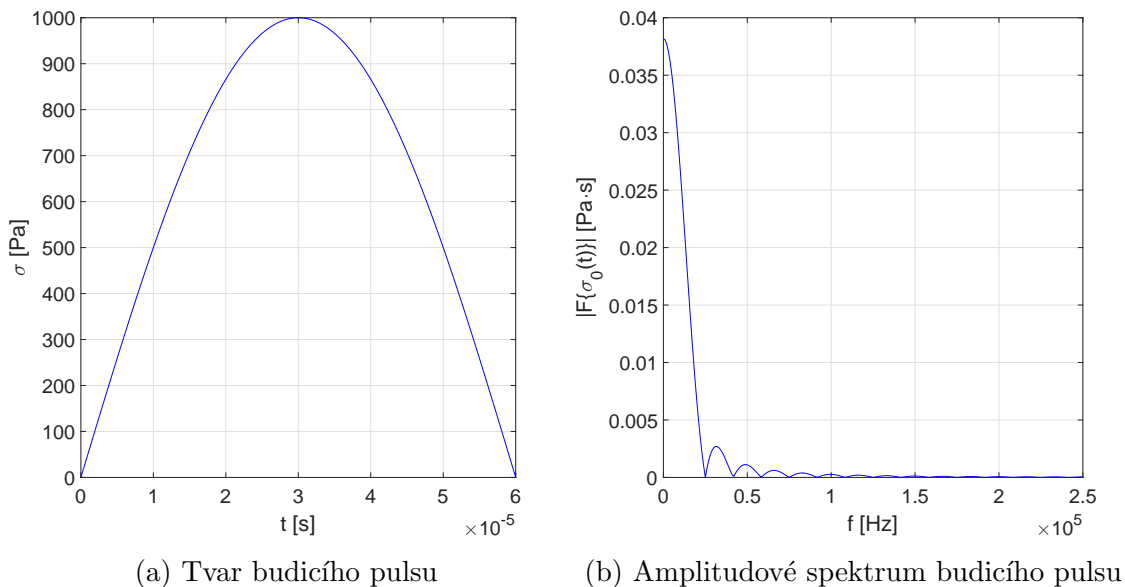
V případě tyče s vetknutým koncem je výsledná soustava stejná až na poslední rovnici, která má tvar $A_3(p) = 0$. Řešením soustavy rovnic (4.8) pro volnou tyč získáme neznámé funkce ve tvaru

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{f(p)}{D_f(p)} \frac{z_2}{z_1} (z_3 ch_3 ch_2 + z_2 sh_3 sh_2), & A_2(p) &= \frac{f(p)}{D_f(p)} z_3 ch_3, & A_3(p) &= \frac{f(p)}{D_f(p)} z_2, \\ B_1(p) &= \frac{f(p)}{D_f(p)} (z_3 ch_3 sh_2 + z_2 sh_3 ch_2), & B_2(p) &= \frac{f(p)}{D_f(p)} z_2 sh_3, & B_3(p) &= 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

kde $D_f(p) = z_2 ch_1 (z_3 ch_3 ch_2 + z_2 sh_3 sh_2) + z_1 sh_1 (z_3 ch_3 sh_2 + z_2 sh_3 ch_2)$. Pro tyč s vetknutým koncem lze řešení vyjádřit jako

$$\begin{aligned} A_1(p) &= \frac{f(p)}{D_c(p)} \frac{z_2}{z_1} (z_3 sh_3 ch_2 + z_2 ch_3 sh_2), & A_2(p) &= \frac{f(p)}{D_c(p)} z_3 sh_3, & A_3(p) &= 0, \\ B_1(p) &= \frac{f(p)}{D_c(p)} (z_3 sh_3 sh_2 + z_2 ch_3 ch_2), & B_2(p) &= \frac{f(p)}{D_c(p)} z_2 ch_3, & B_3(p) &= \frac{f(p)}{D_c(p)} z_2, \end{aligned} \quad (4.10)$$

kde $D_c(p) = z_2 ch_1 (z_3 sh_3 ch_2 + z_2 ch_3 sh_2) + z_1 sh_1 (z_3 sh_3 sh_2 + z_2 ch_3 ch_2)$. Dosazením řešení (4.9), resp. (4.10), do obrazu obecného řešení pro posuv (4.1) a napětí (4.2) pro $i = 1, 2, 3$ získáme obrazy konkrétních řešení pro jednotlivé části heterogenní



Obrázek 15: Tvar budicího pulsu a jeho amplitudové spektrum

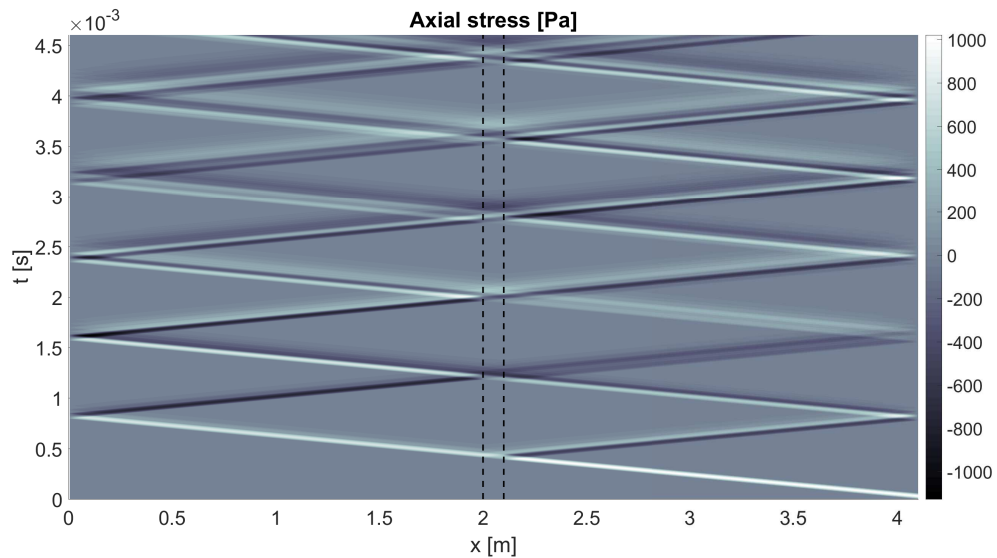
volné, resp. vetknuté, tyče⁴. S ohledem na poměrně značnou složitost těchto funkcí bude jejich zpětná Laplaceova transformace provedena numericky.

Softwarový nástroj představený v podkapitole 3.4 byl pro potřeby vyšetření odezvy heterogenní tyče rozšířen podle vztahů odvozených v této kapitole. Všechny geometrické a materiálové parametry tyče se tak zadávají pomocí standardního vektorového zápisu Matlabu. Nástroj opět umožňuje zobrazení odezvy v posuvech, napětích, rychlostech i zrychleních. Odezva je počítána již zmíněným skriptem pro numerickou zpětnou Laplaceovu transformaci. Nástroj při zobrazení animace odezvy pro lepší přehlednost barevně rozlišuje jednotlivé tyče. Příklad tohoto zobrazení je uveden pro vybraný sinový puls v Příloze B. Pro stejný příklad je v Příloze C odezva heterogenní tyče zobrazena i v časoprostorové rovině $x-t$. V tomto případě jsou rozhraní mezi jednotlivými tyčemi automaticky zvýrazněna čárkovanými čarami.

4.3 Porovnání analytického a numerického řešení

Porovnání analytického a numerického řešení bude provedeno pro tyč složenou ze dvou ocelových částí s parametry $E_j = 210 \text{ GPa}$, $\rho_j = 7870 \text{ kg/m}^3$ o délkách $l_j = 2 \text{ m}$ ($j = 1, 3$). Mezi ně bude vložena hliníková část délky $l_2 = 0,1 \text{ m}$ s parametry $E_2 = 70 \text{ GPa}$ a $\rho_2 = 2700 \text{ kg/m}^3$. Tyč bude buzena pulsem $\sigma_0(t)$ definovaným vztahem (3.85) s délkou trvání $t_0 = 60 \mu\text{s}$ a s amplitudou $\sigma_0 = 1 \text{ kPa}$, jehož graf je zobrazen na obr. 15a. Na obr. 15b je amplitudové spektrum tohoto pulsu, pomocí kterého byla zvolena velikost prvků konečnoprvkového modelu. S ohledem na tvar zmíněného spektra byla mezní frekvence modelu stanovena jako $1,5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$. Na základě velmi podobných rychlostí c_0 v obou materiálech lze k této maximální frekvenci stanovit způsobem uvedeným v podkapitole 3.6 odpovídající velikost prvku $l_e = 3,4 \text{ mm}$. Pro

⁴Dosažení není v práci provedeno z důvodu délky zápisu výsledných vztahů.

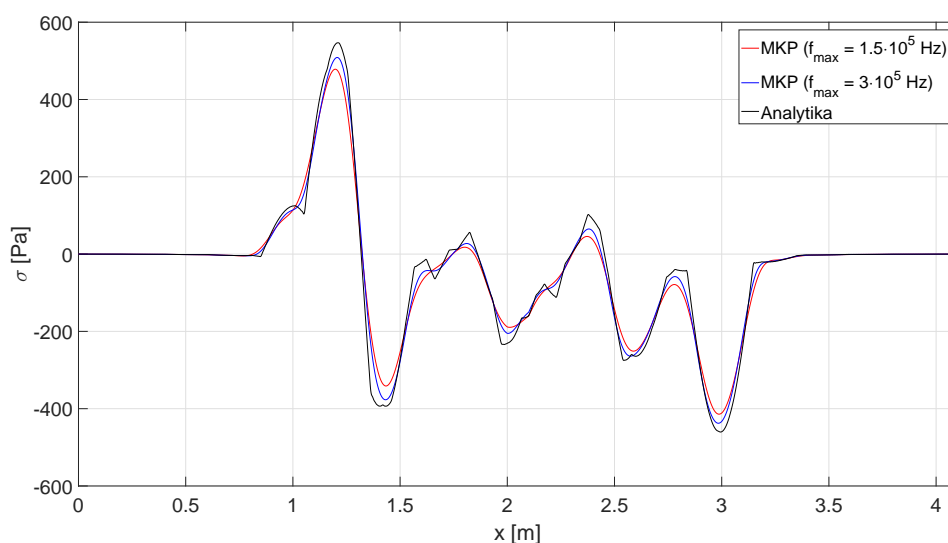


Obrázek 16: Zobrazení šíření pulsu v časoprostorové rovině $x-t$

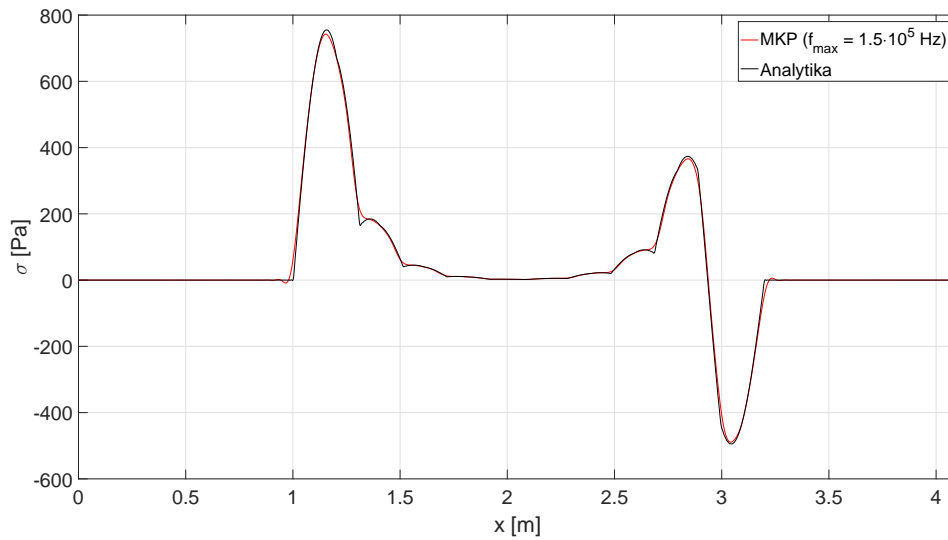
integraci byla použita metoda centrálních diferencí se stabilním integračním krokem $\Delta t = 3,4 \cdot 10^{-7}$ s.

Pro tuto úlohu je na obr. 16 zobrazeno šíření pulsu v časoprostorové rovině $x-t$. Zde můžeme sledovat průchody a odrazy pulsu na obou rozhraních prostředí, které jsou vyznačeny černými přerušovanými čarami. Je zřejmé, že při každém průchodu hliníkovou částí je primární odražený puls s malým zpožděním následován pulsem odraženým na dalším rozhraní.

Vlastní porovnání analytického a numerického řešení bylo provedeno pomocí rozložení osového napětí podél tyče v čase $t = 4,5$ ms (viz obr. 17), tedy v čase, který odpovídá přibližně 5,5 průchodům pulsu celou tyčí o délce $l = 4,1$ m, viz

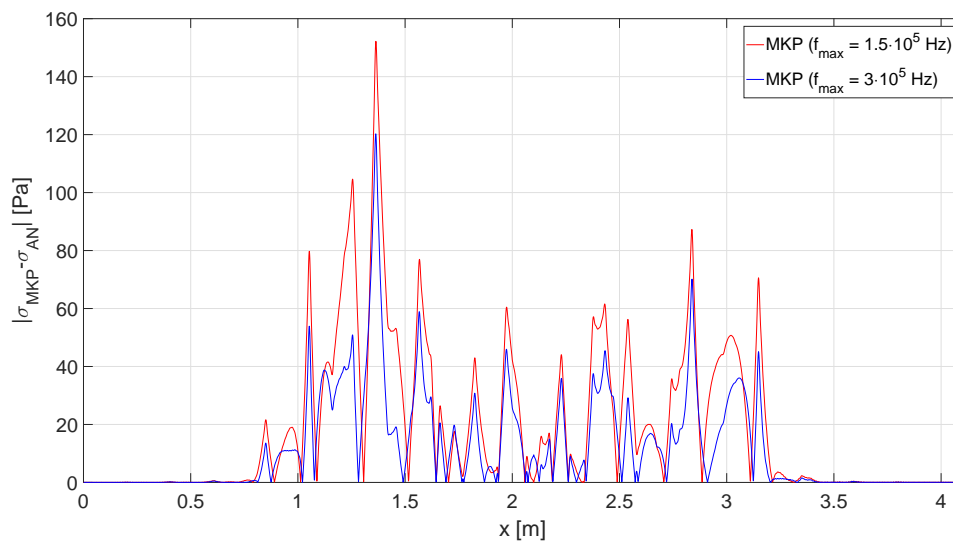


Obrázek 17: Porovnání rozložení osového napětí v tyči v čase 4,5 ms



Obrázek 18: Porovnání rozložení osového napětí v tyči v čase 0,6 ms

obr. 16. Z tohoto pozorování je zřejmý vliv disperze konečnoprvkového modelu s $f_{max} = 1,5 \cdot 10^5$ Hz. Zejména v místech, kde není průběh napětí hladký v důsledku tvaru budicího pulsu a interakce odražených a prošlých vln, dává numerický model zkreslené výsledky. Disperzní chování modelu se navíc negativně projevuje i s rostoucím časem, jak dokazuje obr. 18, na kterém jsou zobrazena tatáž řešení, ale v kratším čase $t = 0,6$ ms. Je zřejmé, že vliv disperze modelu je podstatně menší, ale i tak model nepopisuje vlnové jevy v místech ostrých zlomů dostatečně přesně. Pro zpřesnění modelu je potřeba zvýšit meznou frekvenci f_{max} , kterou model dokáže podchytit, tedy zmenšit velikost prvků. Porovnání v čase $t = 4,5$ ms bylo tedy provedeno



Obrázek 19: Porovnání chyb konečnoprvkových modelů vzhledem k analytickým výsledkům v čase 4,5 ms

ještě pro model s poloviční velikostí prvků a meznou frekvencí $f_{max} = 3 \cdot 10^5$ Hz. Pro tento model byla velikost integračního kroku $\Delta t = 1,7 \cdot 10^{-7}$ s. Z obr. 17, ve kterém jsou tyto zpřesněné numerické výsledky vykresleny, je zřejmé, že model s menšími prvky lépe podchycuje tvar šířící se vlny, a to jak amplitudově, tak ve zmíněných oblastech ostrých změn napětí.

Lepší informaci o zpřesnění výsledků pomocí zmenšení prvků nabízí obr. 19, který zobrazuje absolutní odchylku obou těchto modelů od analytických výsledků. Je zřejmé, že chyba modelu s vyšší meznou frekvencí je značně nižší. Zatímco v některých místech jsou výsledky zpřesněny jen o pár procent, v některých je chyba modelu s menšími prvky až poloviční.

Z výsledků prezentovaných v této kapitole je zřejmé, že v důsledku skokových změn materiálových vlastností vznikají v tyči odražené vlny, při jejichž interakci dochází k odezvě s nespojitými derivacemi, které konečnoprvkový model nedokáže zcela dobře popsat. Při modelování šíření vln v heterogenních tyčích je tedy potřeba pro dosažení stejné přesnosti jako v homogenním případě volit menší prvky.

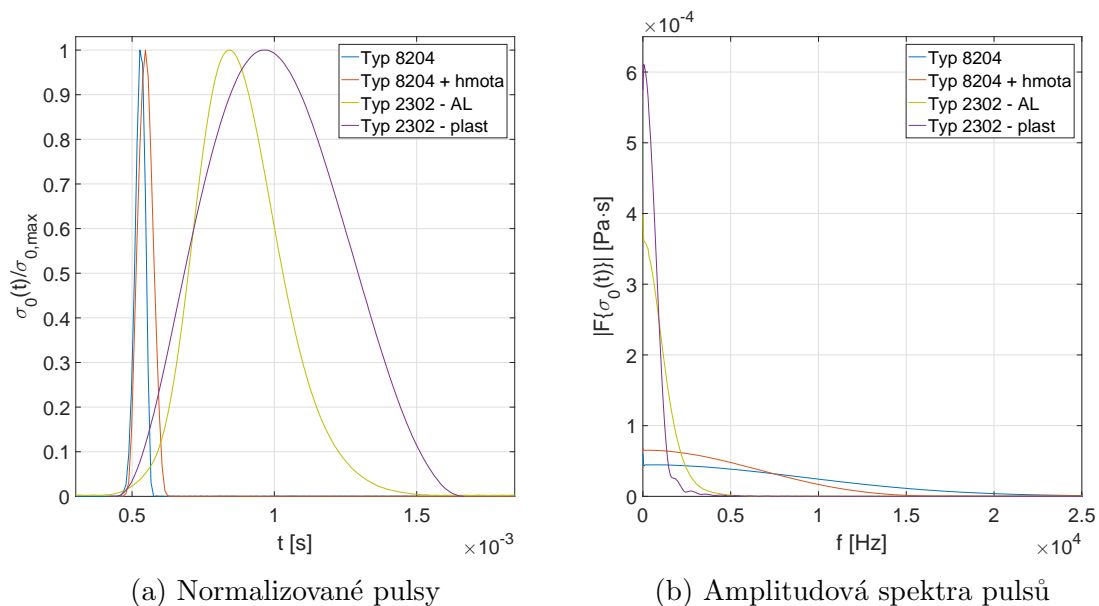
5 Experimentální vyšetřování šíření vln v tenkých tyčích

5.1 Popis experimentu a zpracování experimentálních dat

V této části práce bude popsán způsob experimentálního vyšetřování vlnových jevů v homogenních a heterogenních tyčích. Takto získané výsledky posloužily jednak pro porovnání s analytickým řešením a dále pak pro řešení vybraných typů inverzních úloh.

Pro buzení tyčí byla při experimentu použita rázová kladívka dvou typů: *Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204* a *Endevco Modal hammer - Model 2302*. Konkrétní parametry těchto kladívek jsou uvedeny v Příloze D a E. První (menší) kladívko mohlo být doplněno ještě o přídatnou hmotu, u druhého (většího) kladívka pak mohly být použity dva druhy hrotů - hliníkový a plastový. Celkem tedy byly použity čtyři typy buzení, jimž odpovídají pulsy různých amplitud a různých délek. Na obr. 20a jsou znázorněny čtyři typické normované pulsy, které lze naměřit na výstupu rázových kladívek. Je zřejmé, že nejkratší puls o délce přibližně $t_0 \doteq 0,1$ ms bude generován nejmenším kladívkem. Přidání hmoty tomuto kladívku se projeví změnou amplitudy a zejména pak prodloužením pulsu na přibližně $t_0 \doteq 0,15$ ms. Pulsy generované větším kladívkem se samozřejmě vyznačují větší intenzitou a dobou trvání. Při použití hliníkového hrotu byla délka pulsu $t_0 \doteq 1$ ms, zatímco pomocí plastového hrotu se vygeneroval puls délky $t_0 \doteq 1,2$ ms. Amplitudová spektra těchto čtyř pulsů z obr. 20a jsou znázorněna na obr. 20b. Je zřejmé, že amplitudy pulsů a jejich frekvenční složení podstatně závisí na zkušenostech experimentátora, tj. na intenzitě a kvalitě úderu.

Pro měření odezvy tyčí byl použit miniaturní akcelerometr *Brüel & Kjær Minia-*



Obrázek 20: Tvary pulsů a amplitudová spektra rázových kladívek



Obrázek 21: Připevnění akcelerometru k tyči

ture *DeltaTron*[®] *Accelerometer - Type 4519*, jehož signál byl následně zpracován osmikanálovým analyzátozem *OROS OR35*. Specifikace parametrů zmíněného snímače je uvedena v Příloze F. Tímto akcelerometrem s maximální vzorkovací frekvencí $f_e = 102,4 \text{ kHz}$ bylo snímáno zrychlení tyče na nebuzeném konci. Akcelerometr byl na konec tyče přilepen vteřinovým lepidlem, jak je znázorněno na obr. 21. I přes jeho velmi malou hmotnost (1,6 g) docházelo díky takto přidané hmotě na konec tyče k ovlivnění výsledků měření, jak bude diskutováno v podkapitole 5.2. Dalším významným faktorem, který ovlivnil vlny šířící se v tyči, byl kabel pro přenos dat k akcelerometru (viz obr. 21). Při jeho odpojení se podstatně zvýšila výška tónu odpovídající propagujícímu se pulsu a dále se výrazně prodloužila doba jeho útlumu. Z těchto důvodů budou v další části práce využity experimentální výsledky pro poměrně krátké časy, aby se tyto negativní vlivy co nejméně projevíly. První měření byla pro všechny čtyři výše uvedené typy pulsů provedena pro homogenní ocelovou a hliníkovou tyč kruhového průřezu a délky $l = 2 \text{ m}$. Při měření byly tyče uloženy na molitanových pruzích. Ocelové tyči středního průměru $d_o = 5,965 \text{ mm}$ a hmotnosti $m_o = 440 \text{ g}$ odpovídala hustota materiálu $\rho_o = 7872 \text{ kg/m}^3$. V případě hliníkové tyče byla pak hustota stanovena pomocí hodnot $d_h = 6 \text{ mm}$ a $m_h = 152 \text{ g}$ jako



Obrázek 22: Spojení částí heterogenní tyče a její uložení při experimentu

$\rho_h = 2684 \text{ kg/m}^3$. Další dva typy měření byly již provedeny na heterogenních tyčích. V obou případech se jednalo o kombinaci dvou ocelových tyčí délek 2 m, mezi které byla vložena hliníková část délky⁵ $l_2 = 0,1 \text{ m}$ nebo $l_2 = 0,2 \text{ m}$. Jednotlivé části heterogenní tyče byly navzájem slepeny vteřinovým lepidlem a opět podloženy molitanovými pruhy, jak je patrné z obr. 22. Lze předpokládat, že spojení částí tyče tímto způsobem vnáší do výsledků určité nepřesnosti a je jedním ze slabých míst realizace experimentu.

5.2 Odezva homogenní tyče - porovnání s analytickým řešením

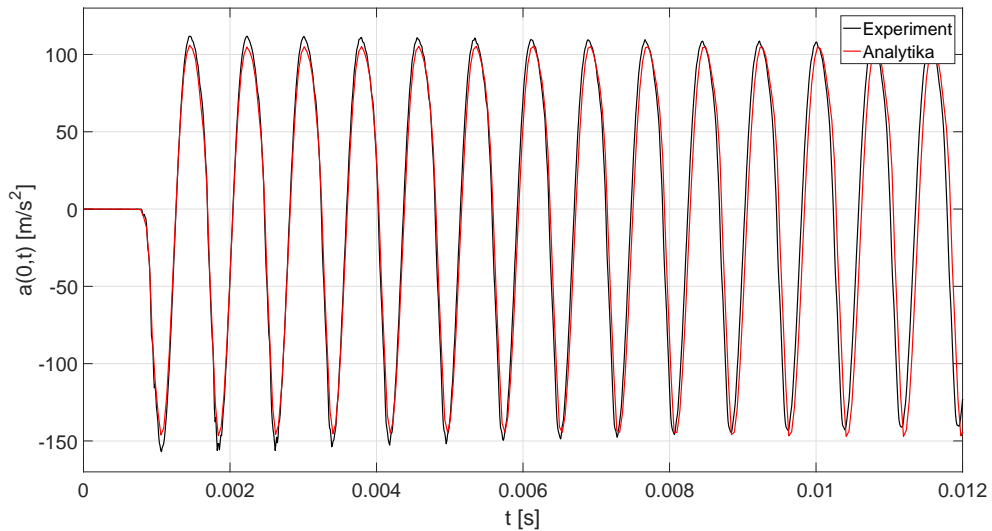
Výsledky měření na homogenních tyčích byly v první řadě použity pro odhad Youngových modulů použitých materiálů, které jsou dále potřeba pro vyčíslení analytického řešení. Tento parametr lze jednoduše vypočítat ze změřené doby Δt průchodu pulsu tyčí známé délky l jako

$$E = \rho c_0^2 = \rho \left(\frac{l}{\Delta t} \right)^2. \quad (5.1)$$

Pomocí vztahu (5.1) byly vypočteny hodnoty modulů pružnosti $E_h = 65 \text{ GPa}$ pro hliník a $E_o = 207 \text{ GPa}$ pro ocel. Je nutné však zdůraznit, že se jedná pouze o odhady, neboť stanovení Δt je zatíženo jistou chybou.

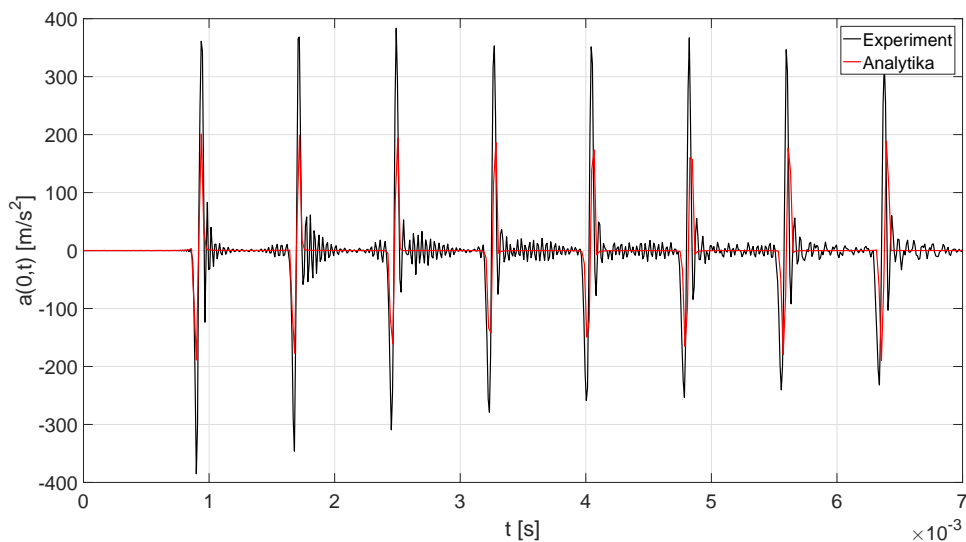
Na obr. 23 je zobrazeno porovnání změřeného zrychlení vybuzeného na konci ocelové tyče velkým kladívkem s plastovým hrotem a analyticky vypočtené odezvy tyče na změřený puls. Z tohoto porovnání je zřejmé, že analytické výsledky velice přesně popisují skutečnou odezvu tyče změřenou pomocí akcelerometru. V delších časech měření začínají být analytické výsledky mírně zpožděné, což je nejspíše způsobeno nepřesným odhadem Youngova modulu E_o , tedy i rychlosti šíření vln c_0 . Z těchto výsledků je dále patrné, že během doby trvání tohoto pulsu $t_0 \doteq 1,2 \text{ ms}$ projde čelo vlny tyčí o délce $l = 2 \text{ m}$ na její konec a zpět k místu buzení, takže v měřeném bodě není zrychlení v žádném časovém intervalu trvale nulové. Při pohledu na porovnání zrychlení na stejné tyči buzené malým kladívkem bez přidané hmoty (viz obr. 24), tedy nejkratším pulsem délky $t_0 \doteq 0,1 \text{ ms}$, je situace jiná. Tento puls je výrazně kratší a vyvolává nenulové zrychlení na konci tyče po $T = 2l/c_0 \doteq 0,78 \text{ ms}$, tedy vždy, když projde odražený puls tyčí k buzenému konci a zpět k akcelerometru. Tento čas je také periodou oscilací na obr. 23 vyvolaných úderem velkého kladívka s plastovým hrotem. Jak bylo předpokládáno, míra shody analytických výsledků s provedeným měřením je v případě malého kladívka nižší, než u kladívka velkého. Amplitudy analyticky vypočteného zrychlení jsou výrazně nižší než ty experimentálně změřené. Tato nepřesnost je pravděpodobně způsobena špatně popsanou amplitudou budicího pulsu z rázového kladívka, který je použit jako vstup do algoritmu pro vyčíslení analytického řešení. V tomto případě je puls velmi krátký, takže při jeho navzorkování frekvencí $f_e = 102,4 \text{ kHz}$ dochází ke zkreslení jeho amplitudy. Toto zkreslení je patrné i z obr. 20a, na kterém mají pulsy odpovídající malému

⁵Použité označení délky tyče l_2 odpovídá indexování zavedenému v kapitole 4



Obrázek 23: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy ocelové tyče buzené velkým kladívkem s plastovým hrotem

kladívku nehladký průběh v okolí svých maxim. K další výrazné neshodě mezi analytickými a experimentálními výsledky dochází v časových intervalech mezi příchody jednotlivých pulsů. V nich by zrychlení konce tyče mělo být teoreticky nulové, jak potvrzuje analytické řešení na obr. 24. Záznam zrychlení získaný z experimentu však v těchto úsecích značně osciluje. Tento jev je pravděpodobně důsledkem přítomnosti vysokých frekvencí ve spektru budicího pulsu, viz obr. 20b. Pro takto vysoké frekvence již nelze tyč o průměru $d_o \doteq 6$ mm považovat za zcela tenkou, což se může negativně projevit výše uvedeným způsobem. Dalším faktorem, který zřejmě ovlivňuje



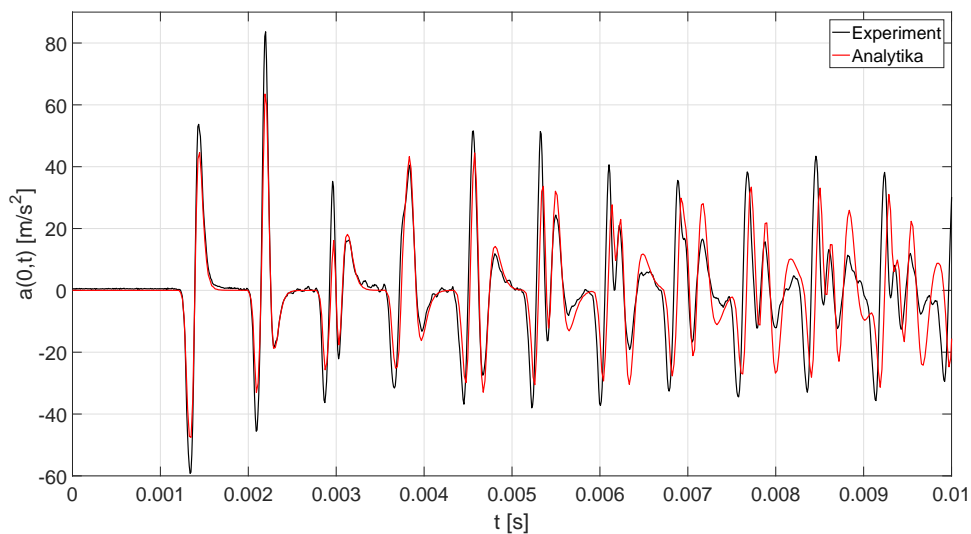
Obrázek 24: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy ocelové tyče buzené malým kladívkem bez přidané hmoty

tyto oscilace, je vlastní hmotnost snímače a jeho kabelu. Setrvačné účinky působící na takto přidanou hmotu se projeví výrazněji právě v případě úzkého pulsu než u pulzu z velkého kladívka.

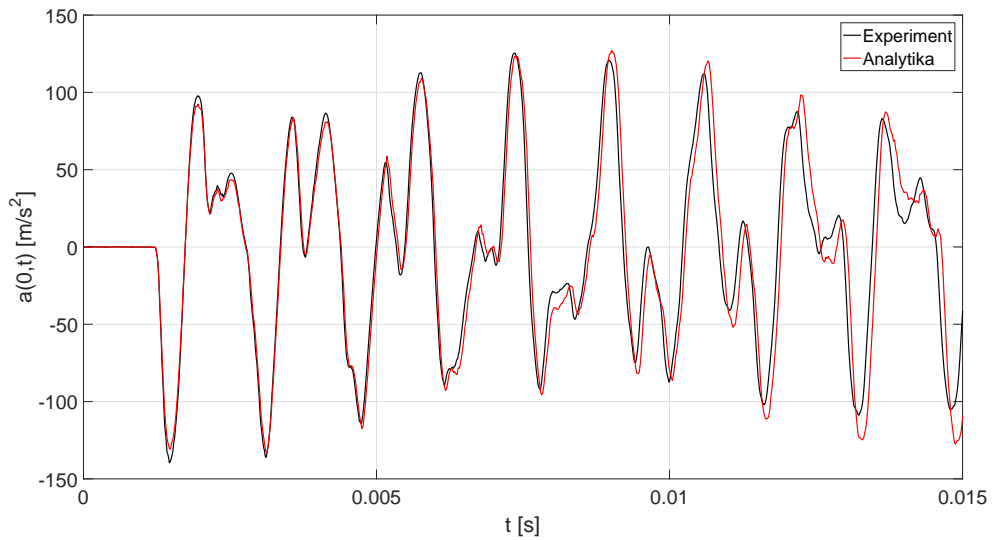
5.3 Odezva heterogenní tyče - porovnání s analytickým řešením

První porovnání experimentálních a analytických výsledků pro heterogenní tyč bude provedeno pro buzení malým kladívkem bez přidané hmoty, tedy pro puls, pro který byla na homogenní tyči dosažena nejhorší shoda. Toto porovnání je zobrazeno na obr. 25. Z tohoto obrázku je zřejmé, že výsledky v kratších časech se velice dobře shodují. Pro delší časy již odchylka analytických výsledků od změřeného zrychlení roste. Na rozdíl od porovnání na homogenní tyči provedeném na obr. 24 pro stejný budící puls se zde nevyskytují tak výrazné oscilace mezi příchody pulsů. Je zřejmé, že amplitudy zrychlení jsou v tomto případě výrazně nižší, vliv vlastní hmoty akcelerometru na výsledky je tedy znatelně menší. Nepřesnosti v delších časech jsou pravděpodobně způsobeny disperzí v jednotlivých částech tyče a průchody pulsů přes jejich neideální spoje. Lepidlo na rozhraních materiálů může negativně ovlivnit přesnost výsledků, zejména pak u pulsů z malého kladívka, z důvodu jejich četných odrazů a interakcí s těmito lepenými spoji.

Při porovnání výsledků pro stejnou tyč buzenou velkým kladívkem s plastovým hrotem je již těchto nepřesností znatelně méně, viz obr. 26. Z těchto výsledků je zřejmé, že charakter vln je popsán velice dobře. Nepřesnosti zde nastávají převážně z důvodu zpoždění analytických výsledků, které je způsobeno nepřesným odhadem modulů pružnosti. Vliv disperze na pulsy šířící se v tyči je v tomto případě menší díky tomu, že obsahují nižší frekvence. Stejně tak nepřesnosti vyvolané interakcemi s rozhraními prostředí nejsou díky větší délce pulsu na tomto porovnání tak velké

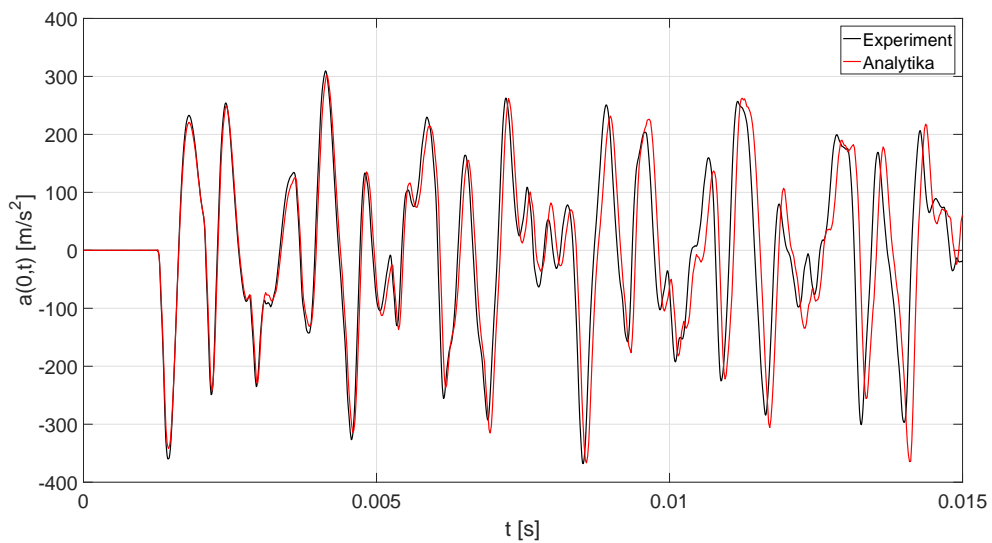


Obrázek 25: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy soustavy tyčí s $l_2 = 0,1$ m buzené malým kladívkem bez přidané hmoty



Obrázek 26: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy soustavy tyčí s $l_2 = 0,1$ m buzené velkým kladívkem s plastovým hrotem

jako v případě kratšího pulsu. Velice podobnou míru shody vykazují analyticky získané a změřené výsledky pro tyč s hliníkovou částí $l_2 = 0,2$ m a buzenou velkým kladívkem s plastovým hrotem. Toto porovnání je provedeno na obr. 27. Hlavním důvodem nepřesností v tomto případě je opět nepřesný odhad modulů pružnosti, který způsobuje podobné zpoždění analytických výsledků oproti těm změřeným akcelerometrem jako v předchozích případech. Na těchto výsledcích je také možné pozorovat malý negativní vliv disperze, opět ale v nižší míře než u výsledků z tyče buzené malým kladívkem (viz obr. 25).



Obrázek 27: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy soustavy tyčí s $l_2 = 0,2$ m buzené velkým kladívkem s plastovým hrotem

Z porovnání analyticky získaných zrychlení a experimentálně změřených výsledků prezentovaných v této podkapitole a podkapitole 5.2 je zřejmé, že pro zrychlení změřené na tyči buzené velkým kladívkem získáváme obecně lepší shodu s analyticky získanými výsledky pro delší čas t než v případě tyče buzené malým kladívkem. Pro řešení inverzních úloh v následující části práce budou tedy použity výsledky měření provedených pomocí velkého kladívka, ať už s hliníkovým nebo plastovým hrotem.

6 Řešení inverzních úloh

Pro demonstrování možného využití získaných analytických výsledků při řešení inverzních úloh byly vybrány dva konkrétní případy. Nejprve bude řešena inverzní úloha identifikace materiálových vlastností, která může být využita jako alternativa k jiným metodám hledání materiálových parametrů. Druhá prezentovaná inverzní úloha je identifikace buzení tyče. Modifikací této úlohy je možné např. stanovit průběh kontaktní síly v úlohách rázu dvou tenkých tyčí apod.

6.1 Popis optimalizační úlohy

Obě inverzní úlohy byly řešeny programem vytvořeným v softwaru Matlab. Základem algoritmu pro parametrickou optimalizaci je standardní matlabovská funkce *fmincon*, která variací zvolených vstupních parametrů hledá minimum cílové funkce. V obou případech byla prováděna optimalizace podle experimentálně změřeného zrychlení na konci tyče. Cílová funkce tedy vyjadřovala odchylku mezi změřeným a analyticky vypočítaným zrychlením a byla definována jako

$$f_c = \left| \frac{(\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A) \mathbf{W} (\mathbf{a}_E - \mathbf{a}_A)^T}{\mathbf{a}_E \mathbf{W} \mathbf{a}_A^T} \right|, \quad (6.1)$$

kde \mathbf{a}_E je řádkový vektor obsahující změřené hodnoty zrychlení v daných bodech časového intervalu $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$, \mathbf{a}_A je řádkový vektor hodnot zrychlení získaných z analytických vztahů ve stejných bodech intervalu t a \mathbf{W} je váhová matice, která určuje důležitost (váhu) hodnot zrychlení v jednotlivých časových okamžicích. Pro obě prezentované úlohy byla váhová matice volena jako jednotková, tedy všechny hodnoty zrychlení určené pro $t \in \langle 0, t_{max} \rangle$ měly stejnou váhu.

Proces optimalizace začíná nejprve vyhodnocením odezvy tyče pro počáteční hodnoty parametrů zadané uživatelem a vypočítáním hodnoty cílové funkce dle (6.1), tedy porovnáním analytické odezvy tyče se změřenými daty. Program poté pomocí odhadů gradientů cílové funkce na okolí počátečního bodu vypočte nové hodnoty optimalizovaných parametrů tak, aby pro ně v ideálním případě hodnota cílové funkce klesala. Tyto kroky se opakují, dokud není nalezena taková kombinace optimalizovaných parametrů, pro které má cílová funkce podle uživatelem zadaných numerických kritérií minimum. Pro případ optimalizace modulů pružnosti byly hodnoty parametrů funkce *fmincon*, které ovlivňují přesnost výpočtu, ponechány standardní přednastavené. Pro případ optimalizace buzení byl změněn parametr *OptimalityTolerance* na hodnotu 10^{-12} a parametr *StepTolerance* na 10^{-16} . Cílová funkce může mít pro některé volby optimalizovaných parametrů složitý tvar s mnoha lokálními minimy. V těchto případech pak nemusí proces optimalizace vést k jednoznačnému řešení a značně závisí na volbě počátečních parametrů.

6.2 Řešení úlohy identifikace materiálových vlastností

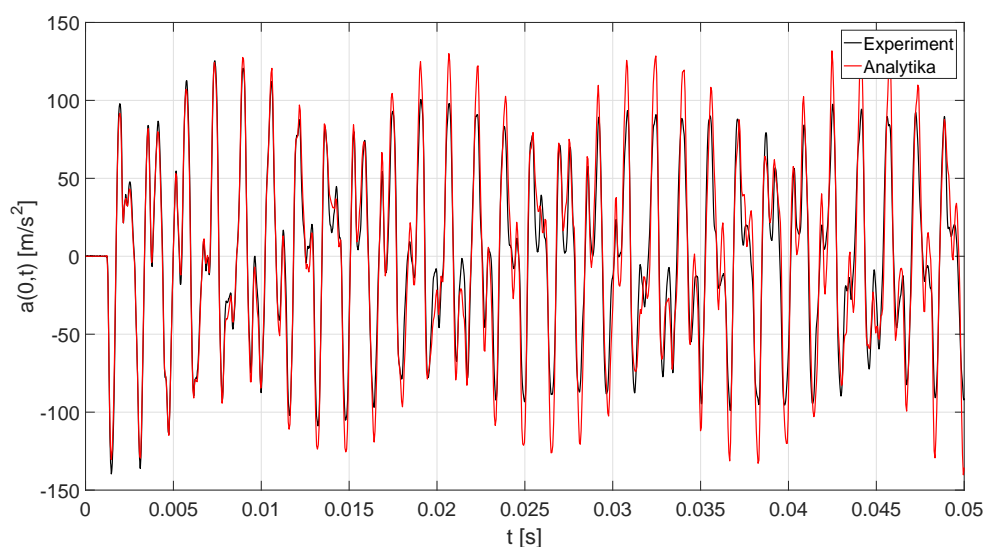
V tomto případě byla úloha optimalizace řešena za účelem identifikace modulů pružnosti obou materiálů použitých při experimentu, tj. hliníku a oceli. Jejich hustoty byly již dříve vypočítány ze známé hmotnosti a rozměrů tyčí, viz podkapitola

	N	\overline{E}_h [GPa]	$\delta\overline{E}_h$ [GPa]	\overline{E}_o [GPa]	$\delta\overline{E}_o$ [GPa]
$l_2 = 0,1$ m, hliníkový hrot	11	62,9	0,1	209,65	0,01
$l_2 = 0,1$ m, plastový hrot	11	63,7	0,1	209,636	0,006
$l_2 = 0,2$ m, hliníkový hrot	10	67,9	0,1	209,58	0,02
$l_2 = 0,2$ m, plastový hrot	12	68,2	0,1	209,513	0,007

Tabulka 1: Průměry optimalizovaných hodnot a jejich směrodatné odchylky

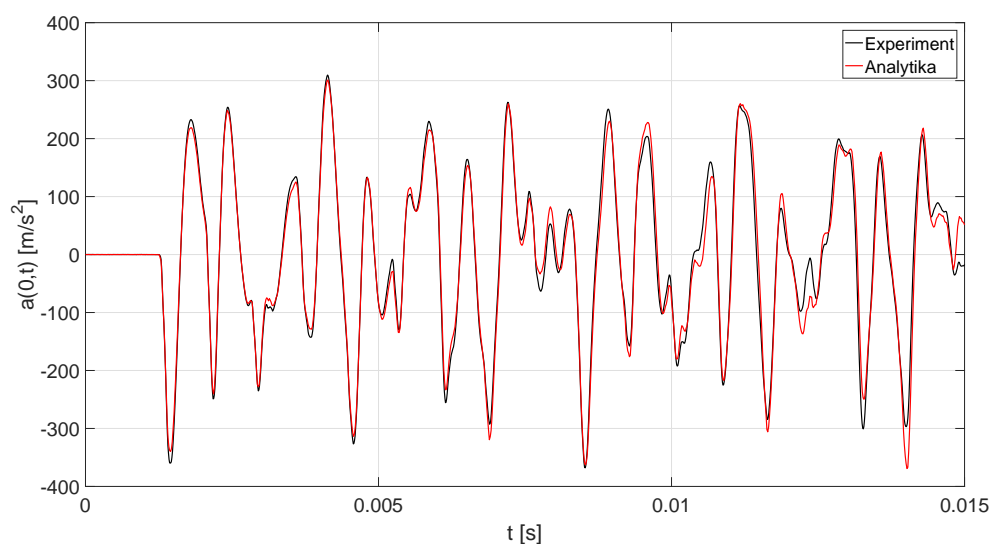
5.1. V podkapitole 5.2 byly pak hledané hodnoty modulů pružnosti odhadnuty, a to jako $E_h = 65$ GPa a $E_o = 207$ GPa. Nyní tedy budou hodnoty těchto modulů nalezeny řešením optimalizační úlohy.

Oblast, ve které budou hledány optimální hodnoty E_h a E_o tak, aby cílová funkce (6.1) nabývala své minimální hodnoty, bude definována pomocí intervalů $E_h \in \langle 45; 90 \rangle$ GPa a $E_o \in \langle 190; 250 \rangle$ GPa. Optimalizační úloha byla řešena pro všechna provedená měření s heterogenními tyčemi s $l_2 = 0,1$ m i s $l_2 = 0,2$ m buzenými velkým kladívkem. Při vyčíslování cílové funkce bylo uvažováno $t_{max} = 20$ ms. Pro každý typ buzení a danou heterogenní tyč byl z nalezených optimálních hodnot vypočítán aritmetický průměr \overline{E}_i a směrodatná odchylka $\delta\overline{E}_i$. Tyto výsledky a počet provedených optimalizací N , který odpovídá počtu provedených měření pro daný typ úlohy, jsou uvedeny v tabulce 1. Z tabulky je patrné, že nalezené hodnoty modulu pružnosti \overline{E}_h se pro případ kratší a delší hliníkové tyče značně liší, i přes jejich nízké směrodatné odchylky. Tento rozdíl je pravděpodobně způsoben rozdíly ve slepení tyčí, které je popsáno v podkapitole 5.1. Z těchto čtyř hodnot byl pro každý modul vypočten vážený průměr s vahou rovnající se převrácené hodnotě odpovídající směrodatné odchylky. Průměrné hodnoty takto stanovených modulů jsou $E_h = 65,68$ GPa a $E_o = 209,59$ GPa. Pro tyto hodnoty bylo následně provedeno porovnání analytických výsledků se změřenými daty jak na heterogenní tyči s $l_2 = 0,1$ m buzené velkým kladívkem postupně s oběma hroty, tak na tyči s $l_2 = 0,2$ m buzené stejným způsobem. Pro první zmíněný případ a kladívko s plastovým hrotem je porovnání až do času 50 ms zobrazeno na obr. 28. Je zřejmé, že i pro mnohem delší čas, než pro který byla prováděna optimalizace, nejsou analytické výsledky za experimentálně určenou odezvou výrazně zpožděné, jak tomu bylo na obr. 26 při použití odhadnutých hodnot $E_h = 65$ GPa a $E_o = 207$ GPa. Lze tedy konstatovat, že hodnoty modulů E_h a E_o určené řešením optimalizační úlohy pravděpodobně lépe odpovídají skutečnosti. Z obr. 28 je dále patrné, že amplitudy oscilací zrychlení určeného experimentálně s rostoucím časem klesají, na rozdíl od analytického řešení. Tento jev odpovídá disipaci energie při šíření vln ve skutečných tyčích, která nebyla do analytického modelu zahrnuta. Podobně dobrou shodu lze konstatovat i v ostatních porovnávaných případech. Na obr. 29 je zobrazeno porovnání analyticky získaných výsledků pro nalezené optimální hodnoty $E_h = 65,68$ GPa a $E_o = 209,59$ GPa s experimentálně změřenou odezvou tyče s hliníkovou částí délky $l_2 = 0,2$ m, pro buzení velkým kladívkem s plastovým hrotem. Na tomto obrázku jsou vykresleny stejné experimentální výsledky jako na obr. 27, kde však bylo provedeno porovnání s analytickou odezvou vypočítanou na základě odhadnutých hodnot modulů pružnosti E_h a E_o . Je zřejmé, že na obr. 29 je shoda značně lepší, než v předchozím případě.



Obrázek 28: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy heterogenní tyče s $l_2 = 0,1$ m buzené velkým kladívkem s plastovým hrotem pro nalezené optimální hodnoty E_h a E_o

Optimální hodnoty modulů pružnosti byly pro všechny typy experimentů a každou realizaci vždy nalezeny nejdéle po 20 iteracích. Řešení jedné optimalizační úlohy tak na čtyřjádrovém procesoru s frekvencí 3,6 GHz trvalo 45 – 90 s. Celý výpočet výsledných průměrných hodnot E_h a E_o založený na řešení 44 optimalizačních úloh tak trval přibližně 60 minut. Pokud by bylo cílem stanovit pouze jeden modul, např. E_h , při znalosti druhého modulu (analogie s SHPB testem), lze



Obrázek 29: Porovnání experimentálně změřené a analyticky vypočtené odezvy heterogenní tyče s $l_2 = 0,2$ m buzené velkým kladívkem s plastovým hrotem pro nalezené optimální hodnoty E_h a E_o

předpokládat, že by se celý proces identifikace ještě výrazně urychlil. Pro testované případy optimalizace pouze hodnoty E_h se stejnou volbou počátečních hodnot parametrů byla úloha řešena za dvakrát až třikrát kratší čas, než v případě optimalizace obou modulů pružnosti.

6.3 Řešení úlohy identifikace buzení

Druhou zvolenou optimalizační úlohou je identifikace buzení, které má rázový charakter (viz obr. 20a). V tomto případě je cílem optimalizační úlohy najít průběh budicího napětí $\sigma_0(t)$ působícího na pravém konci heterogenní tyče, který v tyči vyvolal naměřený průběh zrychlení na levém konci tyče, tj. V bodě $x = 0$. Hledané buzení bylo předpokládáno ve tvaru

$$\sigma_0(t) = \left(\sum_{k=1}^5 \left(s_k \sin \left(\frac{k\pi t}{t_0} \right) + c_k \cos \left(\frac{k\pi t}{t_0} \right) \right) \right) (H(t) - H(t - t_0)), \quad (6.2)$$

tj. jedná se o puls délky t_0 s amplitudou, jejíž časová změna je popsána Fourierovou řadou o pěti členech. Parametry s_k a c_k představující koeficienty Fourierovy řady jsou společně s časem t_0 neznámými konstantami. V této úloze jsou tedy hledány optimální hodnoty celkem 11 parametrů.

Identifikace buzení byla provedena pro několik vybraných realizací měření, při kterých měl budicí puls různou amplitudu a délku trvání v závislosti na síle úderu. V této kapitole budou tedy prezentovány výsledky dvou řešení optimalizační úlohy, a to pro heterogenní tyč s $l_2 = 0,1$ m buzenou velkým kladívkem s plastovým hrotem a pro tyč s $l_2 = 0,2$ m buzenou velkým kladívkem s hliníkovým hrotem. Moduly pružnosti jednotlivých částí tyče byly nyní považovány za známé a byly voleny tak, jak byly určeny v podkapitole 6.2, tj. $E_h = 65,68$ GPa a $E_o = 209,59$ GPa. Větší množství optimalizovaných parametrů v těchto úlohách již vyžadovalo pro nalezení minima cílové funkce více než 100 iterací v obou případech, což na čtyřjádrovém procesoru s frekvencí 3,6 GHz zabralo pět a více minut.

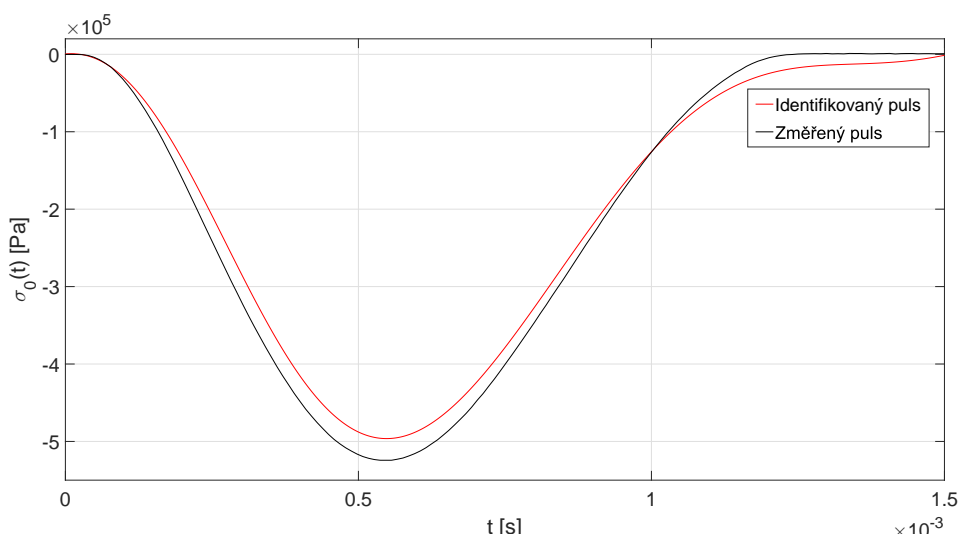
V obou případech byl proces optimalizace nastartován z nulových hodnot neznámých parametrů, kromě t_0 a s_1 . Počáteční hodnoty těchto dvou parametrů byly v obou případech voleny jako $t_0 = 1,4$ ms a $s_1 = -10^5$ Pa. V prvním případě byla optimalizací stanovena délka pulsu $t_0 = 1,5$ ms a nalezeny následující hodnoty koeficientů Fourierovy řady

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,54 & -0,62 & 1,16 & 0,45 & -0,04 \\ -0,79 & -0,50 & 0,61 & 0,51 & 0,17 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (6.3)$$

Porovnání identifikované a změřené funkce buzení je zobrazeno na obr. 30. Ve druhém případě bylo minimum cílové funkce nalezeno pro hodnoty parametrů

$$t_0 = 1,17 \text{ ms}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{s} \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,68 & -1,11 & 2,48 & 1,25 & -0,58 \\ -1,45 & -2,61 & 0,55 & 2,62 & 0,85 \end{bmatrix} \cdot 10^5 \text{ Pa}. \quad (6.4)$$

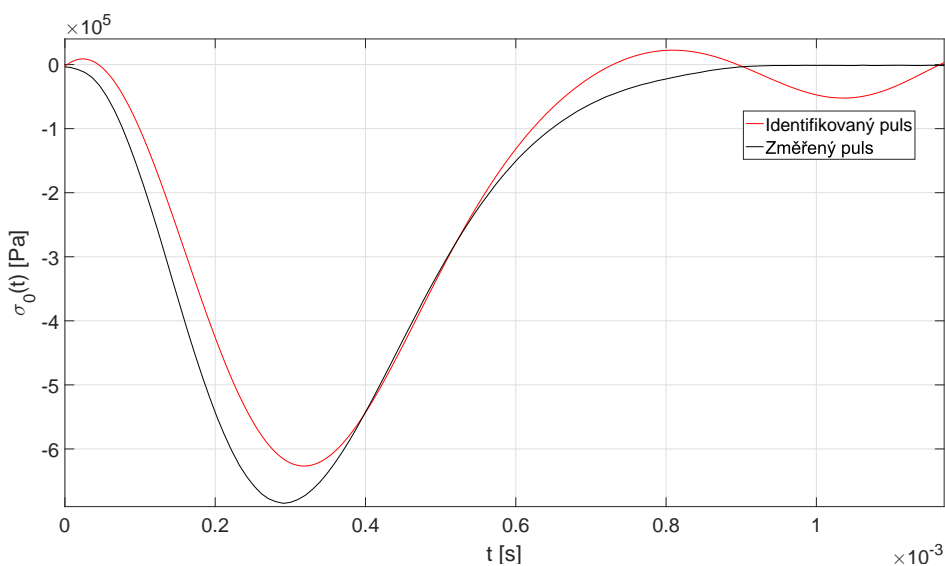
Porovnání křivek pro tento případ je zobrazeno na obr. 31. Z těchto dvou obrázků je zřejmé, že v obou případech identifikované křivky poměrně dobře popisují skutečný



Obrázek 30: Porovnání identifikované a změřené funkce buzení pro heterogenní tyč s $l_2 = 0,1$ m buzenou velkým kladívkem s plastovým hrotem

budící puls změřený při experimentu, obzvláště v případě prvním. Z obr. 31 je zřejmé, že předpokládaný tvar funkce popisující budící puls (6.2) může nabývat kladných hodnot, což v tomto případě neodpovídá skutečnosti (při úderu kladívkem vzniká pouze tlakové napětí). Na druhou stranu je ale poměrně obecná, takže lze použít i pro identifikaci buzení, jehož charakter je zcela neznámý.

Na přesnost procesu identifikace buzení má vliv volba materiálových parametrů při vyčíslení analytických vztahů. V podkapitole 6.2 byla zmíněna rozdílnost nalezených modulů pružnosti pro heterogenní tyč s $l_2 = 0,1$ m a $l_2 = 0,2$ m. Použité průměrné hodnoty E_h a E_o z těchto dvou heterogenních tyčí nejsou zřejmě op-



Obrázek 31: Porovnání identifikované a změřené funkce buzení pro heterogenní tyč s $l_2 = 0,2$ m buzenou velkým kladívkem s hliníkovým hrotem

timální volbou ani pro tyč s kratší, ani s delší prostřední částí. Tyto průměry byly použity, protože byly zvolenou statistickou metodou určeny jako nejbližší skutečným modulům pružnosti použitých materiálů. Lze tedy předpokládat, že při využití optimálních hodnot \overline{E}_h a \overline{E}_o nalezených pro konkrétní heterogenní tyč a použité rázové kladívko by míra shody identifikovaného buzení a změřeného pulsu mohla být vyšší. K lepší shodě těchto dvou křivek by mohlo pomoci i zvýšení počtu členů Fourierovy řady v definičním vztahu hledaného pulsu (6.2). S touto změnou by vztah mohl lépe popsat složitější průběhy budicího napětí vyvolaného rázem kladívka. Tímto by se však také navýšil počet optimalizovaných parametrů, algoritmus by měl tedy vyšší výpočtové nároky a tvar cílové funkce by byl ještě složitější, než v prezentovaném případě. Pro následné zmenšení závislosti funkce programu na volbě počátečních hodnot optimalizovaných parametrů a vyvarování se ukončení optimalizace v lokálním minimu by bylo možné použít sofistikovanější optimalizační metodu, jako např. genetický algoritmus, popřípadě tento algoritmus využít pro nalezení oblasti globálního minima a následně přejít zpět k některé méně výpočtově náročné gradientní metodě.

7 Závěr

Tato práce se zabývala řešením odezvy tenké tyče na buzení rázového charakteru různými metodami, porovnáním výsledků těchto metod a následně využitím získaných znalostí k řešení inverzních úloh.

Pomocí Laplaceovy transformace, reziduové věty a věty o konvoluci bylo ve třetí kapitole provedeno odvození analytických vztahů popisujících šíření vln vybuzených v homogenní tenké tyči rázovou silou. Ve čtvrté kapitole bylo toto řešení využito k odvození vztahů pro odezvu tenké heterogenní tyče. Pro snadné vyčíslení těchto řešení pro homogenní i heterogenní tyč a následnou vizualizaci a práci s výsledky byl vytvořen program s uživatelským rozhraním v softwaru Matlab. Díky použití numerické zpětné Laplaceovy transformace tak vznikl nástroj pro velmi efektivní vyčíslení odvozených řešení.

Ve výše zmíněných kapitolách jsou také popsány konečnoprvkové modely sestavené v softwaru Mentat 2016. Je provedena diskuze vlivu zvolené integrační metody v čase a velikosti integračního kroku na přesnost numerického řešení. Dále je zde zkoumán vliv velikosti konečných prvků v souvislosti s charakterem budící síly na disperzní chování modelů. Z provedených numerických simulací vyplývá, že při modelování heterogenních tyčí se skokovou změnou materiálových vlastností je pro dosažení stejné přesnosti vhodné volit menší konečné prvky než v případě tyče homogenní.

V páté kapitole je představen provedený experiment pro homogenní a heterogenní tyče. Jsou porovnány naměřené a analyticky vypočtené výsledky a diskutována míra jejich shody v souvislosti se způsobem provedení experimentu, charakterem rázové síly a měřicí aparaturou. Bylo zjištěno, že zejména při buzení tyče vysokými frekvencemi jsou změřené výsledky negativně ovlivněny i nepatrnou přidanou hmotou na konci tyče ve formě akcelerometru a lepidlem použitým pro spojení jednotlivých částí heterogenní tyče.

V poslední části práce je využito efektivního vyčíslení analytických vztahů a vytvořeného programu pro parametrickou optimalizaci k řešení úlohy identifikace modulů pružnosti materiálů použitých při experimentu a k rekonstrukci rázové síly. První úloha se ukázala jako efektivní a přesná metoda určení parametrů materiálů. Algoritmus dokázal pro jednotlivá měření nalézt hodnoty hledaných parametrů přibližně za jednu minutu. Úloha identifikace rázové síly je již výpočtově náročnější a značně závisí na dobré volbě počátečních hodnot, definici předpokládané funkce buzení a kvalitě záznamu odezvy tyče. K efektivnějšímu řešení této úlohy by přispěla např. implementace sofistikovanějšího algoritmu pro parametrickou optimalizaci.

Použitý postup odvození odezvy heterogenní tyče by bylo možné v budoucnu dále zobecnit na libovolný počet vrstev, případně jím aproximovat tyče se spojitě se měnícími materiálovými vlastnostmi. Do analytického modelu by také bylo možné zahrnout viskozitu a následně jej využít k identifikaci materiálových vlastností závislých na frekvenci. Prezentované optimalizační úlohy by mohly být dále použity např. pro návrh tlumiče rázu nebo k identifikaci kontaktní síly při buzení razníkem v podobě tenké tyče.

Reference

- [1] R. Brepta, M. Prokopec, Šíření napětových vln a rázy v tělesech, Academia, Praha, 1972.
- [2] H. Kolsky, Stress waves in solids, Dover Publications, Inc., New York, 1963.
- [3] K. F. Graff, Wave motion in elastic solids, Dover Publications, Inc., New York, 1991.
- [4] C. Gan, Y. Wei, S. Yang, Longitudinal wave propagation in a rod with variable cross-section, *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014) 434–445.
- [5] D. Hui, P. K. Dutta, A new concept of shock mitigation by impedance-graded materials, *Composites Part B: Engineering* 42 (2011) 2181–2184.
- [6] R. Brepta, I. Huněk, Pohyb pulsu v tenké tyči s proměnlivým modulem pružnosti, Výzkumná zpráva Z1032/87, ČSAV Ústav Termomechaniky, Praha, 1987.
- [7] S. Chabot, N. Glinsky, E. Mercerat, L. B. Hidalgo, A high-order discontinuous Galerkin method for 1D wave propagation in a nonlinear heterogeneous medium, *Journal of Computational Physics* 355 (2018) 191–213.
- [8] M. Major, I. Major, Acceleration wave in a thin segmental hyperelastic rod, *Archives of Civil and Mechanical Engineering* 10 (2010) 59–67.
- [9] J. P. Vogt, R. A. Schapery, Uniaxial shock wave propagation in viscoelastic material, *International Journal of Solids and Structures* 7 (1971) 505–521.
- [10] J. Aboudi, Y. Benveniste, Uniaxial wave propagation in a nonlinear thermoviscoelastic medium with temperature dependent properties, *International Journal of Solids and Structures* 11 (1975) 725–740.
- [11] O. Lee, M. Kim, Dynamic material property characterization by using split Hopkinson pressure bar (SHPB) technique, *Nuclear Engineering and Design* 226 (2003) 119–125.
- [12] Z. Xu, X. Ding, W. Zhang, F. Huang, A novel method in dynamic shear testing of bulk materials using the traditional SHPB technique, *International Journal of Impact Engineering* 101 (2017) 90–104.
- [13] Z. Pírko, J. Veit, Laplaceova transformace, SNTL/ALFA, Bratislava, 1972.
- [14] K. Rektorys, Přehled užití matematiky I, Prometheus, Praha, 1995.
- [15] K. Rektorys, Přehled užití matematiky II, Prometheus, Praha, 1995.
- [16] V. Adámek, F. Valeš, J. Červ, Numerical Laplace inversion in problems of elastodynamics: Comparison of four algorithms, *Advances in Engineering Software* 113 (2017) 120–129.

- [17] MSC.Marc: Volume B, MSC Software HmbH, Mnichov, 2016.
- [18] R. Brepta, M. Okrouhlík, F. Valeš, Vlnové a rázové děje v pevných tělesech a metody jejich řešení, Studie ČSAV, Academia, Praha, 1985.
- [19] Miniature Impact Hammer - Type 8204 product data, Brüel & Kjær, 25. 5. 2018. URL: <https://www.bksv.com/media/doc/Bp2077.pdf>.
- [20] Model 2302 Modal hammer product data, Endevco, 25. 5. 2018. URL: http://www.hoskinscientifique.com/uploadpdf/Instrumentation/Endevco/hoskin_2302_4a8302f8c1456.pdf.
- [21] Piezoelectric Accelerometer Miniature DeltaTron[®] Accelerometers - Types 4519, 4519-001, 4519-002 and 4519-003 product data, Brüel & Kjær, 25. 5. 2018. URL: <https://bksv.com/-/media/literature/Product-Data/bp2071.ashx>.

Příloha A

Vytvořený SW a vizualizace řešení pro homogenní tyč v $t \doteq 77,6 \mu\text{s}$

Problem definition

Material	Homogeneous
Length - l	1 m
Density - ρ	7770 kg·m ⁻³
Young's modulus - E	21069 Pa
Wave velocity - c_0	51666 m·s ⁻¹
Boundary condition	Clamped
Loading	General
Amplitude - a_0	163 Pa
Pulse duration - t_0	4e-5 s

Computation parameters

Number of X data points	250
Simulation time - t_{max}	1e-4 s
Number of integration steps	10000
Integration step - Δt	1e-08 s
Integration method	Trapezoidal rule
Num. of terms in series - n_{max}	1000
Graph selection	Stress (total)
Number of frames in time	250
Solution:	<input checked="" type="radio"/> Analytical <input type="radio"/> Numerical
m =	9
p =	2

Loading function

Compute Load results

Axial stress σ at the time $t = 7.77008e-05$ s

New problem Export results Export all Export figure Calculator

Finished

Play/Pause Stop Skip+ Skip- EKI

Příloha B

Vytvořený SW a vizualizace řešení pro heterogenní tyč v $t \doteq 1,9 \text{ ms}$

Problem definition

Material:

Length - l : m

Density - ρ : kg.m⁻³

Young's modulus - E : Pa

Wave velocity - c_0 : m.s⁻¹

Boundary condition:

Loading:

Amplitude - a_0 : Pa

Pulse duration - t_0 : s

Computation parameters

Number of X data points: s

Simulation time - t_{max} : s

Number of integration steps: s

Integration step - Δt : s

Integration method: s

Num. of terms in series - n_{max} : s

Graph selection: s

Number of frames in time: s

Solution: Analytical Numerical

m = p =

Loading function

Compute Load results

Axial stress σ at the time $t = 0.001983 \text{ s}$

New problem Export results Export all Export figure Computer Finished

Play/Pause Stop EKI

Příloha C

Vytvořený SW a vizualizace řešení v rovině $x-t$ pro heterogenní tyč

Problem definition

Material	Heterogeneous
Length - l	1.5 [1.5]
Density - ρ	[2000;2700;10000]
Young's modulus - E	[2.1e+11;1.07e+11]
Wave velocity - c_0	[3227.5091;8284.8]

Boundary condition: Free

Loading: General

Amplitude - a_0 : 1e3 Pa
 Pulse duration - t_0 : 6e-5 s

Computation parameters

Number of x data points	[300;150;300]
Simulation time - t_{max}	2e-3 s
Number of integration steps	20000
Integration step - Δt	1e-07 s
Integration method	Simpson's rule
Num. of terms in series - N_{max}	1000
Graph selection	Stress (axial)
Number of frames in time	250

Solution: Analytical Numerical

$m = 9$ $p = 2$

Loading function

New problem Export results Export avi Export figure

Finished

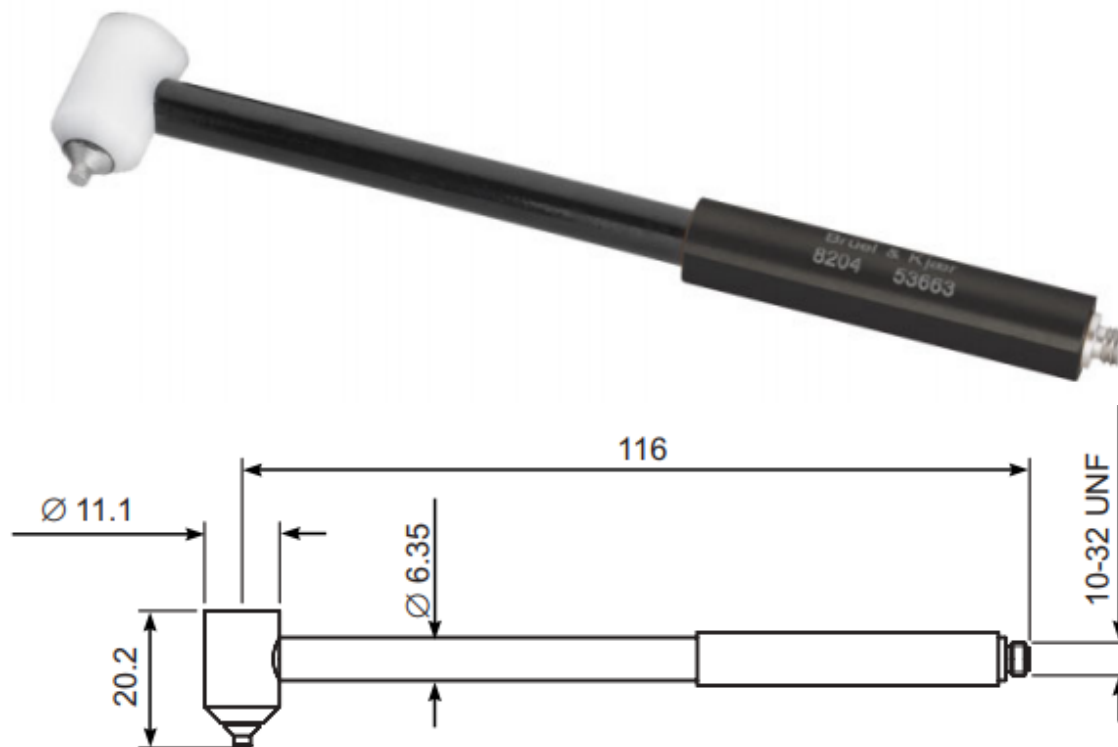
Caseprocessor

Play/Pause 1 Stop

Exit

Příloha D

Parametry rázového kladívka Brüel & Kjær Miniature Impact Hammer - Type 8204 [19]

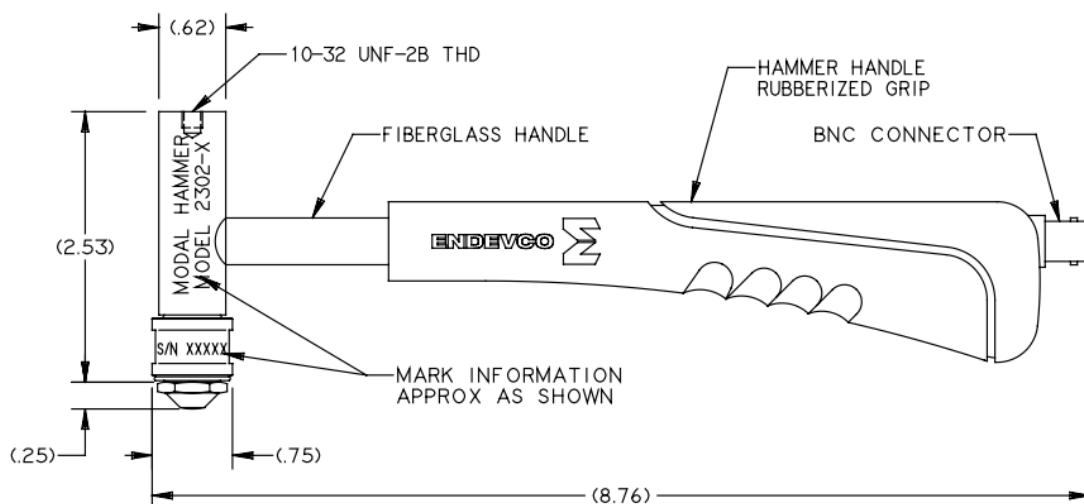


All dimensions in mm

	Units	8204
Dynamic Characteristics		
Voltage Sensitivity (typical)	mV/N (mV/lbf)	22.7 (100)
Full Scale Force Range Compression	N (lbf)	220 (50)
Linear Error at Full Scale	% full scale	<±2
Electrical Characteristics		
Full Scale Output Voltage	V	±5
DC Output Bias Voltage	V	+7 to +12
Output Impedance	Ω	<100
Power Supply	mA	2 to 20
Voltage Range	V DC	+18 to +30
Environmental Characteristics		
Temperature Range	°C (°F)	-73 to +60 (-100 to +140)
Max. Force Compression	N (lbf)	890 (200)
Physical Characteristics		
Dimensions		See outline drawing
Overall Length	mm (in.)	122 (4.8)
Effective Seismic Mass without Head Extender	gram (oz.)	2 (0.07)
Effective Seismic Mass with Head Extender	gram (oz.)	5.5 (0.2)
Impact Tip Material		17-4 PH stainless steel
Connector		10-32 UNF

Příloha E

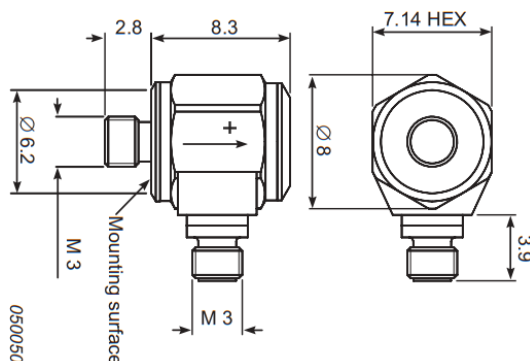
Parametry rázového kladívka Endevco Modal hammer - Model 2302 [20]



	Units	-5	-10	-50	-100
Range (full scale)	lbf (N)	1000 [4448]	500 [2200]	100 [445]	50 [220]
Sensitivity (typical)	mV/lbf (mV/N)	5 [1.14]	10 [2.27]	50 [11.4]	100 [22.7]
Maximum force (typical)	lbf (N)	1000 [4448]			
Resonance frequency	kHz	50			
Frequency range, (max)	kHz	8			
Head mass	grams	100			
Head diameter	inches (mm)	0.75 [19]			
Impact tip diameter	inches (mm)	0.25 [6.4]			
DC output bias	Vdc	9 to 10			
Output impedance	Ohms	< 100			
Full scale output	V	±5			
Supply voltage	Vdc	18 to 24			
Supply current	mA	2 to 10			
Temperature range	°F (°C)	-67 to 257 [-55 tp 125]			
Overall length	in (mm)	8.76 [223]			
Sensor material		17-4 PH stainless steel			
Handle material		Fiberglass with rubber grip			
Connector		BNC			

Příloha F

Parametry akcelerometru Brüel & Kjær Miniature DeltaTron® Accelerometer - Type 4519 [21]



All dimensions in mm

	Units	4519	4519-001	4519-002	4519-003
Dynamic Characteristics					
Voltage Sensitivity (@ 160Hz)	mV/g	10 ±10%	100 ±10%	10 ±10%	100 ±10%
Measuring Range	g	± 500	± 50	± 500	± 50
Frequency Response		See typical amplitude response			
Mounted Resonance Frequency	kHz	45			
Amplitude Response ±10% (typical) ^a	Hz	0.5 to 20000			
Residual Noise	mg	2.0	0.9	2.0	0.9
Transverse Sensitivity	%	<5			
Electrical Characteristics					
Output Impedance	Ω	<100			
DC Output	At room temperature	V			
Bias Voltage	In specified temp. range	V			
Power Supply	mA	2 to 20			
Start-up Time	s	< 1			
Grounding		Case grounded			
Environmental Characteristics					
Temperature Range	°C	-51 to +121	-51 to +100	-51 to +121	-51 to +100
	°F	-60 to +250	-60 to +212	-60 to +250	-60 to +212
Humidity		Hermetically sealed			
Max. Operational Shock (peak)	g pk	5000			
Base Strain Sensitivity	Equiv. g/μ strain	0.007			
Thermal Sensitivity	Equiv. %/°C (%/°F)	0.2 (0.1)			
Physical Characteristics					
Dimensions		See outline drawing			
Weight	gram (oz.)	1.6 (0.06)		1.5 (0.05)	
Case Material		Titanium			
Connector		M3			
Mounting		M3 Stud		Adhesive	
Max. Mounting Torque	Nm (lb. in.)	1.7 (15)		-	

