

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra mechaniky

MODELOVÁNÍ PODDAJNÝCH ROTUJÍCÍCH TĚLES S KONTAKTNÍMI VAZBAMI

Ing. Drahomír Rychecký

Disertační práce

k získání akademického titulu doktor
v oboru Aplikovaná mechanika

Školitel: prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.

Školitel specialista: Ing. Michal Hajžman, Ph.D.

Plzeň 2018

University of West Bohemia in Pilsen
Faculty of Applied Sciences
Department of Mechanics

MODELING OF VIBRATION ROTATION FLEXIBLE BODIES WITH CONTACT

Ing. Drahomír Rycheký

A dissertation

Thesis to acquire academic title Ph.D.
in the field of Applied Mechanics

Supervisor: prof. Ing. Vladimír Zeman, DrSc.
Supervisor specialist: Ing. Michal Hajžman, Ph.D.

Pilsen 2018

!

Prohlášení

Předkládám k posouzení a k obhajobě tuto disertační práci zpracovanou na závěr doktorského studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Čestně prohlašuji, že jsem tuto disertační práci vypracoval samostatně za použití odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této práce. Zároveň čestně prohlašuji, že jsem při vypracování této práce zachoval postupy ve vědecké práci obvyklé.

V Plzni, 30.6. 2018

Drahomír Rychecký

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval svému školiteli prof. Ing. Vladimíru Zemanovi, DrSc. za příkladné vedení a podporu během doktorského studia. Zvláštní poděkování patří také mému konzultantovi specialistovi Ing. Michalu Hajžmanovi, Ph.D. za množství rad, trpělivost a věnovaný čas při nezbytných konzultacích během celého studia. Poděkování patří také všem koleginím a kolegům, kteří svými radami a náměty přispěli ke zdárnému vyřešení problematiky a celkovému zkvalitnění práce. Mezi všemi však vynikají prof. Dr. Ing. Jan Dupal a Ing. Tomáš Mandys, Ph.D.

Tato práce se věnuje modelování kontaktních vazeb, což jsou vazby, které mohou změnit chování samotného poddajného tělesa. Dá se říci, že v životě lidském mohou být vazby ještě silnější. A byly to právě silné vazby s mými nejbližšími, mojí rodinou, která mě bezvýhradně podporovala po celou dobu mého studia, kterým patří moje největší poděkování. Neboť bez jejich podpory bych se nemohl této práci věnovat.

Drahomír Rycheký

Abstrakt

Disertační práce si klade za cíl seznámit čtenáře s jednou z možností modelování poddajných těles spojených kontaktními vazbami, jejichž vzájemný pohyb je relativně malý. Nejprve byla provedena rešerše, která byla východiskem pro zkoumání dané problematiky a má čtenáře seznámit s řešenou problematikou v širším spektru. Na ní navazuje druhá kapitola zaměřená na představení použitých matematických modelů. Postupy jsou popsány tak, aby je čtenář mohl přímo aplikovat a aby zcela objasňovaly modely použité v dalších částech práce. V závěru této kapitoly je uveden přístup pro zahrnutí vlivu rotace do modálně redukovaného matematického modelu. Třetí a čtvrtá kapitola jsou čistě aplikační (popis použité modální redukce v kapitole 3 a modelování kontaktních vazeb v kapitole 4), obsahují výsledky jednotlivých naprogramovaných přístupů. Všechny potřebné programy jsou připravené v prostředí MATLAB. Získané výsledky jsou komentovány a vysvětlovány. Stěžejní částí disertační práce je 5. kapitola, kde jsou oba dva postupy (tj. modelování kontaktů poddajných těles a zahrnutí vlivu rotace do modálně zredukovaného modelu) spojeny a jsou provedeny parametrické studie rotujícího olopatkovaného disku rhombických lopatek při uvažování kontaktu se třením a s předpětím.

Pro validaci získaných výsledků posloužil komerční konečnoprvkový software ANSYS, který se standardně používá pro řešení problematiky tohoto typu. Z porovnání vypočtených deformací lopatek v kapitole 5 plyne, že prezentovaná metoda je použitelná pro řešení výpočtově složitých kontaktních úloh. Její výsledky dosahují vysoké shody s výsledky získanými přímou numerickou integrací v čase řešených v softwaru ANSYS, avšak řádově za kratší dobu.

Abstract

The dissertation thesis aims to introduce the reader to one of the possibilities of modeling of flexible bodies connected by contacts with relative small movement. Firstly a state of the art review was made to achieve the stated goal, which was the starting point for exploring the given issue and its target is to introduce solved problems to the reader from the wider point of view. The second chapter is focused on introducing the mathematical models used in the dissertation thesis. The procedures are described in such a way that the reader can apply them directly and fully explain the models used in the other parts of the work. There is an approach to include the effect of rotation on a modally reduced mathematical model at the end of this chapter. The third and the fourth chapters are purely application-based (description of the modal reduction used in Chapter 3 and modeling of the contacts in Chapter 4) the results of each programmed approach are presented. All programs are prepared in the MATLAB environment. The results are commented and explained. The main part of the dissertation is the 5th chapter where two procedures (i.e. modeling of the contacts of the flexible bodies and the inclusion of the influence of rotation in the modal reduced model) are connected and parametric studies (friction, prestressing,...) of the rotating bladed disk of rhombic blades are performed.

Commercial finite element software ANSYS, commonly used for solving this type of problem, is used to validate the obtained results. By comparing the calculated deformations of the blade in Chapter 5 it follows that the presented method is applicable to the solution of computationally complex contact tasks. Its results reach high consistency with the results obtained by direct time numerical integration in the ANSYS software but in the order of less computational time.

Obsah

Prohlášení	i
Poděkování	ii
Abstrakt	iii
Abstract	iv
Obsah	v
Seznam obrázků	viii
Seznamk tabulek	xi
Přehled použitého značení	xii
1 Úvod	1
1.1 Uvedení do problematiky	1
1.2 Přehled současného stavu řešené problematiky	2
1.3 Motivace a cíle disertační práce	8
2 Metodika modelování poddajných lopatek s kontaktními vazbami	10
2.1 Modelování turbínových lopatek	10
2.1.1 Matematický model využívající 1D lopatkového konečného prvku	11
2.1.2 Matematický model lopatky sestavený pomocí obecných prostorových konečných prvků	19
2.2 Modelování kontaktní vazby mezi lopatkami	27
2.2.1 Určení polohy bodu	27
2.2.2 Zahrnutí kontaktů do pohybových rovnic	31
2.2.3 Kontaktní vazba rhombických lopatek s vlivem tření	40
2.2.4 Zahrnutí vlivu předpětí v kontaktní vazbě	41
2.3 Užití modální analýzy pro redukci modelu rotujícího tělesa	42

2.3.1	Modální analýza konzervativních soustav	42
2.3.2	Modální analýza silně nekonzervativních soustav	44
2.3.3	Modální analýza systémů s gyroskopickými účinky	48
2.3.4	Redukovaný model soustavy lopatek	48
3	Export dat z MKP a kontrolní výpočty jedné lopatky	51
3.1	Export potřebných dat z ANSYSU	51
3.1.1	Export matic hmotnosti, tlumení a tuhosti	52
3.1.2	Export modální matice \mathbf{V} a spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$	54
3.2	Modálně zredukovaný model v MATLABu versus časová integrace modelu v ANSYSu	55
3.2.1	Netlumený matematický model	55
3.2.2	Matematický model zohledňující materiálové tlumení	58
3.2.3	Matematický model zohledňující vlivy rotace	59
3.3	Modelování kmitů rhombické lopatky	61
3.3.1	Modální analýza rhombické lopatky	62
3.3.2	Přechodové kmity skokově zatížené rhombické lopatky bez materiálového tlumení	64
3.3.3	Přechodové kmity rhombické lopatky s uvažovaným materiálovým tlumením	66
3.3.4	Přechodové kmity rhombické lopatky zohledňující vlivy rotace	67
4	Aplikační úlohy pro model kontaktu	68
4.1	Konstantní tuhost pro celou plochu a celou dobu výpočtu	68
4.2	Přechodové kmity pro budící sílu kolmou k rovině kontaktu	71
4.3	Silový model kontaktu s nekonstantní tuhostí	79
4.4	Citlivostní analýza silového modelu vzhledem k diskretizaci kontaktní plochy	83
4.5	Užité modely tření	86
5	Model disku rhombických lopatek	88
5.1	Modelování olopatkovaného disku bez předepnutí	89
5.2	Modální vlastnosti disku rhombických lopatek s předepnutím	96
5.3	Simulace chování olopatkovaného disku při uvažování tření, předepnutí a měnící se rotaci	101
5.3.1	Přechodové kmity skokově zatíženého olopatkovaného disku s vlivem předepnutí	101
5.3.2	Parametrická studie vlivu předepnutí na potlačení kmitů vybuze- ných dýzovým buzením	105

5.3.3	Parametrická studie vlivu koeficientu tření na potlačení ustálených kmitů vyvolaných dýzovým buzením	107
5.3.4	Parametrická studie vlivu rotace na potlačení ustálených kmitů vyvolaných dýzovým buzením - amplitudová charakteristika	109
6	Závěr	111
6.1	Shrnutí výsledků	111
6.2	Přínos práce	112
6.3	Další rozvoj řešené problematiky	113
	Literatura	114
	Soupis publikací autora související s tématem práce	120

Seznam obrázků

2.1	Příklad prizmatického nosníku (lopatky), který je zakončen tuhým tělesem.	11
2.2	Schéma deformovaného lopatkového prvku.	12
2.3	Vkládání $\tilde{\mathbf{X}}^{(e)}$ matic do celkové matice \mathbf{X} .	17
2.4	Schématický nákres místa vlivu rotace na bandáž.	19
2.5	Lineární hexahedrální izoparametrický prvek.	20
2.6	Souřadnicové systémy pro odvození rychlosti libovolného bodu rotujícího tělesa.	21
2.7	Modelovaná soustava dvou lopatek s kontaktní vazbou.	27
2.8	Rozklad relativní rychlosti do směru os ξ a η .	28
2.9	Dvojice lopatek s kontaktními body.	29
2.10	Struktura matice tuhosti ukazující pozice, na které se přičítají kontaktní tuhosti.	33
2.11	Natáčení kontaktních sil při uvažování torze lopatky.	37
2.12	Vývojový diagram funkce vypočítávající velikost normálových a třecích sil.	39
2.13	Souřadnicové systémy lopatek a kontaktní plochy.	40
3.1	Geometrie zjednodušené lopatky včetně rozměrů v metrech.	52
3.2	Vývojový diagram pro export potřebných matic z ANSYSu.	53
3.3	Zatížení ve směru osy z lopatky se zjednodušenou geometrií.	54
3.4	Odezva netlumené nerotující lopatky na skokové buzení silou 100 N.	57
3.5	Odezva nerotující tlumené lopatky na skokové buzení silou 100 N.	58
3.6	Odezva netlumené rotující lopatky na skokové buzení silou 100 N.	59
3.7	Porovnání přechodových kmitů pro různé modely buzené skokově silou 100 N.	60
3.8	Vysíťovaná rhombická lopatka s červeně vyznačeným místem vetknutí do disku.	61
3.9	Výbrané vlastní tvary rhombické lopatky.	63
3.10	Aplikované skokové zatížení statickou silou F_y na rhombickou lopatku.	64
3.11	Odezva rhombické lopatky bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení.	65

3.12	Odezva rhombické lopatky s materiálovým tlumením bez zahrnutí gyroskopických účinků.	66
3.13	Porovnání jednotlivých odezev.	67
4.1	Zatížení dvojice lopatek silou.	69
4.2	Přechodové kmitání lopatek pro případ bez tření.	69
4.3	Přechodové kmitání lopatek pro případ se třením.	70
4.4	Zatížení dvojice lopatek silou ve středu bandáže.	71
4.5	Přechodové kmity jednotlivých zobecněných souřadnic lopatky 1 pro případ bez tření.	72
4.6	Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 1 pro případ bez tření.	72
4.7	Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 2 pro případ bez tření.	73
4.8	Přechodové kmity ve směru osy z pro případ se třením a různé diskretizace plochy.	75
4.9	Zatížení dvojice lopatek silou a dvojicí sil.	76
4.10	Průběh síly F_z a silové dvojice M_x	76
4.11	Přechodové kmity ve směru osy z pro případ bez tření.	77
4.12	Přechodové kmity ve směru osy y pro případ bez tření.	77
4.13	Přechodové kmity ve směru osy y pro případ bez tření.	78
4.14	Natočení normálové kontaktní síly oproti GSS.	79
4.15	Mění se počet kontaktních plošek při uvažování torze lopatky.	80
4.16	Průběh síly F_z a silové dvojice M_x	81
4.17	Přechodové kmity ve směru osy z pro případ se třením při zanedbání natáčení kontaktních ploch.	81
4.18	Přechodové kmity ve směru osy y pro případ se třením při zanedbání natáčení kontaktních ploch.	82
4.19	Přechodové kmity ve směru osy y pro případ se třením při uvažování natáčení kontaktních ploch.	82
4.20	Přechodové kmity lopatky 1 ve směru z	84
4.21	Přechodové kmity lopatky 1 ve směru osy y na kraji lopatky.	85
4.22	Přechodové kmity lopatky 2 ve směru osy y na kraji lopatky	85
4.23	Závislost koeficientu tření na relativní rychlosti a vliv na přechodové kmity.	87
5.1	Olopatkovaný disk rhombických lopatek, převzato z [Kubín & Hlous (2014)].	88
5.2	Porovnání odezev rhombické lopatky ve směru osy y bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení pro modální redukcí na 5, 10 a 20 vlastních tvarů v porovnání s časovou integrací plného modelu.	90
5.3	Porovnání odezev rhombické lopatky ve směru osy x vybuzevané dýzovým buzením bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení pro modální redukcí na 5, 10 a 20 vlastních tvarů.	90

5.4	Zatížení rhombické lopatky disku — pohled z boku.	91
5.5	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N (lopatky 1, 2, 100).	92
5.6	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N (lopatky 1, 25, 50, 75).	93
5.7	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N.	93
5.8	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N (lopatky 1, 2, 100).	94
5.9	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N (lopatky 1, 25, 50, 75).	95
5.10	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N.	95
5.11	První vlastní tvar olopatkovaného disku bez uvažovaného předpětí.	96
5.12	Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice s počtem uzlových průměrů uvedených v závorce.	98
5.13	Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice s počtem uzlových průměrů uvedených v závorce (pokračování).	99
5.14	Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice.	100
5.15	Zatížení rhombické lopatky disku - pohled z boku.	101
5.16	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N (lopatky 1, 2 a 100).	102
5.17	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N (lopatky 1, 25, 50, 75).	103
5.18	Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N.	103
5.19	Natočení kontaktní plochy a umístění kontaktních ploch na rhombické lopatce.	104
5.20	Maximální výchylky uzlu POI ve směru osy x při ustáleném kmitání při konstantních otáčkách 3000 ot/min i referenčních hodnotách tření a měnicím se předpětí.	106
5.21	Maximální výchylky uzlu POI při ustáleném kmitání při konstantním předpětí 3,27 MPa, otáčkách 3000 [ot/min] a měnicím se parametru tření p	108
5.22	Maximální výchylky uzlu POI při ustáleném kmitání při konstantním předpětí 3,27 MPa, referenčních hodnotách tření a měnicím se otáčkách.	110

Seznam tabulek

3.1	Tabulka vlastních frekvencí dvou variant (bez vlivu rotace a s vlivem rotace).	56
3.2	Tabulka vlastních frekvencí konzervativního modelu rhombické lopatky. . .	62
4.1	Vlastní frekvence v [Hz] jedné lopatky pro 432 konečných prvků. Vlastní frekvence jsou uvedeny se stručným popisem charakteru vlastního tvaru kmitu.	74
4.2	Tabulka výpočetních časů pro různou diskretizaci kontaktní plochy. . . .	83
5.1	Studie vlivu předpětí olopatkovaného disku rhombických lopatek na vlastní frekvence.	97
5.2	Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu předeprnutí. .	105
5.3	Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu koeficientu tření.	107
5.4	Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu rotace. . . .	109

Přehled použitého značení

Označení	Jednotky	Význam
$A(x)$	m^2	plocha průřezu
b	kgs^{-1}	tlumení
B	-	matice tlumení
\mathbf{c}_{A_j}	ms^{-1}	vektor relativní rychlosti
c_{A_j}	ms^{-1}	skluzová rychlost
D	-	matice tuhosti materiálu
\mathbf{d}_{A_j}	m	průnik kontaktní plošky A_j
E	-	jednotková matice
E	Nm^{-2}	Youngův modul pružnosti v tahu
E_k	J	kinetická energie
E_p	J	potenciální energie
$\mathbf{f}(t)$	N, Nm	vektor buzení
f	-	konstantní koeficient tření
f_s	-	statický koeficient tření
f_d	-	dynamický koeficient tření
f_ω	N	odstředivá síla
\mathbf{f}_c	N	vektor kontaktních sil
G	-	matice gyroskopických účinků
G	Nm^{-2}	modul pružnosti ve smyku
GSS	-	globální souřadný systém
J	-	Jakobiova matice
I	kgm^2	osový moment setrvačnosti
I	-	matice setrvačnosti
$J(x)$	m^4	kvadratický moment průřezu
$J_p(x)$	m^4	polární moment průřezu
k	$\text{N m}^{-1}, \text{N m rad}^{-1}$	tuhost
K	-	matice tuhosti
K_s	-	matice statické tuhosti
K_d	-	matice změkčení za rotace

\mathbf{K}_ω	-	matice vyztužení vlivem odstředivých sil
LSS	-	lokální souřadný systém
l	m	délka lopatkového prvku
l_B	m	délka lopatky
l_0	m	nezdeformovaná délka tělesa
\mathbf{P}	-	permutační matice
\mathbf{P}_s	-	matice ve stavovém prostoru
\mathbf{M}	-	matice hmotnosti
\mathbf{N}	-	matice bázových funkcí
\mathbf{N}_s	-	matice ve stavovém prostoru
N	-	počet uzlů v MKP modelu
N_{A_j}	N	normálová síla
q	m, rad	zobecněná souřadnice
$\mathbf{q}^{(e)}$	-	vektor zobecněných souřadnic
R	$\text{Js}^{-1} \equiv W$	Rayleighova disipační funkce
$\mathbf{R}_{A_j S_i}$	-	matice posunutí
S_o	N	odstředivá síla lopatkového elementu
\mathbf{T}	-	transformační matice
$T_{A_j \xi}, T_{A_j \eta}$	N	třecí síly ve směru os ξ a η
u	m	posunutí ve směru osy x
u_x, u_y, u_z	m	posunutí středu konečného prvku ve směru souřadnicové osy x, y, z
\mathbf{V}	-	modální matice
\mathbf{v}	ms^{-1}	vektor rychlosti
\mathbf{v}_ν	-	ν -tý vlastní vektor
v	m	průhyb ve směru osy y
w	m	průhyb ve směru osy z
x	m	vzdálenost od počátku lopatkového prvku
X, Y, Z	-	globální souřadnicový systém
x, y, z	-	rotující souřadnicový systém
$\gamma_{i,j}$	-	zkos
δl	m	absolutní změna délky
ε	-	relativní prodloužení
φ	rad	úhel natočení roviny řezu lopatky okolo osy ξ
ψ	rad	úhel natočení roviny řezu lopatky okolo osy ζ
ρ	kgm^{-3}	hustota
ϑ	rad	úhel natočení roviny řezu lopatky okolo osy η
ε	-	vektor přetvoření
σ	Pa	vektor napětí
Λ	-	spektrální matice

Ω_ν	$rads^{-1} \equiv \text{Hz}$	ν -tá vlastní frekvence
ω	$rads^{-1}$	úhlová rychlost
ξ, η, ζ	-	lokální souřadnicový systém

Kapitola 1

Úvod

1.1 Uvedení do problematiky

Předkládaná práce se zabývá modelováním mechanických soustav s kontaktními vazbami. Snahou autora je zprostředkovat čtenáři ucelený pohled na jednu z možností řešení kontaktních úloh. V současnosti se pro řešení složitých kontaktních úloh často užívá komerční software, ať už založený na metodě konečných prvků, teorii multibody systémů či jiných metodik. Smyslem práce je k těmto komerčním software implementovat alternativní metodu, která by svojí přesností odpovídala výsledkům z komerčního softwaru, přitom by byla rychlejší a umožňovala by snadnější citlivostní analýzu a úpravu metod řešení.

Typickým zástupcem uvedené skupiny mechanických soustav jsou olopatkované disky turbínových soustav, kde správná znalost chování soustavy má přímý ekonomický dopad. Vývoj přesnějších metod modelování je právě hnán tímto dopadem již od prvního úspěšného spuštění přetlakové parní turbíny v roce 1884. Vynálezcem byl anglický inženýr Charles Algernon Parsons, který byl za svůj přínos povýšen do šlechtického stavu. Z dnešního pohledu se parametry (výkon 7,5 kW při 17000 ot/min) jeho turbíny zdají jako velmi malé, ale položil tím základ stroje jehož vývoj probíhal celé 20. století a v některých oblastech postupně nahradil dříve kralující parní stroje, případně spalovací motory. Zvláště efektivním se stalo spojení s generátorem elektrického proudu (alternátor či dynamo), neboť takto centrálně vyrobená energie se snadno přenáší ke koncovým uživatelům. Nelze však opomenout, že i letecké turbínové motory těží ze stejného základu.

Z výše uvedeného vyplývá, že řešená problematika je velice široká. V disertační práci je ale úzce spjatá s aplikací na parní turbíny. Při komplexním řešení problematiky je nutné oslovit široké spektrum odborníků počínaje znalostí materiálových parametrů, přes výpočty proudění, teplotního namáhání, únavy až po kmitání. Proto vývoj takového zařízení je velmi náročný a z velké části iterační proces, kdy je často vybírán kompromis z několika

variant. V této práci bude věnována pozornost pouze modelování kmitání olopatkovaného disku, které může přímo ovlivnit účinnost turbíny. V případě znalosti maximálních provozních kmitů, případně jejich efektivní redukce, lze například predikovat životnost, respektive zmenšit dilatace mezi statorem a rotorem.

V textu bude čtenář nejprve obeznámen s teoretickým popisem užívaných matematických modelů tak, aby byl vysvětlen navrhovaný postup modelování umožňující zahrnout do výpočtu vliv rovnoměrné rotace disku. Všechny prezentované postupy budou posléze ověřeny na zjednodušených modelech. V závěru bude sestaven olopatkovaný disk z reálných lopatek a na něm bude provedeno několik citlivostních analýz, včetně rozboru získaných výsledků.

1.2 Přehled současného stavu řešené problematiky

V této podkapitole je zpracována rešerše publikací zabývajících se řešením kontaktních úloh, sestavením a řešením matematických modelů. Řešení kontaktní úlohy je komplexní problematika, proto jsou vyvíjeny matematické modely kontaktů vhodné pro jisté typické použití. V odborných publikacích lze vysledovat např. modely vhodné pro řešení obecných zakřivených ploch (modely čepů s vřetelnicí), viz např. [Miguel & Otaduy (2012)], nebo plošných kontaktů (kontaktní plochy lopatek) např. [Rivin (1999)], popřípadě kontaktní modely vhodné pro deformovatelná tělesa např. [Hippmann (2004)].

Cílem této podkapitoly není vyčerpávající přehled a souhrn všech možných přístupů, možností řešení a typů úloh, ale spíše uvedení zajímavých odborných publikací, které byly v posledních letech publikovány. Přestože se předkládaná práce zabývá řešením kmitání turbínových lopatek, prezentované práce zasahují i do jiných oborů mechaniky, kde se lze s kontaktními úlohami setkat. Vyřešení problematiky kontaktních úloh zahrnuje tři základní kroky: nalezení kontaktu, určení celkové normálové (kontaktní) síly a určení třecích sil. Autoři uváděných publikací se většinou soustředí pouze na jednu část problematiky řešení kontaktní úlohy, kterou je však nutné posuzovat jako celek. Z tohoto důvodu je velice složité určit logické uskupení prací ačkoliv bylo snahou najít spojitosti mezi články a řadit je v logických návaznostech.

Řešení kontaktních úloh je už dlouhou dobu věnována velká pozornost. První významné práce v tomto oboru jsou datovány na konec 19. století, kdy německý vědec Heinrich Rudolf Hertz shrnul základní chování těles v kontaktu a jejich modelování. Autor se věnoval určení plochy kontaktu, tuhosti a základním přístupům, jak řešit kontakt dvou těles včetně změny mechanických vlastností těles.

Práce na rozšíření této základní definice kontaktní úlohy jsou velice rozšířené, kdy je základní model kontaktu dále zpřesňován zahrnutím různých vlivů, kterými může být například různými způsoby zohledněná trvalá deformace [Flores & Lankarani (2010)], či [Lankarani & Nikravesh (1994)], případně [Anderson et al. (2009)] nebo zohlednění vlivu

mazací kapaliny [Gharib & Hurmuzlu (2012)].

Prvním krokem při řešení kontaktních úloh je nalezení pozice a velikosti průniku kontaktních ploch. Metody řešící tuto problematiku se dále dělí podle typu geometrie, pro kterou jsou vhodné 2D či 3D kontaktní úlohy. Základní uvedení do problematiky jednotlivých přístupů lze najít například v práci [Firrone & Zucca (2010)], kde autoři představují jednotlivé druhy kontaktních elementů pro řešení bodových a plošných kontaktních úloh. Věnují se i problematice *stick-slip* a jejímu zavádění do matematických modelů. Pro modelování kontaktu používají tzv. „silové řešení“, které bude dále vysvětleno. Sestavený matematický model řeší ve frekvenční oblasti, což ale vyžaduje v každém kroku i užití zpětné Fourierovy transformace k určení aktuálního průniku ploch a aktuálních kontaktních sil. Popisované přístupy prezentují na modelových úlohách disku turbosoustrojí. Věnují se frekvenčnímu přeladění soustav způsobenému právě kontaktními nelinearitami.

Na tuto práci autoři navázali a dále ji rozvinuli, viz [Zucca et al. (2011)]. Publikace je zaměřena na modelování kontaktu turbínových lopatek, konkrétně na modelování kontaktních sil na patě lopatek a navržení vhodné geometrie kontaktní plochy pro tlumení kmitů třením v kontaktu.

Jeden ze základních přístupů pro modelování kontaktní úlohy je model typu bod-bod. Tento postup je detailně popsán v [Byrtus et al. (2010)]. Autoři dále pracovali s bodovým kontaktem a studovali vliv kontaktní tuhosti na změnu vlastních čísel systému, což prezentovali v [Zeman et al. (2010)] a [Byrtus et al. (2013)]. Nevýhodou bodového kontaktu je, že se uvažuje kontakt po celé ploše, nemůže být respektováno případné částečné odlehnutí kontaktní ploch. V důsledku natočení ploch je dále nutné určit nejen normálovou tuhost, ale i rotační tuhosti plochy. Stejný princip použili také [Pešek et al. (2011)]. Práce přináší objasnění vlivu třecích účinků na vlastní frekvence. Přínosem příspěvku je také přímé porovnání vypočtených přechodových kmitů s experimentem. Pro výpočet autoři použili komerční software ANSYS, pomocí něhož porovnávali vliv mikro a makro slipu na celkové vibrace. Zjistili, že při uvažování mikroslipu jsou vibrační výchylky menší. Pro zvýšení shody výsledků s experimentem zavedli závislost tření na relativní rychlosti. Řešení kontaktu metodou bod-bod je použito i v práci [Charleux et al. (2006)]. Autoři se věnují problematice plynových turbín a eliminaci vysokocyklového porušení.

Ve výpočtu kontaktních úloh je nutné určit tuhost kontaktu. V předkládané práci je používán přístup určení kontaktní tuhosti vycházející z publikace [Rivin (1999)]. Pro samotné modelování jsou pak představeny dva způsoby. První je určení kontaktní tuhosti, která se přičte na konkrétní pozici matice tuhosti, a druhý je založen na určení normálové kontaktní síly a třecích sil, pro které je potřeba znát velikost kontaktní plochy, sílu a materiálové vlastnosti vrstvy. Postup je blíže popsán v podkapitole 2.2.2. Popis modelování poddajného kontaktu a ověření parametrů bylo prezentováno například autory [Lankarani & Nikravesh (1994)].

Správné určení normálové síly je klíčové pro řešení návrhu třecího tlumiče. Třecími tlumiči pro plynové turbíny, respektive optimalizací jejich parametrů, se ve své práci zabývali

i [Sanliturk et al. (2011)]. Upozorňují na fakt, že pro každé užití třecího členu je nutné provést novou optimalizační úlohu, aby bylo dosaženo ideálního stavu pro požadované zatížení. Při malé hmotnosti dochází k malé odstředivé síle a k malé disipaci energie. Naopak při velké hmotě třecího tlumiče se kontakt uzamkne a disipovaná energie je nulová. Navrhování dále komplikují proměnlivé otáčky, proto výsledky mohou být často nejednoznačné. Do svého modelu použili i efekt *makro slip*, který zavádí další nelinearitu úlohy. Pro urychlení optimalizace prováděli výpočet ve frekvenční oblasti pomocí HBM (*Harmonic Balance Method* = metoda ekvivalentní linearizace), kterou dále rozšířili o *structural modification approach*. Touto metodou autoři převedli silový efekt kontaktu na výchylku závislejší na uvažované tuhosti soustavy. Výsledky plynoucí z řešení tzv. rainbow testu (na lopatkovém disku jsou na přesných pozicích umístěny třecí tlumiče o optimalizované, poloviční a dvojnásobné hmotnosti) autoři porovnali s experimentem a potvrdili jeho vhodnost navrhovaného postupu.

Harmonic Balance Method je detailně představena v [Petrov & Ewins (2003)]. Metoda je založena na Fourierově analýze, kdy je soustava diferenciálních rovnic převedena do frekvenční oblasti. Vzniklou soustavu řeší metodou založenou na Newton-Raphsonově přístupu. V příspěvku se autoři zabývají také modelováním nelinearit vznikajících vlivem *stic-slip* jevu. V závěru příspěvku jsou prezentovány vypočtené odezvy a změna vlastních čísel systému se dvěma stupni volnosti pro různá nastavení tření.

Modelováním turbínových lopatek se též zabývali [Yao et al. (2011)], kteří řešili natáčení lopatek kolem vlastní osy, tzv. „rozkrucování“. Natáčení je způsobeno vnějším zatížením horkými proudícími plyny. Autoři se v publikaci přímo nezabývali problematikou kontaktu, ale představili různé přístupy pro sestavení matematického modelu rozkrucující se lopatky. Nejprve využili Hamiltonův přístup, kdy si předtím vyjádřili vnitřní deformace pomocí Euler-Bernoulliovy nosníkové teorie, též známé jako klasické nosníkové teorie. Obdržené výsledky porovnali s Galerkinovou metodou. Pro oba matematické modely zkoumali chování závislejší na úhlové rychlosti, jejíž změnou vyvolávali přechod od čistě periodického kmitání po chaotický pohyb. Zabývali se vývojem nelineární dynamiky rotující lopatky, kdy docházelo ke střídání jednoho typu periodického pohybu s neperiodickým. Navíc pro jejich model došlo k vybuzení polyharmonického pohybu.

Porovnání základních metod pro modelování a určování kontaktních sil je provedeno v článku [Mukras et al. (2010)], kde je pro zjištění sil v kontaktu použit jednak standardní MKP model a pak také vlastní model založený na *elastic foundation model* (EFM). Je patrné, jak velký vliv má vůle v ložisku na nárůst rázových sil. Jednotlivé přístupy pak posloužili k výpočtu opotřebení, které pak bylo ověřeno experimentem. Z porovnání je patrná dobrá shoda opotřebení získaná standardním MKP softwarem (6 %), neboť EFM model nedosahoval tak vysokého opotřebení (o 12 % méně) v místě působící maximální síly. Závěr příspěvku je pak takový, obě metody jsou použitelné, MKP poskytuje přesnější výsledky, avšak EFM model je méně náročný na výpočet.

Další možností řešení kontaktních úloh je modelování pomocí tuhosti nehmotného

tělesa tzv. *mass-less body*, prezentovaného v [Yang et al. (1998)]. V příspěvku je vysvětlen přístup k modelování kontaktu, zahrnutí vlivu rychlosti na změnu kontaktní tuhosti a dále popis řešení problému úlohy *stick-slip*. Popsané metody jsou zkoušeny na modelu se dvěma stupni volnosti. V závěru je pasáž, kde se autoři věnují popisu nestability zapříčiněné skokovou změnou tuhosti soustavy při navázání kontaktu dvou těles.

Tematice modelování třecích členů v plynových turbínách je věnován i příspěvek autorů [Sanliturk et al.(1999)], kde do popsaného matematického modelu zavádějí experimentálně naměřené hysterezní smyčky, reálné parametry úpravy povrchu (např. válčováním) a reálnou geometrii. K diskretizaci lopatek používají metodu konečných prvků. Pro usnadnění výpočtu kmitání řeší model ve frekvenční oblasti metodou HBM. Klíčovým prvkem pro určení třecích sil je určení relativních pohybů třecího tlumiče, který je umístěn u kořene lopatky. V publikaci prezentují malý vliv tření (tlumení) na vlastní frekvence lopatky s upozorněním, že nesmí dojít k uzamčení kontaktu. Tento jev byl potvrzen v [Rychecký (2011)], kde jsou porovnány vlastní frekvence jedné lopatky a lopatek po ideálním uzamčení kontaktu.

Přesnost výpočtu hmotností třecích tlumičů má přímý vliv na životnost turbíny. V práci [Csaba (1998)] bylo prokázáno, že při výpočtu pomocí HBM, vychází konečná hmotnost tlumiče cca o 30 % nižší. Je to zapříčiněno linearizací modelu, proto autor věnuje pozornost mikroslipu. Ačkoliv je v této publikaci předkládán pozitivní vliv tření na tlumení vibrací, nelze zapomínat na materiálové tlumení. Jeho vliv je popsán v publikaci autorů [Rao & Saldanha (2003)], kde zmiňují jeho důležitost při přechodu kritických frekvencí. Představili model, jak zahrnout viskózní tlumení závislé na úhlové rychlosti do systému ANSYS. Přesná znalost napětí během přechodu přes rezonanční frekvence je důvod používání ANSYSu, který však autorům neumožnil zadat požadovaný matematický model materiálového tlumení. Používané hodnoty útlumu použili z knihovny čítající téměř 2000 kombinací materiálu a testovacího nastavení, publikovanou B. J. Lazanem v roce 1968. Po sérii měření [Lazan (1968)] též dokázal vzrůstající vliv materiálového tlumení pro zvyšující se frekvence buzení. Pro validaci vypočtového modelu připravil [Csaba (1998)] jeden olopatkovaný disk a na něm sledovali vliv materiálového tlumení i tlumení kontaktem. Soustavu budili při různých otáčkách (200, 500 a 1000) a dokázali pro zvětšující se výchylky vzrůstající vliv materiálového tlumení, zatímco útlum od tření v kontaktu příliš nerostl.

V odborných publikacích zabývajících se redukcí chvění lopatek u turbínových kol se lze setkat se třemi základními umístěními třecích tlumičů. Pro případ tzv. *under platform* jsou třecí plochy umístěné pod aktivní částí lopatky. Dále je možný kontakt malé části lopatky v aktivní části lopatky a nebo mezi jednotlivými bandážemi. Zpravidla první a třetí přístup shodně využívá třecí tělíčko vsazené mezi jednotlivé lopatky, pokud například neuvažujeme tzv. rozkručované lopatky užívané na posledních stupních turbín, viz např. [Míšek & Kubín (2009)]. Při rotaci je tělíčko zatíženo odstředivou silou a vyvolává normálové napětí v kontaktních plochách sousedních lopatek a při je-

jich relativním pohybu díky tření disipuje energii. Třecí tělíska mohou být umístěna u paty např. [Firrone & Zucca (2010)] nebo mezi bandážemi [Pešek et al. (2011)]. V dalších pracích je na dvojici lopatek s třecím tělískem mezi bandážemi analyzován vliv rozladění lopatek při harmonickém buzení [Brůha & Zeman (2011)] a vliv třecí charakteristiky na ohybové kmity lopatek buzené obdélníkovými pulsy [Brůha & Zeman (2012)]. Vhodnému návrhu bandážových třecích členů se věnuje i [Stangeland & Bampton (2002)]. Jedná se o plátek kovu vložený mezi bandáže lopatek se složitější geometrií než je např. v [Pešek et al. (2011)]. Tento patent je vztažen na použití pro turbínové spalovací motory.

Autoři příspěvku [Tokar' et al. (2003)] se zaměřili na problematiku uzamykání vazeb, což je jev, kdy se z třecí kontaktní plochy stane „pevné“ spojení. K jevu dochází např. při špatně zvolené hmotnosti třecího tlumiče kmitů, kdy normálové napětí vyvolané odstředivou silou je natolik vysoké, že třecí síla na něm závisající už neumožní prokluz. V důsledku zamezení prokluzu nedochází k disipaci energie a soustava lopatek je více namáhána. V článku je věnována pozornost povrchové úpravě třecích ploch a to jak z technologického (způsob opracování) tak ze strukturálního (různé druhy materiálu) hlediska. Jevy byly studovány z důvodu neideálního způsobu opracování a změn povrchu během provozu turbíny. Měřeními vlastních frekvencí se jim nepodařilo vystihnout přímý vliv zkoumaných faktorů (velikost kontaktní plochy, úhlovou rychlost, tření, způsob uložení lopatky), který by významně ovlivnil vlastní frekvence, potažmo výchylky lopatek. Podařilo se jim však naměřit redukci výchylek lopatek kmitajících v protifázi. Závěrem proto doporučují kontrolu všech rozměrů používaných lopatek.

V případě užití třecích členů či předpětí lopatek lze provést modální analýzu olopatkovaného disku. Znalost vlastních tvarů kmitů lopatek, lopatkových kol a celých turbosoustrojí je důležitá pro celkové naladění systému, aby nedocházelo při provozních podmínkách k rezonancím. Vlivem tlumičů na vlastní čísla se zabývá také práce [Petrov (2011)], kde pro urychlení řešení využívá HBM. Autor posuzuje vhodnost použití několika typů tlumičů a popisuje druhy nelinearit výpočtu. Pro demonstraci svých závěrů používá tři různé lopatkové disky. Pro urychlení výpočtu též užívá cyklické symetrie. Tento přístup se často využívá u těles, která vykazují periodicitu geometrie, okrajových i počátečních podmínek. Implementace v softwaru ANSYS je uvedena např. v [ANSYS Conference (2002)]. Je však na místě upozornit, že v praxi se často uvažují problémy spojené s rozladěním nebo-li *misstuningem*, kdy každá lopatka má trochu jiné vlastnosti, jiné upevnění na disku, či s neperiodičností budící síly či kinematickým buzením vzniklým kmitáním rotoru. Daná problematika *misstuningu* je blíže představena např. autory [Yuan et al. (2010)].

Je zde vhodné dodat, že při výpočtu soustavy diferenciálních rovnic linearizovaných pomocí HBM je nutná znalost Jakobiovy matice, která se však vlivem nelineárního chování kontaktu mění v každém kroku. Autorům [Borrajo et al. (2006)] se podařilo odvodit závislost Jakobiánu na kontaktní síle. Tím se jim podařilo zredukovat časovou náročnost výpočtu až o 80 % oproti řešení Newton-Raphsonovou metodou.

Přes velký rozmach teoretických znalostí je účelné i experimentální ověření vypoč-

tených hodnot. Experimentů se využívá i pro získání fyzikálních dat pro výpočty. Experimentálně získaná data využili např. [Míšek & Kubín (2009)], kteří se ve své práci zabývali nelineární analýzou a 3D modelem poslední lopatky parní turbíny. Vzhledem ke své délce 1220 mm bylo nutné provést sérii teoretických výpočtů, které potvrdily vhodnost designu a funkčnost (jedná se o tzv. rozkrucovatelnou lopatku, která se po zatížení odstředivou silou zkroutí a tak dojde k navázání kontaktní vazby). Oproti standardním lopatkám se u tohoto typu projevuje i vliv nízkocyklové únavy, se kterou je také nutno počítat. Kritickým místem zvoleného designu byl stromeček uchycení lopatky do rotoru. Při vývoji bylo provedeno několik výpočtů. Ty byly porovnány s experimentem (např. určení vlastních frekvencí pro různé úhlové rychlosti).

Problematika přeladění systému vlivem tření je také z části obsažena v textu autorů [Sextro et al. (2001)], kde modelovali chování tzv. *under platform dampers* a využívali Hertzův kontakt pro různé testované geometrie. Autoři nejprve porovnali výchylky lopatek v širším frekvenčním pásmu pro zvolené hmotnosti třecích tlumičů. Následovalo určení vlastních frekvencí pro každou lopatku jednoho celého kola. Aby se vyhnuli modelování celého lopatkového disku, užili cyklické symetrie. U jednotlivých lopatek znali kontaktní plochy, proto využili 2D kontakt. Součástí příspěvku je také experiment. Pro zvolené třecí těleso zjistili dobrou shodu naměřených a vypočtených hodnot. Pro snazší vyhodnocení naměřených hodnot použili vlastní program pro vytvoření obálky hodnot.

Autoři [Toufine et al. (1999)] ve svém článku uvádějí, že stále neexistují přesné komplexní modely, a proto trvá nutnost fyzikálních experimentů. Aby bylo možné provádět průkazné experimenty, je nutné vybudit těleso na požadované frekvenci, k čemuž je potřeba i dostatečný zdroj energie, neboť lopatky už ze své podstaty jsou dost tuhé. Celé měření dále komplikuje umístění rotující lopatky v turbíně. V příspěvku se věnují testování třecího tlumiče, který nazývají „třecí omezovač vrcholů“ (*friction peak limiters*). Sestavili zjednodušený model, na kterém měřili pohlcování vibrací různými typy třecích členů. Model téže soustavy vytvořili i v konečnoprvkovém softwaru, který pro dosažení menší výpočetní složitosti zredukovali *Effective Mass Method*. Model kontaktu zahrnuje vliv tření včetně *stick-slip* efektu. Tímto se jim podařilo dosáhnout dobré shody experimentálních dat s vypočtenými hodnotami. Kontaktní plocha je podle užití konečnoprvkové sítě rozdělena do několika kontaktních plošek, kde protilehlé z nich jsou spojeny vazbou o určité tuhosti s určitým tlumením. Kontaktní vazbu pro případ *stick-slip* si lze představit jako pružinu, která je natahovaná do určité míry, pak dojde k jejímu přerušení při prokluzu a navázání nové vazby.

Experimentální určení koeficientu tření ve velkém rozsahu kombinací materiálů a úprav kontaktních ploch se zabývalo mnoho autorů. Vyčerpávající přehled problematiky podává např. [Blau (2009)]. [Feeny & Moon (2007)] prováděli měření pro chaotické vibrace s řízenou amplitudou. Měřili dva případy, v prvním byly třecí plochy pokryty papírem a v druhém titaniem. Naměřené výchylky závislé na rychlosti použili pro odvození zákona tření pro zvolené třecí povrchy. Pro měření vytvořili zařízení, ve kterém postupně upevňovali

několik lopatek s nejmenší vlastní frekvencí okolo 2,4 až 3,6 Hz. Budicí frekvence byla zvolena od 2,5 do 5 Hz. Amplituda měla velikost 0 - 12 mm. Přítláčnou sílu autoři volili od 0,1 do 5 N. Závěrem příspěvku jsou prezentovány naměřené hysterezní křivky pro určení závislosti koeficientu tření na rychlosti a výchylce pro oba zvolené testovací povrchy.

V předkládané práci autor k modelování používá tzv. lopatkových prvků, viz např. [Kellner (2009)], k nimž jsou připojena tuhá tělesa respektující bandáž. Další možností pro modelování lopatek, případně 3D těles je tzv. *Absolute nodal coordinate formulation* (ANCF), která je blíže popsána v [Shabana (1998)]. Autoři [Yu et al. (2010)] tento přístup rozšířili o možnost zahrnutí kontaktu. Pro hledání místa kontaktu využívají knihovnu OPCODE. Po nalezení místa kontaktu zahrnují silový účinek kontaktu na tělesa. Pro určení velikosti sil využili Hertzův model kontaktu. Vhodnost modelu autoři ověřovali na jednoduchých příkladech (sférický, rovinný, cylindrický kontakt). Výpočetní model též testovali i na poddajném nosníku tlačném vačkou.

1.3 Motivace a cíle disertační práce

Cílem předkládané disertační práce je vytvořit novou obecnou metodiku pro modelování kmitání rotujících těles, která je představena na modelu olopatkového disku s kmitajícími rotujícími lopatkami. Je však na místě uvést, že představená metoda je zcela obecná a lze ji aplikovat na jakákoliv tělesa.

Modelování kontaktu a jeho hluboká znalost jsou klíčové pro návrh metody řešící kmitání celého olopatkovaného disku, opírající se o již dobře známý a popsaný matematický aparát. Teprve pro správně sestavený a vyladěný model lze provádět modální, pevnostní či různé citlivostní analýzy. Stále je však nutné mít na paměti vyvážený poměr mezi přesností a časovou náročností výpočtu. U nelineárních dynamických analýz je, přes stále výkonnější hardware, určujícím parametrem počet stupňů volnosti soustavy. Prováděné analýzy používaly modely do 2000 stupňů volnosti, což se jeví v současnosti jako rozumný limit, pokud se při řešení nespoleháme na výpočetní servery. Z výše uvedeného pramení požadavky na vytvořenou metodiku.

Definování cílů disertační práce

1. Modelování kontaktních úloh idealizovaných lopatek

- Uvést matematický aparát pro modelování lopatek pomocí 1D lopatkových prvků.
- Zahrnutí tuhého tělesa (bandáže) do modelu lopatky.

- Představit přístup k modelování kontaktní vazby, popsat základní model kontaktu a zahrnout jej do matematického modelu lopatek.
 - Provést několik referenčních analýz a provést rozbor výsledků.
2. Sestavit postup k získání konečnoprvkového modelu reálné geometrie lopatky včetně vlivu rotačních účinků
- Představit matematický model včetně postupu zahrnutí vlivu rotačních účinků.
 - Provést modální redukci matematického modelu včetně citlivostní analýzy.
 - Vysíťování reálné geometrie lopatky.
 - Porovnat přechodové kmity redukovaného matematického modelu s výsledky přímé integrace v čase včetně okomentování výsledků.
3. Modelování disku lopatek s reálnou geometrií
- Matematický popis olopatkovaného disku.
 - Zohlednit vliv předpětí v bandáži lopatek.
 - Modální analýza olopatkovaného disku s předpětím.
 - Provést několik referenčních analýz demonstrujících chování olopatkovaného disku včetně rozboru výsledků.
 - Parametrická studie olopatkovaného disku s rhombickými lopatkami pro sledování vlivu předpětí, tření v kontaktních plochách bandáže a otáček na ustálené kmitání lopatek.

Kapitola 2

Metodika modelování poddajných lopatek s kontaktními vazbami

Obsahem této kapitoly bude představení navržených postupů a matematických modelů, které budou dále aplikovány. Jejím cílem není vyčerpávající popis všech možných případů či řešení, ale pouze postupů úzce spojených s řešenou problematikou. S ohledem na velké množství přístupů, které byly v práci použity, bylo členění provedeno do několika podkapitol tvořících ucelené logické celky.

2.1 Modelování turbínových lopatek

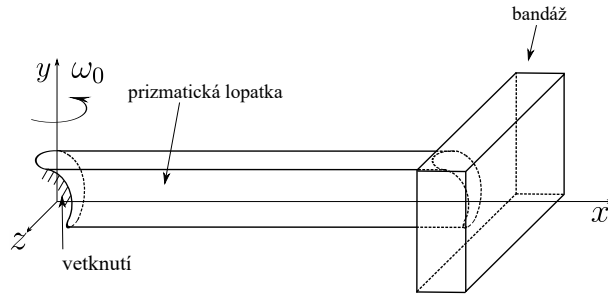
Pro matematický popis těles a geometrií lze použít velké množství přístupů. V předkládané práci byla zvolena metoda konečných prvků. V případech, kdy je jeden z rozměrů dominantní, tzn. pro štíhlá dlouhá tělesa, se velmi často přistupuje k použití 1D prvků (příkladem jsou příhradové konstrukce ve stavebnictví např. [Brožovský & Materna (2012)]). U nerotujících těles se tyto konečné prvky nazývají nosníkové, ale s ohledem na zaměření práce budou uvažovány zcela obecně, tzn. po zahrnutí vlivu rotace budou nazývány lopatkovými prvky. Hlavní nevýhodou je složitější postup v případě, kdy se nejedná o prizmatické těleso, ale průřez a s tím i průřezové charakteristiky jsou po délce prvku rozdílné. Ačkoli existují postupy pro aproximaci těchto změn [Brůha & Zeman (2016)], je často výhodnější přistoupit k modelování obecných geometrií pomocí prostorových 3D konečných prvků.

2.1.1 Matematický model využívající 1D lopatkového konečného prvku

Pro sestavení celkového matematického modelu lopatky bude neprve odvozen obecný 1D lopatkový prvek a dále představeno zahrnutí vlivu tuhého tělesa do matematického modelu.

Odvození lopatkového 1D konečného prvku

Postupem uvedeným např. v [Kellner (2009)] byly odvozeny matice konečného prvku „e“ popisující rotující lopatku, která rotuje v pevném souřadném systému xyz úhlovou rychlostí ω_0 okolo osy rotace y , viz Obrázek 2.1. Při modelování kmitů lopatky pomocí metody konečných prvků jsou uvažovány všechny stupně volnosti, tj. 3 posuvy u , v a w a 3 natočení průřezu φ , ϑ a ψ (dále jen výchylky).



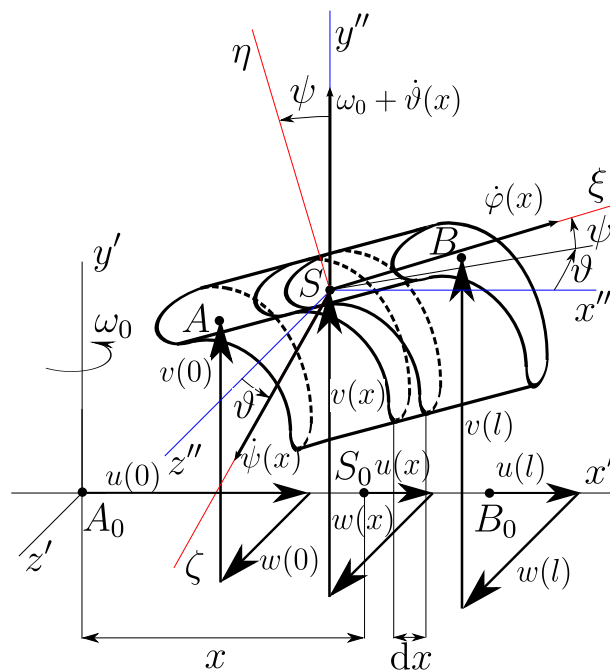
Obrázek 2.1: Příklad prizmatického nosníku (lopatky), který je zakončen tuhým tělesem.

Příslušné matice pro jeden konečný prvek „e“ o délce l , který koná obecný prostorový pohyb v rotujícím souřadném systému, byly sestaveny za použití kinetické a potenciální energie. Pohyb elementu konečného prvku na Obrázku 2.2 ve vzdálenosti x od počátku A_0 o délce dx lze popsat základním rozkladem v jeho středu hmotnosti S na unášivý posuvný pohyb rychlostí (argument t je pro jednodušší zápis dále vypouštěn)

$$\mathbf{v}_S(x) = \begin{bmatrix} \dot{u}(x) + w(x)\omega_0 \\ \dot{v}(x) \\ \dot{w}(x) - (r + x + u(x))\omega_0 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

(r značí vzdálenost bodu A_0 od osy rotace y) a na relativní sférický pohyb okamžitou úhlovou rychlostí

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \boldsymbol{\omega}_0 + \dot{\boldsymbol{\varphi}}(x) + \dot{\boldsymbol{\vartheta}}(x) + \dot{\boldsymbol{\psi}}(x). \quad (2.2)$$



Obrázek 2.2: Schéma deformovaného lopatkového prvku.

Vektor $\boldsymbol{\omega}(x)$ vyjádřený v natočeném souřadném systému $\xi\eta\zeta$, kolem jehož osy ξ element lopatkového prvku kmitá obecně, má tvar

$$\boldsymbol{\omega}(x) = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(x) + (\omega_0 + \dot{\psi}(x))\sin\psi(x) \\ (\omega_0 + \dot{\psi}(x))\cos\psi(x) \\ \dot{\psi}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Při zanedbání násobků malých veličin a uvažování malého úhlu $\psi(x)$ je možné předchozí výraz upravit na tvar

$$\boldsymbol{\omega}(x) \doteq \begin{bmatrix} \dot{\varphi}(x) + \omega_0\psi(x) \\ \omega_0 + \dot{\psi}(x) \\ \dot{\psi}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Ze znalosti rychlostí (2.1) a (2.4) lze vyjádřit kinetickou energii lopatkového prvku délky l

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l [A(x)\mathbf{v}_S^T(x)\mathbf{v}_S(x) + \boldsymbol{\omega}^T(x)\mathbf{J}(x)\boldsymbol{\omega}(x)] \rho dx. \quad (2.5)$$

Pro výpočet energie (2.5) je nutno znát plochu průřezu $A(x)$ a matici $\mathbf{J}(x)$ obsahující kvadratické a deviační momenty průřezu. Při jejich určování se vychází z předpokladu

hlavní centrální osy ξ hmotného elementu, která je kolmá na rovinu řezu $\widehat{\eta\zeta}$,

$$dI_\xi = \int_{A(x)} (\eta^2 + \zeta^2) \rho dA dx = \rho dx \int_{A(x)} (\eta^2 + \zeta^2) dA = \rho dx (J_\eta + J_\zeta). \quad (2.6)$$

Podobným postupem se získají i kvadratické a deviační momenty plochy průřezu pro zbývající osy, které lze uspořádat do matice

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} J_\eta(x) + J_\zeta(x) & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta(x) & -D_{\eta\zeta}(x) \\ 0 & -D_{\eta\zeta}(x) & J_\zeta(x) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Osa ξ je hlavní centrální osa setrvačnosti hmotnostního elementu, proto deviační momenty jsou $D_{\xi\eta}(x) = D_{\xi\zeta}(x) = 0$. Po dosazení vztahů (2.4) a (2.1) do (2.5) lze provést rozepsání na kinetickou energii posuvného unášivého a relativního sférického pohybu

$$\begin{aligned} E_k^{(e) \text{ posuv}} &= \frac{1}{2} \int_0^l A(x) [\dot{u}^2(x) + \dot{v}^2(x) + \dot{w}^2(x) + w^2(x)\omega_0^2 + 2\dot{u}(x)w(x)\omega_0 \\ &\quad - 2\dot{w}(x)(r+x+u(x))\omega_0 + (r+x+u(x))^2\omega_0^2] \rho dx, \\ E_k^{(e) \text{ sf}} &= \frac{1}{2} \int_0^l [(J_\eta(x) + J_\zeta(x))(\dot{\varphi}(x) + \omega_0\psi(x))^2 + J_\eta(x)(\omega_0 + \dot{\vartheta}(x))^2 \\ &\quad - 2D_{\eta\zeta}(x)(\omega_0 + \dot{\vartheta}(x))\dot{\psi}(x) + J_\zeta\dot{\psi}^2(x)] \rho dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Při modelování 1D kontinuí je možné zanedbat malá přetvoření ε_y a ε_z a potenciální energii lze zapsat ve tvaru

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{A(x)} \{ E\varepsilon_x^2(x) + G[\gamma_{xy}^2(x) + \gamma_{xz}^2(x)] \} dA(x) dx, \quad (2.9)$$

kde E je Youngův modul pružnosti v tahu, G značí modul pružnosti ve smyku a $\varepsilon_x(x)$, $\gamma_{xy}(x)$ a $\gamma_{xz}(x)$ jsou přetvoření ve směru daném indexem. Konkrétně pak

$$\varepsilon_x(x) = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \gamma_{xy}(x) = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}, \quad \gamma_{xz}(x) = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (2.10)$$

Za předpokladu příčné nestlačitelnosti lze posunutí bodu o souřadnicích x , y a z rotující lopatky v důsledku deformací lopatky vyjádřit ve tvaru

$$u_x = u(x) - y\psi(x) + z\vartheta(x), \quad u_y = v(x) - z\varphi(x), \quad u_z = w(x) + y\varphi(x). \quad (2.11)$$

Dále platí $\psi(x) = v'(x)$, kde čárka značí parciální derivaci podle x , a $\vartheta(x) = -w'(x)$. Po dosazení (2.11) do (2.10) jsou získány vztahy pro jednotlivá uvažovaná přetvoření

$$\varepsilon_x(x) = u'(x) - yv''(x) - zw''(x), \quad \gamma_{xy}(x) = -z\varphi'(x), \quad \gamma_{xz}(x) = y\varphi'(x). \quad (2.12)$$

Po dosazení vztahu (2.12) do rovnice (2.9) vzniká konečný tvar potenciální energie

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} \int_0^l \int_{(A(x))} \{E[u'(x) - yv''(x) - zw''(x)]^2 + G\varphi'^2(x)(y^2 + z^2)\} dA(x)dx. \quad (2.13)$$

Za účelem diskretizace je nutné provést aproximaci jednotlivých výchylek, konkrétně:

1. Příčné posuvy v a w se aproximují kubickou násadou

$$v(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_1, \quad w(x) = \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{c}_2, \quad \text{kde } \mathbf{\Phi}(x) = [1, x, x^2, x^3]. \quad (2.14)$$

2. Podélné posuvy u a torzní natočení φ se aproximují lineární násadou

$$u(x) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{c}_3, \quad \varphi(x) = \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{c}_4, \quad \text{kde } \mathbf{\Psi}(x) = [1, x]. \quad (2.15)$$

Použité $\mathbf{c}_i, i = 1, 2, 3, 4$ značí vektory koeficientů báзовých funkcí $\mathbf{\Phi}$ a $\mathbf{\Psi}$. Pro jejich určení je využito konfigurace lopatkového prvku v rotujícím souřadném systému $x'y'z'$ popsaném zobecněnými souřadnicemi $\mathbf{q}^{(e)}$ v krajních bodech konečného prvku A ($x = 0$) a B ($x = l$). Zobecněné souřadnice $\mathbf{q}^{(e)}$ je možné zapsat ve tvaru

$$\mathbf{q}^{(e)} = [\mathbf{q}_1^T, \mathbf{q}_2^T, \mathbf{q}_3^T, \mathbf{q}_4^T]^T, \quad (2.16)$$

kde

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_3 = \begin{bmatrix} u(0) \\ u(l) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_4 = \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

Dosazením (2.17) do aproximačních vztahů (2.14) a (2.15) jsou získány následující závislosti

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{S}_i\mathbf{c}_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (2.18)$$

kde

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

Vyloučením vektorů \mathbf{c}_i koeficientů báзовých funkcí v (2.14) a (2.15) pomocí (2.18) lze vztahy mezi výchylkami v obecném bodu x a zobecněnými souřadnicemi (výchylkami uzlů) vyjádřit jako

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_3, & \varphi(x) &= \mathbf{\Psi}(x)\mathbf{S}_3^{-1}\mathbf{q}_4, \\ v(x) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, & \psi(x) &= \mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_1^{-1}\mathbf{q}_1, \\ w(x) &= \mathbf{\Phi}(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2, & \vartheta(x) &= -\mathbf{\Phi}'(x)\mathbf{S}_2^{-1}\mathbf{q}_2. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Matice lopatkových prvků je odvozena v [Kellner (2009)] z podmínek ekvivalence levých stran Lagrangeových rovnic ve standardním maticovém vyjádření aplikovaném na netlumený lopatkový prvek „e“. K odvození se použijí výše uvedené vztahy (2.20) a výrazy pro kinetickou energii (2.8) a potenciální energii (2.13). Ekvivalence vede k rovnosti

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \dot{\mathbf{q}}^{(e)}} \right) - \frac{\partial E_k^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} + \frac{\partial E_p^{(e)}}{\partial \mathbf{q}^{(e)}} = \\ = \mathbf{M}^{(e)} \ddot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 \mathbf{G}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \left(\mathbf{K}_S^{(e)} - \omega_0^2 \mathbf{K}_d^{(e)} + \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega^{(e)} \right) \mathbf{q}^{(e)} - \mathbf{f}_\omega^{(e)}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

kde $\mathbf{M}^{(e)}$ je matice hmotnosti

$$\mathbf{M}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} (\mathbf{I}_{1A} + \mathbf{I}_{2\zeta}) \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{2D} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{2D} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2^{-T} (\mathbf{I}_{1A} + \mathbf{I}_{2\eta}) \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{4A} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{4P} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.22)$$

$\mathbf{G}^{(e)}$ je matice gyroskopických účinků

$$\mathbf{G}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{6P} \mathbf{S}_3^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{7A} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{7A}^T \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{6P}^T \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

$\mathbf{K}_d^{(e)}$ je matice změkčení za rotace

$$\mathbf{K}_d^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{2P} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{1A} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{4A} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.24)$$

$\mathbf{K}_S^{(e)}$ je matice tuhosti

$$\mathbf{K}_S^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{3\zeta} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_{3D} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{3D} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_{3\eta} \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{5A} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{S}_3^{-T} \mathbf{I}_{5P} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

$\mathbf{K}_\omega^{(e)}$ je matice vyztužení vlivem odstředivých sil

$$\mathbf{K}_\omega^{(e)} = \overline{\mathbf{S}}_o^{(e)} \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1^{-T} \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2^{-T} \mathbf{I}_2 \mathbf{S}_2^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

přičemž $\bar{S}_o^{(e)}$ popisuje odstředivou sílu zatěžující prvek „e“. Lze ji určit výrazem

$$S_0^{(e)} = \left[\sum_{i=e+1}^{N-1} (m_i r_{iS}) + \frac{1}{2} m_e r_{eS} \right] \omega_0^2 = \bar{S}_o^{(e)} \omega_0^2, \quad (2.27)$$

kde $r_{1S} = r_0 + \frac{1}{2}l_1$, $r_{2S} = r_0 + l_1 + \frac{1}{2}l_2$, \dots , $m_i = \rho A_i l_i$ a r_0 je vzdálenost prvního uzlu lopatky od osy otáčení. Suma vyjadřuje silové působení následujících lopatkových prvků vyvolané odstředivou silou. Druhý člen v (2.27) vyjadřuje účinek odstředivé síly působící na aktuální lopatkový prvek v jeho těžišti. Vliv odstředivých sil na jeden konečný prvek je vyjádřen silovým vektorem $\mathbf{f}_\omega^{(e)} = [\mathbf{0}^T, \mathbf{0}^T, \mathbf{f}_3^{(e)T}, \mathbf{0}^T]^T$, kde

$$\mathbf{f}_3^{(e)} = \omega_0^2 \mathbf{S}_3^{-T} \int_0^l A(r+x) \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\rho} dx = \omega_0^2 A \boldsymbol{\rho} l \left(r \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \right). \quad (2.28)$$

Pro zjednodušení bylo v předchozích vztazích užito pomocných integrálních matic, které mají následující tvary (za předpokladu, že prvek délky l je uvažován jako prizmatický)

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{1A} &= A \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\rho} dx, & \mathbf{I}_2 &= \int_0^l \boldsymbol{\Phi}'^T \boldsymbol{\Phi}' dx, \\ \mathbf{I}_{2D} &= D_{\eta\zeta} \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\rho} dx, & \mathbf{I}_{2P} &= J_p \int_0^l \boldsymbol{\Phi}'^T \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\rho} dx, \\ \mathbf{I}_{2\eta} &= J_\eta \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\rho} dx, & \mathbf{I}_{2\zeta} &= J_\zeta \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Phi}' \boldsymbol{\rho} dx, \\ \mathbf{I}_{3D} &= ED_{\eta\zeta} \int_0^l \boldsymbol{\Phi}''^T \boldsymbol{\Phi}'' dx, & & \\ \mathbf{I}_{3\eta} &= EJ_\eta \int_0^l \boldsymbol{\Phi}''^T \boldsymbol{\Phi}'' dx, & \mathbf{I}_{3\zeta} &= EJ_\zeta \int_0^l \boldsymbol{\Phi}''^T \boldsymbol{\Phi}'' dx, \\ \mathbf{I}_{4A} &= A \int_0^l \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\rho} dx, & \mathbf{I}_{4P} &= J_p \int_0^l \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\rho} dx, \\ \mathbf{I}_{5A} &= EA \int_0^l \boldsymbol{\Psi}'^T \boldsymbol{\Psi}' dx, & \mathbf{I}_{5P} &= GJ_k \int_0^l \boldsymbol{\Psi}'^T \boldsymbol{\Psi}' dx, \\ \mathbf{I}_{6P} &= J_p \int_0^l \boldsymbol{\Phi}'^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\rho} dx, & \mathbf{I}_{7A} &= A \int_0^l \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\rho} dx. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Ve vztazích (2.29) byl použit polární moment průřezu $J_p = J_\eta + J_\zeta$ a tzv. moment odporu v krutu, podrobněji v [Kellner (2009)], o velikosti $J_k = \frac{A^4}{40J_p}$, kde A je plocha průřezu.

Sestavení matematického modelu lopatky

Lopatku lze rozdělit pomocí N uzlů na $N - 1$ lopatkových prvků. Odvozené matice z předchozí podkapitoly se nyní transformují do konfiguračního prostoru definovaného

výchylkami uzlů v pořadí, které je dáno výchylkami v počátečním a koncovém uzlu

$$\tilde{\mathbf{q}}^{(e)} = [u(0), v(0), w(0), \varphi(0), \vartheta(0), \psi(0), u(l), v(l), w(l), \varphi(l), \vartheta(l), \psi(l)]^T. \quad (2.30)$$

Transformační vztah mezi vektory výchylek je

$$\mathbf{q}^{(e)} = \mathbf{T}\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad (2.31)$$

přičemž nenulové prvky matice \mathbf{T} jsou rovné 1. S ohledem na (2.16) a (2.30) \mathbf{T} mají prvky matice konkrétní tvar $\mathbf{T}(1, 2) = 1$; $\mathbf{T}(2, 6) = 1$; $\mathbf{T}(3, 8) = 1$; $\mathbf{T}(4, 12) = 1$; $\mathbf{T}(5, 3) = 1$; $\mathbf{T}(6, 5) = 1$; $\mathbf{T}(7, 9) = 1$; $\mathbf{T}(8, 11) = 1$; $\mathbf{T}(9, 1) = 1$; $\mathbf{T}(10, 7) = 1$; $\mathbf{T}(11, 4) = 1$; $\mathbf{T}(12, 10) = 1$.

Touto maticí se pak transformují jednotlivé matice konečného prvku z prostoru souřadnic $\mathbf{q}^{(e)}$ do prostoru souřadnic $\tilde{\mathbf{q}}^{(e)}$, konkrétně pak

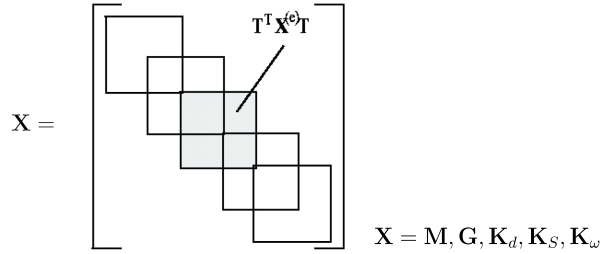
$$\tilde{\mathbf{X}}^{(e)} = \mathbf{T}^T \mathbf{X}^{(e)} \mathbf{T}, \quad \mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{G}, \mathbf{K}_d, \mathbf{K}_S, \mathbf{K}_\omega. \quad (2.32)$$

Nyní lze zavést vektor zobecněných souřadnic všech uzlů lopatky ve tvaru

$$\mathbf{q} = [\dots, u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i, \dots]^T, \quad (2.33)$$

kde index i přiřazuje výchylky jednotlivým uzlům.

Matice transformované do globálního souřadnicového systému lze složit ve smyslu metody konečných prvků do celkových matic lopatky, které mají následující strukturu zobrazenou na Obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Vkládání $\tilde{\mathbf{X}}^{(e)}$ matic do celkové matice \mathbf{X} .

Konzervativní model lopatky zatížený vnější silou má pak tvar

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \omega_0 \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_S - \omega_0^2 \mathbf{K}_d + \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega) \mathbf{q} = \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega + \mathbf{f}(t), \quad (2.34)$$

kde \mathbf{M} , $\omega_0 \mathbf{G}$, \mathbf{K}_S , $\omega_0^2 \mathbf{K}_d$, $\omega_0^2 \mathbf{K}_\omega$ jsou matice hmotnosti, gyroskopických účinků, tuhosti, změkčení a matice vyztužení za rotace. Matice tlumení je uvažována jako proporcionální k matici hmotnosti a tuhosti $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_S$. Vektor $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega$ zahrnuje vliv odstředivých sil, vektor $\mathbf{f}(t)$ obsahuje budící silové účinky působící na těleso a vektor výchylek $\mathbf{q}(t) = [\dots, u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i, \dots]^T$ obsahuje zobecněné souřadnice uzlů.

Zakomponování bandáže do matematického modelu lopatky

Bandáž, která je oproti lopatce relativně tuhá, je k lopatce připojena v posledním uzlu lopatky značeného písmenem C jako tuhé těleso. V prostoru zobecněných souřadnic definovaném v (2.33) je popsána maticí hmotnosti [Byrtus et al. (2010)]

$$\mathbf{M}_T = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & mc \\ 0 & 0 & m & 0 & -mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x_s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -mc & 0 & I_{y_s} + mc^2 & 0 \\ 0 & mc & 0 & 0 & 0 & I_{z_s} + mc^2 \end{bmatrix}, \quad (2.35)$$

kde m je hmotnost tuhého tělesa, c je vzdálenost jeho středu hmotnosti od bodu připojení na ose lopatky v kladném smyslu osy x , I_{x_s} , $I_{y_s} + mc^2$ a $I_{z_s} + mc^2$ jsou momenty setrvačnosti tuhého tělesa k osám posunutým do bodu připojení. Tuhé těleso je dále popsáno maticí gyroskopických účinků

$$\mathbf{G}_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2m & 0 & -mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{x_s} \\ mc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{x_s} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

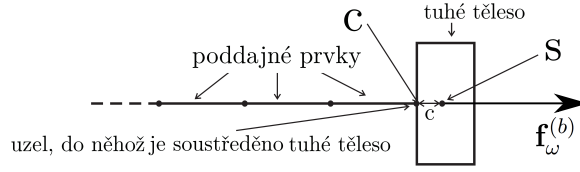
kde použité parametry jsou shodné s popsávanými parametry v (2.35). Matice změkčení za rotace je

$$\mathbf{K}_{dT} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_{x_s} \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Vlivem rotace bude na bandáž působit odstředivá síla $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega^{(b)}$ vstažená ke středu S tuhé bandáže, viz Obr. 2.4

$$\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega^{(b)} = [m\omega_0^2(r+c) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad (2.38)$$

Uvedené matice (2.35), (2.36), (2.37) a (2.38) se přičtou v soustavě rovnic (2.34) na příslušné pozice náležející zobecněným souřadnicím uzlu, do kterého je tuhé těleso redukováno. Výsledný tvar matematického modelu lopatky se zahrnutím vlivu tuhé bandáže lze zapsat ve tvaru



Obrázek 2.4: Schématický nákres místa vlivu rotace na bandáž.

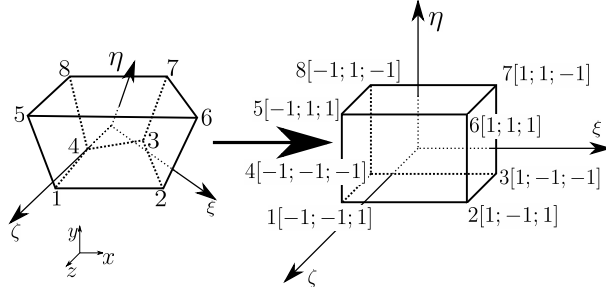
$$\begin{aligned}
 & \left\{ \mathbf{M} + \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{M}_T & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \ddot{\mathbf{q}} + \left\{ \mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} + \omega_0 \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{G}_T & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \dot{\mathbf{q}} + \\
 & + \left\{ \mathbf{K}_S - \omega_0^2 \mathbf{K}_d + \omega_0^2 \mathbf{K}_\omega - \omega_0^2 \begin{bmatrix} \ddots & & \\ & \mathbf{K}_{dT} & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \mathbf{q} = \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega + \omega_0^2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{f}_\omega^{(b)} \\ \vdots \end{bmatrix} + \mathbf{f}(t).
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

kde \mathbf{M} , $\omega_0 \mathbf{G}$, \mathbf{K}_S , $\omega_0^2 \mathbf{K}_d$, $\omega_0^2 \mathbf{K}_\omega$ jsou matice hmotnosti, gyroskopických účinků, tuhosti, změkčení a matice vyztužení za rotace. Matice tlumení \mathbf{B} je uvažována proporcionální $\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$. Vektor $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega$ zahrnuje vliv odstředivých sil lopatky a $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega^{(b)}$ bandáže. Vektor $\mathbf{f}(t)$ obsahuje budící silové účinky působící na lopatku a vektor $\mathbf{q}(t) = [\dots u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \vartheta_i, \psi_i, \dots]^T$ obsahuje zobecněné souřadnice uzlů.

2.1.2 Matematický model lopatky sestavený pomocí obecných prostorových konečných prvků

Pro geometricky složitější objekty je vhodnější použití prostorového konečného prvku, kterému bude věnována pozornost v této podkapitole. Budou odvozeny lineární izoparametrické prvky s lineární násadou představující nejjednodušší postup pro modelování objemových prvků. Popsaný postup bude uveden zcela obecně, pro zvýšení přesnosti lze lineární báze funkce nahradit např. kvadratickými. Matice objemových prvků budou odvozeny v rotujícím prostoru pomocí lokálního souřadného systému $\xi\eta\zeta$, jehož osy jsou po transformaci prvku na příslušné páry protějších stran kolmé. Do lokálního souřadného systému se obecný šestistěn transformuje jako krychle s počátkem v jejím středu. Postup je znázorněn na Obrázku 2.5.

Vztah popisující přechod od lokálního souřadného systému $\xi\eta\zeta$ do globálního xyz lze



Obrázek 2.5: Lineární hexahedrální izoparametrický prvek.

vyjádřit pomocí

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ z_8 \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{e}^{(e)}, \quad (2.40)$$

kde vektor $\mathbf{e}^{(e)}$ popisuje polohu uzlů i prvku „ e “ v souřadném systému xyz . Matice \mathbf{N} je matice báзовých funkcí s tvarem \mathbf{N}

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & \dots & N_8 \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Jednotlivé báзовé funkce dle [Bathe (2014)] pak mají tvar

$$N_i(\xi\eta\zeta) = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i), \text{ pro } i = 1, \dots, 8, \quad (2.42)$$

kde ξ_i, η_i , a ζ_i jsou souřadnice uzlu i v souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \\ \xi_5 \\ \xi_6 \\ \xi_7 \\ \xi_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \\ \eta_5 \\ \eta_6 \\ \eta_7 \\ \eta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ \zeta_5 \\ \zeta_6 \\ \zeta_7 \\ \zeta_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

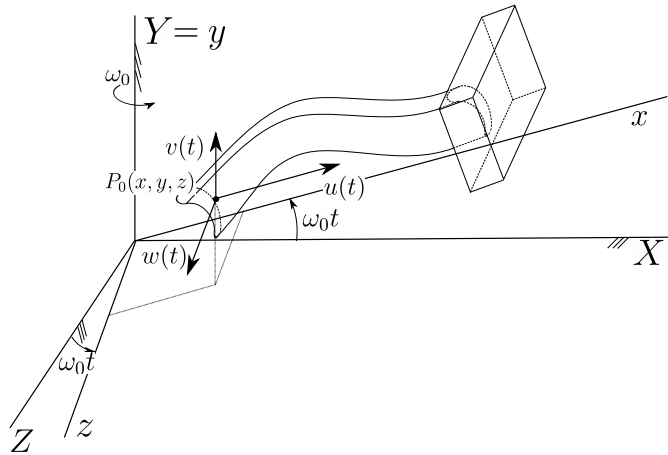
Vztah (2.40) lze přepsat do tvaru

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 N_i(\xi\eta\zeta)x_i \\ \sum_{i=1}^8 N_i(\xi\eta\zeta)y_i \\ \sum_{i=1}^8 N_i(\xi\eta\zeta)z_i \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

Vektor posuvů naprvku může být analogicky vyjádřen pomocí stejné interpolační funkce použité v popisu geometrie (2.40)

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \mathbf{N} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}^{(e)}, \quad (2.45)$$

kde $\mathbf{q}^{(e)}$ je vektor posuvů v uzlech prvku „e“ dimenze 24. Výše uvedené interpolační vztahy (2.45) poslouží k odvození jednotlivých matic hexahedralního prvku v rotujícím prostředí. Odvození vztahu bude provedeno pro kontinuum popsané v rotujícím souřadném systému xyz , který se otáčí v souřadném systému XYZ , viz Obrázek 2.6, konstantní úhlovou rychlostí ω_0 kolem osy rotace $y = Y$.



Obrázek 2.6: Souřadnicové systémy pro odvození rychlosti libovolného bodu rotujícího tělesa.

Matice objemových prvků rotujícího kotouče budou odvozeny na základě Lagrangeových rovnic, které obecně uvažují vlivy disipace energie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{0}, \quad (2.46)$$

kde E_k je kinetická energie, E_p je potenciální energie, R je Rayleighova disipační funkce, \mathbf{q} , respektive $\dot{\mathbf{q}}$ je vektor zobecněných souřadnic, respektive rychlostí.

Kinetická energie rotujícího kontinua v souřadném systému xyz , viz Obrázek 2.6, má tvar

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \mathbf{v}_{xyz}^T \mathbf{v}_{xyz} dV, \quad (2.47)$$

kde $\mathbf{v}_{xyz} = \mathbf{v}_{xyz}(x, y, z, t)$ je vektor rychlosti bodu $P_0(x, y, z, t)$ kontinua v souřadném systému xyz , ρ je hustota kontinua a V_0 objem kontinua. Za předpokladu, že osa y je osou rotace, je rychlost bodu P_0 určena vztahem

$$\mathbf{v}_{xyz} = \dot{\mathbf{u}} + \omega_0 \mathbf{P}(\mathbf{x} + \mathbf{u}), \quad (2.48)$$

kde $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ je vektor posuvů bodu P_0 , $\dot{\mathbf{u}}$ je vektor jeho rychlostí, $\mathbf{x} = [x, y, z]^T$ je polohový vektor a permutační matice \mathbf{P} od transformace vektoru rychlosti

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dosazení (2.48) do (2.47) a rozepsáním na jednotlivé složky má kinetická energie následující podobu

$$\begin{aligned} E_k = & \underbrace{\frac{1}{2} \int_{V_0} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \dot{\mathbf{u}} dV}_{E_{k0}} + \underbrace{\omega_0 \int_{V_0} \rho \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{P}(\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV}_{E_{k1}} + \\ & + \underbrace{\frac{1}{2} \omega_0^2 \int_{V_0} \rho (\mathbf{x}^T + \mathbf{u}^T) \mathbf{P}^T \mathbf{P} (\mathbf{x} + \mathbf{u}) dV}_{E_{k2}}, \end{aligned} \quad (2.49)$$

kde E_{k0} je kinetická energie nerotujícího kontinua, kinetická energie E_{k1} zohledňuje vliv Coriolisových sil a E_{k2} zahrnuje účinky odstředivých sil.

Kombinací vztahu (2.45) s (2.49) jsou jednotlivé složky kinetické energie prvku „e“ v následujících tvarech

$$E_{k0}^{(e)} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV \dot{\mathbf{q}}^{(e)}, \quad (2.50)$$

$$E_{k1}^{(e)} = \omega_0 (\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \left[\int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} dV \mathbf{q}^{(e)} + \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV \right], \quad (2.51)$$

$$E_{k2}^{(e)} = \frac{1}{2} \omega_0^2 \left[\int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV + 2(\mathbf{q}^{(e)})^T \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV + \right. \\ \left. + (\mathbf{q}^{(e)})^T \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{N} dV \mathbf{q}^{(e)} \right], \quad (2.52)$$

kde $V^{(e)}$ je objem prvku „e“. Pro zvýšení přehlednosti lze pro vztahy (2.50) až (2.53) zavést následující substituce vztažené na prvek „e“

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{C}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{N} dV, \\ \mathbf{f}_1^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV, \\ \mathbf{I}^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{x}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV, \\ \mathbf{f}_2^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{x} dV, \\ \mathbf{K}_\omega^{(e)} &= \int_{V^{(e)}} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{P}^T \mathbf{P} \mathbf{N} dV, \end{aligned} \quad (2.53)$$

kde $\mathbf{M}^{(e)}$ je matice hmotnosti, $\mathbf{C}^{(e)}$ je Coriolisova matice, $\mathbf{f}_1^{(e)}$ je vektor gyroskopických sil, $\mathbf{I}^{(e)}$ je moment setrvačnosti k ose y , $\mathbf{f}_2^{(e)}$ je vektor odstředivých sil a $\mathbf{K}_\omega^{(e)}$ je matice změkčení za rotace. Po dosazení těchto substitucí lze výraz pro kinetickou energii (2.49) přepsat do podoby

$$E_k^{(e)} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{M}^{(e)} \dot{\mathbf{q}}^{(e)} + \omega_0 (\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{C}^{(e)} \mathbf{q}^{(e)} + \omega_0 (\dot{\mathbf{q}}^{(e)})^T \mathbf{f}_1^{(e)} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \mathbf{I}^{(e)} + \\ \omega_0^2 (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{f}_2^{(e)} + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{K}_\omega^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (2.54)$$

Potenciální energii kontinua je možné za předpokladu uvažování pouze deformační energie vyjádřit jako

$$E_p = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.55)$$

kde $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T$ je vektor přetvoření a $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{xy}]^T$ je vektor napětí. Vztah mezi vektorem napětí a vektorem přetvoření je dán zobecněným Hookeovým zákonem, který v maticovém zápisu má podobu

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (2.56)$$

kde \mathbf{D} je matice tuhosti mající tvar

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

kde E je Youngův modul pružnosti a ν je Poissonovo číslo. Prvky vektoru přetvoření lze vyjádřit

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}. \quad (2.58)$$

Dosazením interpolačního předpisu pro vektor posuvů (2.45) do předchozího vztahu (2.58) lze získat

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{T}\mathbf{q}^{(e)} = [\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \dots, \mathbf{T}_8] \mathbf{q}^{(e)}, \quad (2.59)$$

kde jednotlivé submatice obsahují následující parciální derivace

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \quad (2.60)$$

Bázové funkce jsou závislé na poloze definované v globálním souřadném systému xyz ($N_i = N_i(x, y, z)$). Vzhledem k platnosti transformace mezi globálním souřadným systémem xyz a lokálním $\xi\eta\zeta$ lze složky polohového vektoru \mathbf{x} zapsat jako funkce polohy v lokálním souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$, tj. $x = x(\xi, \eta, \zeta)$, $y = y(\xi, \eta, \zeta)$ a $z = z(\xi, \eta, \zeta)$. Parciální derivace bázových funkcí (2.42) je možné upravit na následující tvar

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \zeta} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.61)$$

kde \mathbf{J} je Jakobiova matice, která má po dosazení vztahu (2.44) tvar

$$\mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \xi} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \eta} z_i \\ \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} x_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} y_i & \sum_{i=1}^8 \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} z_i \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Přímou derivací bázových funkcí (2.42) jsou odvozeny potřebné derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{1}{8} \xi_i (1 + \eta \eta_i) (1 + \zeta \zeta_i), \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{1}{8} \eta_i (1 + \xi \xi_i) (1 + \zeta \zeta_i), \quad i = 1, 2, \dots, 8, \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} &= \frac{1}{8} \zeta_i (1 + \xi \xi_i) (1 + \eta \eta_i), \end{aligned} \quad (2.63)$$

kde souřadnice jednotlivých uzlu v lokálním souřadnicovém systému $\xi\eta\zeta$ jsou dány vztahem (2.43). Inverzí vztahu (2.61) lze vyjádřit prvky matic \mathbf{T}_i

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \zeta} \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

Při použití Hookeova zákona ve tvaru (2.56) a závislosti (2.59) vektoru přetvoření na vektoru posuvů jednotlivých uzlů prvku je možné určit potenciální energii prvku „e“ ze

vztahu (2.55)

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{(e)})^T \int_{V^{(e)}} \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} dV \mathbf{q}^{(e)}. \quad (2.65)$$

Zavedením matice $\mathbf{K}_s^{(e)}$ statické tuhosti prvku „e“ ve tvaru

$$\mathbf{K}_s^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \mathbf{T}^T \mathbf{D} \mathbf{T} dV \quad (2.66)$$

je získán vztah pro potenciální energii

$$E_p^{(e)} = \frac{1}{2} (\mathbf{q}^{(e)})^T \mathbf{K}_s^{(e)} \mathbf{q}^{(e)}. \quad (2.67)$$

Při matematickém modelování kmitání těles je nutné zohlednit vliv tlumení. Tlumičí účinky lze rozdělit do dvou skupin:

- Vnější tlumení je způsobeno vnějším prostředím, tj. obtékáním média (kapalina, či plyn) okolo tělesa. Tlumičí síly působí vždy kolmo na povrch tělesa a jejich vliv lze zahrnout např. pomocí Bernoulliových rovnic [Linhart (2009)].
- Vnitřní tlumení je uvažováno pro Kelvin-Voightův materiálový model, jehož použití je popsáno v [Dupal (2004)].

Celkovou Rayleighovu disipační funkci materiálového tlumení lze napsat ve tvaru

$$R_I = \frac{1}{2} \int_{V^{(e)}} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (2.68)$$

který je analogickým vztahem ke vztahu (2.55). Matice \mathbf{B} obsahuje koeficienty tlumení a vektor $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^T$ je vektor rychlosti přetvoření kontinua, který se získá časovou derivací prvků z (2.58). Analogickými úpravami, jaké jsou uvedeny pro odvození matice tuhosti $\mathbf{K}_s^{(e)}$, lze odvodit vztah pro Rayleighovu disipační funkci. Z důvodu neznalosti koeficientů v matici \mathbf{B} je v praxi velmi složité odvodit přesnou podobu matice tlumení \mathbf{B} pro obecný konečný prvek, jak je popsáno např. v [Bathe (2014)]. Efektivním způsobem k vyřešení tohoto problému je nahrazení matice tlumení \mathbf{B} kombinací matice hmotnosti a tuhosti proporcionálním vztahem

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}_s \quad (2.69)$$

a koeficienty α a β jsou určovány zpravidla experimentálně nebo z poměrných útlumů dvou dominantních vlastních tvarů kmitání [Zeman & Hlaváč (2004)]. Pro diskretizaci celé lopatky může být aplikována energetická sumace přes všechny prvky tvořící lopatku [Šašek (2010)].

2.2 Modelování kontaktní vazby mezi lopatkami

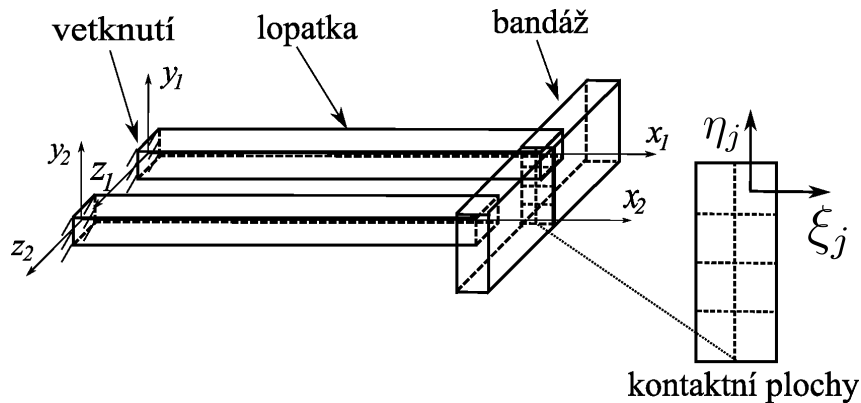
Pro modelování kontaktních vazeb lze využít velkého množství přístupů popsaných např. v pracích [Hippmann (2004)], [Miguel & Otaduy (2012)], či [Rivin (1999)], přičemž každý z uvažovaných přístupů je vhodný pro specifickou oblast použití. Modelování kontaktních vazeb zcela obecným přístupem je velmi náročné ([Drumwright & Shell (2011)]), a proto je nejčastěji užívaný přístup využívající specifických kontaktních modelů vhodných pro dané použití. V předkládané práci bude problematika kontaktu řešena následujícím způsobem. Předem známá kontaktní plocha bude před započítím řešení kontaktní úlohy diskretizována na tzv. kontaktní plošky, ve kterých bude problematika kontaktu řešena samostatně. Je však nutno podotknout, že tento způsob popisu kontaktních ploch je vhodný pouze pro kontakty, které se vzájemně pohybují malými výchylkami.

2.2.1 Určení polohy bodu

Přesná znalost polohy uzlů kontaktních ploch je pro správné určení kontaktní síly naprosto klíčová. Pro názorné vysvětlení byly připraveny jednoduché geometrie lopatek, na kterých bude celý postup popsán, viz Obrázek 2.7 (model kontaktu pro matematický model používající 1D elementy) a 2.9 (model kontaktu pro matematický model používající 3D elementy).

Kinematika kontaktních ploch pro 1D prvky

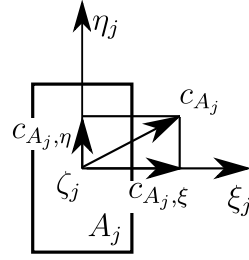
Kinematika kontaktních ploch pro 1D prvky bude posána na kontaktním páru lopatek $i = 1, 2$, který je znázorněn na Obrázku 2.7.



Obrázek 2.7: Modelovaná soustava dvou lopatek s kontaktní vazbou.

Uvažovaná kontaktní plocha je rozdělena na n elementárních kontaktních plošek $j = 1, \dots, n$. Ve středu každé elementární plošky se zvolí lokální souřadný systém $\xi_j \eta_j \zeta_j$,

jak je vyznačeno na Obrázku 2.8. Normálový směr v kontaktní rovině je ve směru osy ζ_j .



Obrázek 2.8: Rozklad relativní rychlosti do směru os ξ a η .

Průnik $\mathbf{d}_{A_j} = [d_{A_j, \xi}, d_{A_j, \eta}, d_{A_j, \zeta}, 0, 0, 0]^T$ ve středu elementární plošky se vypočítá pomocí následujících vztahů

$$\mathbf{d}_{A_j} = \mathbf{q}_{1, A_j} - \mathbf{q}_{2, A_j}, \quad (2.70)$$

$$\mathbf{q}_{i, A_j} = \mathbf{T}_{i, A_j} \mathbf{q}_{i, C}, \quad i = 1, 2, \quad (2.71)$$

kde \mathbf{T}_{i, A_j} je transformační matice a $\mathbf{q}_{i, C}$ je vektor zobecněných souřadnic posledního uzlu i -té lopatky, v němž je bandáž připevněna k lopatce. Transformační matice pro střed kontaktní plošky vznikne pronásobením matic

$$\mathbf{T}_{i, A_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{R}_{A_j, S_i}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}. \quad (2.72)$$

Matice \mathbf{E} je matice s jednotkami na diagonále. Matice \mathbf{R}_{A_j, S_i}^T je určena polohou středu kontaktní plošky v souřadném systému s počátkem S_i ve středu bandáže

$$\mathbf{R}_{A_j, S_i}^T = \begin{bmatrix} 0 & z_{A_j} & -y_{A_j} \\ -z_{A_j} & 0 & x_{A_j} \\ y_{A_j} & -x_{A_j} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Matice \mathbf{C} popisuje přechod z posledního uzlu lopatky do středu bandáže o vzdálenosti c ve směru osy lopatky a má tvar

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & -c & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Pro výpočet třecí síly je nutno znát relativní rychlost kontaktních plošek, které se určí pomocí matice natočení v uzlu konečnoprvkové sítě, k němuž jsou účinky kontaktní vazby vztahovány. Rychlost kontaktní plošky je dána předpisem

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_{1,A_j} &= \mathbf{T}_{1,A_j} \dot{\mathbf{q}}_{1,C}, \\ \dot{\mathbf{q}}_{2,A_j} &= \mathbf{T}_{2,A_j} \dot{\mathbf{q}}_{2,C}.\end{aligned}\quad (2.75)$$

Podobně jako průnik, je i relativní rychlost určená rozdílem rychlostí elementárních kontaktních plošek

$$\mathbf{c}_{A_j} = \dot{\mathbf{q}}_{1,A_j} - \dot{\mathbf{q}}_{2,A_j}.\quad (2.76)$$

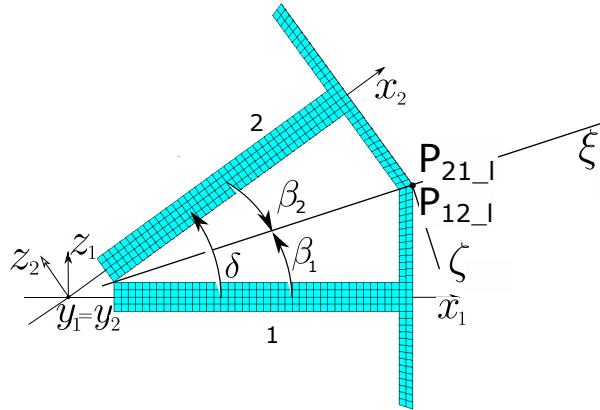
Tzv. skluzová rychlost v kontaktní plošce, viz Obrázek 2.8, v rovině $\widehat{\xi_j \eta_j}$ se pak určí vztahem

$$c_{A_j} = \sqrt{c_{A_j,\xi}^2 + c_{A_j,\eta}^2},\quad (2.77)$$

kde $c_{A_j,\xi}$ a $c_{A_j,\eta}$ jsou složky relativní rychlosti příslušné elementární plošky A_j .

Kinematika kontaktních ploch pro 3D konečné prvky

Při modelování tělesa pomocí 3D konečných prvků je určení polohy kontaktního bodu velmi snadné, neboť se nachází přímo na diskretizovaném povrchu tělesa. S ohledem na vzájemně rozdílné souřadné systémy jednotlivých lopatek, ve kterých jsou definovány posuvy uzlů, je nutné přesně rozlišovat mezi globálním souřadným systémem (GSS) a lokálním souřadným systémem (LSS). LSS mají shodný počátek a osu y s GSS, jsou však navzájem pootočený o roztečný úhel δ , viz Obrázek 2.9.



Obrázek 2.9: Dvojice lopatek s kontaktními body.

Průnik lopatek bude vyjádřen v kontaktní rovině v LSS $\xi\eta\zeta$ kontaktní roviny stejně jako pro modelování kontaktu pro 1D elementy, viz Obrázek 2.7. Pro popis problému bude použité následující indexování. Index j bude používán pro popis kontaktní plošky na kontaktní rovině, index i bude indexem lopatky. Z matematického modelu jsou známy výchylky všech uzlů sítě v LSS lopatky, které mají obecně 3 souřadnice $(\mathbf{q}_{i,j})_{LSS_i} = [x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j}]^T$, kde index LSS_i odkazuje na souřadnice v LSS lopatky i . Úkolem je tedy vyjádřit polohu v LSS ξ, η, ζ , jinými slovy $(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta}$ pomocí $(\mathbf{q}_{i,j})_{L_i}$. Pro tuto transformaci je vhodné zavést matici pootočení

$$\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & 0 & \sin(\beta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_i) & 0 & \cos(\beta_i) \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

kde úhel β_i je roven velikosti natočení kontaktní plochy vůči LSS_i . Je však účelné upozornit, že vždy pro jednu lopatku z kontaktního páru bude úhel β_i záporný.

Nejprve bude vyjádřena souřadnice $(\mathbf{q}_{i,j})_{L_i}$ pomocí $(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta}$

$$(\mathbf{q}_{i,j})_{L_i} = \mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta}. \quad (2.79)$$

Pro případ potřeby vyjádření $(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta}$ pomocí $(\mathbf{q}_{i,j})_{L_i}$ pak stačí použít transponovanou matici $\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}^T$. Vztah bude mít následující tvar

$$(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \xi_{i,j} \\ \eta_{i,j} \\ \zeta_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}^T(\mathbf{q}_{i,j})_{L_i}, \quad (2.80)$$

kde $\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}^T$ má tvar

$$\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}^T = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & 0 & -\sin(\beta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta_i) & 0 & \cos(\beta_i) \end{bmatrix}. \quad (2.81)$$

Při znalosti polohy bodu v LSS kontaktní plochy lze průnik kontaktních plošek e_{ζ_j} určit pomocí vztahu

$$e_{\zeta_j} = \zeta_{i,j} - \zeta_{(i+1),j}. \quad (2.82)$$

Normálová síla v j -té kontaktní plošce je pak rovna

$$N_j = k_c e_{\zeta_j}, \quad (2.83)$$

kde k_c vyjadřuje kontaktní tuhost.

Pro získání skluzových rychlostí lze použít analogický vztah ke vztahu (2.79) a převést rychlosti z GSS do LSS následujícím vztahem

$$(\dot{\mathbf{q}}_{i,j})_{L_i} = \mathbf{T}_{\xi\eta\zeta, L_i}(\dot{\mathbf{q}}_{i,j})_{\xi\eta\zeta}. \quad (2.84)$$

2.2.2 Zahrnutí kontaktů do pohybových rovnic

V předkládané práci jsou pro zahrnutí vlivu kontaktu používány dva přístupy. Prvním užívaným způsobem je provázání dvou těles pomocí matic tuhosti a tlumení, viz např. [Rychecký (2011)]. V tomto případě jsou prvky matice tuhosti a tlumení kontaktu přiřčeny na příslušné pozice matice tuhosti a tlumení celé soustavy. Tření je však modelováno pomocí třecí síly, která se přičítá k celkovému vektoru zobecněných sil obsaženém ve vektoru na pravé straně soustavy. Druhou používanou metodou je provázání pomocí sil, kdy jsou za použití principu akce a reakce přiřčeny na příslušné pozice silového vektoru i normálové (kontaktní) síly.

Tuhostní přístup při řešení kontaktní úlohy

Tento přístup k modelování kontaktních úloh byl detailně popsán v diplomové práci autora, viz [Rychecký (2011)]. Provázání nezávislých těles je odvozeno z deformační energie kontaktu, která se v Lagrangeových rovnicích derivuje podle zobecněných souřadnic. Potenciální energie pro j -tou kontaktní plošku má tvar

$$E_{dj} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_{A_j}^T \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{d}_{A_j} H(d_{A_j, \zeta}), \quad (2.85)$$

kde $H(d_{A_j, \zeta})$ je Heavisideova funkce, která nabývá nulové hodnoty pro $d_{A_j, \zeta} \leq 0$ (plocha není aktuálně v kontaktu) a hodnoty 1 pro $d_{A_j, \zeta} > 0$. Argument $d_{A_j, \zeta}$ značí deformaci kontaktní plošky ve směru normály ζ_j , viz Obrázek 2.8. Matice \mathbf{K}_{A_j} , určující kontaktní tuhost jedné elementární plošky, má tvar $\mathbf{K}_{A_j} = \text{diag}(0, 0, k_\zeta, k_{\xi\xi}, k_{\eta\eta}, 0)$, přičemž index přiřazení k plošce A_j pro jednoduchost zápisu vypouštíme. Dále bude uvažována pouze normálová tuhost k_ζ , neboť předpokládáme pouze malá relativní natáčení kontaktních ploch. Vliv rotačních tuhostí je nahrazen díky diskretizaci kontaktní plochy elementárními ploškami.

Normálová tuhost je volena konstantní pro celou kontaktní plochu a je vypočtena pouze jednou na počátku řešení ze statického zatížení. Celková normálová tuhost je určena vztahem uvedeným v [Rivin (1999)]

$$k_\zeta = \frac{N}{\gamma} \cdot 10^6 \text{ [N/m]} \quad (2.86)$$

kde N je celková kontaktní statická síla a deformaci γ v μm lze určit ze vztahu

$$\gamma = c\sigma_\zeta^p, \quad (2.87)$$

kde $\sigma_\zeta = \frac{N}{A}$ je napětí v MPa vyvolané normálovou silou N působící na celkovou plochu A , c a p jsou konstanty. Jejich velikost se volí dle materiálových vlastností z intervalů $c = 2 \div 5$, $p = 0,4 \div 0,8$. Hodnota konstanty c závisí zejména na nerovnosti povrchu

kontaktních ploch. Čím hladší je opracování kontaktní plochy, tím menší je hodnota c . Se zvětšující se kontaktní plochou exponent p narůstá a blíží se hodnotě 1 [Rivin (1999)].

Pro zahrnutí vlivu kontaktu do modelu soustavy těles je nutné deformační energii kontaktu v plošce A_j zderivovat dle zobecněných souřadnic soustavy $\mathbf{q} = [\dots \mathbf{q}_{1,C}^T, \dots \mathbf{q}_{2,C}^T, \dots]^T$

$$\frac{\partial E_{dj}}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left[(\mathbf{T}_{1,A_j} \mathbf{q}_{1,C} - \mathbf{T}_{2,A_j} \mathbf{q}_{2,C})^T \mathbf{K}_{A_j} (\mathbf{T}_{1,A_j} \mathbf{q}_{1,C} - \mathbf{T}_{2,A_j} \mathbf{q}_{2,C}) \right] H(d_{A_j, \zeta}). \quad (2.88)$$

Matice tuhosti kontaktní plošky \mathbf{K}_{A_j} je určena v jejím lokálním souřadném systému. Pro začlenění do matematického modelu lopatek je nutno určit matici tuhosti z identity $\frac{\partial E_{dj}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{q}$. Zapišeme ji v komprimovaném tvaru, kdy nulové submatice nejsou uvedeny

$$\bar{\mathbf{K}}_{A_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{1,A_j}^T \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{T}_{1,A_j} & -\mathbf{T}_{1,A_j}^T \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{T}_{2,A_j} \\ -\mathbf{T}_{2,A_j}^T \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{T}_{1,A_j} & \mathbf{T}_{2,A_j}^T \mathbf{K}_{A_j} \mathbf{T}_{2,A_j} \end{bmatrix} H(d_{A_j, \zeta}). \quad (2.89)$$

Celková komprimovaná matice tuhosti kontaktu je určena součtem

$$\bar{\mathbf{K}}_c = \sum_{j=1}^n \bar{\mathbf{K}}_{A_j}. \quad (2.90)$$

Komprimovaná matice $\bar{\mathbf{K}}_c$ dimenze 12 se rozdělí na čtyři čtvercové submatice řádu 6 přiřazené vektorům $\mathbf{q}_{1,C}$ a $\mathbf{q}_{2,C}$

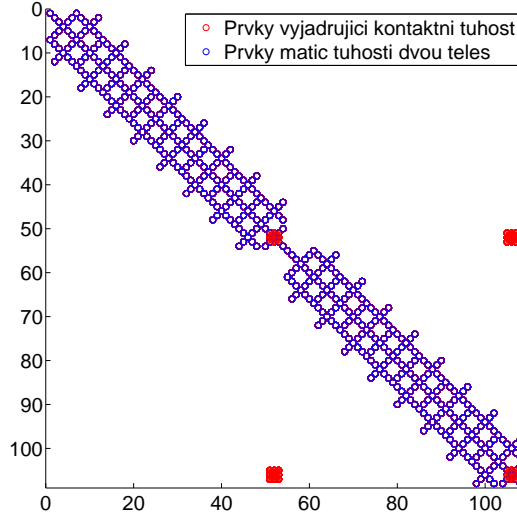
$$\bar{\mathbf{K}}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2.91)$$

kteřé se přičtou k celkové matici tuhosti dvojice lopatek na pozice definované indexy konkrétních zobecněných souřadnic provázaných lopatek. Provázání zobecněných souřadnic v celkové matici tuhosti \mathbf{K} je znázorněno na Obrázku 2.10, kde modrou barvou jsou vyznačeny nenulové pozice matice tuhosti dvou těles \mathbf{K}_S , ke kterým jsou červenou barvou na označených místech přičteny 4 submatice matice tuhosti kontaktu $\bar{\mathbf{K}}_c$.

Po určení matice tuhosti zbývá určit velikost a směr třecích sil. Třecí síly závisejí na normálové kontaktní síle vyjádřené pomocí kontaktní tuhosti a průniku. Pro určení třecích sil je nutné také znát směr a velikost relativní rychlosti. V případě uvažování konstantního koeficientu tření řešení nezávisí na velikosti relativní rychlosti kontaktních plošek.

Pro modelování kontaktu pomocí matice tuhosti kontaktu je zapotřebí dopočítat normálovou sílu, která je dále užívána pro výpočet třecí síly. Normálová síla přenášená ploškou A_j je určena předpisem

$$N_{A_j} = k_{\zeta, j} d_{A_j, \zeta} H(d_{A_j, \zeta}), \quad (2.92)$$



Obrázek 2.10: Struktura matice tuhosti ukazující pozice, na které se přičítají kontaktní tuhosti.

kde $k_{\zeta,j}$ je tuhost v normálové směru, $d_{A_j,\zeta}$ je třetí souřadnice vektoru \mathbf{d}_{A_j} určující průnik kontaktních plošek ve směru ζ a $H(d_{A_j,\zeta})$ je Heavisideova funkce.

Pro nenulovou relativní rychlost $c_{A_j,\xi}$ ve směru ξ má složka třecí síly $T_{A_j,\xi}$ působící na těleso 1 v souladu s (2.76) tvar

$$T_{A_j,\xi} = -N_{A_j} f(c_{A_j}) \frac{c_{A_j,\xi}}{c_{A_j}}, \quad (2.93)$$

kde $c_{A_j,\xi}$ je souřadnice vektoru \mathbf{c}_{A_j} ve směru ξ . Analogický vztah platí i pro složku třecí síly do směru osy η

$$T_{A_j,\eta} = -N_{A_j} f(c_{A_j}) \frac{c_{A_j,\eta}}{c_{A_j}}. \quad (2.94)$$

Jednotlivé složky třecí síly (2.93) a (2.94) se složí do vektoru sil příslušné plochy A_j . Síly pro těleso 1 mají tvar

$$\mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)} = [T_{A_j,\xi}, T_{A_j,\eta}, 0, 0, 0, 0]^T. \quad (2.95)$$

Pro těleso 2 jsou, díky principu akce a reakce, síly opačné, tj. $\mathbf{f}_{A_j}^{(1,2)} = -\mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)}$.

Uvedené vektory sil (2.95) popisují velikost třecích sil v elementární kontaktní plošce. Je nezbytné tyto síly zpětně transformovat do koncových bodů lopatek C_i , kde $i = 1, 2$, v nichž jsou loptaky do bandáží vetknuty. Zpětná transformace je provedena transponovanou maticí (2.72). Výraz pro transformace sil ze souřadného systému $\xi_j \eta_j \zeta_j$ do $x_c y_c z_c$ má

tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{1,c} &= \sum_j \mathbf{T}_{1,A_j}^T \mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)}, \\ \mathbf{f}_{2,c} &= \sum_j \mathbf{T}_{2,A_j}^T \mathbf{f}_{A_j}^{(1,2)}.\end{aligned}\quad (2.96)$$

Ve zvoleném uzlu lopatky jsou všechny účinky od tření složeny. Výsledný matematický model dvojice lopatek s uvažovaným kontaktem zahrnutým pomocí matice tuhosti a s uvažovanou tuhou bandáží, v souladu s modelem (2.39), je

$$\begin{aligned}& \left\{ \overline{\mathbf{M}} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{M}_T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{M}_T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{M}_T \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \ddot{\mathbf{q}} + \\ & + \left\{ \overline{\mathbf{B}} + \omega_0 \overline{\mathbf{G}} + \omega_0 \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{G}_T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{G}_T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{G}_T \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.97) \\ & + \left\{ \overline{\mathbf{K}}_S - \omega_0^2 \overline{\mathbf{K}}_d + \omega_0^2 \overline{\mathbf{K}}_\omega - \omega_0^2 \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{K}_{dT} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{K}_{dT} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{K}_{dT} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \overline{\mathbf{K}}_c & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \overline{\mathbf{K}}_c & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \overline{\mathbf{K}}_c \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \mathbf{q} = \\ & = \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega + \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega^{(b)} + \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),\end{aligned}$$

kde jednotlivé matice dvou shodných lopatek jsou setaveny do blokové struktury tvaru $\overline{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}_S, \mathbf{K}_d, \mathbf{K}_\omega$. Silové vektory na pravé straně mají tvar $\mathbf{f}_\omega = [\mathbf{f}_\omega^T, \mathbf{f}_\omega^T]^T$, $\mathbf{f}_\omega^{(b)} = [\dots, \mathbf{f}_{1,\omega}^{(b)T}, \dots, \mathbf{f}_{2,\omega}^{(b)T}, \dots]^T$ a $\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\dots, \mathbf{f}_{1,c}^T, \dots, \mathbf{f}_{2,c}^T, \dots]^T$.

Přestože u tuhostního přístupu se musí pro vyšetření tečných sil vyjádřit normalová síla, je tento přístup vhodný v případě modální analýzy. Při znaslosti předepnutí lopatek lze vnést vliv kontaktu do matice tuhosti, a tak ovlivnit chování celého disku, jak bude udeveno dále.

Silový přístup při řešení kontaktní úlohy

Druhý prezentovaný způsob zavedení kontaktu pro dva nezávislé matematické modely lopatek je proveden pomocí vektoru sil. Tento vektor je pak s ohledem na princip akce a reakce přičten na příslušné pozice k pravé straně diferenciálních rovnic. Ve vektoru sil vystupuje normálová (kontaktní) síla, která přímo závisí na průniku jednotlivých ploch a na tuhosti kontaktu. Třecí síly jsou vypočteny stejným způsobem jako pro přístup modelování kontaktu pomocí matice tuhosti. Tento způsob je níže označován jako výpočet s konstantní tuhostí kontaktu.

Modelování kontaktu pomocí sil bylo motivováno hlavně požadavkem na časově a plošně proměnné elementární síly, které musí kontakt přenášet. Přístup pomocí matice tuhosti vyžadoval v každém kroku sestavení matice tuhosti, což zpomalovalo výpočet. Typickým příkladem, kde lze s výhodou využít silový přístup, je natáčení lopatek okolo jedné z os, kdy dochází k částečnému odlehnutí části kontaktních ploch. Řešení této problematiky ovšem vyžaduje vypočítat kontaktní tuhost v každém iteračním kroku, proto byl tento model nazván dynamickým.

1. Konstantní tuhost pro celou plochu a celou dobu výpočtu

Při výpočtu pomocí silového modelu kontaktu je použita kontaktní tuhost tak, jak byla již dříve vyjádřena předpisem (2.86). Kontaktní síla je přímo úměrná průniku dvou ploch (2.70)

$$N_{A_j} = k_\zeta d_{A_j, \zeta} H(d_{A_j, \zeta}), \quad (2.98)$$

kde k_ζ je tuhost kontaktu v normálovém směru, $d_{A_j, \zeta}$ určuje průnik dvou plošek A_j těles 1 a 2 a $H(d_{A_j, \zeta})$ je Heavisideova funkce.

Pro případ kontaktu se třením je používán stejný postup výpočtu uvedený v předchozí kapitole, viz (2.93) a (2.94). Díky modelování kontaktu pomocí sil je známa i velikost normálové síly (2.98).

Jednotlivé složky třecí síly (2.93) a (2.94) se složí do vektoru sil příslušné plošky A_j , kde je na třetí pozici normálová síla. Síly pro těleso 1 mají tvar

$$\mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)} = [T_{A_j, \xi}, T_{A_j, \eta}, N_{A_j}, 0, 0, 0]^T. \quad (2.99)$$

Pro těleso 2 jsou, díky principu akce a reakce, opačné, tj. $\mathbf{f}_{A_j}^{(1,2)} = -\mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)}$.

Uvedené vektory sil (2.99) popisují velikost kontaktních a třecích sil v elementární kontaktní plošce. Je nezbytné tyto síly zpětně transformovat do koncových bodů lopatek C_i , kde $i = 1, 2$. Zpětná transformace je provedena transponovanou maticí (2.72). Výraz pro transformace sil ze souřadného systému $\xi_j \eta_j \zeta_j$ do posledního

uzlu lopatky má tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{1,c} &= \sum_j \mathbf{T}_{1,A_j}^T \mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)}, \\ \mathbf{f}_{2,c} &= \sum_j \mathbf{T}_{2,A_j}^T \mathbf{f}_{A_j}^{(1,2)}.\end{aligned}\quad (2.100)$$

V posledním uzlu lopatky jsou všechny silové účinky kontaktních a třecích sil sečteny. Výsledný matematický model s uvažovaným kontaktem zahrnutý pomocí vektoru sil je

$$\begin{aligned}& \left\{ \bar{\mathbf{M}} + \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{M}_T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{M}_T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{M}_T \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \ddot{\mathbf{q}} + \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{B}} + \omega_0 \bar{\mathbf{G}} + \omega_0 \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{G}_T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{G}_T & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{G}_T \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \dot{\mathbf{q}} + \\ & + \left\{ \bar{\mathbf{K}}_S - \omega_0^2 \bar{\mathbf{K}}_d + \omega_0^2 \bar{\mathbf{K}}_\omega - \omega_0^2 \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & \mathbf{K}_{dT} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \mathbf{K}_{dT} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \mathbf{K}_{dT} \\ & & & & & & \ddots \end{bmatrix} \right\} \mathbf{q} = \\ & = \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega + \omega_0^2 \mathbf{f}_\omega^{(b)} + \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}),\end{aligned}\quad (2.101)$$

kde jednotlivé matice dvou shodných lopatek jsou sestaveny do blokové struktury tvaru $\bar{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X} \end{bmatrix}$, $\mathbf{X} = \mathbf{M}, \mathbf{B}, \mathbf{K}_S, \mathbf{K}_d, \mathbf{K}_\omega$. Silové vektory na pravé straně mají tvar $\mathbf{f}_\omega = [\mathbf{f}_\omega^T, \mathbf{f}_\omega^T]^T$, $\mathbf{f}_\omega^{(b)} = [\dots, \mathbf{f}_{1,\omega}^{(b)T}, \dots, \mathbf{f}_{2,\omega}^{(b)T}, \dots]^T$ a $\mathbf{f}_c(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = [\dots, \mathbf{f}_{1,c}^T, \dots, \mathbf{f}_{2,c}^T, \dots]^T$, přičemž normálové síly jsou zahrnuty ve vektorech $\mathbf{f}_{1,c}$ a $\mathbf{f}_{2,c}$ v (2.100).

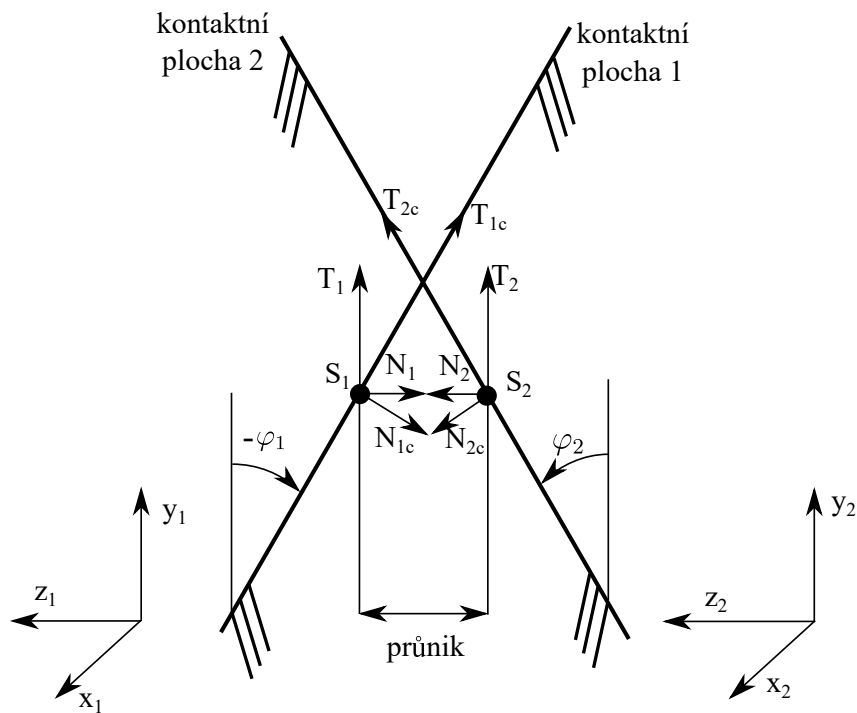
2. Dynamické určování tuhosti pro aktuální kontaktní plochu

Tato modifikace vychází z předchozího přístupu, avšak tuhost se počítá v každém iteračním kroku podle počtu aktivních ploch. Pro mění se počet kontaktních ploch

dochází ke změně velikosti normálového napětí v (2.87), které je určeno jako podíl celkového normálového zatížení ku celkové aktivní ploše kontaktu. Celý postup je znázorněn na Obrázku 2.12. S přístupem respektujícím změnu tuhosti již lze řešit obecnější úlohy, při kterých dochází ke kroucení lopatek.

Výpočet tření je stejný jako u konstantní tuhosti pro celou plochu, respektive pro kontakt modelovaný maticí tuhosti.

Pro případ natáčení lopatek vůči sobě bylo potřeba řešit změnu tuhosti vzniklou odléháním většího množství elementárních plošek. Tento původně neuvažovaný případ vnáší do modelu nepřesnost, jejíž míra závisí na diskretizaci plochy, respektive poloze zaváděných kontaktních sil. Elementární plošky už na sebe nedosedají kolmo, avšak dochází k navázání kontaktu a vzájemnému natáčení, viz Obrázek 2.11. Určené normálové a tečné síly je nutné zpětně transformovat ze souřadných systémů elementárních plošek do globálního souřadného systému. Velikost zpětného natočení odpovídá jednotlivým úhlům φ_i, β_i , což je úhel natočení kontaktní plošky ku ose lopatky. Z úhlů byly sestaveny matice natočení (2.102) a (2.103), které byly přidány do zpětné transformace kontaktních sil z lokálního souřadného systému kontaktní plošky $\xi_j \eta_j \zeta_j$ do $x_c y_c z_c$,



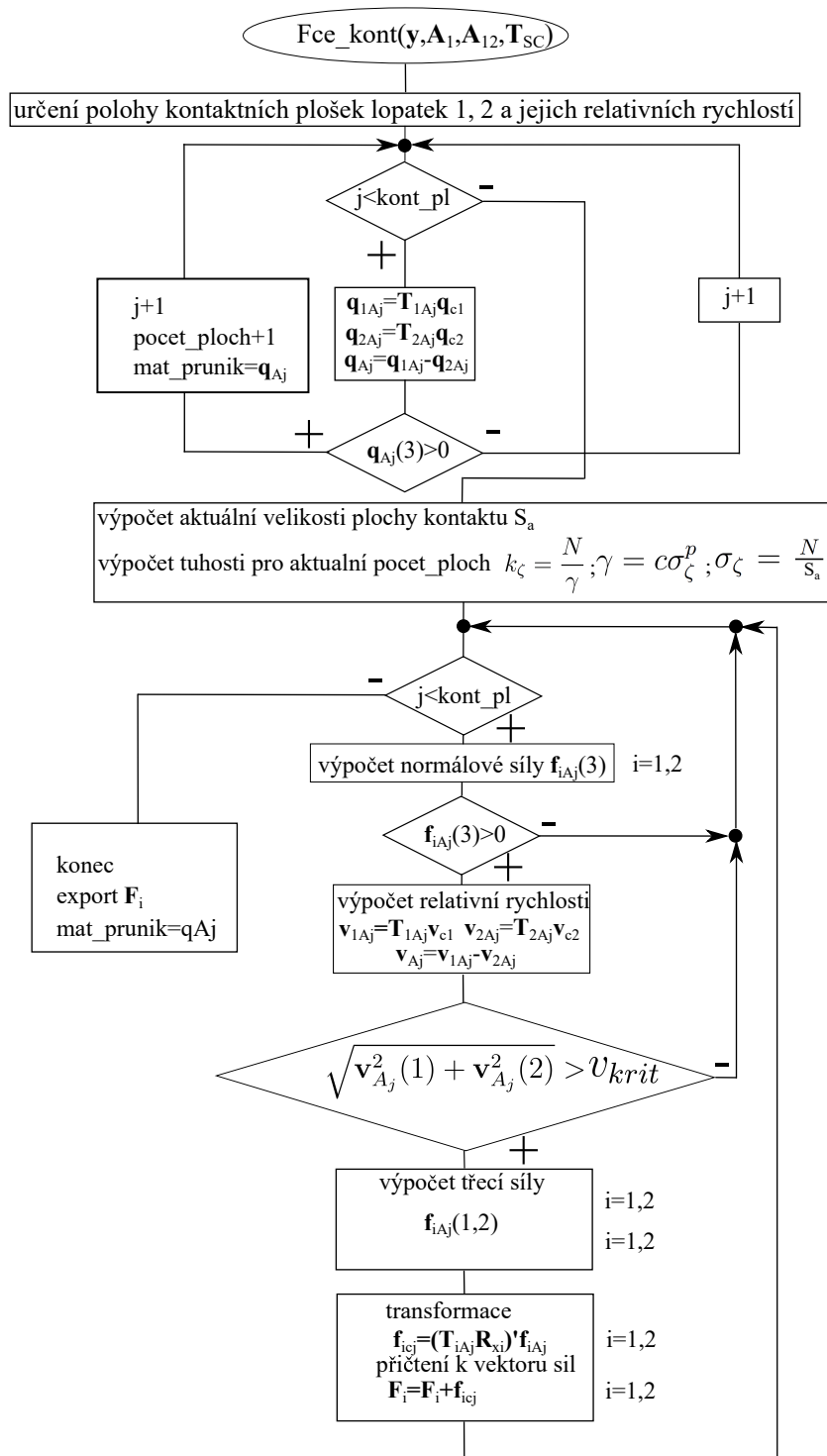
Obrázek 2.11: Natáčení kontaktních sil při uvažování torze lopatky.

$$\mathbf{T}_{\varphi_i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos\varphi_i & -\sin\varphi_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin\varphi_i & \cos\varphi_i \end{bmatrix}. \quad (2.102)$$

$$\mathbf{T}_{\zeta_i} = \begin{bmatrix} \cos\beta_i & 0 & -\sin\beta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\beta_i & 0 & -\sin\beta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\beta_i & 0 & \cos\beta_i \end{bmatrix}. \quad (2.103)$$

Výsledný vztah pro převod sil ze souřadného systému středů plošek do posledního uzlu lopatky má tvar

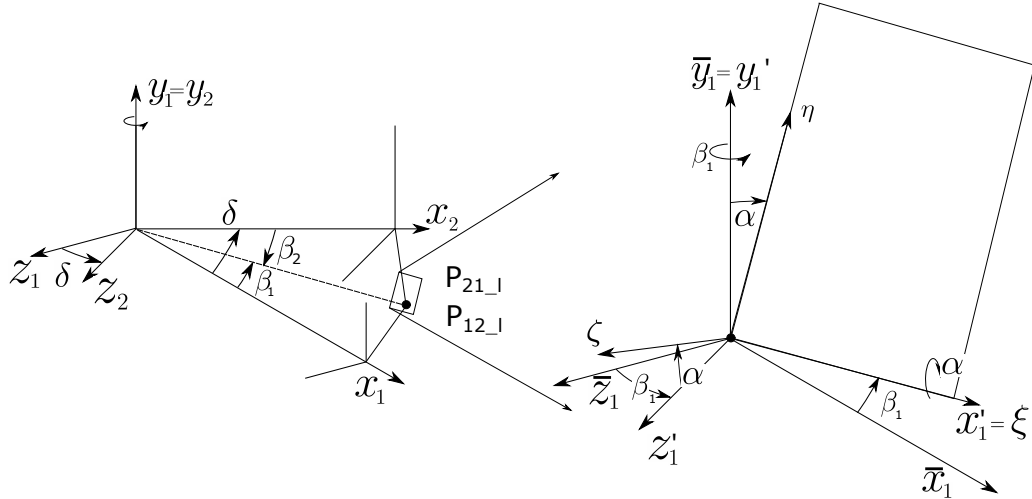
$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{1,c} &= \sum_j (\mathbf{T}_{1,A_j} \mathbf{T}_{\varphi_1} \mathbf{T}_{\zeta_1})^T \mathbf{f}_{A_j}^{(2,1)}, \\ \mathbf{f}_{2,c} &= \sum_j (\mathbf{T}_{2,A_j} \mathbf{T}_{\varphi_2} \mathbf{T}_{\zeta_2})^T \mathbf{f}_{A_j}^{(1,2)}. \end{aligned} \quad (2.104)$$



Obrázek 2.12: Vývojový diagram funkce vypočítávající velikost normálových a třecích sil.

2.2.3 Kontaktní vazba rhombických lopatek s vlivem tření

Postup uvedený v přechodí kapitole bude nyní zobecněn pro použití na rhombických lopatkách, které mají navíc kontaktní plochu otočenou oproti rovině lopatkového disku o úhel α . Obrázek 2.13 vyjadřuje polohu kontaktní plochy v lokálním souřadném systému dvou lopatek, respektive v detailu vpravo kontaktní plochu spolu s natočením lokálního souřadnicového systému $\xi\eta\zeta$. V souladu s předchozí částí bude index i náležet číslu lopaty a index j bude značit kontaktní plochu.



Obrázek 2.13: Souřadnicové systémy lopatek a kontaktní plochy.

Vzhledem k uvažování dalšího natočení kontaktní plochy bude zapotřebí použít dvě transformační matice pro popis polohy bodu dotyku v LSS kontaktní plochy, které budou mít následující podobu

$$\mathbf{T}_{kont,L_i} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_i) & 0 & \sin(\beta_i) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_i) & 0 & \cos(\beta_i) \end{bmatrix} \quad (2.105)$$

a

$$\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,kont} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Výsledná matice natočení z LSSL (LSS lopatky) do LSS kontaktní plochy $\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,L_i}$ popisuje

transformaci natočení první lopatky. Vznikne pronásobením (2.105) a (2.106)

$$\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,L_1} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_1) & -\sin(\beta_1)\sin(\alpha) & \sin(\beta_1)\cos(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1)\sin(\alpha) & \cos(\beta_1)\cos(\alpha) \end{bmatrix}, \quad (2.107)$$

Pro druhou lopatku z kontaktního páru bez ztráty obecnosti lze uvažovat $\beta_1 = -\beta_2$ a tedy

$$\mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,L_2} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_1) & \sin(\beta_1)\sin(\alpha) & -\sin(\beta_1)\cos(\alpha) \\ 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\beta_1) & -\cos(\beta_1)\sin(\alpha) & \cos(\beta_1)\cos(\alpha) \end{bmatrix}. \quad (2.108)$$

Poloha bodu v kontaktní rovině se pak určí v analogii s (2.80) jako

$$(\mathbf{q}_{i,j})_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \xi_{i,j} \\ \eta_{i,j} \\ \zeta_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,L_i}^T (\mathbf{q}_{i,j})_{L_i}, \quad (2.109)$$

a jeho rychlost derivací podle času

$$(\dot{\mathbf{q}}_{i,j})_{\xi\eta\zeta} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{i,j} \\ \dot{\eta}_{i,j} \\ \dot{\zeta}_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{\xi\eta\zeta,L_i}^T (\dot{\mathbf{q}}_{i,j})_{L_i}. \quad (2.110)$$

Průnik e_{ζ_j} v kontaktním bodu j bude určen opět vztahem (2.82). Pro určení složek tření je nutné znát tzv. skluzovou rychlost c_j v kontaktní rovině $\xi\eta$, která se určí u dvojice lopatek pomocí vztahu

$$c_{j\xi} = \dot{\xi}_{1,j} - \dot{\xi}_{2,j}, \quad c_{j\zeta} = \dot{\eta}_{1,j} - \dot{\eta}_{2,j}, \quad c_j = \sqrt{c_{j\xi}^2 + c_{j\zeta}^2},$$

kde $\dot{\xi}$ a $\dot{\eta}$ jsou skluzové rychlosti v jednotlivých směrech.

Třecí síly v kontaktní rovině $\xi\eta$ jsou pak dány vztahy

$$\begin{aligned} T_{j\xi}^{(2,1)} &= fN_j \frac{c_{j\xi}}{c_j} H(N_j), & T_{j\xi}^{(1,2)} &= -T_{j\xi}^{(2,1)}, \\ T_{j\eta}^{(2,1)} &= fN_j \frac{c_{j\eta}}{c_j} H(N_j), & T_{j\eta}^{(1,2)} &= -T_{j\eta}^{(2,1)}, \end{aligned} \quad (2.111)$$

kde $H(N_j)$ je Heavisidova funkce, která nabývá nulových hodnot pro případ $N_j = 0$.

2.2.4 Zahnutí vlivu předpětí v kontaktní vazbě

Lopatky reálných olopatkovaných disků jsou často sestavovány s předpětím, pro jejich modelování je nutné mít možnost uvažovat vliv předpětí. Předpětí způsobuje provázání

kontaktních bodů v normálovém směru, které je nahrazeno kontaktní vazbou vyjádřenou maticí tuhosti $\mathbf{K}_{predpeti}$. Strukturou bude matice předpětí shodná s maticí kontaktní tuhosti (2.91). V případě uvažování pouze normálové tuhosti s tím rozdílem, že matice tuhosti je konstantní po celou dobu výpočtu.

Stejně jako při definování kontaktní tuhosti je nutné znát kontaktní sílu, je i zde pro definování vlivu předpětí nezbytné znát jeho velikost. Při znalosti velikosti síly předpětí se matice tuhosti předpětí určí s využitím vztahu (2.86) a (2.87).

2.3 Užití modální analýzy pro redukci modelu rotujícího tělesa

Tato podkapitola se bude nejprve zabývat řešením problému vlastních hodnot a k nim příslušejícím vlastním vektorům pro různé druhy matematických modelů. Následně bude popsán postup vytvoření redukovaného modelu soustavy respektující rotující lopatky. Problém vlastních hodnot bude nejprve představen pro konzervativní soustavy bez uvažování gyroskopických účinků. Tento model je vhodný pouze pro vyšetřování slabě nekonzervativních systémů, z tohoto důvodu bude tento model rozšířen o další členy tak, aby v konečné podobě vznikl vhodný matematický nástroj pro vyšetřování nekonzervativních rotujících lopatek.

Pro dynamicky zatěžované systémy je provedení modální analýzy základním ověřením konstrukce. Je důležité, aby se frekvence provozního zatížení nenacházela v blízkém okolí vlastní frekvence a nedocházelo tak k rezonanci. Druhým přínosem, který bude užít v této práci, je pak možnost provedení modální redukce, kdy jsou při výpočtu uvažovány pouze vybrané vlastní tvary, čímž dojde k redukci počtu stupňů volnosti matematického modelu.

2.3.1 Modální analýza konzervativních soustav

Volné kmity nerotujících konzervativních soustav jsou popsány rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0} \quad (2.112)$$

pro počáteční podmínky dané vektory $\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0$ a $\dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0$. Řešení soustavy n homogenních diferenciálních rovnic druhého řádu (2.112) lze obecně hledat ve tvaru

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{v}e^{i\Omega t}, \quad \mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_n]^T, \quad (2.113)$$

kde \mathbf{v} náleží zatím neznámému vektoru amplitud a Ω je úhlová frekvence. Dosazením řešení $\mathbf{q}(t)$ do (2.112) je získáno

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.114)$$

Rovnice (2.114) představuje problém vlastních hodnot. V případě, kdy alespoň jedna ze souřadnic vektorů \mathbf{v} je nenulová, se řešení nazývá netriviální řešení a existuje v případě, že determinant matice $\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}$ je roven nule, tzn.

$$\det(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}) = 0. \quad (2.115)$$

Kořeny $\lambda_\nu = \Omega_\nu^2$ charakteristické rovnice se nazývají vlastní čísla. Vzhledem k symetrii a pozitivní definitnosti matic \mathbf{M} a \mathbf{K} jsou nezáporná. Vlastní frekvence je pak rovna hodnotě $\Omega_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}$. Za předpokladu, že nulita matice $\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}$ je rovna násobnosti vlastního čísla λ_ν , každému vlastnímu číslu λ_ν (respektive vlastní frekvenci Ω_ν) náleží vlastní vektor \mathbf{v}_ν , který splňuje rovnici (2.114) a popisuje vlastní tvar kmitání. Tedy

$$(\mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M}_\nu)\mathbf{v}_\nu = \mathbf{0}, \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2.116)$$

S ohledem na homogenitu rovnice (2.116) je řešením rovnice také vektor $c\mathbf{v}_\nu$, kde c je libovolná konstanta. Z tohoto důvodu je nutné vlastní vektory normovat. Vzhledem k dalšímu užití vlastních vektorů je vhodné je normovat pomocí matice hmotnosti předpisem

$$\mathbf{v}_\nu^T\mathbf{M}\mathbf{v}_\nu = 1 \quad \nu = 1, 2, \dots, n. \quad (2.117)$$

Další z důležitých vlastností vlastních vektorů je ortogonalita, jejíž důkaz bude následovat. Nechť rovnice (2.114) má dvě různá netriviální řešení Ω_i, \mathbf{v}_i a Ω_j, \mathbf{v}_j . Úpravou (2.114) jsou získány vztahy

$$\mathbf{K}\mathbf{v}_i = \Omega_i^2\mathbf{M}\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{K}\mathbf{v}_j = \Omega_j^2\mathbf{M}\mathbf{v}_j, \quad (2.118)$$

kteřé po přenásobení i -té rovnice j -tým vlastním vektorem \mathbf{v}_j^T respektive j -té rovnice i -tým vlastním vektorem \mathbf{v}_i^T nabývají tvaru

$$\mathbf{v}_j^T\mathbf{K}\mathbf{v}_i = \Omega_i^2\mathbf{v}_j^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \Omega_j^2\mathbf{v}_i^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j. \quad (2.119)$$

Po transpozici druhé z rovnic a při symetrii matic \mathbf{K} a \mathbf{M} a odečtení první a druhé rovnice je odvozen vztah

$$(\Omega_i^2 - \Omega_j^2)\mathbf{v}_j^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i = 0. \quad (2.120)$$

Vzhledem k uvažovanému předpokladu různých vlastních frekvencí $\Omega_i \neq \Omega_j$ musí platit podmínky ortogonality

$$\mathbf{v}_j^T\mathbf{M}\mathbf{v}_i = 0, \quad \text{a} \quad \mathbf{v}_j^T\mathbf{K}\mathbf{v}_i = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (2.121)$$

Nyní lze s výhodou využít zavedené normy vlastních vektorů (2.117) a ortogonalitu vlastních vektorů lze napsat ve tvaru

$$\mathbf{v}_i^T\mathbf{M}\mathbf{v}_j = \delta_{i,j}, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{K}\mathbf{v}_j = \Omega_j^2\delta_{i,j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.122)$$

kde $\delta_{i,j}$ je Kroneckerův symbol, pro který platí $i = j$ $\delta_{i,j} = 1$ a $i \neq j$ $\delta_{i,j} = 0$. Seřazením vlastních vektorů do jedné matice vzniká tzv. modální matice $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_\nu]$ a k ní sestavená diagonální matice s vlastními čísly v pořadí odpovídajícímu vlastním vektorů se nazývá spektrální matice $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\Omega_\nu^2) \in \mathbb{R}^{n,n}$. Při použití předchozích vztahů lze podmínky ortonormality přepsat do podoby

$$\mathbf{V}^T \mathbf{M} \mathbf{V} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{V}^T \mathbf{K} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}, \quad (2.123)$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice.

2.3.2 Modální analýza silně nekonzervativních soustav

Volné kmity nekonzervativní soustavy jsou popsány rovnicí

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.124)$$

kde oproti (2.112) vystupuje matice tlumení \mathbf{B} , která může být spolu s maticí tuhosti \mathbf{K} pro silně nekonzervativní soustavy navíc nesymetrická. Tento problém bude dále zohledněn. Při výpočtu vlastních hodnot takovýchto soustav se s výhodou provádí rozšíření identitou

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M}\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.125)$$

která umožňuje zavést stavový vektor

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.126)$$

Nyní je možné přejít z prostoru zobecněných souřadnic do stavového prostoru

$$\mathbf{N}_s \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P}_s \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (2.127)$$

pro počáteční podmínky vyjádřené ve stavovém prostoru v čase $t = 0$

$$\mathbf{u}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix}. \quad (2.128)$$

Matice \mathbf{N}_s a \mathbf{P}_s mají tvar

$$\mathbf{N}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix}, \quad (2.129)$$

který zachovává symetrické rozložení matic \mathbf{M} , \mathbf{B} a \mathbf{K} . Z důvodu nesymetričnosti matic \mathbf{B} a \mathbf{K} je nutné pro modely (2.124) a (2.126) sestavit modely adjungované.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{r}}(t) + \mathbf{K}^T \mathbf{r}(t) = \mathbf{0}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{N}_s^T \dot{\mathbf{w}}(t) + \mathbf{P}_s^T \mathbf{w}(t) = \mathbf{0} \quad (2.130)$$

se stavovým vektorem

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{r}}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{bmatrix}. \quad (2.131)$$

Matice \mathbf{N}_s^T a \mathbf{P}_s^T jsou analogické k předchozím

$$\mathbf{N}_s^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B}^T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_s^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^T \end{bmatrix}, \quad (2.132)$$

Řešením rovnic (2.124) a (2.127) je

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}e^{\lambda t} \quad \text{a} \quad \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\lambda t} \quad (2.133)$$

s vektory \mathbf{q} , \mathbf{u} splňujícími rovnice

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{K})\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad (\lambda\mathbf{N}_s + \mathbf{P}_s)\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (2.134)$$

Řešení adjungovaných modelů (2.130) má tvar

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}e^{\lambda t} \quad \text{a} \quad \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}e^{\lambda t} \quad (2.135)$$

s vektory \mathbf{r} , \mathbf{w} splňujícími rovnice

$$(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B}^T + \mathbf{K}^T)\mathbf{r} = \mathbf{0} \quad \text{a} \quad (\lambda\mathbf{N}_s^T + \mathbf{P}_s^T)\mathbf{w} = \mathbf{0}. \quad (2.136)$$

Rovnice (2.134) a (2.136) představují řešení problému vlastních hodnot v konfiguračním n -rozměrném prostoru \mathbb{P}^n , respektive ve stavovém $2n$ -rozměrném prostoru \mathbb{P}^{2n} . Stejně jako pro (2.115) existuje netriviální řešení pouze pokud příslušný determinant je rovný nule. Platí tedy

$$\det(\lambda^2\mathbf{M} + \lambda\mathbf{B} + \mathbf{K}) = 0 \quad \text{a} \quad \det(\lambda\mathbf{N}_s + \mathbf{P}_s) = 0. \quad (2.137)$$

Kořeny obou charakteristických rovnic (2.137) jsou identické. Vlastní čísla mohou být po dvojicích komplexně sdružená.

$$\lambda_\nu = -\alpha_\nu + i\beta_\nu, \quad \lambda_{\nu+m} = \lambda_\nu^* = -\alpha_\nu - i\beta_\nu \quad \text{pro} \quad \nu = 1, 2, \dots, m \quad (2.138)$$

nebo reálná

$$\lambda_\nu = -\alpha_\nu \quad \text{pro} \quad \nu = 2m + 1, 2m + 2, \dots, 2n. \quad (2.139)$$

Dle vlastních čísel lze určit stabilitu takového systému. V případě, že reálná část vlastního čísla je kladná ($\alpha_\nu < 0$), je systém nestabilní. Nestabilita pro (2.138) se nazývá flutter, nestabilita pro vlastní čísla (2.139) se nazývá divergence, viz např. [Dupal (2004)].

Pro soustavy, které budou dále uvažovány, platí, že nulita η_ν matice $\lambda_\nu \mathbf{N}_s + \mathbf{P}_s$ je vždy rovna násobnosti p_ν příslušného vlastního čísla.

Díky užití adjungovaných modelů náleží každému vlastnímu číslu λ_ν jeden pravostranný vlastní vektor \mathbf{q}_ν resp. \mathbf{u}_ν a levostranný \mathbf{r}_ν resp. \mathbf{w}_ν . V případě, kdy jsou matice \mathbf{B} a \mathbf{K} symetrické, jsou i matice \mathbf{N}_s a \mathbf{P}_s symetrické, což způsobí, že adjungované modely jsou totožné s původními a levostranné vlastní vektory jsou totožné s pravostrannými ($\mathbf{q}_\nu \equiv \mathbf{r}_\nu$ v \mathbb{P}^n a $\mathbf{u}_\nu \equiv \mathbf{w}_\nu$ v \mathbb{P}^{2n}).

Vlastní vektory splňují (2.130) a (2.136):

- v \mathbb{P}^n

$$(\lambda_\nu^2 \mathbf{M} + \lambda_\nu \mathbf{B} + \mathbf{K}) \mathbf{q}_\nu = \mathbf{0}, \quad (\lambda_\nu^2 \mathbf{M} + \lambda_\nu \mathbf{B}^T + \mathbf{K}^T) \mathbf{r}_\nu = \mathbf{0}, \quad (2.140)$$

- v \mathbb{P}^{2n}

$$(\lambda_\nu \mathbf{N}_s + \mathbf{P}_s) \mathbf{u}_\nu = \mathbf{0}, \quad (\lambda_\nu \mathbf{N}_s^T + \mathbf{P}_s^T) \mathbf{w}_\nu = \mathbf{0}. \quad (2.141)$$

Ze stejného důvodu jako u netlumenných soustav je nutné vlastní vektory tlumených soustav normovat. Vhodnou normou ve stavovém prostoru \mathbb{P}^{2n} je podmínka s váhovou maticí \mathbf{N}_s

$$\mathbf{w}_\nu^T \mathbf{N}_s \mathbf{u}_\nu = 1 \quad \text{pro } \nu = 1, 2, \dots, 2n. \quad (2.142)$$

Ortonogonalita vlastních vektorů bude provedena analogickým postupem k postupu pro netlumené soustavy. Nechť existují dvě různá netriviální řešení λ_i , \mathbf{u}_i , \mathbf{w}_i , a λ_j , \mathbf{u}_j , \mathbf{w}_j problému vlastních hodnot (2.141). Řešení lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{P}_s \mathbf{u}_j = -\lambda_j \mathbf{N}_s \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{P}_s^T \mathbf{w}_i = -\lambda_i \mathbf{N}_s^T \mathbf{w}_i. \quad (2.143)$$

Pronásobením zleva vektory \mathbf{w}_i^T a \mathbf{u}_j^T je získáno

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{P}_s \mathbf{u}_j = -\lambda_j \mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_s \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{u}_j^T \mathbf{P}_s^T \mathbf{w}_i = -\lambda_i \mathbf{u}_j^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{w}_i. \quad (2.144)$$

Po transpozici druhé a odečtením od první je odvozen vztah

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_s \mathbf{u}_j. \quad (2.145)$$

Pro $\lambda_i \neq \lambda_j$ platí následující podmínky biortogonalit

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_s \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{a} \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{P}_s \mathbf{u}_j = 0 \quad \text{pro } i \neq j. \quad (2.146)$$

Při využití normy (2.142) jsou pravo a levostranné vlastní vektory biortonormální, neboť splňují následující podmínky

$$\mathbf{w}_i^T \mathbf{N}_s \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad \mathbf{w}_i^T \mathbf{P}_s \mathbf{u}_j = -\lambda_j \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, 2n, \quad (2.147)$$

kde δ_{ij} je Kroneckerův symbol.

Poskládáním pravostranných \mathbf{u}_ν a levostranných \mathbf{w}_ν vlastních vektorů v prostoru \mathbb{P}^{2n} do matic vzniknou modální matice

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_\nu] \in \mathbb{C}^{2n,2n}, \quad \mathbf{W} = [\mathbf{w}_\nu] \in \mathbb{C}^{2n,2n} \quad (2.148)$$

a dále spektrální matice $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_\nu) \in \mathbb{C}^{2n,2n}$, ve které jsou vlastní čísla v daném pořadí uspořádána na diagonále. Při platnosti předchozích vztahů lze podmínky biortonormality přepsat do maticového zápisu

$$\mathbf{W}^T \mathbf{N}_s \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{W}^T \mathbf{P}_s \mathbf{U} = -\mathbf{\Lambda}, \quad (2.149)$$

kde \mathbf{E} značí jednotkovou matici.

Modální matice pravo a levostranných vlastních vektorů v prostoru \mathbb{P}^n

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_\nu] \in \mathbb{C}^{n,2n}, \quad \mathbf{R} = [\mathbf{r}_\nu] \in \mathbb{C}^{n,2n} \quad (2.150)$$

jsou příslušnými modálními maticem v \mathbb{P}^{2n} vázány vztahy

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{Q} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}\mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (2.151)$$

kteří přímo vyplývají z definic (2.126) a (2.131) stavových vektorů a z tvaru řešení (2.133) a (2.135)

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{q} \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} e^{\lambda t}, \quad \mathbf{w}(t) = \begin{bmatrix} \lambda \mathbf{r} \\ \mathbf{r} \end{bmatrix} e^{\lambda t} \Rightarrow \mathbf{u}_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_\nu \mathbf{q}_\nu \\ \mathbf{q}_\nu \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}_\nu = \begin{bmatrix} \lambda_\nu \mathbf{r}_\nu \\ \mathbf{r}_\nu \end{bmatrix}. \quad (2.152)$$

Vlastní vektory \mathbf{u}_ν , $\nu = 1, 2, \dots, 2n$ jsou obecně komplexní a lineárně nezávislé, neboť rovnici typu

$$\sum_{\nu=1}^{2n} c_\nu \mathbf{u}_\nu = \mathbf{0} \quad (2.153)$$

splňují vzhledem k biortogonalitě (2.147) jen v triviálním případě, jinými slovy jsou konstanty rovny $c_1 = c_2 = \dots = c_{2n} = 0$. Vlastní vektory (2.148) tvoří bázi v $2n$ dimenzionálním Euklidovském prostoru. Proto každý možný pohyb soustavy těles modelovaný rovnicí (2.127) lze popsat v \mathbb{P}^{2n} lineární kombinací pravostranných vlastních vektorů

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{\nu=1}^{2n} \mathbf{u}_\nu x_\nu(t) = \mathbf{U}\mathbf{x}(t). \quad (2.154)$$

Vztah popsany rovnicí (2.154) se nazývá modální transformace ve stavovém prostoru. Metoda vyšetřování dynamické odezvy silně nekonzervativních soustav založená na modální transformaci se nazývá podobně jako u konzervativních popř. slabě tlumených systémů *modální metoda*.

2.3.3 Modální analýza systémů s gyroskopickými účinky

Modální analýza systémů s gyroskopickými účinky, v důsledku antisymetrické matice gysorkopických účinků, je do značné míry analogická s postupem popsaným v předchozí kapitole, s tím rozdílem, že adjungované modely nejsou shodné s původními (2.140) respektive (2.141) a pravostranné vektory nejsou totožné s levostrannými. Důsledkem je tedy nemožnost použití standardních postupů, při kterých se používají výsledky symetrických analýz. Zahrnutí vlivu antisymetrických matic do matematického modelu ze symetrických úloh je součástí následující podkapitoly.

2.3.4 Redukovaný model soustavy lopatek

Matematický model lopatky s bandáží (2.39), který zahrnuje vlivy rotace tělesa, nyní bude rozšířen o vliv kontaktních sil se třením na tvar zapsaný v komprimované formě

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G})\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_S - \omega_0^2\mathbf{K}_d + \omega_0^2\mathbf{K}_\omega)\mathbf{q} = \omega_0^2\mathbf{f}_\omega + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad (2.155)$$

se symetrickou maticí tlumení \mathbf{B} . Vliv bandáže je oproti modelu (2.39) pro stručnost zápisu zahrnut do matic \mathbf{M} , \mathbf{G} a \mathbf{K}_d , vektoru \mathbf{f}_ω a vliv buzení do společného vektoru $\mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ s kontaktními silami se třením.

Po provedení modální analýzy soustavy

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}_S\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (2.156)$$

jsou známé spektrální $\mathbf{\Lambda}$ a modální \mathbf{V} matice nerotující konzervativní soustavy, které jsou znormovány M-normou. Po převodu ze zobecněných souřadnic do modálních, kdy lze s výhodou na model jedné lopatky aplikovat redukci na m stupňů volnosti, viz levý horní index m , předpisem

$$\mathbf{q} = {}^m\mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (2.157)$$

nabývá model (2.155) po přenásobení zleva maticí ${}^m\mathbf{V}^T$ podoby

$${}^m\mathbf{V}^T\mathbf{M}{}^m\mathbf{V}\ddot{\mathbf{x}} + {}^m\mathbf{V}^T(\mathbf{B} + \omega_0\mathbf{G}){}^m\mathbf{V}\dot{\mathbf{x}} + {}^m\mathbf{V}^T(\mathbf{K}_S - \omega_0^2\mathbf{K}_d + \omega_0^2\mathbf{K}_\omega){}^m\mathbf{V}\mathbf{x} = \omega_0^2{}^m\mathbf{V}^T\mathbf{f}_\omega + {}^m\mathbf{V}^T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t). \quad (2.158)$$

Po zavedení matic kondenzovaného modelu lopatky

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}} &= {}^m\mathbf{V}^T\mathbf{B}{}^m\mathbf{V}, \\ \tilde{\mathbf{G}} &= {}^m\mathbf{V}^T\mathbf{G}{}^m\mathbf{V}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_\Omega(\omega_0) &= {}^m\mathbf{V}^T(-\omega_0^2\mathbf{K}_d + \omega_0^2\mathbf{K}_\omega){}^m\mathbf{V}, \\ \tilde{\mathbf{f}}_\omega &= {}^m\mathbf{V}^T\mathbf{f}_\omega, \\ \tilde{\mathbf{f}} &= {}^m\mathbf{V}^T\mathbf{f}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \end{aligned} \quad (2.159)$$

lze model (2.158) dále upravit na

$$\ddot{\mathbf{x}} + \left(\widetilde{\mathbf{B}} + \omega_0 \widetilde{\mathbf{G}} \right) \dot{\mathbf{x}} + \left(\mathbf{\Lambda} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0) \right) \mathbf{x} = \omega_0^2 \widetilde{\mathbf{f}}_{\omega} + \widetilde{\mathbf{f}}. \quad (2.160)$$

Výhodou tohoto přístupu je fakt, že pro různé konstantní otáčky ω_0 jsou matice $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ a \mathbf{K}_S a vektor $\widetilde{\mathbf{f}}$ shodné a mění se pouze matice $\widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0)$ a vektor $\widetilde{\mathbf{f}}$, který obsahuje kontaktní síly (normálové a třecí). V případě sestavení matematického modelu z více lopatek jsou matice $\widetilde{\mathbf{B}}$, $\widetilde{\mathbf{G}}$ a \mathbf{K}_S a vektor $\widetilde{\mathbf{f}}_{\omega}$ navzájem pro jednotlivé lopatky shodné a mění se pouze matice $\widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0)$ a vektor $\widetilde{\mathbf{f}}$ popisující silové účinky v kontaktních bodech mezi bandáží lopatek.

Pro úplnost následuje matematický model obsahující j lopatek každé o m modálních souřadnicích x , to znamená $\widehat{\mathbf{x}}_j^T = [x_1, x_2, \dots, x_m]$,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1 \\ \widehat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{B}} + \omega_0 \widetilde{\mathbf{G}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{B}} + \omega_0 \widetilde{\mathbf{G}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \widetilde{\mathbf{B}} + \omega_0 \widetilde{\mathbf{G}} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{B}} + \omega_0 \widehat{\mathbf{G}}} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1 \\ \widehat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix} \\ & + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Lambda} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0) \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{\Lambda}} + \widehat{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0)} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{x}}_1 \\ \widehat{\mathbf{x}}_2 \\ \vdots \\ \widehat{\mathbf{x}}_j \end{bmatrix} = \quad (2.161) \\ & = \omega_0^2 \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_{\omega} \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\omega} \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{f}}_{\omega} \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{f}}_{\omega}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{f}}_1 \\ \widetilde{\mathbf{f}}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{\mathbf{f}}_j \end{bmatrix}}_{\widehat{\mathbf{f}}}. \end{aligned}$$

Poslední matematický výraz lze zapsat

$$\ddot{\widehat{\mathbf{x}}} + \left(\widehat{\mathbf{B}} + \omega_0 \widehat{\mathbf{G}} \right) \dot{\widehat{\mathbf{x}}} + \left(\widehat{\mathbf{\Lambda}} + \widehat{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0) \right) \widehat{\mathbf{x}} = \omega_0^2 \widehat{\mathbf{f}}_{\omega} + \widehat{\mathbf{f}}, \quad (2.162)$$

kde stříška značí globální matice a vektory modelu (2.162).

Pro určení nelineární dynamické odezvy je soustava diferenciálních rovnic druhého řádu (2.162) převedena na soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\dot{\widehat{\mathbf{u}}} = \widehat{\mathbf{A}} \widehat{\mathbf{u}} + \widehat{\mathbf{F}}, \quad (2.163)$$

kde

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \hat{\dot{\mathbf{x}}} \\ \hat{\mathbf{x}} \end{bmatrix}, \quad (2.164)$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -(\hat{\mathbf{B}} + \omega_0 \hat{\mathbf{G}}), & -(\hat{\mathbf{\Lambda}} + \hat{\mathbf{K}}_{\Omega}(\omega_0)) \\ \mathbf{E}, & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \omega_0^2 \hat{\mathbf{f}}_{\omega} + \hat{\mathbf{f}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.165)$$

Tyto rovnice byly řešeny pro definované počáteční podmínky $\mathbf{q}(0) = \mathbf{0}$, $\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}$ standardním integračním schématem Runge-Kutta v systému MATLAB.

Kapitola 3

Export dat z MKP a kontrolní výpočty jedné lopatky

S rozvojem hardware a softwaru se pro geometricky složitější tělesa stále častěji uplatňuje komerční software, nicméně jejich obecnost může v některých případech způsobit, že pro řešení jistých typů úloh nejsou zcela optimální. Lze však využít jejich předností a vhodně je doplnit vlastními postupy a metodami, čímž se odstraní původní nevýhody.

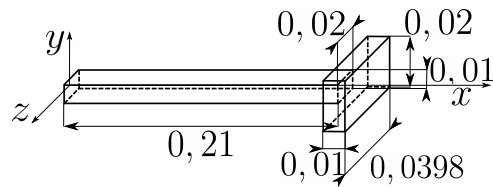
V této kapitole bude představena možnost rozšíření standardního konečnoprvkového softwaru ANSYS. Uvedený postup lze zobecnit na jakýkoliv jiný software. V preprocesoru je připraven a vysítován model, jehož matematický popis pomocí matic hmotnosti \mathbf{M} , tuhosti \mathbf{B} , tlumení \mathbf{K} a vektorů pravých stran \mathbf{f} je exportován ve strojově čitelném formátu, který je dále zpracováván v systému MATLAB.

3.1 Export potřebných dat z ANSYSU

Cílem této podkapitoly je ve stručnosti prezentovat používané postupy pro získání základních vstupních dat z konečnoprvkového systému ANSYS, které budou dále užívány v prezentované metodě. Ve většině případů bylo zapotřebí exportovaná data dále zpracovat. Na úvod je nutné podotknout, že systém ANSYS umožňuje exportovat jen celkové matice \mathbf{M} , \mathbf{B} a \mathbf{K} . Jinými slovy, pokud je proveden export např. matice tlumení \mathbf{B} bez uvažování gyroskopických účinků a matice tlumené soustavy s uvažováním gyroskopických účinků \mathbf{B}_{om} je antisymetrická matice gyroskopických účinků rovna vztahu $\mathbf{G} = \mathbf{B}_{om} - \mathbf{B}$. Matice gyroskopických účinků jde samozřejmě vyexportovat přímo, pokud není uvažováno žádné tlumení. Z tohoto důvodu budou všechny potřebné operace pro získání požadovaných matic náležitě uvedeny a vysvětleny.

Všechny předkládané postupy budou provedeny na ilustrativním příkladu, kdy byla zvolena lopatka s velmi jednoduchou geometrií, jejíž základní rozměry jsou uvedeny na Ob-

rázku 3.1. Lopatka je modelována lineárními objemovými prvky BRICK185, které jsou používány pro obecnější geometrie lopatek.



Obrázek 3.1: Geometrie zjednodušené lopatky včetně rozměrů v metrech.

3.1.1 Export matic hmotnosti, tlumení a tuhosti

Export matic hmotnosti, tuhosti a tlumení bude představen na síti tvořené prostoro-
rovými lineárními prvky BRICK185. Konečné prvky BRICK185 jsou lineární osmiuzlové
objemové prvky, kde každý z uzlů má 3 stupně volnosti [ANSYS Help (2016)]. Pro jiné
konečné prvky je postup analogický. Počet stupňů volnosti jednoho uzlu je důležitý při
sestavování permutační matice, jejíž význam bude popsán dále.

Popis postupu

Export jednotlivých matic je možné provést pomocí příkazu HBMAT, který zajistí ex-
port zvolené matice v Harwellově - Boeingově formátu (způsob datově méně náročného
zápisu řádkových matic) [ANSYS Help (2016)], dříve zapsané do souboru s příponou *emat*.
Systémový soubor s příponou *emat* je přímo vygenerován programem ANSYS po zadání
příkazu EMATWRITE, YES. Kromě matic lze na posledních n řádcích se vypsat vektor pra-
vých stran, kde n odpovídá počtu stupňů volnosti exportované soustavy. Druhou možností,
která se ukázala jako vhodnější s ohledem na rychlejší načítání do systému MATLAB, je
příkaz EXPORT, který provede export matic ve formátu MMF (*Matrix Market Format*), jehož
popis je uveden např. v [ANSYS Help (2016)].

Jak je uvedeno výše, export matic probíhá vždy z matematického modelu zvolené
a vypočtené úlohy. Tzn. v případě řešení statické úlohy, lze exportovat pouze matici tu-
hosti \mathbf{K} . Nyní bude uveden postup pro získání matic, které vystupují v matematickém
modelu (2.34). Pro jejich získání je nutné provést minimálně dvě analýzy:

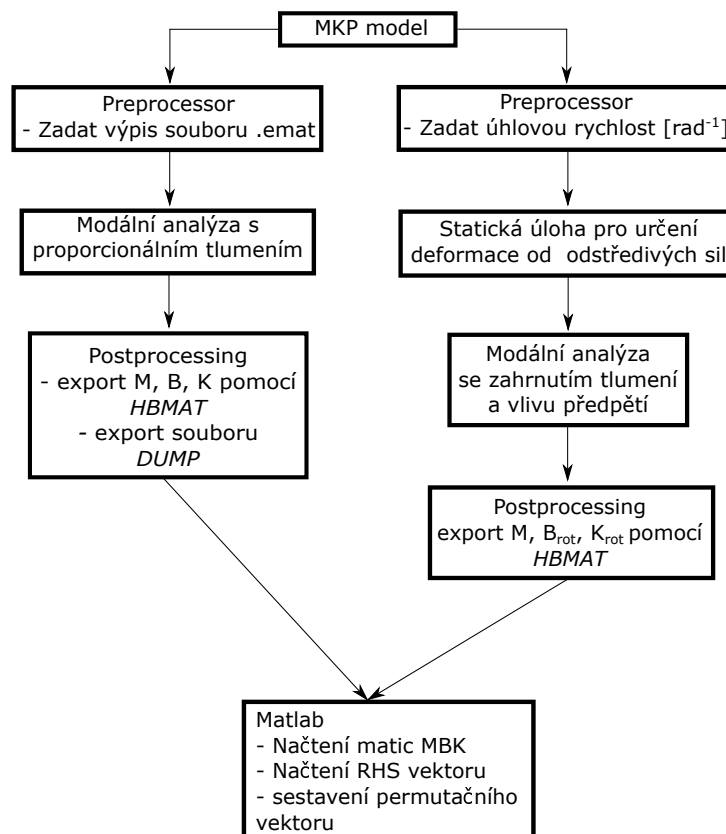
- Export matice hmotnosti \mathbf{M} , tlumení \mathbf{B} , tuhosti \mathbf{K} :

Po provedení modální analýzy (postačuje jeden vlastní tvar) jsou při zadaném tlu-
mení exportovány uvedené matice. Konkrétní podoba příkazu pro export matice
tuhosti a vektoru pravých stran má tvar HBMAT, , „ASCII,STIFF,YES. Popsaný
postup je znázorněn na Obrázku 3.2. APDL kód pro získání příslušných matic je

obsažen na příloženém CD pod názvem `ADPL_export_MBK.txt`. Připravený kód provede export dat nejen ve formátu `HBMAT`, ale také příkazem `EXPORT` ve formátu `MMF`.

- Export matice gyroskopických účinků $\omega_0 \mathbf{G}$, matice změkčení a vyztužení za rotace $\mathbf{K}_{om} = \omega_0^2 (\mathbf{K}_\omega - \mathbf{K}_d)$:

Pro zahrnutí vlivu od rovnoměrné rotace je nutné nejprve provést statickou analýzu, jejíž výsledky jsou pak použity jako zadání pro modální analýzu, ve které je zohledněno předepnutí od odstředivých sil (tzv. *prestress effect*). Samotný export matic je shodný s výše popsaným postupem. V případě, že není uvažováno materiálové tlumení je matice $\mathbf{B} \equiv \omega_0 \mathbf{G}$. Pro získání pouze matice \mathbf{K}_{om} je odečtena dříve exportovaná matice tuhosti \mathbf{K} . APDL kód pro získání příslušných matic je opět obsažen na příloženém CD pod názvem `ADPL_export_GK.txt`.



Obrázek 3.2: Vývojový diagram pro export potřebných matic z ANSYSu.

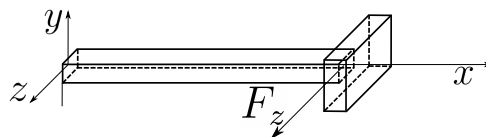
Vektor pravých stran $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega$ při uvažované konstantní úhlové rychlosti obsahuje odstředivé síly od rotace. Vektor $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega$ je možno exportovat s libovolnou ze jmenovaných matic, např. již uvedeným příkazem `HBMAT`, , ,ASCII, STIFF, YES. Pro snazší následnou práci je

v příloženém APDL kódu `ADPL_export_GK.txt` napsán skript pro uložení vektoru pravých stran do samostatného souboru.

Systém ANSYS se při řešení matematického modelu snaží upravit všechny matice co nejvíce do diagonálního tvaru, proto před řešením provede přeskládání pořadí jednotlivých rovnic. Jinými slovy, např. při použití konečných prvků `BRICK185`, kdy každý z uzlů má 3 stupně volnosti, nejsou proměnné j -tého uzlu na pozici $[3*j - 2, 3*j - 1, 3*j]$, ale jejich pořadí je dáno permutačním vektorem. Tento permutační vektor je uložen jako 5. položka výpisu, který je získán příkazem `DUMP, ALL`. Aby bylo možno příkaz provést je nutno v záložce *Preprocessor* zadat opět výpis systémového souboru `EMATWRITE, YES`. Případně jej lze vyexportovat pomocí příkazu `HBMAT, , , ASCII, STIFF, YES`, který do souboru s příponou `mapping` zapíše číslo řádku v permutované matici a číslo uzlu sítě. Jinými slovy pro jeden uzel prostotového končného prvku odpovídají tři sloupce permutační matice.

Ilustrační příklad

K ověření popsaného postupu je přiložen APDL skript, který pro popsanou geometrii sestaví konečnoprvkový model a exportuje příslušné matice dle postupu popsaném v předešlé podkapitole. Poté je provedena statická analýza modelované lopatky. Síla $F_z = 100$ N je zadána na uzel 129 ve směru osy z , viz Obrázek 3.3. Stejně tak je provedena statická analýza pomocí modelu sestaveného z exportované matice tuhosti v systému MATLAB, kde je síla F_z zadána na pozici $2109 = 703 * 3$, kde 703 je pořadí uzlu 129 v diagonalizované matici tuhosti, které je získáno z vygenerovaného souboru `DUMP`. Získaná statická výchylka $u_z = 0,22073 \cdot 10^{-3}$ m je shodná pro oba přístupy.



Obrázek 3.3: Zatížení ve směru osy z lopatky se zjednodušenou geometrií.

3.1.2 Export modální matice \mathbf{V} a spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$

V této podkapitole bude uveden stručný popis postupu pro získání modální matice \mathbf{V} a spektrální matice $\mathbf{\Lambda}$. Popis se omezí pouze na problém netlumených modelů, jejichž výsledkem jsou reálné vlastní frekvence, které budou dále využívány.

Popis postupu

Pro zjištění vlastních vektorů a frekvencí se nejprve sestaví konečnoprvkový model, který je matematicky popsán netlumenou soustavou

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (3.1)$$

Matematický popis řešení, kterým jsou získány všechny potřebné tvary, je uveden v kapitole 2.3.1.

V případě zahrnutí vlivu rotace, je nutné opět nejprve provést výpočet statického zatížení a poté provést modální analýzu. Dle nastavení *Solveru*, lze jednoduše přidávat tlumení, vyztužení a změkčení za rotace.

Ilustrační příklad

Pro ilustraci exportování vlastních vektorů spolu s vlastními frekvencemi a zahrnutí vlivu rotace byl použit model představený v předchozí kapitole, viz Obr. 3.1. Lopatka je zatížena odstředivými silami od rotace okolo osy y o nominální hodnotě 3000 ot/min. Pro demonstraci vlivu rotace na vlastní frekvence byla provedena analýza uvažující několik variant:

- a) **netlumená lopatka bez vlivu rotace** - modální analýza nezatížené lopatky,
- b) **netlumená lopatka se zahrnutím vlivu rotace** - modální analýza předcházejícího modelu doplněného o matice $\omega_0\mathbf{G}$, $\omega_0^2\mathbf{K}_d$ a $\omega_0^2\mathbf{K}_{\omega_0}$, viz (2.34).

Vlastní frekvence pro jednotlivé stavy jsou uvedeny v Tab. 3.1.

3.2 Modálně zredukovaný model v MATLABu versus časová integrace modelu v ANSYSu

V následující podkapitole bude pro ověření postupu opět použit konečnoprvkový model, jehož geometrie s aplikovanou silou je uvedena na Obrázku 3.3.

3.2.1 Netlumený matematický model

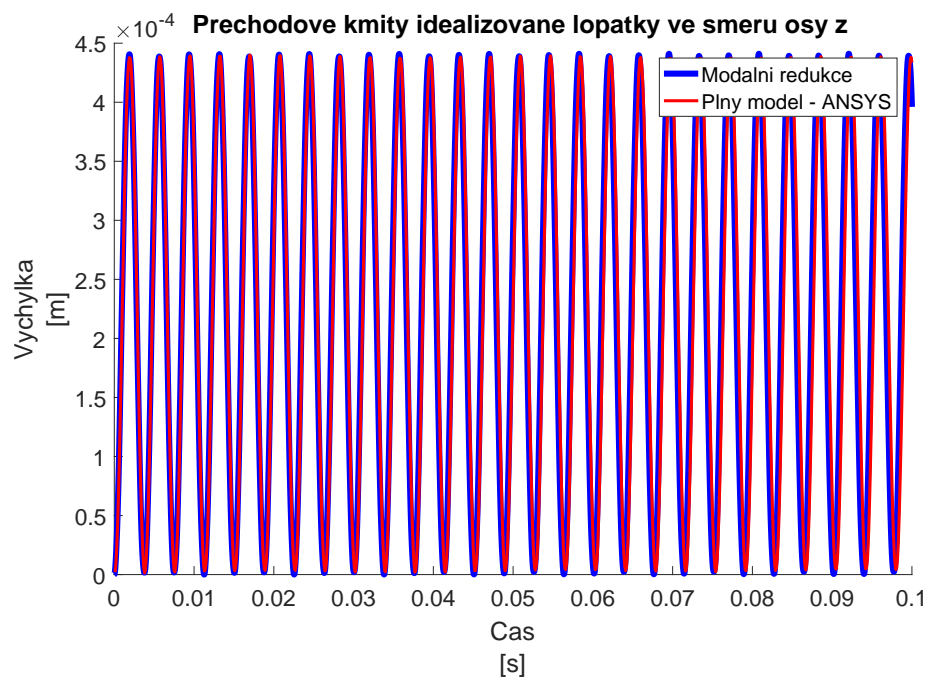
Nejprve byly porovnány přechodové kmity netlumené nerotující lopatky. Porovnávané kmity byly výsledkem získaným pomocí přímé integrace v neredukované soustavě, tj. výsledky ze systému ANSYS, s výsledky získanými z vlastního programu, který byl sestaven

Pořadí	Vlastní frekvence [Hz]	Vlastní frekvence [Hz]
	Varianta a	Varianta b
1	134,08	155,49
2	266,04	272,81
3	924,44	946,25
4	1555,78	1556,71
5	1775,35	1785,51
6	2653,50	2676,30
7	4850,58	4861,29
8	5017,24	5017,40
9	5167,60	5190,89
10	6299,99	6302,00

Tabulka 3.1: Tabulka vlastních frekvencí dvou variant (bez vlivu rotace a s vlivem rotace).

v systému MATLAB. Vstupem pro matematický model řešený v MATLABu byly spektrální a modální matice pro 20 vlastních tvarů, které byly exportovány výše popsaným postupem. Vlastní frekvence netlumené soustavy jsou uvedeny v Tab. 3.1.

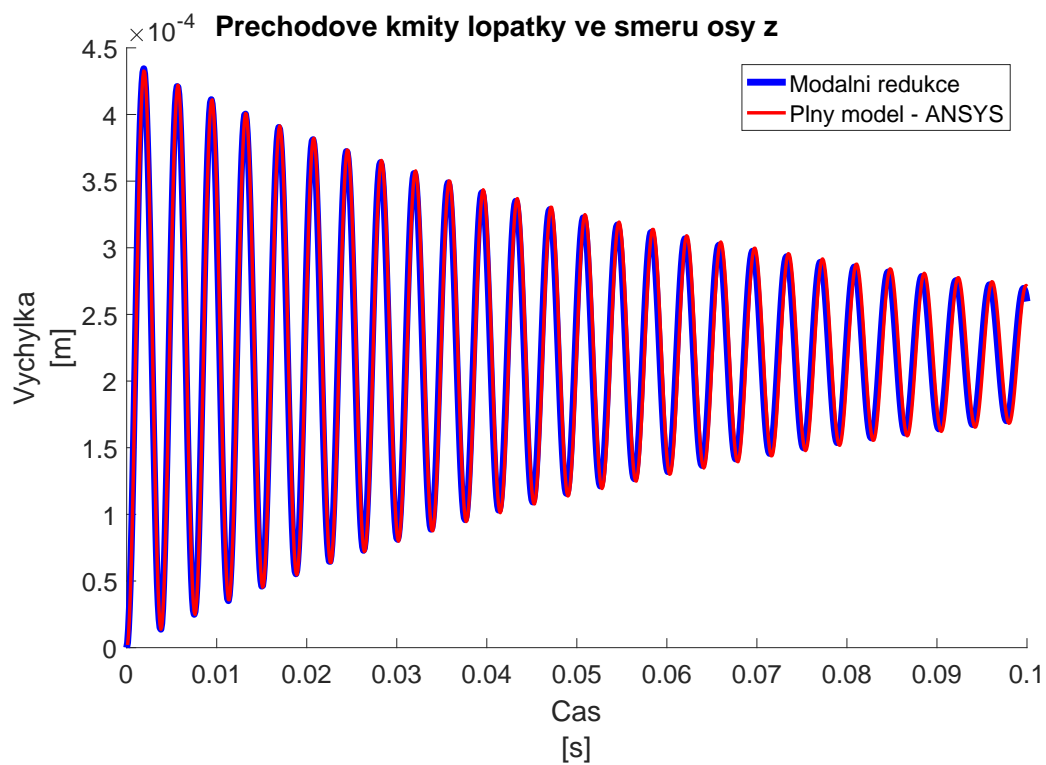
Modelovaná lopatka byla skokově zatížena konstantní silou $F_z = 100$ N ve středu průřezu lopatky, viz Obrázek 3.3. Z porovnání výchylek je patrná velice dobrá shoda získaných výsledků a to jak frekvenční, tak výchylek ve směru budící síly F_z v uzlu upřipojení bandáže, viz Obrázek 3.4.



Obrázek 3.4: Odezva netlumené nerotující lopatky na skokové buzení silou 100 N.

3.2.2 Matematický model zohledňující materiálové tlumení

V druhém kroku bylo do matematického modelu lopatky zahrnuto materiálové tlumení, které bylo zadáno proporcionální $\mathbf{B} = \beta \mathbf{K}$ pro $\beta = 10^{-5}$. I pro tento případ byla získána velice dobrá shoda výsledků získaných oběma přístupy, viz Obrázek 3.5.



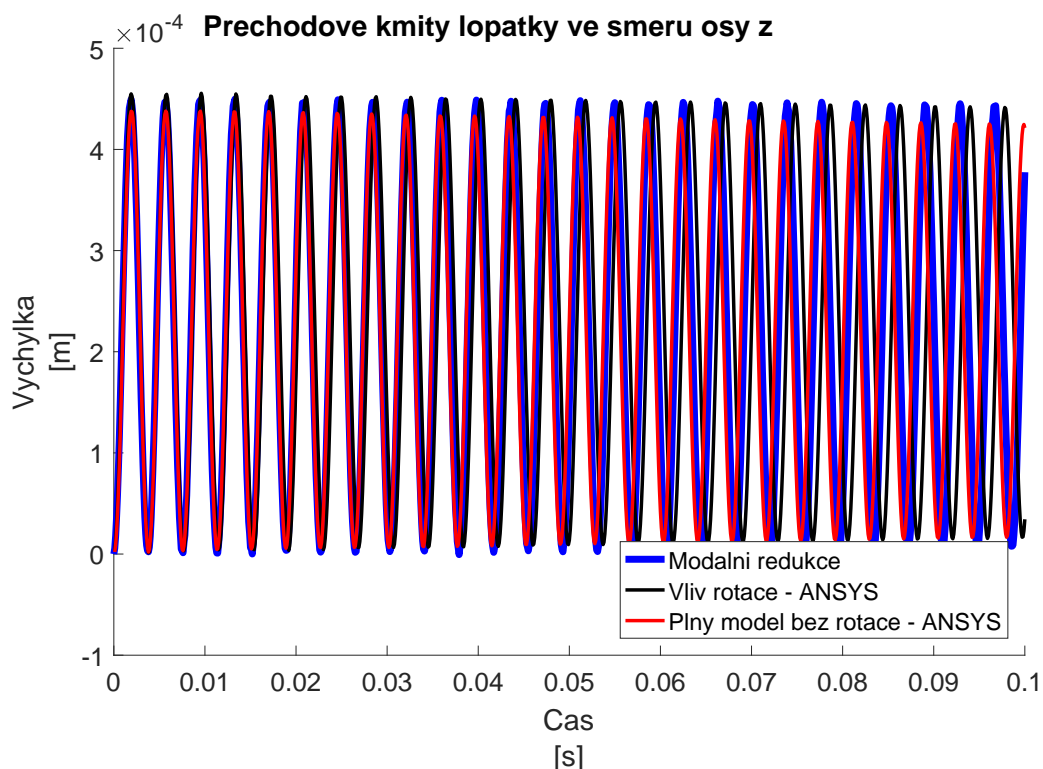
Obrázek 3.5: Odezva nerotující tlumené lopatky na skokové buzení silou 100 N.

3.2.3 Matematický model zohledňující vlivy rotace

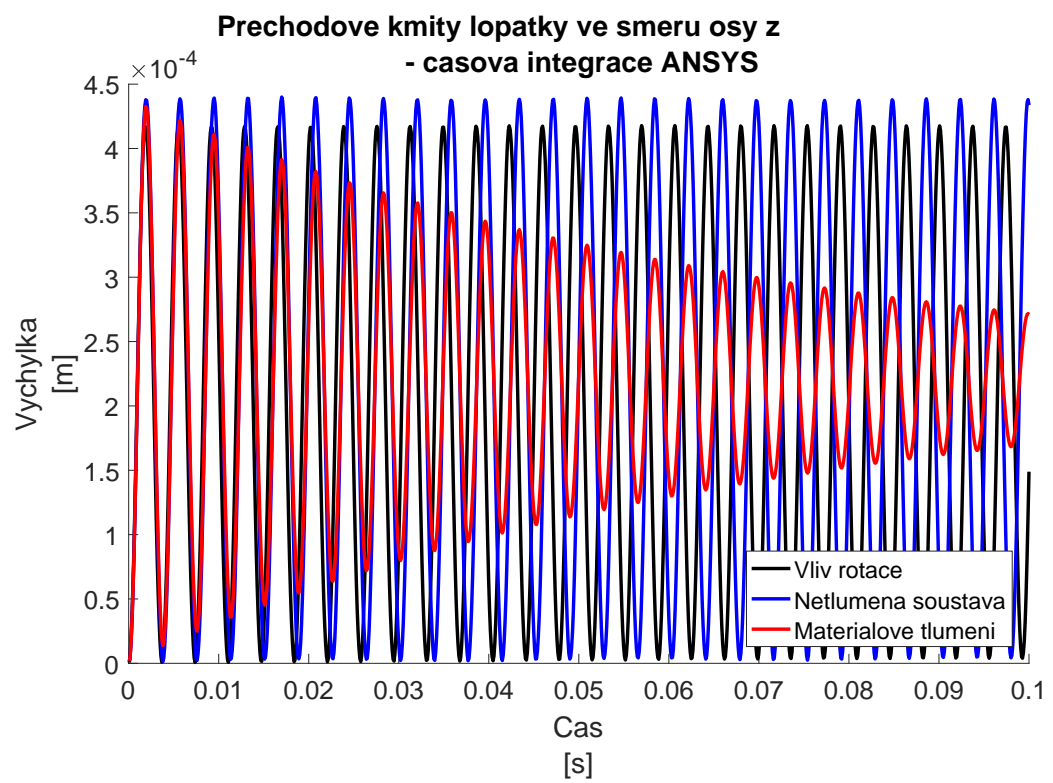
Posledním testovaným případem bylo porovnání přechodových kmitů lopatky za konstantní rotace ($\omega = 3000$ ot/min). Vliv rotace byl zahrnut postupem popsáním v kapitole 2.3.3.

Oba přístupy dávají velmi podobné výsledky, jak je patrné na Obrázku 3.6. Modrou čarou jsou vyneseny přechodové kmity matematického modelu modálně redukovaného se zohledněním vlivu rotace a gyroskopických účinků bez uvažování materiálového tlumení. Černou čarou jsou vykresleny přechodové kmity rotující lopatky bez uvažovaného materiálového tlumení vypočtené časovou integrací přímo v systému ANSYS. Pro porovnání jsou červenou čarou uvedeny přechodové kmity netlumené nerotující lopatky taktéž získané časovou integrací v systému ANSYS.

Pro úplnost je na Obrázku 3.7 provedeno srovnání tří řešených druhů matematických modelů. Černá čára odpovídá černé čáře z Obrázku 3.6, tj. rotující lopatka bez materiálového tlumení. Modrá je totožná s modrou čarou z Obrázku 3.4, tj. netlumená nerotující lopatka. Červená je shodná s modrou čarou z Obrázku 3.5, tj. nerotující lopatka zohledňující vliv materiálového tlumení. Za zmínku stojí mírné, avšak patrné, přeladění (vyztužení) modelu zapříčiněné rotací, odpovídající vlastním frekvencím uvedeným v Tab. 3.1.



Obrázek 3.6: Odezva netlumené rotující lopatky na skokové buzení silou 100 N.

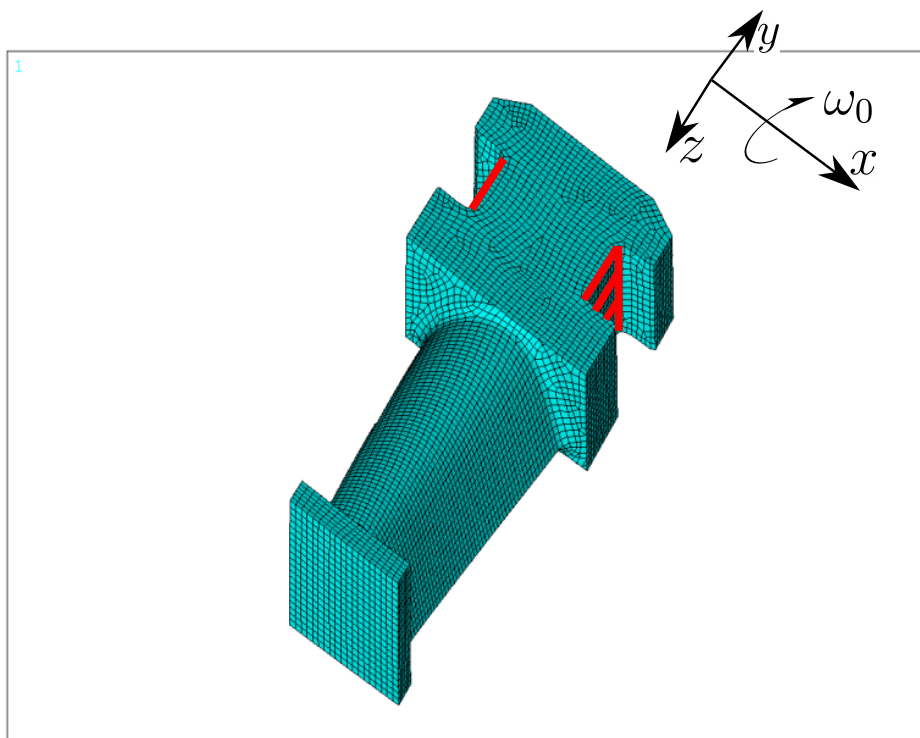


Obrázek 3.7: Porovnání přechodových kmitů pro různé modely buzené skokově silou 100 N.

3.3 Modelování kmitů rhombické lopatky

V předchozí podkapitole byl popsán postup exportu a jeho zpracování, které bude nyní aplikováno na reálnou geometrii rhombické lopatky. Schopnost aplikovat postup na obecné geometrie a odhalit jeho případné slabiny je hlavním důvodem, který stál za vznikem této podkapitoly. Nejednou se totiž stalo, že aplikovaný postup nebyl efektivní, zpracování dat bylo pomalé či pro svůj rozsah nebylo vůbec použitelné. Všechny tyto faktory vedly k tomu, že byl vyladěn postup, který byl v předchozí kapitole představen a který lze díky své obecnosti a robustnosti používat pro široké spektrum modelů.

Pro demonstraci vhodnosti postupu byla vysítována geometrie rhombické lopatky, která se reálně nachází na vysokotlaké části turbosoustrojí a je vyobrazena na Obrázku 3.8. Pro všechny následující testovací úlohy je rhombická lopatka vetknutá v nožce v místě, kde je i ve skutečnosti přichycena k disku. Orientace globálního souřadného systému xyz je následující. Osa x je umístěna v ose rotace disku, do kterého je lopatka zasazena, osa y je v rovině olopatkovaného disku a osa z je vlastní osou lopatky.



Obrázek 3.8: Vysítovaná rhombická lopatka s červeně vyznačeným místem vetknutí do disku.

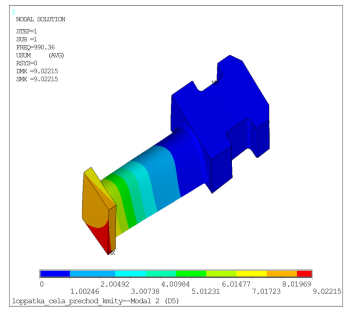
3.3.1 Modální analýza rhombické lopatky

Stejně jako pro jednoduchou lopatku i pro lopatku s obecnou geometrií byla nejprve provedena modální analýza. Vlastní frekvence pro netlumený model bez uvažování gyro-skopických účinků jsou uvedeny v Tab. 3.2.

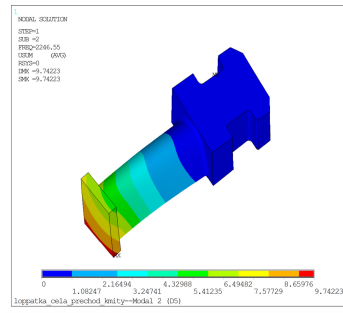
Výsledky jasně dokládají, že zvolená rhombická lopatka je velice tuhá, což se projeví při následujících výpočtech. Při modální redukci, zahrnující prvních 20 tvarů, nedojde k velkému zkreslení výsledků. Některé vybrané vlastní tvary jsou uvedeny na Obrázcích 3.9. Navíc velké množství vyšších tvarů se vyznačuje pouze malým množstvím kmitající hmoty, viz Obrázky 3.9(e) až 3.9(h).

Pořadí	Vlastní frekvence [Hz]
1	990,76
2	2244,60
3	3794,00
4	4592,08
5	8624,90
6	10642,67
7	12542,18
8	14600,96
9	15328,36
10	16535,70

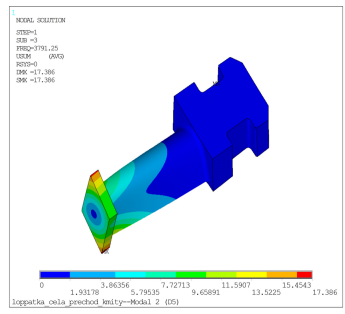
Tabulka 3.2: Tabulka vlastních frekvencí konzervativního modelu rhombické lopatky.



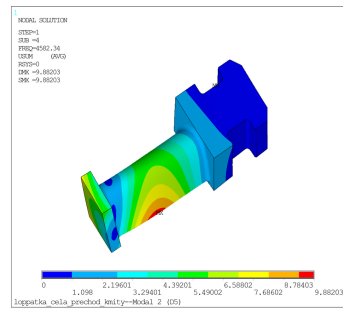
(a) První vlastní tvar 990 Hz.



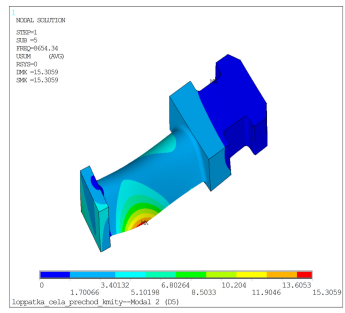
(b) Druhý vlastní tvar 2244 Hz.



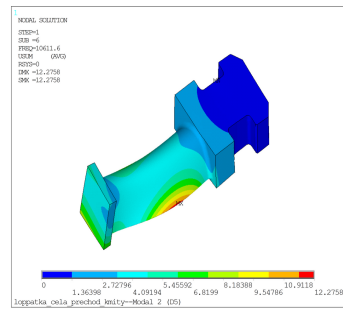
(c) Třetí vlastní tvar 3794 Hz.



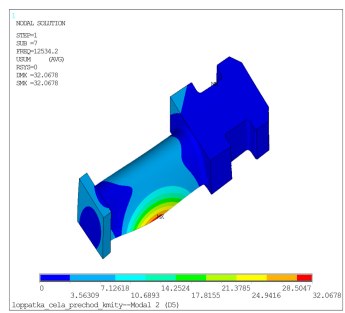
(d) Čtvrtý vlastní tvar 4592 Hz.



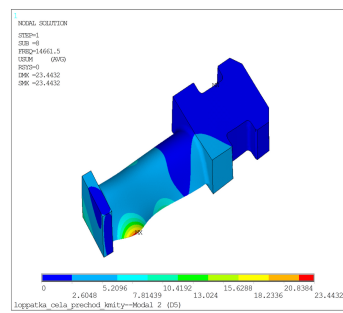
(e) Pátý vlastní tvar 10642 Hz.



(f) Šestý vlastní tvar 12542 Hz.



(g) Sedmý vlastní tvar 14600 Hz.



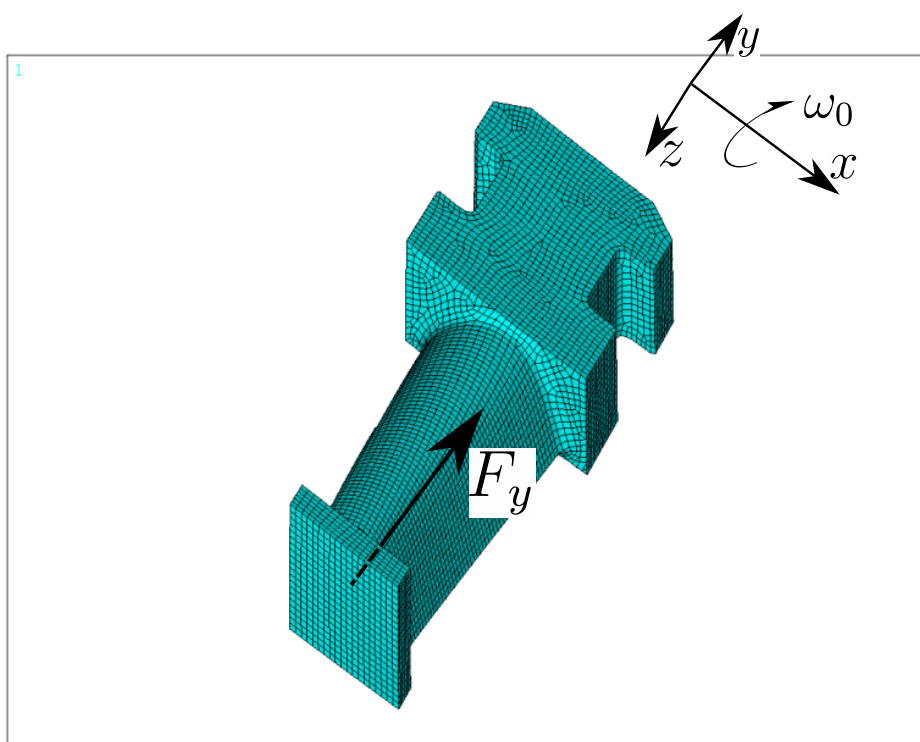
(h) Osmý vlastní tvar 15328 Hz.

Obrázek 3.9: Vybrané vlastní tvary rhombické lopatky.

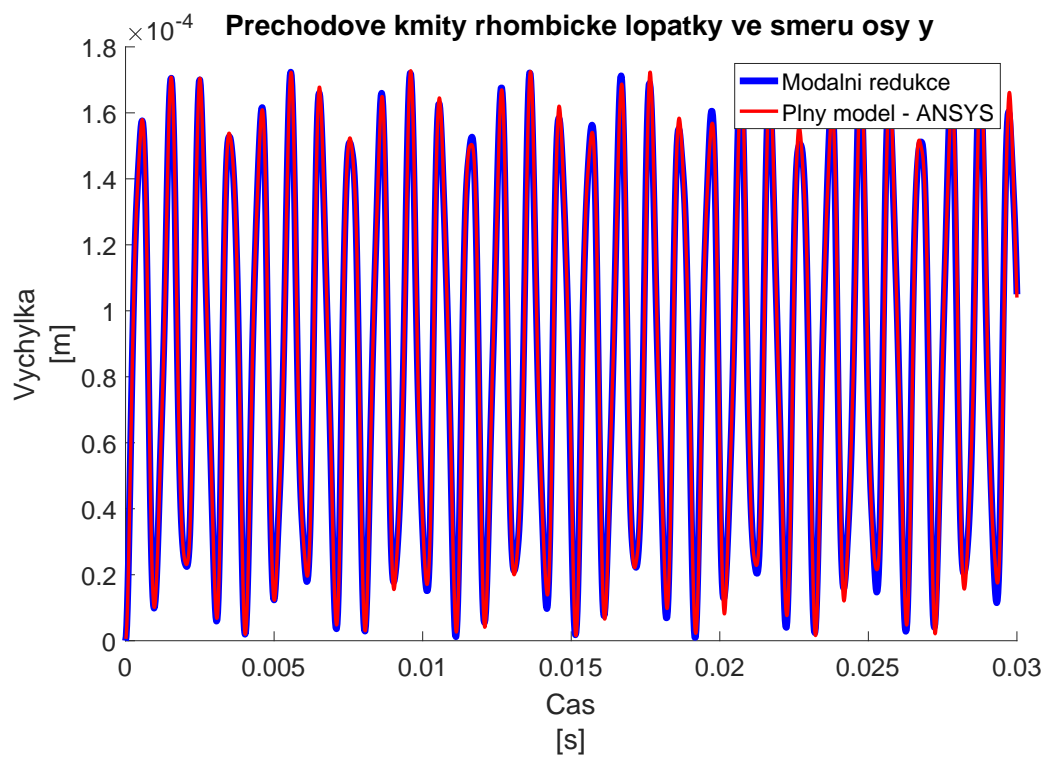
3.3.2 Přechodové kmity skokově zatížené rhombické lopatky bez materiálového tlumení

Dynamická odezva na skokové zatížení konstantní silou rhombické lopatky byla první testovací úlohou. Konstantní síla $F_y = 100$ N byla zadána v koncovém bodě ve středu průřezu lopatky. Jak bylo uvedeno výše, jedná se o zatížení ve směru normály kontaktní plochy, viz Obrázek 3.10.

Při porovnání získaných výsledků, viz Obrázek 3.11, na plném modelu lopatky řešeném integrací v čase ANSYS (červená čára) a na modelu sestaveném v systému MATLAB (modrá čára), který využívá při svém řešení modální redukci na 20 vlastních tvarů, je patrná velmi dobrá shoda jak frekvenční tak i amplitudová.



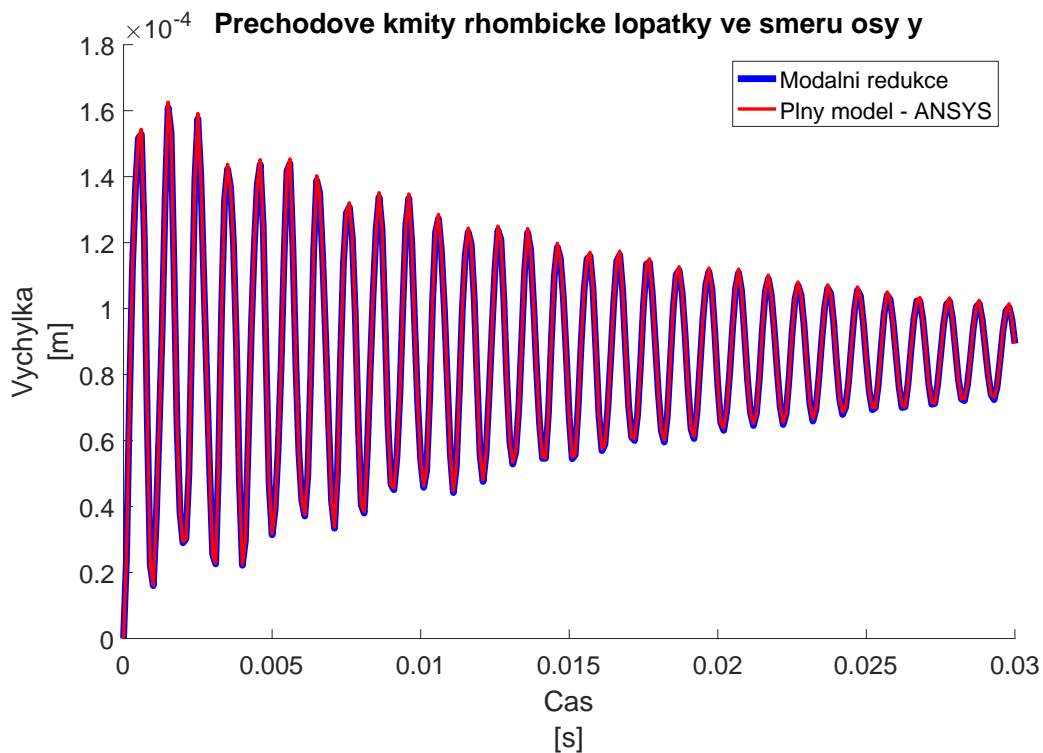
Obrázek 3.10: Aplikované skokové zatížení statickou silou F_y na rhombickou lopatku.



Obrázek 3.11: Odezva rhombické lopatky bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení.

3.3.3 Přechodové kmity rhombické lopatky s uvažovaným materiálovým tlumením

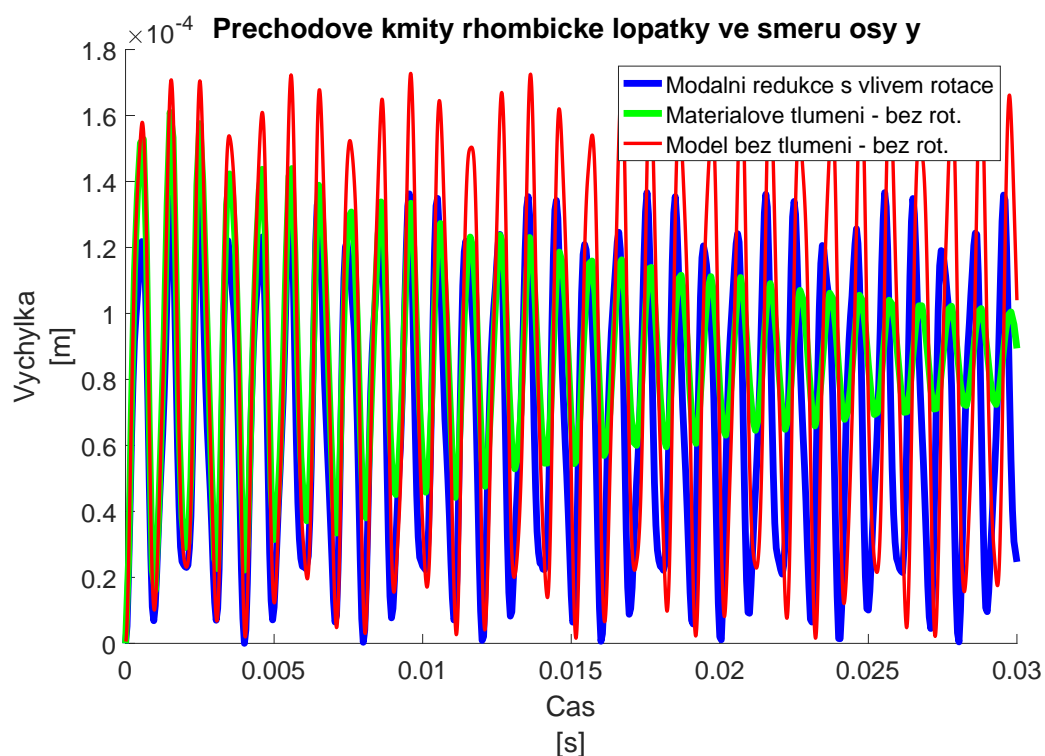
Shodný matematický model rhombické lopatky byl rozšířen o vliv materiálového tlumení, které bylo zadáno proporcionální $\mathbf{B} = \beta \mathbf{K}$ pro $\beta = 10^{-5}$. I pro tento případ je zřejmá velice dobrá shoda výsledků získaných oběma přístupy, viz Obrázek 3.12.



Obrázek 3.12: Odezva rhombické lopatky s materiálovým tlumením bez zahrnutí gyroskopických účinků.

3.3.4 Přejchodové kmity rhombické lopatky zohledňující vlivy rotace

Posledním testovaným případem bylo vypočtení přechodových kmitů rhombické lopatky za ustálené rotace ($\omega = 3000$ ot/min). Jak již bylo uvedeno v úvodu podkapitoly, osou rotace rhombické lopatky je osa hřídele, která je od patky lopatky vzdálená o 205 mm. Vliv rotace na celkovou odezvu lopatky je tedy významnější než tomu bylo u předchozího testovacího příkladu, viz Obrázek 3.7. Ve větší míře se zde projevuje vliv vyztužení za rotace, kdy dochází k přeladění modelu a zároveň klesají absolutní hodnoty výchylek, jak je patrné na Obrázku 3.13.



Obrázek 3.13: Porovnání jednotlivých odezev.

Kapitola 4

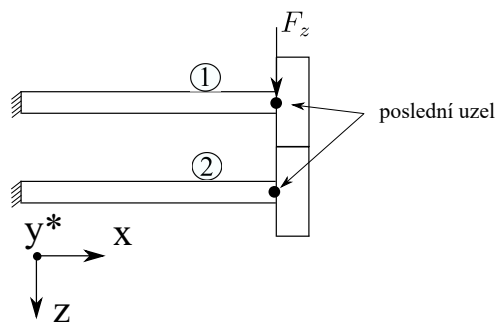
Aplikační úlohy pro model kontaktu

Metodika modelování kontaktních úloh poddajných těles, představená v kapitole 2, byla nejprve ověřena na jednoduchých úlohách. Uvažovaná geometrie dvojice lopatek umožnila použít prismatické lopatkové prvky. Popisy testovaných úloh a vyhodnocení výsledků prováděných analýz jsou obsahem následující kapitoly. Pro validaci vypočtených výsledků je použit konečnoprvkový systém ANSYS, který se používá v technické praxi právě pro tento typ úloh. V systému ANSYS byla vytvořena stejná geometrie, která byla vysítována lineárními osmiuzlovými prostorovými prvky SOLID185 při zvolené *full integration*.

4.1 Konstantní tuhost pro celou plochu a celou dobu výpočtu

Model kontaktu, který byl testován jako první, používal shodnou konstantní tuhost elementárních kontaktních plošek nacházejících se na kontaktní ploše. Pro případy s konstantní tuhostí byl zvolen tuhostní přístup modelování kontaktu. Zvolený přístup byl schopný popsat stav po zatížení lopatky, které nevyvolalo postupné odléhávání ploch. Pokud by k němu docházelo, celková tuhost kontaktu by klesala a výsledky by již neodpovídaly výsledkům získaných z komerčního MKP software. Byly porovnány odezvy v koncovém bodu lopatek ve směru působící síly pro modely bez tření (viz Obrázky 4.2(a) a 4.2(b)) i se třením (viz Obrázky 4.3(a) a 4.3(b)) pro zatížení lopatky číslo 1 impulzem síly 10 N trvajícím po dobu 0,01 s, viz obr. 4.1. Oba dva matematické modely zohledňují materiálové tlumení, které je zadáno proporcionálně s hodnotou koeficientu $\beta = 10^{-5}$.

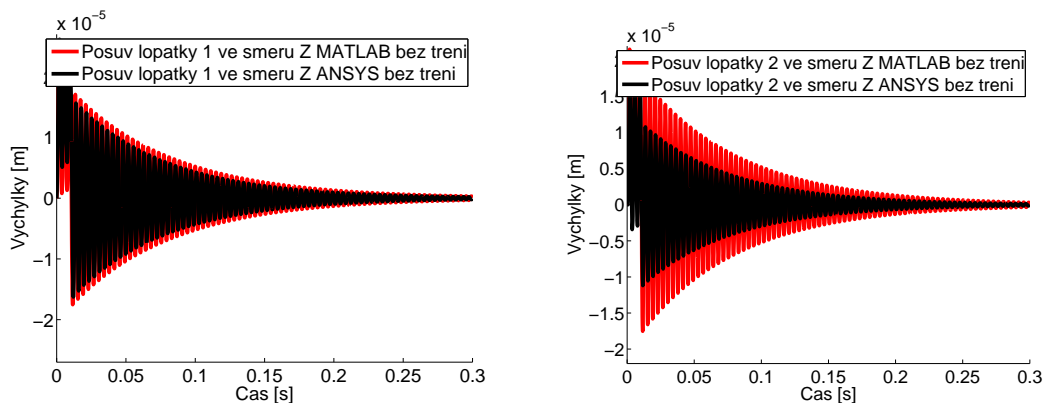
Zatížení impulzem síly bylo využito pro otestování, zda nedochází k rozkmitání lopatek způsobenému numerickým řešením úlohy. Výsledky dokazují, že pro oba dva modely panuje velmi dobrá shoda. Oba dva modely se utlumí hlavně díky materiálovému tlumení,



* pravotočivý systém, y směřuje ven z nákresny

Obrázek 4.1: Zatížení dvojice lopatek silou.

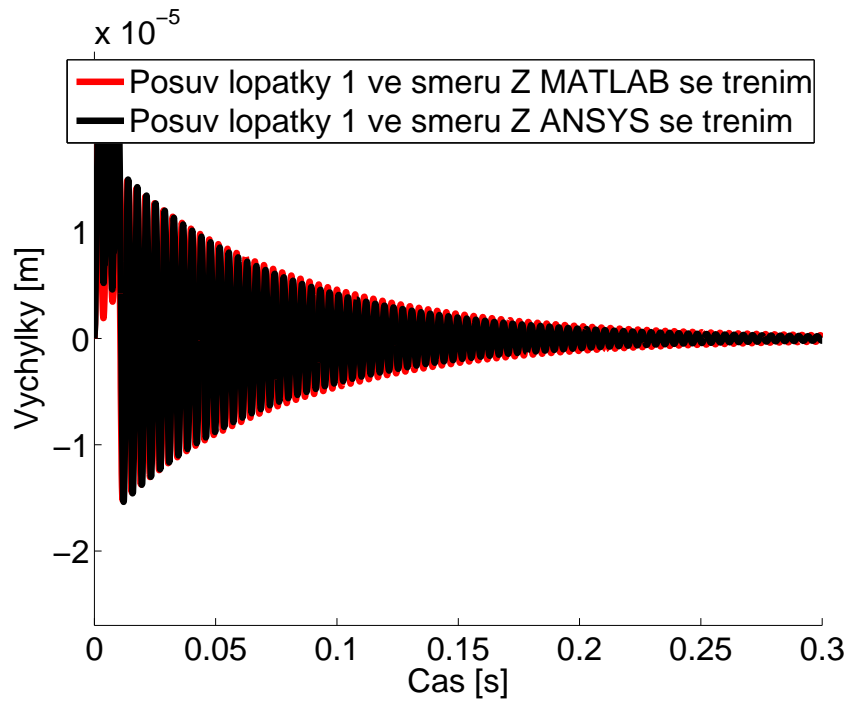
neboť po odlehčení lopatky již kmitají samostatně se stejnou frekvencí. Z tohoto důvodu jsou tvary přechodových kmitů pro případ bez uvažování tření i se třením v kontaktu velmi podobné. Liší se jen největší výchylkou po odeznění impulsu, která je menší u lopatek se třením v kontaktu.



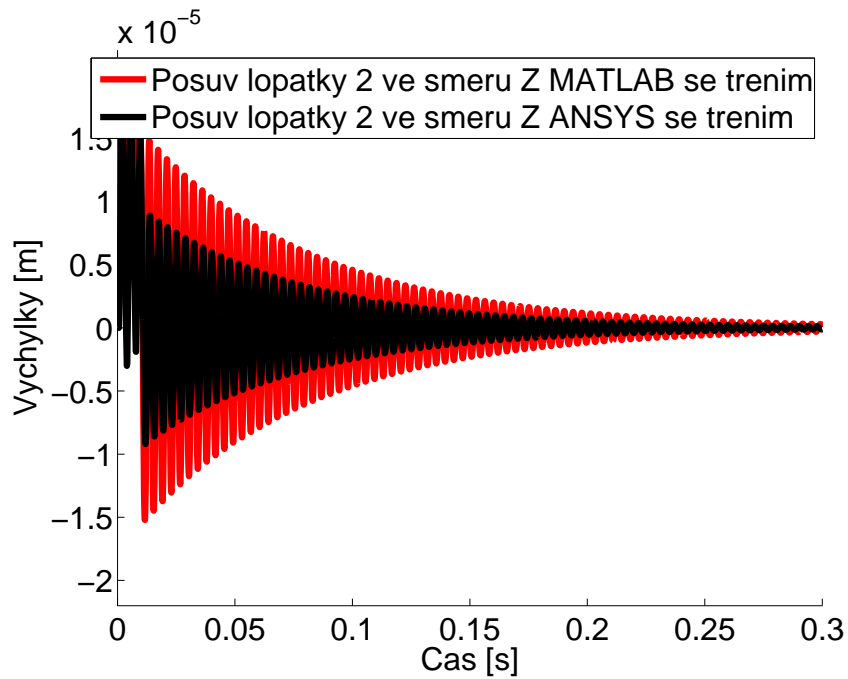
(a) Přechodové kmity impulzně přitlačované lopatky 1 pro případ bez tření.

(b) Přechodové kmity lopatky 2 impulzně přitlačované lopatkou 1 pro případ bez tření.

Obrázek 4.2: Přechodové kmitání lopatek pro případ bez tření.



(a) Přechnodové kmity impulzně přitlačované lopatky 1 pro případ se třením.

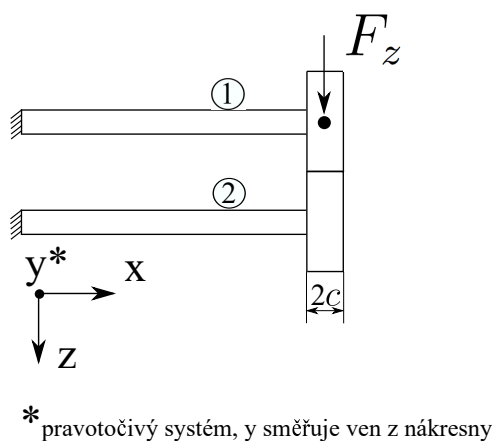


(b) Přechnodové kmity lopatky 2 impulzně přitlačované lopatkou 1 pro případ se třením.

Obrázek 4.3: Přechnodové kmitání lopatek pro případ se třením.

4.2 Přechodové kmity pro budící sílu kolmou k rovině kontaktu

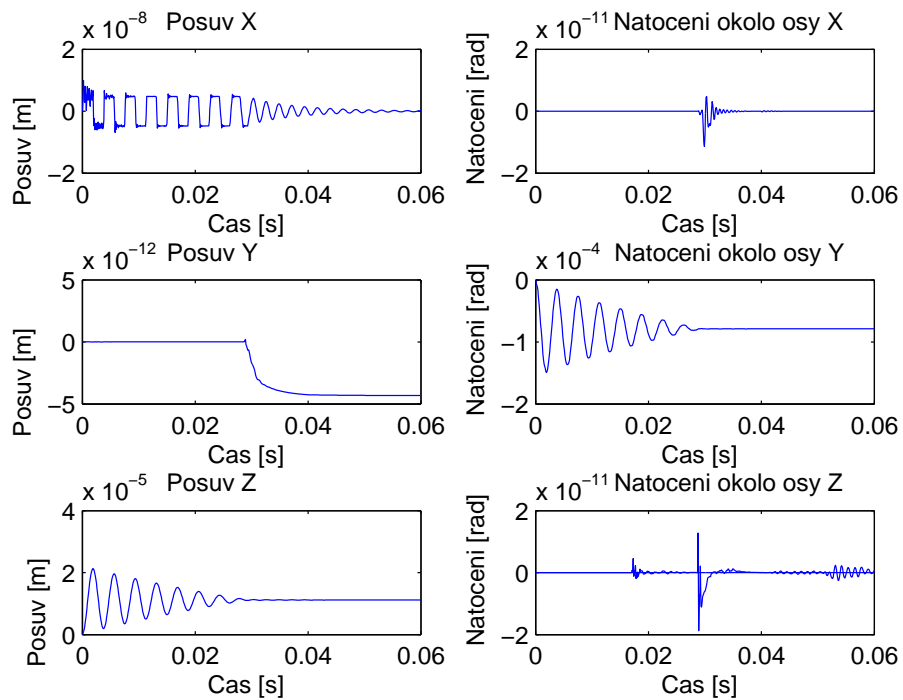
Soustava dvou prismatických lopatek, shodná s předchozí, byla zatěžována přítláčnou skokovou konstantní silou o velikosti $F_z = 10$ N, která byla pro tento případ aplikována do středu bandáže, viz Obrázek 4.4. Umístění působiště síly znamenalo zatížit poslední uzel lopatky silou a momentem $M_y = c \cdot F_z$, kde c je vzdálenost težiště bandáže od posledního uzlu lopatky. Pro tuto soustavu byla řešena odezva systému na definované buzení. Vliv kontaktu byl modelován tuhostním přístupem.



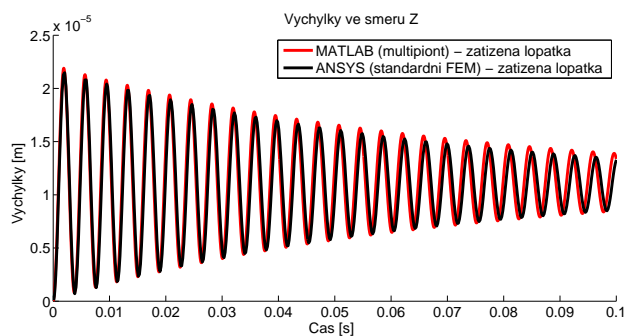
Obrázek 4.4: Zatížení dvojice lopatek silou ve středu bandáže.

Správné zahrnutí přítláčné síly bylo zkontrolováno odečtením výchylek posledního uzlu, viz Obrázek 4.5. S ohledem na typ použitých konečných prvků by se měla na Obrázku 4.5 objevit pouze výchylka do osy z a natočení okolo osy y , které by odpovídalo zatížení přítláčnou silou na rameni c . V tomto případě se objevily výchylky i v ostatních souřadnicích, avšak vzhledem k jejich velikosti je možné tyto výchylky považovat za chyby vzniklé numerickým řešením.

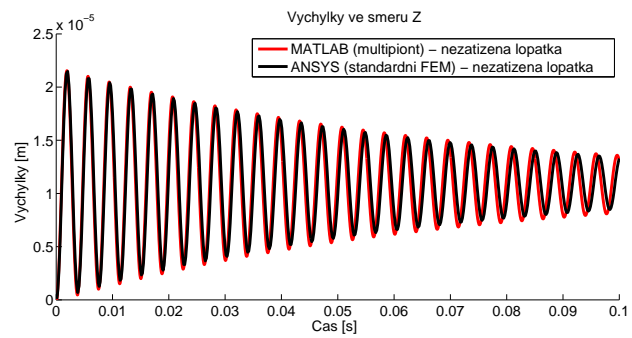
Možnost zanedbání jejich vlivu je patrné z Obrázků 4.6 a 4.7, kde je vidět dobrá shoda přechodových kmitů středů bandáže obou lopatek při skokovém zatížení 1. lopatky. Lze pozorovat drobný rozdíl ve vlastní frekvenci lopatek. Díky užití lopatkových prvků je model sestavený v systému MATLAB o něco tužší oproti konečnoprvkovému modelu, který byl sestaven v systému ANSYS využívající prvky SOLID185. Aby byl tento předpoklad potvrzen, byla provedena modální analýza, jež tuto domněnku potvrdila, viz Tabulka 4.1. Dále byla u modelu v systému ANSYS provedena náhrada prvků SOLID185 jinými prostorovými prvky o shodné hustotě sítě. Jejich vlastní frekvence jsou opět uvedeny v Tabulce 4.1. Rozdílnost a vhodnou použitelnost jednotlivých prvků lze studovat v [ANSYS Help (2016)].



Obrázek 4.5: Přechodové kmity jednotlivých zobecněných souřadnic lopatky 1 pro případ bez tření.



Obrázek 4.6: Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 1 pro případ bez tření.



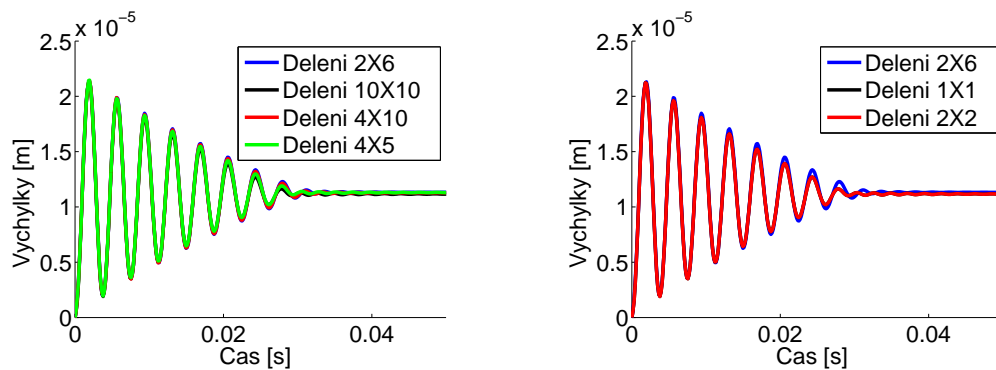
Obrázek 4.7: Přejchodové kmity ve směru osy z lopatky 2 pro případ bez tření.

Pořadí	MATLAB (10 prvků)	SOLID45 F	SOLID45	SOLID185 F	SOLID185 R	SOLID95 24 PR	SOLID186 F
1	133,29 ohyb Z	133,3 ohyb Z	129 ohyb Z	133,66 ohyb Z	129 ohyb Z	133,25 ohyb Z	133,76 ohyb Z
2	266,16 ohyb Y	265,03 ohyb Y	262,8 ohyb Y	265,2 ohyb Y	262,76 ohyb Y	264,92 ohyb Y	265,9 ohyb Y
3	924,35 ohyb Z	919,08 ohyb Z	889,1 ohyb Z	921,5 ohyb Z	889 ohyb Z	918,24 ohyb Z	921,92 ohyb Z
4	1529,63 torze X	1550,9 torze X	1484,2 torze X	1550,8 torze X	1484,2 torze X	1533,1 torzeX	1542,3 torze X
5	1818,84 ohyb Y	1768,6 ohyb Y	1752,8 ohyb Y	1769,7 ohyb Y	1752,8 ohyb Y	1767 ohyb Y	1773,7 ohyb Y
6	2679,19 ohyb Z	2638,5 ohyb Z	2550,4 ohyb Z	2645 ohyb Z	2550,5 ohyb Z	2633,4 ohyb Z	2644,5 ohyb Z
7	5023,69 axiální X	4832 ohyb Y	4784,6 ohyb Y	4835 ohyb Y	4784,5 ohyb Y	4823,7 ohyb Y	4842,9 ohyb Y
8	5138,28 ohyb Y	5001,9 axiální X	4996,6 ohyb Z	5001,2 axiální X	4960,7 ohyb Z	5000,3 axiální X	5019,4 axiální X
9	5291,65 ohyb Z	5139,9 ohyb Z	4998 axiální X	5151 ohyb Z	4998 axiální X	5122,1 ohyb Z	5145,9 ohyb Z
10	6202,99 torze X	6280 torze X	5937,9 torze X	6279,5 torze X	5938 torze X	6203,7 torze X	6246,1 torze X

Tabulka 4.1: Vlastní frekvence v [Hz] jedné lopatky pro 432 konečných prvků. Vlastní frekvence jsou uvedeny se stručným popisem charakteru vlastního tvaru kmitu.

Při modelování byla nejprve užívána konstantní kontaktní tuhost, jinými slovy shodná pro celou kontaktní plochu po celou dobu simulace, tzn. neuvažovala se změna tuhosti dle aktuální velikosti kontaktní plochy. Byla provedena citlivostní analýza, která měla za cíl zjistit vliv změny velikosti kontaktní plochy na získané výsledky. Matematický model s přitlakem na první lopatce, viz Obrázek 4.4, zůstal zachován jako v předchozí úloze a jen se měnil počet kontaktních ploch.

Přechodové kmity pro různé diskretizace kontaktní plochy (dělení $x \times y$ odpovídá x sloupců a y řádků kontaktních plošek) jsou téměř totožné, viz Obrázky 4.8. Na obrázcích jsou patrné drobné odchylky, ale jak se dalo předpokládat, pro tento zátěžný stav není diskretizace rozhodující. Její vliv se projeví až v další části textu, který se zabývá měnící se velikostí kontaktní plochy například vlivem rotace lopatky okolo vlastní osy, což je v praxi dosti častý příklad. Pro úplnost dodejme, že diskretizace 1x1 je srovnatelná s dosud používaným přístupem, popsáním např. [Byrtus et al. (2010)].



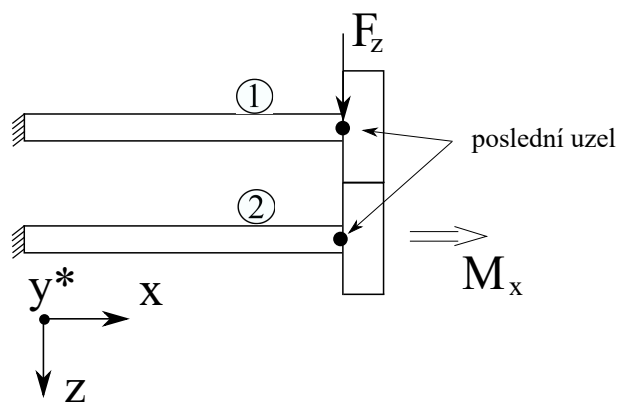
(a) Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 1 kontaktní úlohy se třením pro různou diskretizaci plochy.

(b) Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 1 kontaktní úlohy se třením pro různou diskretizaci plochy.

Obrázek 4.8: Přechodové kmity ve směru osy z pro případ se třením a různé diskretizace plochy.

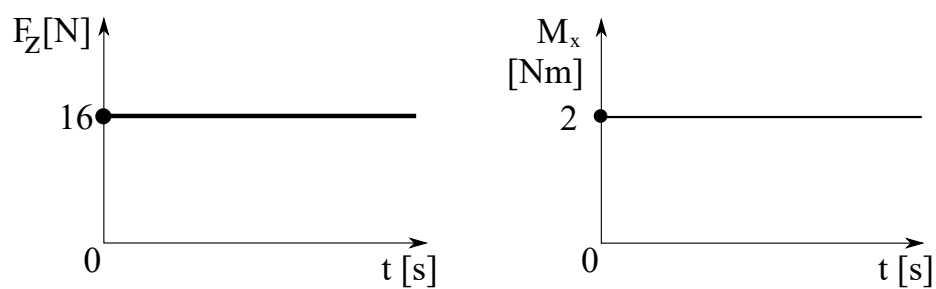
S ohledem na různé druhy použitých konečných prvků (model v MATLABu užívá lopatkové prvky nesoucí v sobě informaci o natočení, zatímco model v systému ANSYS užívá prostorových prvků SOLID185), lze přímo porovnat pouze posuvy uzlů ve středu lopatky, neboť prvky SOLID185 v sobě nemají informaci o natočení průřezu. Diskretizace kontaktní plochy pro model v MATLABu je zvolena 2x6. Nedostatek tohoto přístupu se projeví v případě uvažování přítláčné síly F_z a silové dvojice M_x , která natáčí lopatku okolo její vlastní osy, tj. osy x , viz Obrázek 4.9. Průběh přítláčné síly F_z a silové dvojice M_x je znázorněn na Obrázku 4.10(a), respektive 4.10(b).

Přechodové kmity ve směru přítláčné síly F_z jsou vyneseny na Obrázku 4.11 a přechodové kmity ve směru osy y jsou zobrazeny na Obrázku 4.12.



* pravotočivý systém, y směřuje ven z nákresny

Obrázek 4.9: Zatížení dvojice lopatek silou a dvojicí sil.

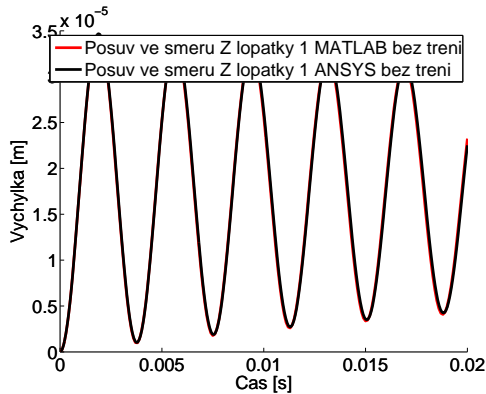


(a) Průběh přítláčné síly.

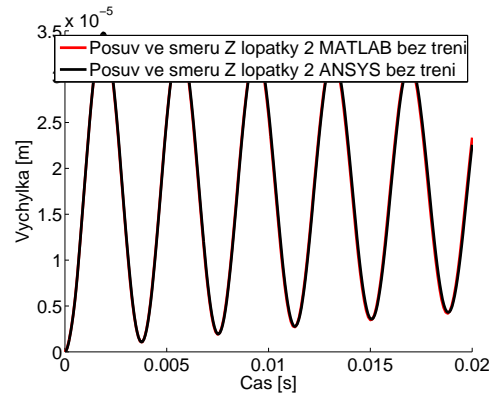
(b) Průběh momentu dvojice sil.

Obrázek 4.10: Průběh síly F_z a silové dvojice M_x .

Na uvedených obrázcích je vidět dobrá shoda přechodových kmitů ve směru osy zatížení z , čímž je potvrzena vhodně zvolená tuhost kontaktu. Rozdíl v posuvu ve směru osy y nebužené lopatky, viz Obrázek 4.12(b) je způsoben zanedbáním vlivu natočení lopatkových elementů okolo vlastní osy (tento vliv bude vysvětlen v následujícím odstavci). Útlum, který je patrný na modelu sestaveném v systému ANSYS, odpovídá pouze materiálovému tlumení.

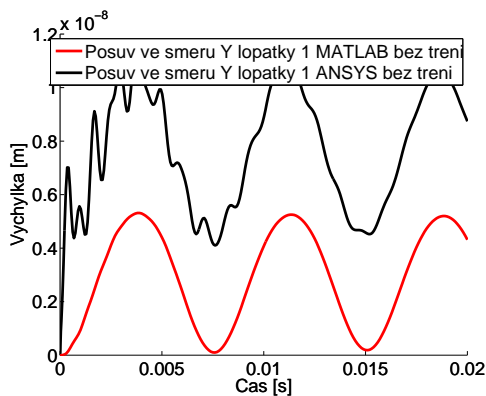


(a) Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 1 pro případ bez tření.

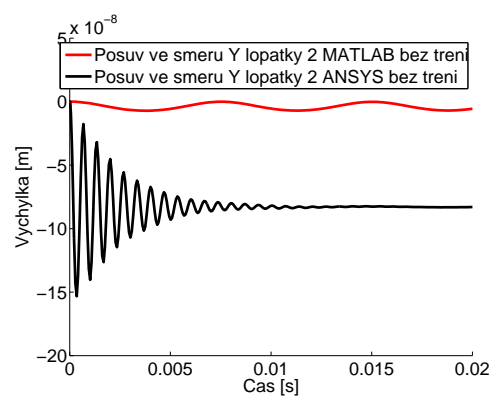


(b) Přechodové kmity ve směru osy z lopatky 2 pro případ bez tření.

Obrázek 4.11: Přechodové kmity ve směru osy z pro případ bez tření.



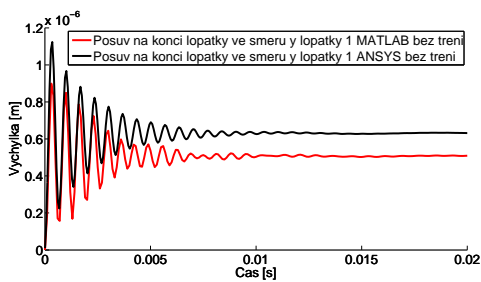
(a) Přechodové kmity středu lopatky 1 bez tření ve směru osy y .



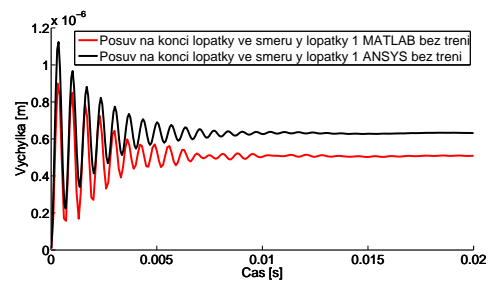
(b) Přechodové kmity lopatky 2 bez tření ve směru osy y .

Obrázek 4.12: Přechodové kmity ve směru osy y pro případ bez tření.

Z přechodných výsledků je patrné, že pro zvolené modely nestačí pouze porovnat hodnotu posuvů ve středu lopatky, neboť nelze podchytit natočení průřezu. Bylo přistoupeno k porovnání posuvů na kraji lopatky. Zobecněné souřadnice modelu v MATLABu tyto hodnoty neobsahují přímo, proto byly posuvy ve směru osy y získány předpisem $y = 0,01\sin\phi_i + y_i$, kde ϕ_i je natočení posledního uzlu lopatky kolem osy x a y_i je jeho posuv ve směru osy y , viz Obrázek 4.4. Důvodem k využití natočení středu průřezu k vyjádření posuvu byl neměnný průřez lopatkového prvku. Lopatkový prvek je narozdíl od modelu v systému ANSYS, uvažován v průřezu tuhý. Opačný postup, kdy by byl porovnáván posuv a natočení středu, by vyžadoval zjištění polohy více uzlů pro model v systému ANSYS a z jejich polohy by bylo možné určit natočení středu. Porovnávané přechodové kmity pro kraj lopatky jsou na Obrázku 4.13. Rozdíly jednotlivých výchylek byly zdůvodněny hlavně nepřesností zvolené metody, kdy i přes natačení normálové síly, dochází k nepřesnostem (úhel natočení se bere z počátečního souřadného systému). Přesto panuje dobrá shoda v dosažené ustálené výchylce ve směru osy y , viz Obrázek 4.13(a) pro buzenou lopatku a Obrázek 4.13(b) pro nebuzenou lopatku. Rozdíl ve statické výchylce je dán nevhodně zvolenou tuhostí kontaktu, která byla uvažována konstantní pro celou kontaktní plochu a dobu výpočtu.



(a) Přechodové kmity kraje lopatky 1 bez tření ve směru osy y .



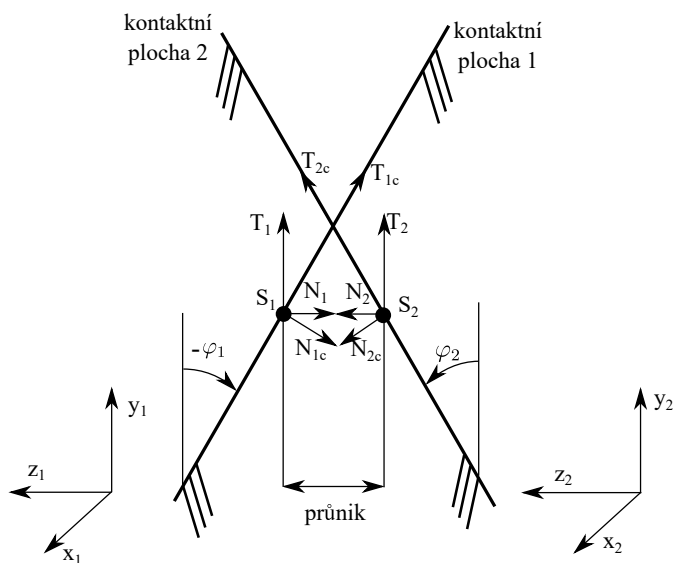
(b) Přechodové kmity kraje lopatky 2 bez tření ve směru osy y .

Obrázek 4.13: Přechodové kmity ve směru osy y pro případ bez tření.

Z tohoto důvodu bylo přistoupeno ke zpřesnění matematického modelu kontaktu, který v každém kroku vypočte velikost kontaktní plochy a pro ní určí odpovídající kontaktní tuhost. Aby nemusela být uvažována neustále se měnící matice tuhosti začal být využíván silový model kontaktu, který umožňuje používat konstantní matici tuhosti a vliv kontaktu se projeví pouze ve vektoru sil.

4.3 Silový model kontaktu s nekonstantní tuhostí

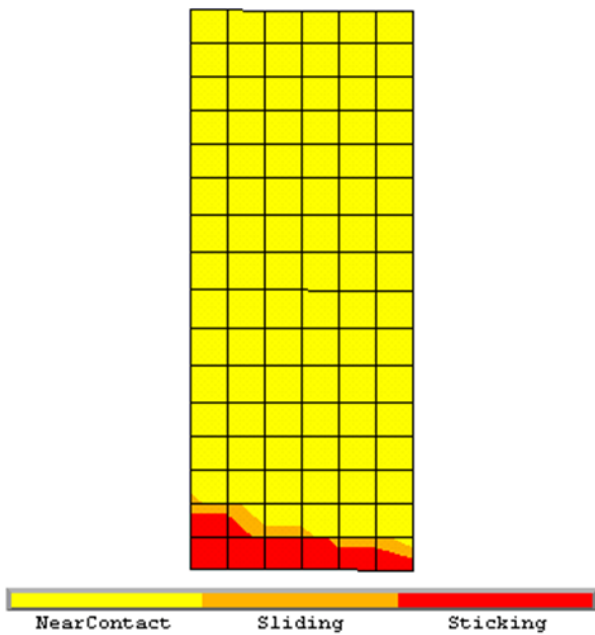
Pro následující modely byl přijat předpoklad, že ke změně velikosti kontaktní plochy dochází hlavně v případě natáčení lopatek okolo vlastní osy, což způsobí i pootočení normálové a tečné složky kontaktních sil oproti globálnímu souřadnému systému (GSS), jak je patrné z Obrázku 4.14. Porovnání aktivních kontaktních plošek (MATLAB vs. ANSYS) je vidět na Obrázku 4.15. Zanedbání vlivu natočení tečných a normálových složek kontaktních sil se projevilo hlavně při uvažování tření.



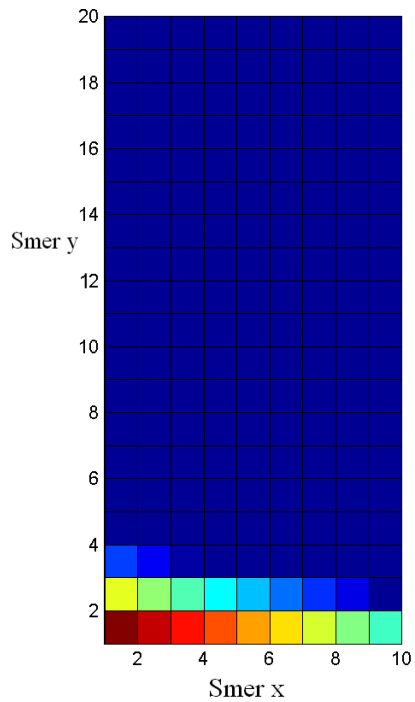
Obrázek 4.14: Natočení normálové kontaktní síly oproti GSS.

Popsaný postup byl nejprve aplikován na úlohu bez tření, viz Obrázek 4.9. Lopatka 1 byla skokově zatížena přítláčnou silou $F_z = 16$ N a lopatka 2 skokově zatížena dvojicí sil $M_x = 2$ N/m, které ji natáčely okolo osy x , viz Obrázek 4.9. Časový průběh přítláčné síly F_z je znázorněn na Obrázku 4.16(a), respektive pro silovou dvojici M_x na Obrázku 4.16(b). Aby bylo možné sledovat vliv tření, bylo skokové zatížení dvojice sil aplikováno s časovým posunem (po utlumení kmitů vyvolaných zatížením skokovou přítláčnou silou). Při uvažování tření a materiálového tlumení je časový posun 0,03 s dostatečný pro utlumení kmitů ve směru osy z , viz Obrázek 4.17.

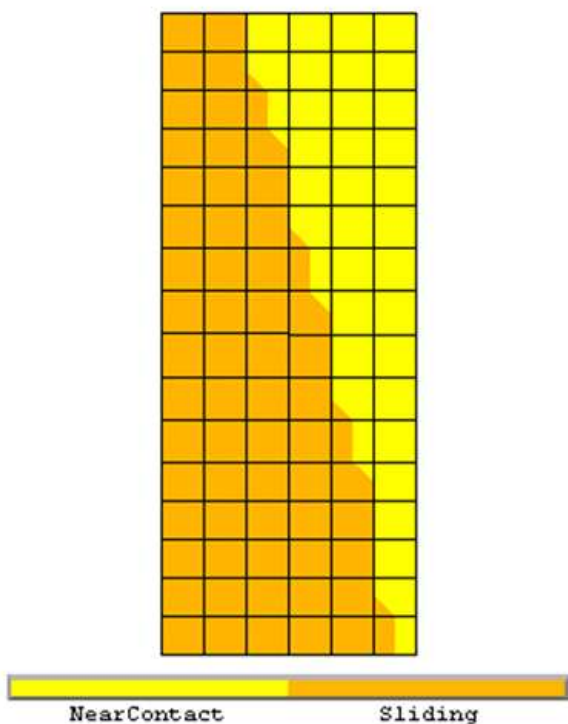
Jak bylo uvedeno výše, vliv natáčení kontaktních plošek lopatek je nejvíce patrný na tečných složkách, respektive výchylkách ve směru tečných složek sil. Přechodové kmity při zanedbání natáčení kontaktních ploch jsou zobrazeny na Obrázku 4.18. Z porovnání ustálených výchylek je patrné, že rovnovážná poloha stále není totožná pro oba porovnávané modely (ANSYS versus MATLAB), což je zapříčiněno zanedbáním natáčení kontaktních ploch. Přechodové kmity po zahrnutí vlivu natáčení kontaktních ploch jsou



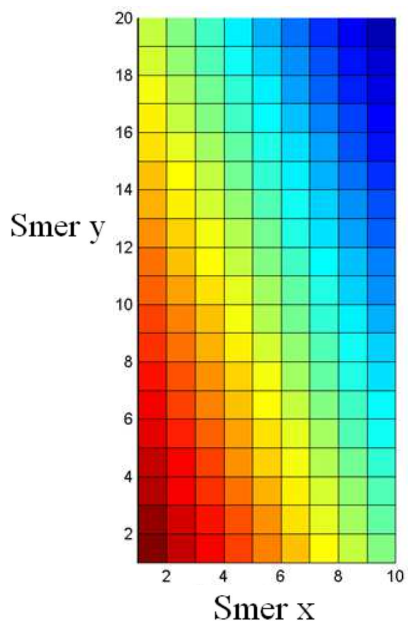
(a) Aktivní kontaktní plošky (ANSYS).



(b) Aktivní kontaktní plošky (nemodré) na lopatce č. 1 při částečném odlehnutí kontaktu. (MATLAB)

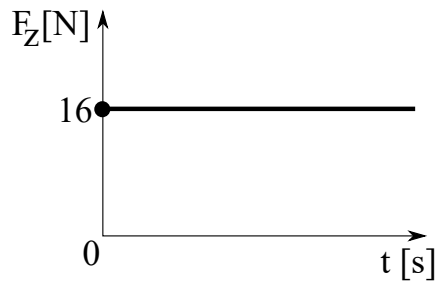


(c) Aktivní kontaktní plošky (ANSYS).

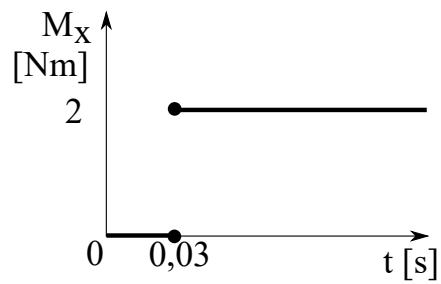


(d) Aktivní kontaktní plošky (nemodré) na lopatce č. 1 při částečném odlehnutí kontaktu. (MATLAB)

Obrázek 4.15: Mění se počet kontaktních plošek při uvažování torze lopatky.



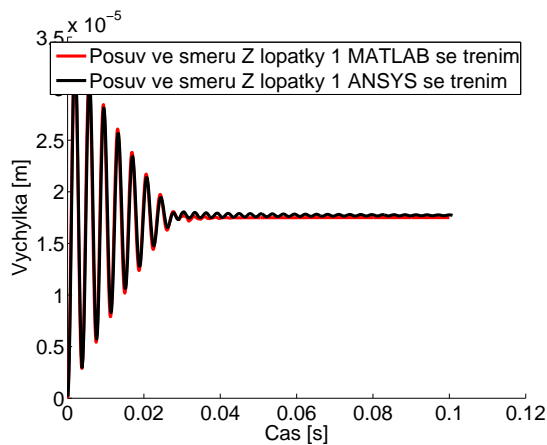
(a) Průběh přítláčné síly.



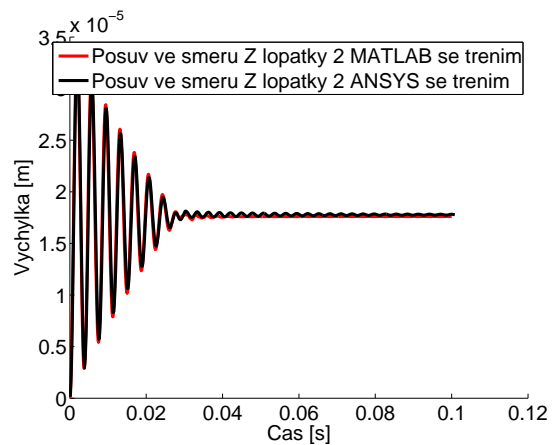
(b) Průběh momentu dvojice sil.

Obrázek 4.16: Průběh síly F_z a silové dvojice M_x .

uvedeny na Obrázku 4.19. Zde již panuje velice dobrá shoda porovnávaných výchylek ve směru osy y .



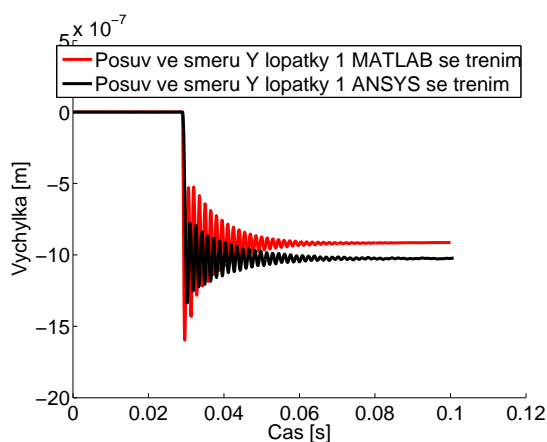
(a) Přebodové kmity ve směru osy z lopatky 1 pro případ se třením.



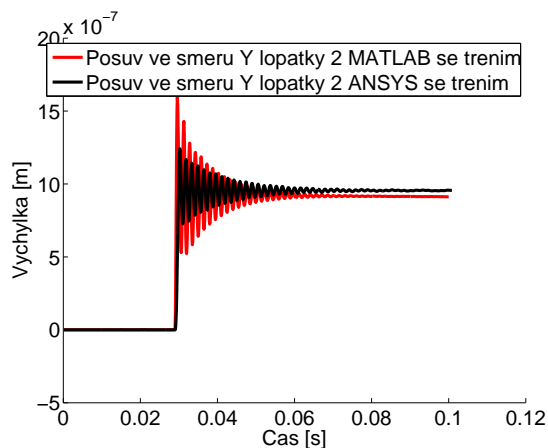
(b) Přebodové kmity ve směru osy z lopatky 2 pro případ se třením.

Obrázek 4.17: Přebodové kmity ve směru osy z pro případ se třením při zanedbání natáčení kontaktních ploch.

Řešením této úlohy byla potvrzena správnost výpočtu proměnné tuhosti. Dále bylo zjištěno, že velikost zatížení silovou dvojicí nemá významný vliv na kontaktní tuhost, jejíž velikost byla stále závislá pouze na přítláčné síle.

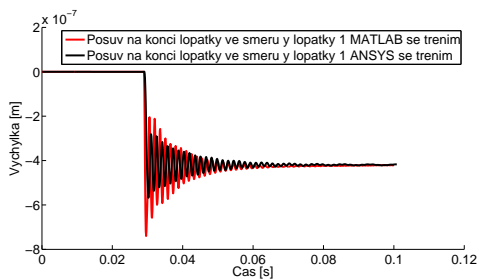


(a) Přechodové kmity středu lopatky 1 se třením ve směru osy y .

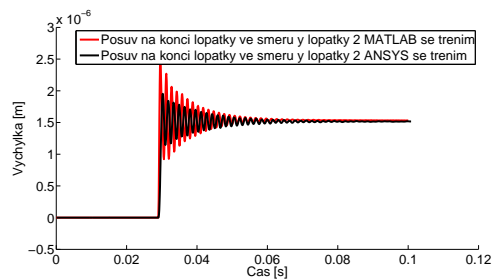


(b) Přechodové kmity lopatky 2 se třením ve směru osy y .

Obrázek 4.18: Přechodové kmity ve směru osy y pro případ se třením při zanedbání natáčení kontaktních ploch.



(a) Přechodové kmity kraje lopatky 1 se třením ve směru osy y .



(b) Přechodové kmity kraje lopatky 2 se třením ve směru osy y .

Obrázek 4.19: Přechodové kmity ve směru osy y pro případ se třením při uvažování natáčení kontaktních ploch.

4.4 Citlivostní analýza silového modelu vzhledem k diskretizaci kontaktní plochy

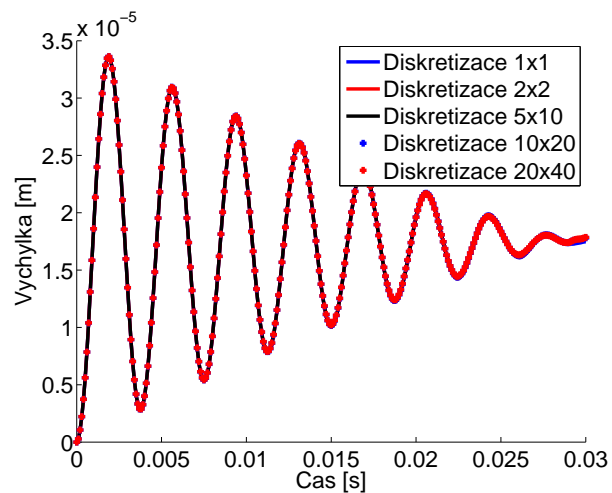
Pro zatěžovací stav, kdy jsou lopatky k sobě nejprve přitlačovány a poté natáčeny, byla také provedena analýza citlivosti na diskretizaci kontaktní plochy. Citlivostní analýza byla provedena na shodném modelu (Obrázek 4.9). Průběh silových účinků zůstal zachován při stejné velikosti přitlačné síly F_z (Obrázek 4.16(a)) a jen byla zvýšena velikost silové dvojice na $M_x = 10 \text{ N/m}$. Bylo sledováno chování kontaktu v závislosti na diskretizaci kontaktní plochy. Jak bylo uvedeno v předchozí podkapitole, působení silové dvojice zapříčiní odlehnutí části kontaktních ploch. Zbývající plošky v kontaktu způsobují změnu tuhosti a excentrické rozložení sil. Pro citlivostní analýzu byly využity diskretizace 1x1, 2x2, 5x10, 10x20, 20x40 (vodorovný směr, svislý směr). Také byl měřen čas výpočtu nutný na provedení simulace, který je uvedený v Tab. 4.2.

Diskretizace	Čas [s]
1x1	29,4
2x2	80,26
5x10	459,5
10x20	$2,4 \cdot 10^3$
20x40	$7,1 \cdot 10^3$

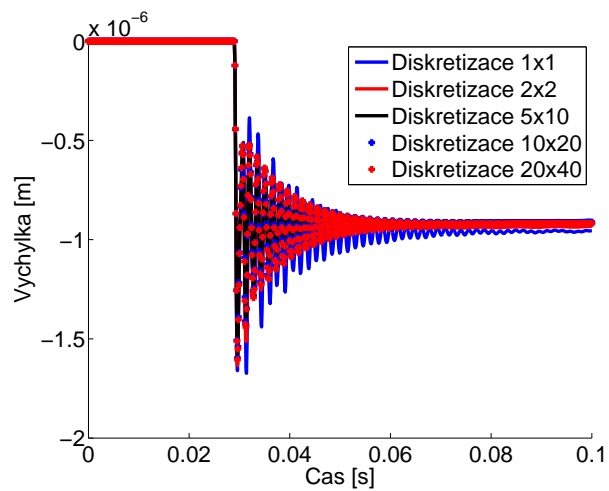
Tabulka 4.2: Tabulka výpočetních časů pro různou diskretizaci kontaktní plochy.

Hlavním kritériem určujícím vhodnost diskretizace je použitelnost výsledků. Přechodové kmity vypočtené pro jednotlivé diskretizace byly porovnány. Na Obrázku 4.20, kde jsou zobrazeny přechodové kmity ve směru osy zatěžování, tj. osy z , je patrná dobrá shoda pro všechny diskretizace kontaktní plochy. Kontaktní plocha musí po ustálení přechodových kmitů přenést stejnou sílu ve směru osy z , tj. dojde ke změně kontaktní tuhosti. Je velice důležité, že do začátku doby působení silové dvojice M_x dochází k ustálení na stejné výchylce. Relativně dobrá shoda panuje mezi výsledky pro výchylky ve směru osy y na středu lopatky na Obrázku 4.21. Malé nepřesnosti na počátku časové integrace (do doby působení silové dvojice) lze zanedbat. Avšak po začátku působení silové dvojice, v důsledku přeladění kontaktní vazby, je patrné ustalování přechodových kmitů na různých výchylkách. Nejvíce citlivou souřadnicí na diskretizaci je pak rotace okolo osy x , tj. natočení na posledním uzlu lopatky φ zatížené silovou dvojicí. Pro porovnatelnost výsledků bylo natočení φ opět přepočteno na posuv kraje lopatky, jako tomu bylo např. na Obrázku 4.19. Přechodové kmity kraje lopatky ve směru osy y jsou znázorněny na Obrázku 4.22.

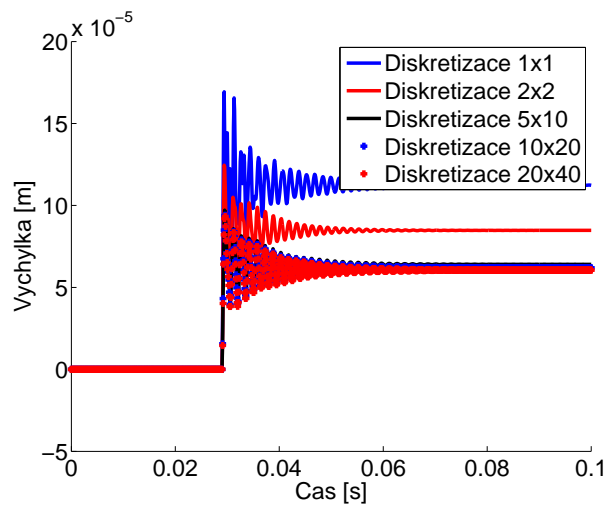
Souřadnice natočení φ je nejvíce citlivá na diskretizaci plochy z několika důvodů. Hlavním z nich je změna ramena, na kterém působí kontaktní síly. Při jemnější diskretizaci, lze přesněji rozložit vliv jednotlivých excentricky rozložených kontaktních sil. Samozřejmě lze též přesněji určit průnik jednotlivých ploch, na němž závisí normálová síla. Bylo zjištěno, že je důležité mít síť natolik jemnou, aby bylo možno popsat maximální deformaci kontaktní plochy. Jemnější rozdělení již nemá za následek výraznější změnu výsledků a jen prodlužuje výpočet, jak je uvedeno v Tab. 4.2. Je proto dobré, provést krátký výpočet pro různé hustoty diskretizace, kdy dojde pouze k navázání kontaktních vazeb, a podle něj volit diskretizaci plochy.



Obrázek 4.20: Přechodové kmity lopatky 1 ve směru z .



Obrázek 4.21: Přechodové kmity lopatky 1 ve směru osy y na kraji lopatky.



Obrázek 4.22: Přechodové kmity lopatky 2 ve směru osy y na kraji lopatky

4.5 Užité modely tření

Nedílnou součástí řešení kontaktních úloh je však také tření. V první fázi byl aplikován konstantní koeficient tření $f = 0.2$. Pro další použití byly implementovány různé metody umožňující zavést závislost koeficientu tření také na relativní rychlosti elementárních ploch. Pro další práci byly použity následující modely tření:

1. Konstatní Coulombovo tření

$$f = -f_s, \quad \text{pro } c_{A_j} < 0; \quad f = f_s, \quad \text{pro } c_{A_j} > 0, \quad (4.1)$$

kde f_s je statický koeficient tření a c_{A_j} je relativní skluzová rychlost.

2. Coulombovo tření aproximované hladkou funkcí

$$f = f_s \tanh(kc_{A_j}), \quad (4.2)$$

kde f_s je statický koeficient tření, $k \gg 1$ je volená konstanta a c_{A_j} je relativní skluzová rychlost.

3. Model MSC.ADAMS mající tvar

$$f = f_s \sin \left| C \arctan \left\{ (Bc_{A_j}) - E \left[(Bc_{A_j}) - \arctan (Bc_{A_j}) \right] \right\} \right|, \quad (4.3)$$

kde koeficinity B , E a C se volí dle výsledků z experimentálních měření, viz uživatelský manuál [MSC software (2000)].

4. Model s exponenciálním přechodem mezi f_s a f_d mající tvar (pro $c_{A_j} > 0$)

$$f = f_d + (f_s - f_d)e^{(-dc_{A_j})}, \quad (4.4)$$

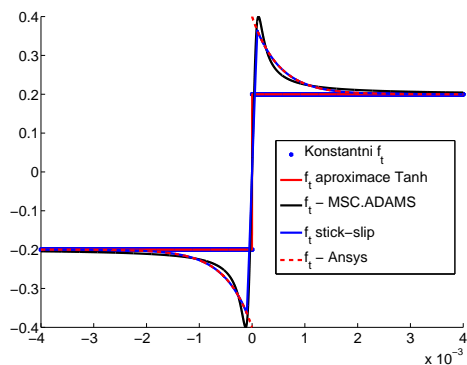
kde f_d je dynamický koeficient tření a d je koeficient spádu, viz [Pešek et al. (2015)].

5. Model ANSYS mající tvar (pro $c_{A_j} > 0$)

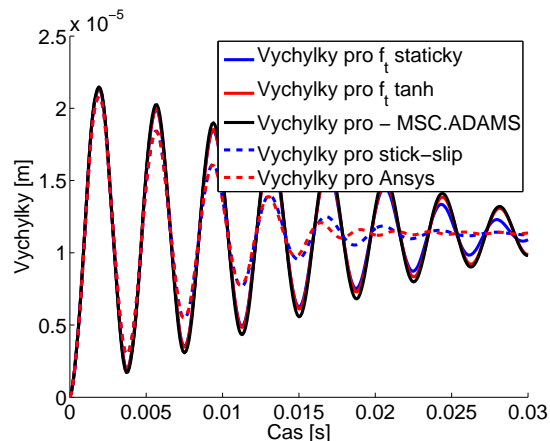
$$f = f_d(1 + (FACT - 1)e^{(-dc_{A_j})}), \quad (4.5)$$

kde $FACT = f_d/f_s$, viz [ANSYS Help (2016)].

Tyto modely koeficientu tření byly opět porovnány. Průběh velikosti koeficientu tření v závislosti na relativní rychlosti je vidět na Obrázku 4.23(a). Tyto modely tření pak byly použity pro výpočet přechodových kmitů modelu dvojice lopatek zobrazeném na Obrázku 4.4 při skokovém zatížení silou $F_z = 10$ N. Dělení kontaktních ploch bylo zvoleno konstantní 4x5. Výsledné vypočtené přechodové kmity lopatky 1 pro parametry $k = 100$, $f_s = 0,4$, $f_d = 0,2$, $d = 2$, $B = 0,5$, $E = -2,0$, $C = 1,7$ a $FACT = 2$ jsou uvedeny na Obrázku 4.23(b).



(a) Velikost třecího koeficientu v závislosti na relativní rychlosti.



(b) Přechodové kmity lopatky 1 ve směru osy z pro různé modely tření.

Obrázek 4.23: Závislost koeficientu tření na relativní rychlosti a vliv na přechodové kmity.

Drobné nepřesnosti, které nadále mezi výsledky panují, mají více důvodů:

1. Modely kontaktu na Obrázcích 4.23 se uvažují bez vlivu natáčení kontaktních ploch. Pro eliminaci tohoto jevu byly všechny úlohy v systému ANSYS počítány bez jevu stick-slip, avšak relativní posuv nelze zakázat.
2. Tuhost všech kontaktních plošek je pro jeden integrační krok stejná.
3. Všechny vlastnosti elementární plošky jsou vztaženy na její střed, nelze tak uvažovat její vlastní deformaci.

Kapitola 5

Model disku rhombických lopatek

Hlavním cílem této kapitoly je dopracování a praktické využití všech dříve popsaných postupů a metod. Nejprve bude popsán postup sestavení matematického modelu olopatkovaného disku rhombických lopatek, viz Obrázek 5.1, či [Kubín & Hlous (2014)]. Dále jsou postupně zahrnuty vlivy rotace a výsledky komentovány.



Obrázek 5.1: Olopatkovaný disk rhombických lopatek, převzato z [Kubín & Hlous (2014)].

5.1 Modelování olopatkovaného disku bez předeptnutí

Stejně jako ve skutečnosti, kdy je olopatkovaný disk složen ze samostatných lopatek, byl i jeho matematický model vytvořen ze samostatných matematických modelů rhombických lopatek, viz Obrázek 3.8.

Model olopatkovaného disku je tvořen stem shodných lopatek, jejichž bandáže s kontaktními plochami na sebe přímo dosedají. Kontakt je tedy uvažován v místě bandáže. Reálně jsou bandáže lopatek předeptnuté, avšak popis zahrnutí vlivu předeptnutí bandáže bude shrnut v následující kapitole.

Na základě modální analýzy konzervativního modelu rhombické lopatky bez uvažování vlivu rotace a tlumení, jejíž výsledky jsou uvedeny v Tab. 3.2, a s ohledem na uvažované pracovní otáčky, pro modální redukci je vybráno 10 frekvenčně nejnižších vlastních tvarů jedné rhombické lopatky. Pro ověření, že bylo do modální redukce zahrnuto dostatečné množství vlastních tvarů, byly provedeny dvě citlivostní analýzy přechodových kmitů. Při každé citlivostní analýze byly uvažovány tři stupně redukce na 5, 10 a 20 frekvenčně nejnižších vlastních tvarů.

1. Skokové zatížení jedné lopatky

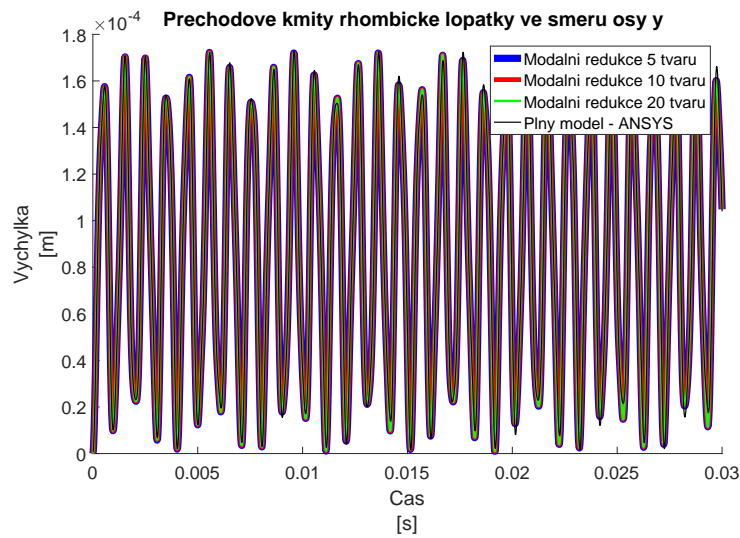
Skokové zatížení konstantní silou 100 N ve směru osy y , viz Obrázek 3.10, které má v tomto směru za následek vybuzení frekvenčně dominantních tvarů. Směr y byl zvolen, neboť v něm se vyskytují kontaktní silové účinky. Dále byly pro tento směr vypočteny přechodové kmity pomocí integrace v čase systémem ANSYS, viz Obrázek 3.11. Vypočtené přechodové kmity jsou porovnány na Obrázku 5.2.

2. Dýzové buzení jedné lopatky

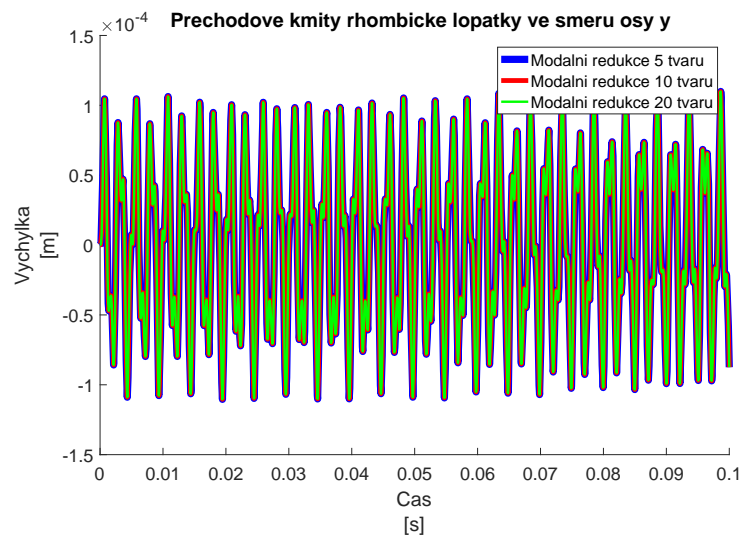
Rhombická lopatka byla také zatížena dýzovým buzením o frekvenci 2500 Hz, které odpovídá buzení při provozních otáčkách $n = 3000$ ot/min a při uvažování 50 dýz. Zvolená budicí síla měla amplitudu $F_x = 100$ N (směr osy hřídele). Porovnání přechodových kmitů je vidět na Obrázku 5.3.

Z obou vypočtených odezev je patná dobrá shoda pro různé stupně redukce navzájem (Obrázek 5.3) respektive neredukovaným modelem (Obrázek 5.2). S ohledem na tuhost rhombické lopatky by pro navazující prováděné analýzy bylo postačující uvažovat pouze prvních 5 vlastních tvarů, které dostatečně věrohodně aproximují chování rhombické lopatky v požadovaném frekvenčním pásmu. S ohledem na ověření robustnosti použitého softwaru bylo přistoupeno k modální redukci na 10 vlastních tvarů, což prokáže i použitelnost metody pro lopatky, které v zájmové oblasti mají více vlastních tvarů.

3. Přechodové kmity olopatkovaného disku bez předeptnutí



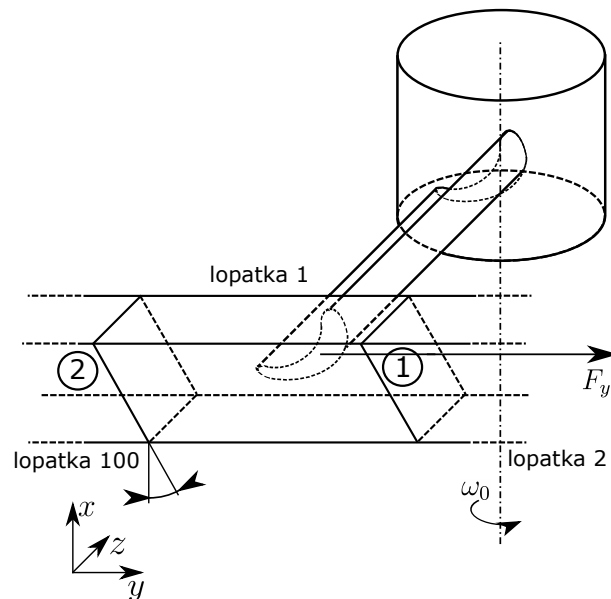
Obrázek 5.2: Porovnání odezev rhombické lopatky ve směru osy y bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení pro modální redukci na 5, 10 a 20 vlastních tvarů v porovnání s časovou integrací plného modelu.



Obrázek 5.3: Porovnání odezev rhombické lopatky ve směru osy x vybuzeané dýzovým buzením bez zahrnutí gyroskopických účinků a bez tlumení pro modální redukci na 5, 10 a 20 vlastních tvarů.

Vliv gyroskopických účinků je zahrnut postupem popsaným v kapitole 2.3.3, jehož použitelnost pro zvolenou geometrii je ověřena v kapitole 3.2.2. Modální transformací s redukcí počtu stupňů volnosti je získán matematický model jedné rhombické lopatky včetně gyroskopických účinků v modálních souřadnicích. Seřazením samostatných matematických modelů jednotlivých lopatek je získána soustava v podobě prezentované vztahem (2.162). Provázání jednotlivých lopatek je provedeno pomocí kontaktních plošek, které se nacházejí na bandáži rhombické lopatky. Pro řešení kontaktní úlohy je zvolen silový přístup a každá kontaktní plocha bandáže je diskretizována na 6 kontaktních plošek v koncepci 2×3 .

Pro ověření popsaného matematického modelu byl proveden ověřovací výpočet, ve kterém byla lopatka č. 1 zatížena skokově konstantní silou 100 N ve směru osy y . Její orientace byla definována dříve, viz Obrázek 3.10, respektive pro zatížení v disku, viz Obrázek 5.4. Pro zvolený ověřovací případ byl zanedbán vliv tření v kontaktních plochách bandáže, aby došlo k vybuzení co největšího počtu lopatek. Předpětí také nebylo uvažováno, aby bylo možné ověřit správné provázání kontaktu. Porovnávané výchylky náleží poslednímu uzlu v ose průřezu lopatky před bandáží. Tento uzel bude nazýván POI. Všechny výchylky v dalších podkapitolách budou odečítány právě v POI, pokud nebude uvedeno jinak. Porovnávané přechodové kmity budou vždy v LSS dané lopatky.

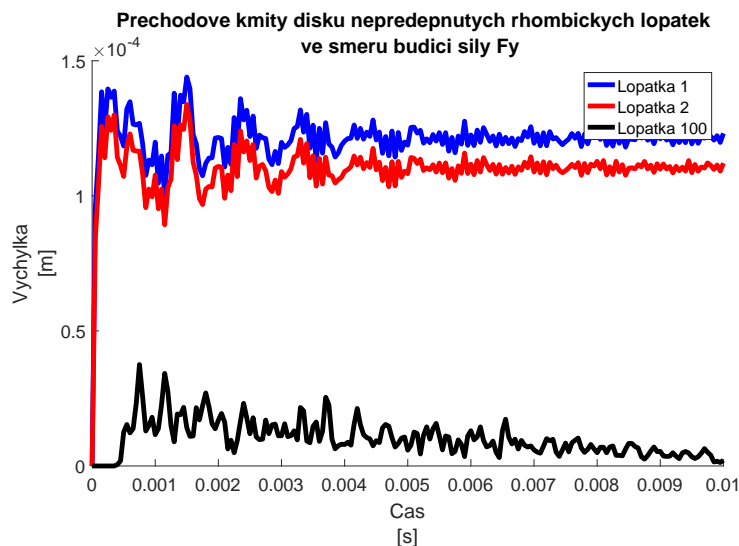


Obrázek 5.4: Zatížení rhombické lopatky disku — pohled z boku.

Vykreslování všech přechodových kmitů do jednoho obrázku by bylo pro velký počet lopatek dosti nepřehledné, proto byly vybrány pouze některé z nich. Nejprve byly

porovnány přechodové kmity uzlu POI 1., 2. a 100. lopatky, které jsou vyobrazeny na Obrázku 5.5. Tento výběr ověřuje cyklickou provázanost disku. Dále byly vybrány přechodové kmity 1., 25., 50. a 75. lopatky, jak je patrné na Obrázku 5.6, které zaznamenávají postupné šíření impulsu síly, vyvolaného kontaktováním jednotlivých bandáží.

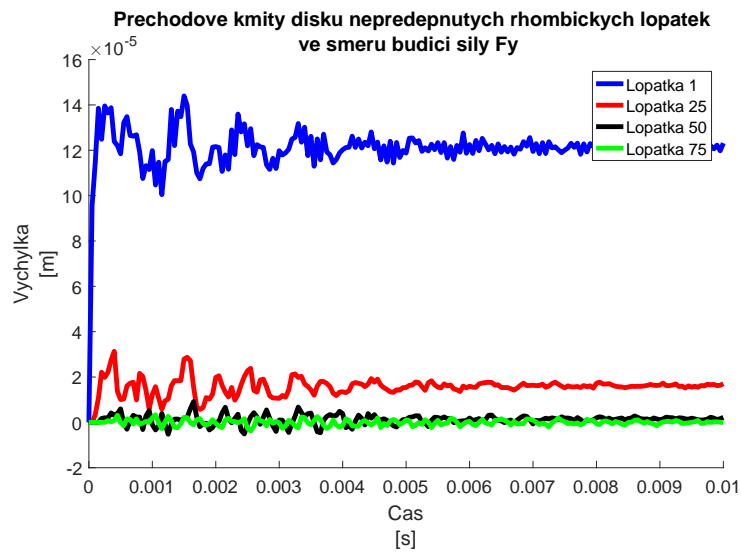
Správné chování lopatek bez uvažovaného předpětí je patrné z Obrázku 5.5, kdy je od zatížení lopatky č. 1 vybuzena zejména lopatka č. 2 (v případě uvažovaného předpětí by se současně s 1. lopatkou začala pohybovat i 100. lopatka). Rozdíl výchylek 1. a 2. lopatky je pak způsoben poddajností kontaktní vazby. Postupné vybuzení „kvartálních“ lopatek je dobře patrné na Obrázku 5.6. S ohledem na relativně velkou tuhost rhombických lopatek dochází pouze k malému vybuzení 25. lopatky, jejíž kmity jsou rychle utlumeny. Deformace celého olopatkového disku v čase $t = 0.015$ s je pak znázorněna na Obrázku 5.7, kde pro snazší orientaci je 100. lopatka označena hvězdičkami. Z přechodových kmitů je dobře patrné materiálové tlumení, které stojí za postupným útlumem kmitů a postupným kontaktováním jednotlivých lopatek.



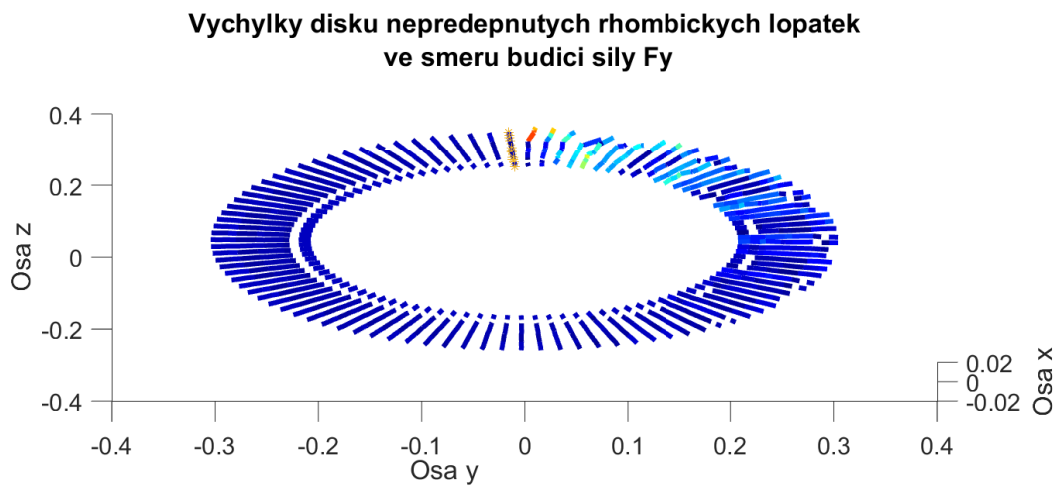
Obrázek 5.5: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N (lopatky 1, 2, 100).

Pro ověření správně fungující cyklické podmínky byla na 1. lopatku aplikována síla o stejné velikosti, leč opačného směru. Analogické výsledky pro přechodové kmity uzlu POI jsou patrné na Obr. 5.8, respektive 5.9. Deformace celého olopatkového disku v čase $t = 0.015$ s je pak znázorněna na Obrázku 5.10, kde 100 lopatka je opět znázorněna hvězdičkami.

Je však důležité poznamenat, že rozdíly v rovnovážné poloze jsou dány nesymet-

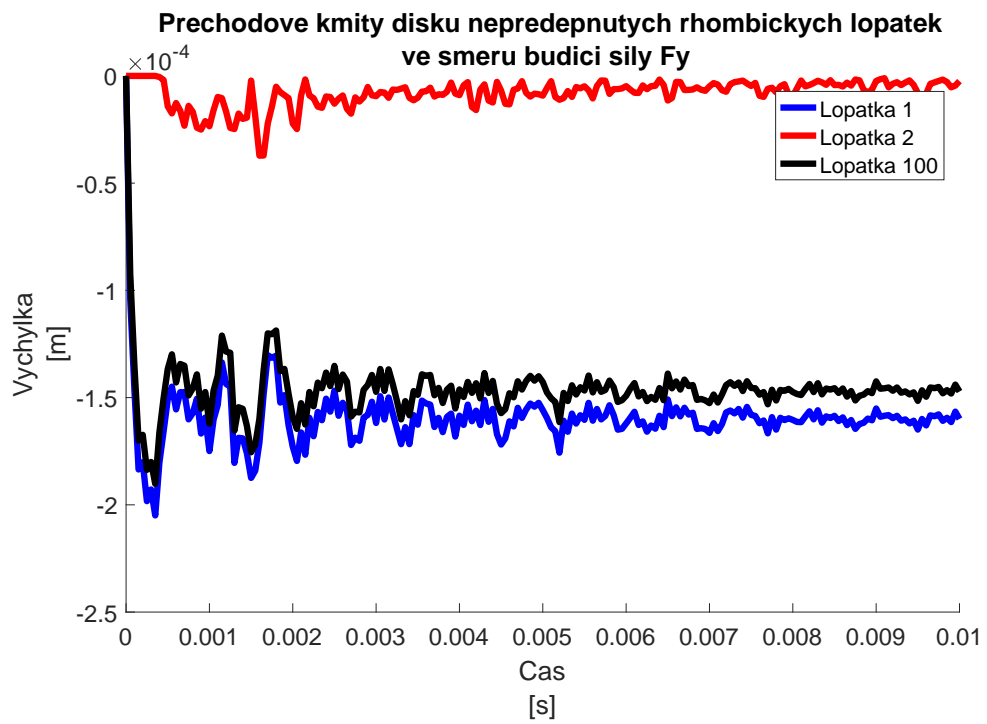


Obrázek 5.6: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N (lopatky 1, 25, 50, 75).

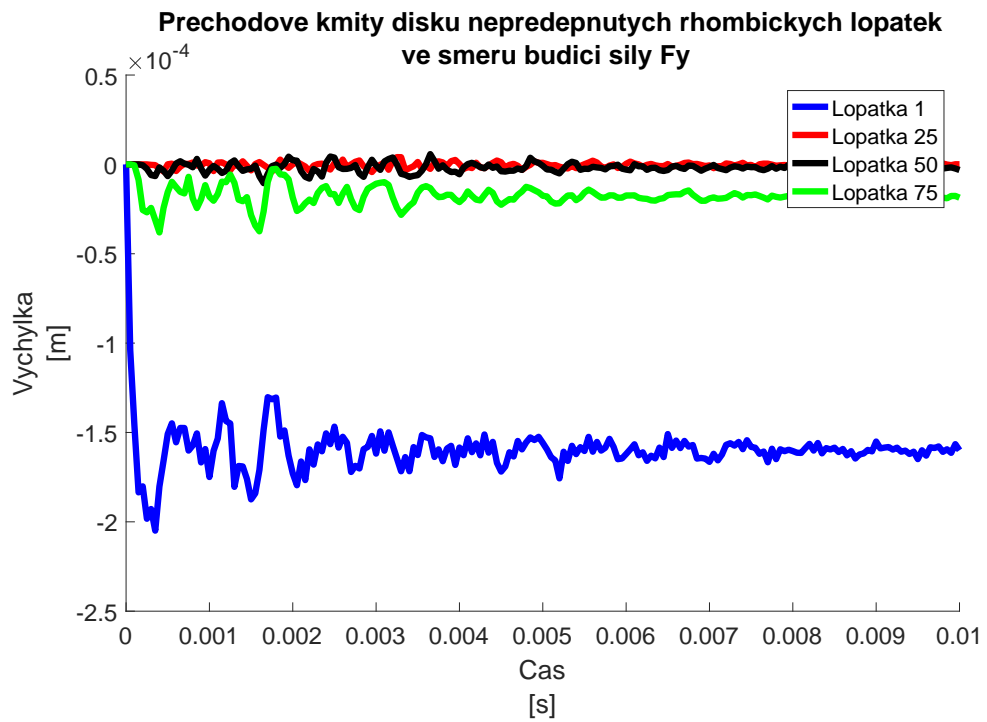


Obrázek 5.7: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = 100$ N.

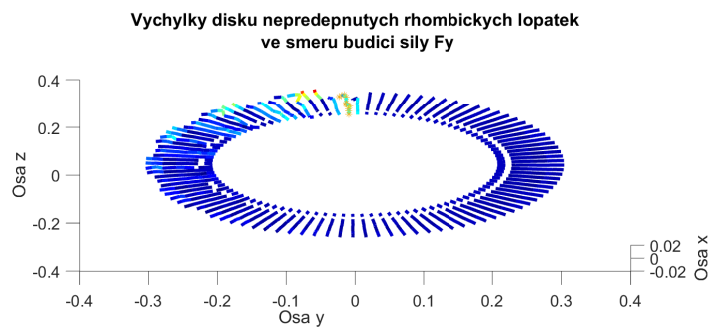
ričností průřezu rhombické lopatky a jeho různou tuhostí v kladném a záporném směru osy y .



Obrázek 5.8: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N (lopatky 1, 2, 100).



Obrázek 5.9: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N (lopatky 1, 25, 50, 75).



Obrázek 5.10: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na skokové buzení konstantní silou $F_y = -100$ N.

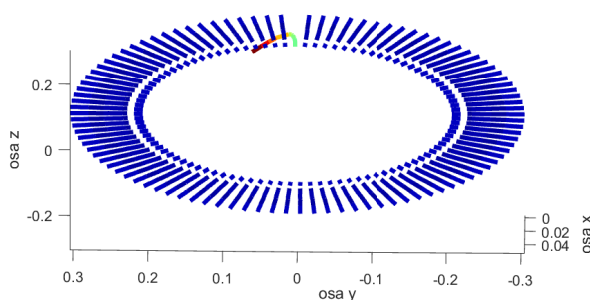
5.2 Modální vlastnosti disku rhombických lopatek s předepnutím

Vliv předepnutí je v modelu disku zohledněn dle teorie popsané v kapitole 2.2.3. Pro uvažovaný typ rhombických lopatek bylo v minulosti (např. [Zeman et al. (2010)]) uvažováno předpětí 3,27 MPa, což je hodnota odvozená z experimentálně změřené deformace v místě bandáže s hladkými kontaktními plochami bez vlivu rotace a materiálového tlumení lopatek.

Velikost předpětí má zásadní vliv na chování olopatkovaného disku, jak je demonstrováno v této kapitole, kde je provedena modální analýza olopatkovaného disku.

Vliv předpětí se projeví hlavně provázáním lopatek, aniž by byla přímo aplikovánavnější zatěžná síla v normálovém směru kontaktní plochy. Vliv provázání je pak demonstrován v Tab. 5.1, kde jsou uvedeny vlastní frekvence disku rhombických lopatek s různě velkým předpětím. Vliv provázání je zcela patrný — s rostoucím předpětím dochází k přeladění celého systému. Je pochopitelné, že dochází i ke změně vlastních tvarů, kdy nejnižší vlastní tvary stále odpovídají ohybovým kmitům, avšak dochází k postupnému soufáznému kmitání sousedních lopatek. Řádově vyšší předpětí pro zjištěné modální veličiny při zaokrouhlení na dvě desetinná místa se projevuje mírným zvýšením vlastních frekvencí až u vlastních tvarů charakterizovaných několika uzlovými kružnicemi, viz Tab. 5.1. U matematického modelu bez předpětí se vyskytují shodné vlastní tvary lopatek. Jinými slovy násobnost vlastních tvarů je rovna počtu lopatek.

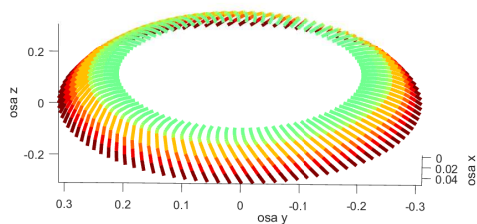
Díky uvažování shodných lopatek lze také pozorovat stonásobné vlastní frekvence u lopatek bez předepnutí a párové vlastní frekvence u lopatek s předpětím, k nimž jsou vlastní tvary pouze pootočené, viz Obrázek 5.12(c) a 5.12(e) respektive pro liniové vykreslení 5.12(d) a 5.12(f).



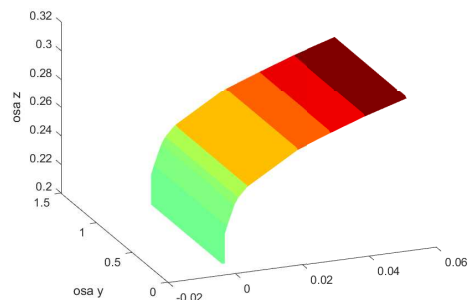
Obrázek 5.11: První vlastní tvar olopatkovaného disku bez uvažovaného předpětí.

Pořadí	Vl. frekvence [Hz] Předpětí 0 MPa	Vl. frekvence [Hz] Předpětí 0,27 MPa	Vl. frekvence [Hz] Předpětí 2,68 MPa	Vl. frekvence [Hz] Předpětí 3,27 MPa
1	990,76	991,90	991,90	991,90
2	990,76	992,76	992,76	992,76
3	990,76	992,76	992,76	992,76
4	990,76	995,20	995,20	995,20
5	990,76	995,20	995,20	995,20
6	990,76	998,81	998,81	998,82
7	990,76	998,81	998,81	998,82
8	990,76	1003,13	1003,13	1003,14
9	990,76	1003,13	1003,13	1003,14
10	990,76	1007,68	1007,68	1007,70
99	990,76	1046,12	1046,12	1046,13
100	990,76	1046,12	1046,12	1046,13
101	2244,60	2244,64	2244,64	2244,64
201	3794,00	3794,01	3794,01	3794,01
301	4592,08	4592,36	4592,36	4592,36
401	8624,90	8625,28	8625,28	8625,28
501	10642,67	10680,58	10680,61	10680,62
601	12542,18	13014,46	13014,69	13014,70
701	14600,96	14702,98	14703,02	14703,02
801	15328,36	15483,12	15483,15	15483,16
901	16535,70	18736,55	18736,59	18736,59

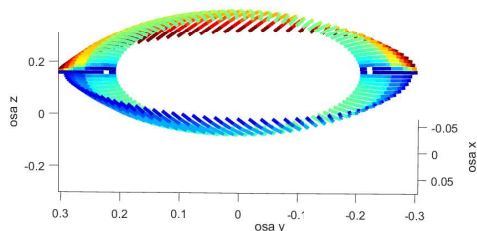
Tabulka 5.1: Studie vlivu předpětí olopatkovaného disku rhombických lopatek na vlastní frekvence.



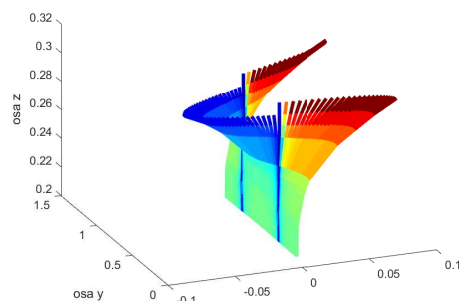
(a) První vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (0).



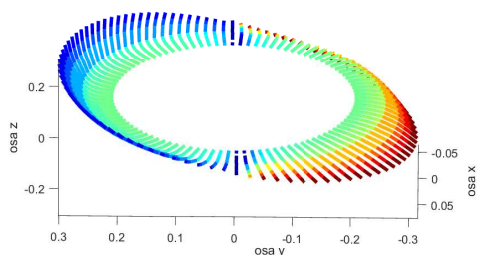
(b) První vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.



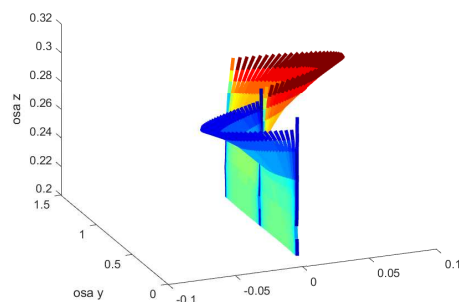
(c) Druhý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (1).



(d) Druhý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.

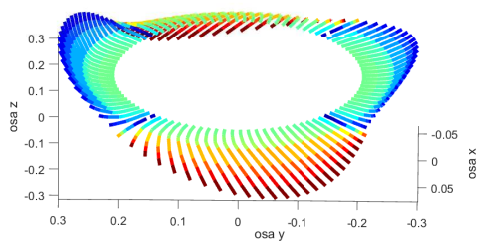


(e) Třetí vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (1).

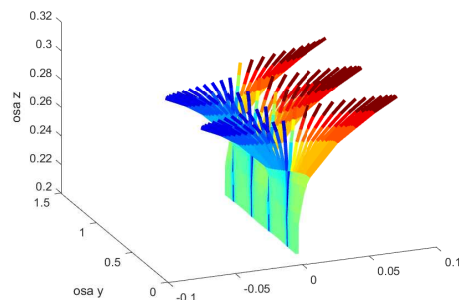


(f) Třetí vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.

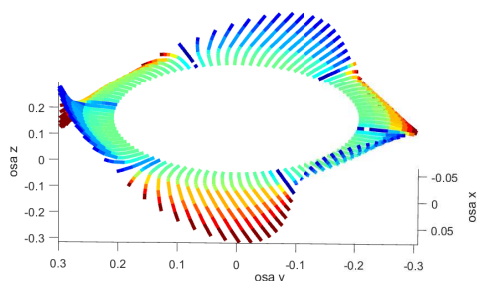
Obrázek 5.12: Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice s počtem uzlových průměrů uvedených v závorce.



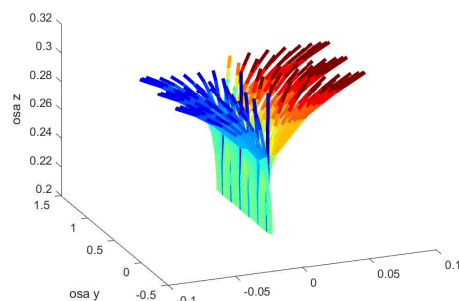
(a) Čtvrtý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (2).



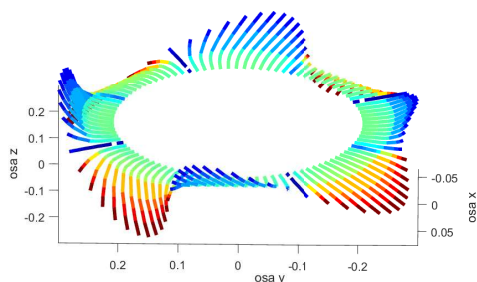
(b) Čtvrtý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.



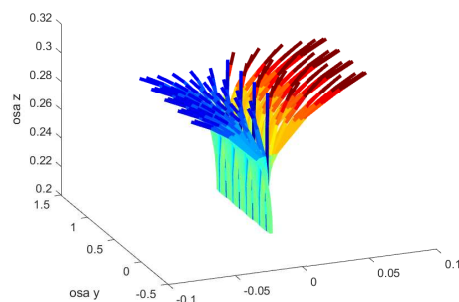
(c) Šestý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (3).



(d) Šestý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.

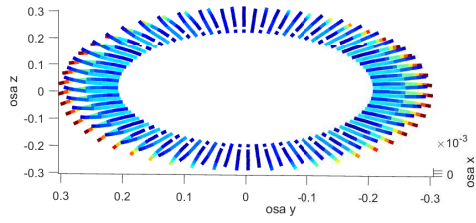


(e) Osmý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa (4).

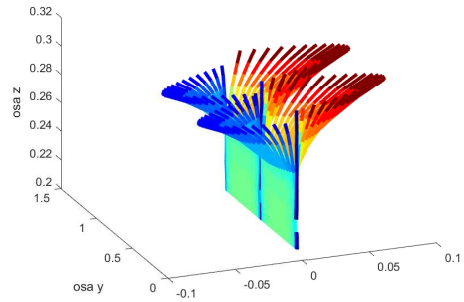


(f) Osmý vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.

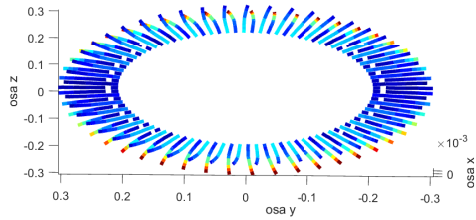
Obrázek 5.13: Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice s počtem uzlových průměrů uvedených v závorce (pokračování).



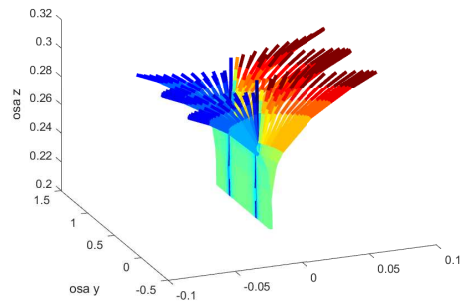
(a) 98. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa.



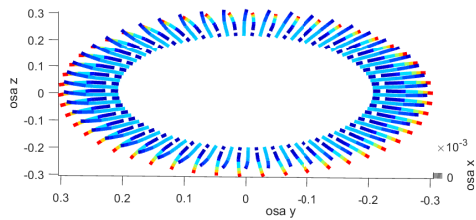
(b) 98. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.



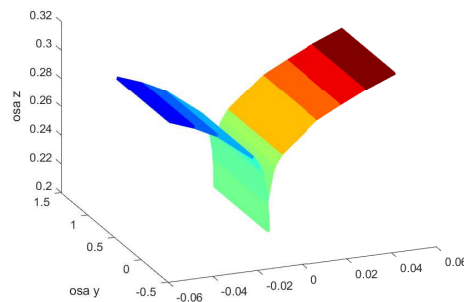
(c) 99. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa.



(d) 99. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.



(e) 100. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa.



(f) 100. vlastní tvar pro uvažované předpětí 0,27 MPa - lopatky v linii.

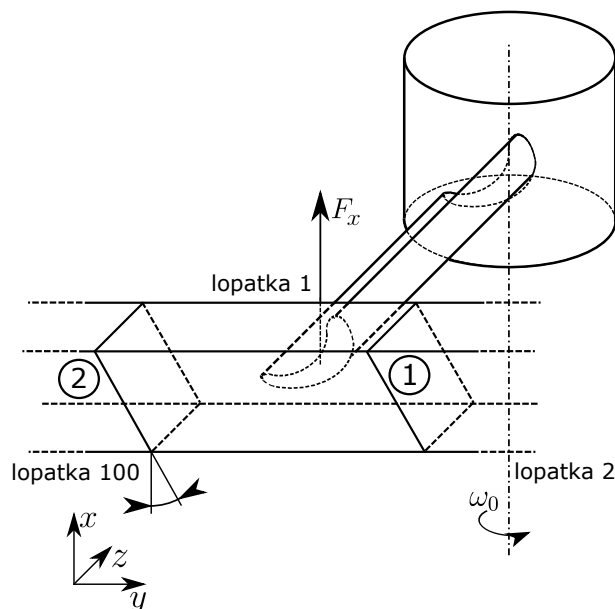
Obrázek 5.14: Vlastní tvary olopatkovaného disku bez uzlové kružnice.

5.3 Simulace chování olopatkovaného disku při uvažování tření, předeptnutí a měnící se rotaci

V následujících podkapitolách budou provedeny výpočetní analýzy se zahrnutím všech dříve představených jevů, tj. bude zohledněno tření, vliv rotace i předeptnutí.

5.3.1 Přejchodové kmity skokově zatíženého olopatkovaného disku s vlivem předeptnutí

Smyslem této úlohy je ověření vlivu předeptnutí. Olopatkovaný disk byl zatížen skokově konstantní silou $F_x = 100$ N, která byla aplikována do uzlu P0I 1. lopatky kolmo na rovinu disku \widehat{yz} , viz Obrázek 5.15. Uvažované předpětí bylo rovno 3,27 MPa. Aby se mohl projevit pouze vliv předeptnutí bylo tření zanedbáno, tzn. budící síla byla přenášena jen pomocí předpětí respektive normálové kontaktní síly.



Obrázek 5.15: Zatížení rhombické lopatky disku - pohled z boku.

Pro názornost jsou opět zobrazeny pouze přechodové kmity ve směru buzení uzlu P0I 1., 2. a 100. lopatky, které jsou vyobrazeny na Obrázku 5.16. Stejně jako v podkapitole 5.1 tak byly vybrány přechodové kmity uzlu P0I 1., 25., 50. a 75. lopatky. Jsou patrné z Obrázku 5.17, který zaznamenává postupné šíření impulzu síly vyvolaného kontaktováním jednotlivých bandáží.

Z důvodu zanedbání tření je tlumení kmitů způsobeno pouze vlivem materiálového tlumení. Dále je jasně patrné, že kmity všech lopatek se ustalují v nové rovnovážné poloze. Maximální výchylku vykazuje zatížená lopatka, tj. lopatka 1. Na Obrázku 5.17 však zaujme fakt, že průběhy výchylek 25. a 75. lopatky nejsou shodné. Tento fakt má několik důvodů:

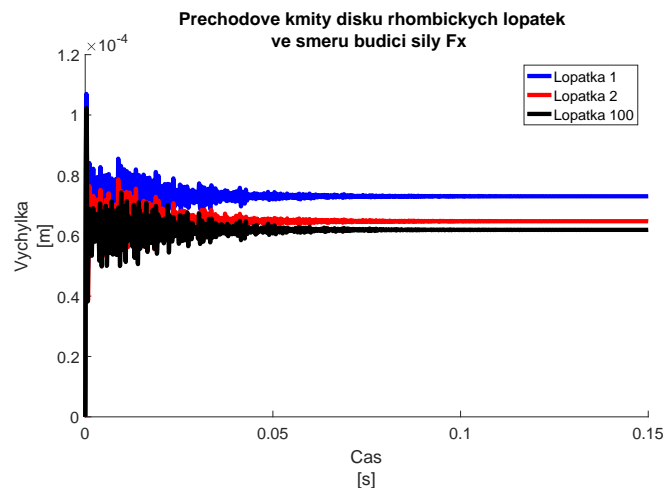
1. Tuhost lopatek:

Vzhledem ke geometrii rhombické lopatky není výsledná tuhost lopatky v místě kontaktu 1 a 2 totožná (viz Obrázek 5.19).

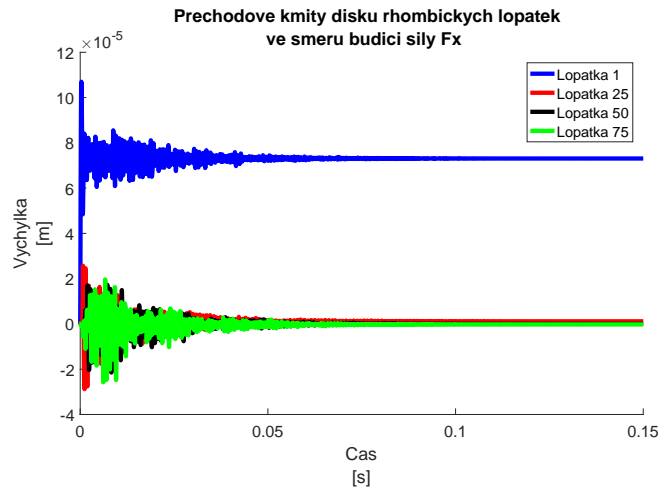
2. Vyosená normála:

Normála kontaktu neleží v rovině disku \widehat{yz} (viz Obrázek 5.19), proto se k matici předpětí $\mathbf{K}_{predpeti}$ přidává ještě cosinový průmět normálové složky kontaktu.

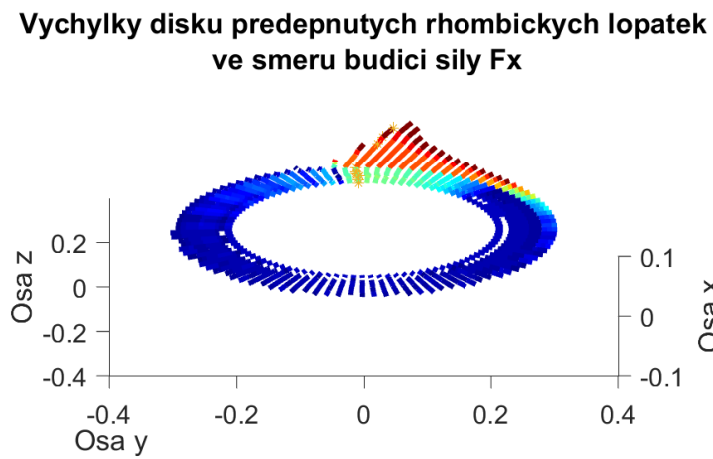
Vliv nerovnoměrnosti rozložení rovnovážné polohy jednotlivých lopatek, který koresponduje s výše uvedenými fakty, je jasně patrný z Obrázku 5.18, kde jsou vyobrazeny výchylky olopatkovaného disku v čase 0,015 s.



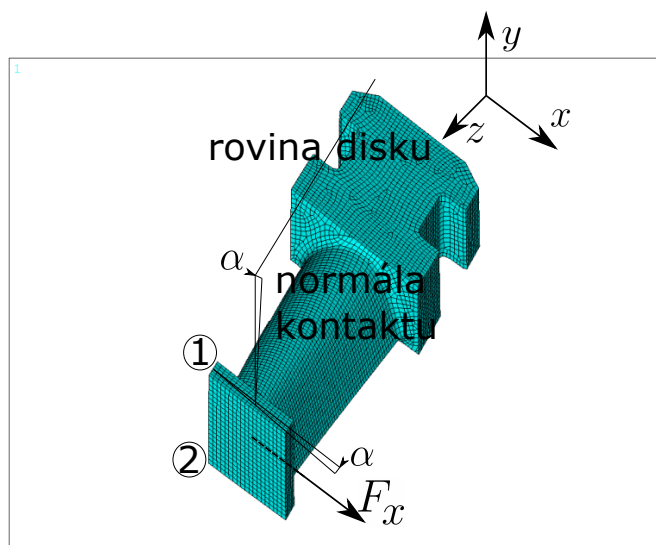
Obrázek 5.16: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N (lopatky 1, 2 a 100).



Obrázek 5.17: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N (lopatky 1, 25, 50, 75).



Obrázek 5.18: Odezva disku rhombických lopatek bez tření na buzení skokovou silou 100 N.



Obrázek 5.19: Natočení kontaktní plochy a umístění kontaktních ploch na rhombické lopatce.

5.3.2 Parametrická studie vlivu předepnutí na potlačení kmitů vybuzených dýzovým buzením

Potlačení kmitání je jedním z klíčových faktorů při navrhování olopatkovaných disků turbosoustrojí. Omezení kmitů se nechá provést vhodným předpětím, které způsobí maximální disipaci energie díky tření a přitom nedojde k tzv. „uzamčení“ kontaktu. Pro tuto analýzu byl použit model tření používaný v systému ANSYS, jehož tvar je popsán vztahem (4.5). Pro zvolené rhombické lopatky byla experimentálně změřena deformace za rotace a z ní odvozeno předpětí, viz [Zeman et al. (2010)]. Cílem této podkapitoly je ověřit výpočetní způsob, jakým lze efektivně určit vhodné předpětí.

Všechny parametrické studie vlivu předpětí byly provedeny pro hodnoty parametrů uvedených v Tab. 5.2.

Proměnná	Značka	Hodnota
Koeficient proporcionálního tlumení	β	10^{-5} [–]
Statický koeficient tření	f_s	0,5 [–]
Dynamický koeficient tření	f_d	0,25[–]
Koeficient spádu (Decay coefficient)	d	4 [–]
Předpětí	P_{stress}	od 0 do 19 [MPa]
Budicí síla dýzy	F_x	100 [N]
Počet dýz	n_d	50
Konstantní otáčky	ω_0	3000 [ot/min] \sim 314,159 [rad ⁻¹]
Pozn.: Hodnoty koeficientů f_s , f_d a d byly použity dle dříve prováděného výpočtu [Pešek et al. (2017)].		

Tabulka 5.2: Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu předepnutí.

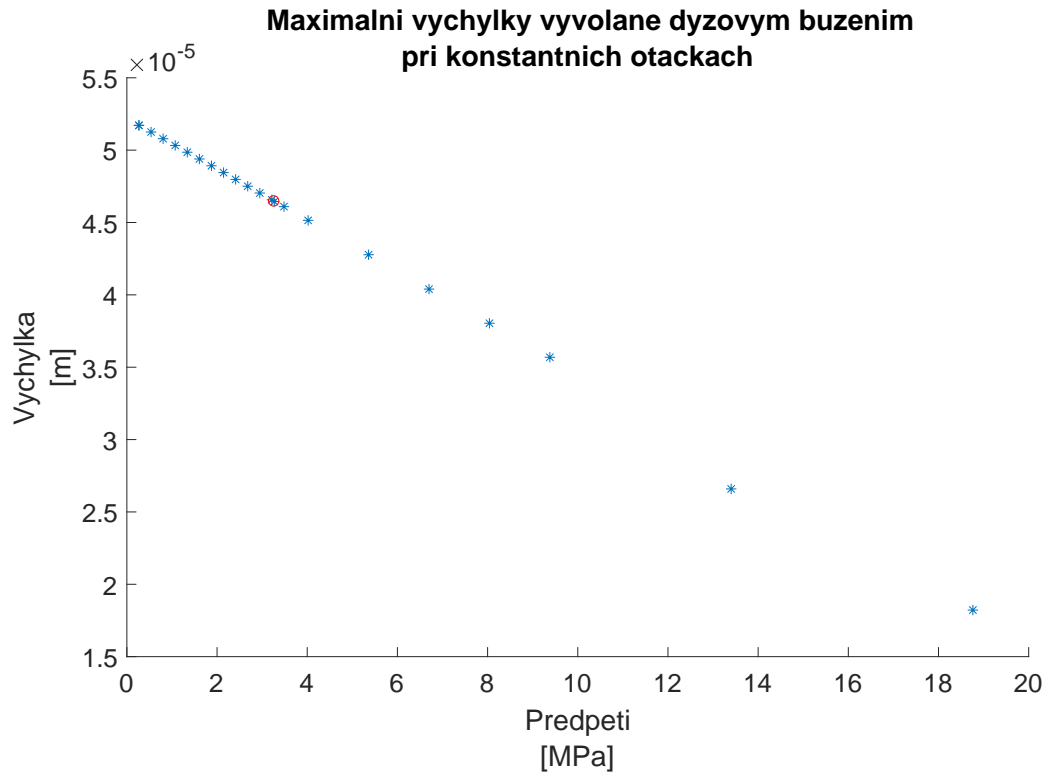
Dýzové buzení ve směru osy rotace disku s amplitudou 100 N bylo aplikováno do uzlu POI všech lopatek, vždy s fázovým posunutím $\delta = 2\pi/n_d$. Předpis pro uvažované dýzové buzení i -té lopatky s frekvencí $n_d\omega_0$ má tvar

$$F_{i,x} = 100\sin(n_d\omega_0 t + 2\pi - i\delta), \quad (5.1)$$

jímž byl simulován proud páry obtékající i -tou lopatku ve směru osy x .

Pro sestavený disk rhombických lopatek bylo provedeno velké množství výpočtů odezv. Maximální ustálená odezva ve směru buzení ze všech lopatek disku pro zadané předpětí reprezentuje jeden bod na Obrázku 5.20. Velikost ustálené odezvy pro referenční předpětí je na Obrázku 5.20 vyznačen červeným kolečkem. Závěr z provedené analýzy je

takový, že pro vzůstající předpětí ustálené výchylky klesají téměř lineárně. To lze vysvětlit relativně vysokou tuhostí samotné lopatky, jak bylo i prokázáno modální analýzou. Vliv „uzamčení“ nebyl ve zkoumaném pásmu pozorován právě z důvodu vysoké vlastní tuhosti lopatky. Lze tedy očekávat, že pro „poddajnější“ lopatky by se ve zkoumaném pásmu podařilo optimalizovat předpětí.



Obrázek 5.20: Maximální výchylky uzlu POI ve směru osy x při ustáleném kmitání při konstantních otáčkách 3000 ot/min i referenčních hodnotách tření a měnícím se předpětí.

5.3.3 Parametrická studie vlivu koeficientu tření na potlačení ustálených kmitů vyvolaných dýzovým buzením

Nejen předpětí, ale také velikost koeficientů tření má zásadní vliv na potlačení kmitů. V této parametrické studii byl disk sta rhombických lopatek opět vybuzen 50 dýzami při konstantních otáčkách 3000 [ot/min], tj. frekvencí buzení 2 500 Hz. Všechny zbývající parametry jsou uvedeny v Tab. 5.3. Uvažovaný model tření je shodný s předchozím výpočtem, tj. definovaný vztahem (4.5).

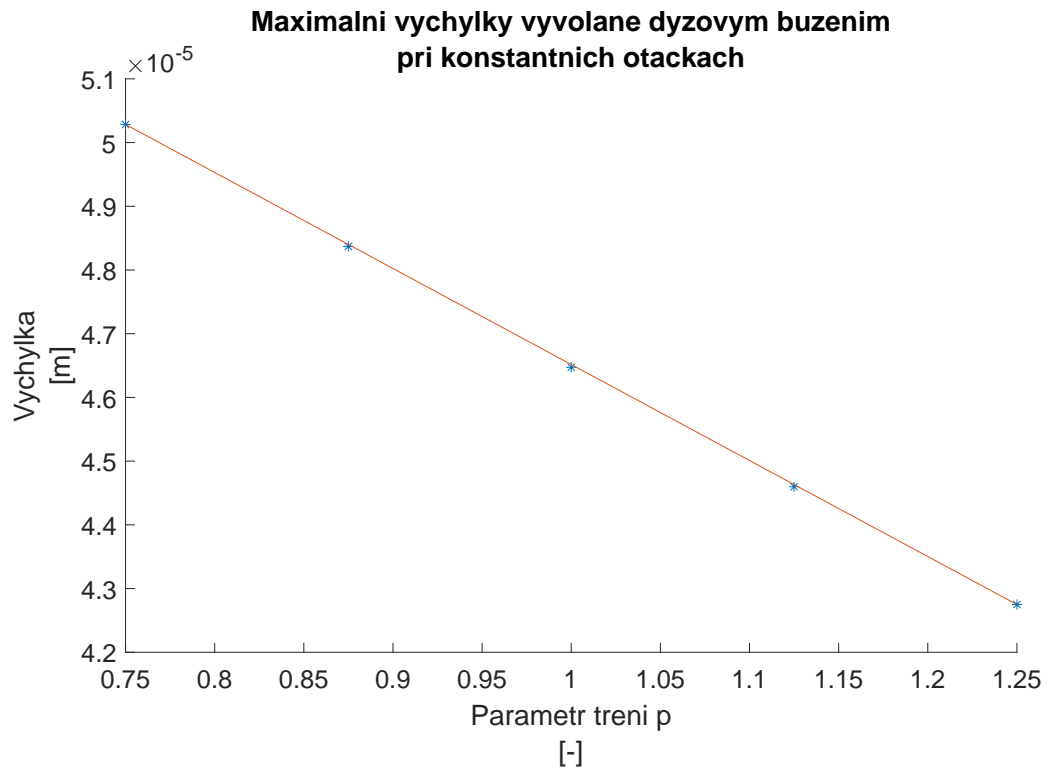
Bylo provedeno celkem 5 výpočtů, kdy pro každý z nich byly statický f_s i dynamický f_d koeficient tření pronásobený parametrem tření p . Velikost parametrů tření p byla zvolena $p = [0, 75; 0, 875; 1; 1, 125; 1, 25]$.

Proměnná	Značka	Hodnota
Koeficient proporcionálního tlumení	β	10^{-5} [–]
Statický koeficient tření	f_s	0,5 [–]
Dynamický koeficient tření	f_d	0,25[–]
Koeficient spádu (Deacy coefficient)	d	4 [–]
Předpětí	P_{stress}	3,27 [MPa]
Budicí síla dýzy	F_x	100 [N]
Počet dýz	n_d	50
Konstantní otáčky	ω_0	3000 [ot/min] \sim 314,159 [rad ⁻¹]
Pozn.: Hodnoty koeficientů f_s , f_d a d byly použity dle dříve prováděného výpočtu [Pešek et al. (2017)].		

Tabulka 5.3: Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu koeficientu tření.

Opět byl disk vybuzen dýzovým buzením definovaným předpisem (5.1) aplikovaným do POI ze všech lopatek. Porovnávané ustálené odezvy byly získány jako maximální odezva v POI všech lopatek. Její hodnoty jsou uvedeny na Obrázku 5.21. Z porovnání výchylek vyplývá, že pro vzrůstající tření klesá maximální velikost ustálené odezvy. Získaný závěr je zcela v souladu se závěry z předchozí podkapitoly, kdy pro vzrůstající předpětí docházelo ke snižování maximální vybuzené odezvy. V důsledku vysoké tuhosti rhombických lopatek je velikost maximálního tření, kdy dojde k „uzamčení“ vazby, stále velmi daleko provozním podmínkám. Vliv zvyšování koeficientu tření však má téměř lineární vliv na získaná maxima odezev, což je dokázáno proložením přímky vycházející z prvního maxima odezvy (pro $p = 0, 75$) do posledního maxima odezvy (pro $p = 1, 25$). Malý rozdíl mezi proloženou přímkou a vypočtenými hodnotami je dán relativně velkou tuhostí rhombické

lopatky, která eliminuje větší pozitivní vliv tření na redukci vybuzeých kmitů.



Obrázek 5.21: Maximální výchylky uzlu POI při ustáleném kmitání při konstantním předpětí 3,27 MPa, otáčkách 3000 [ot/min] a měnícím se parametru tření p .

5.3.4 Parametrická studie vlivu rotace na potlačení ustálených kmitů vyvolaných dýzovým buzením - amplitudová charakteristika

Poslední parametrická studie měla za cíl sledovat ustálenou odezvu při různých provozních otáčkách. Cílem bylo určit rezonanční otáčky olopatkovaného disku pro zvolené parametry. Při této analýze bylo nutné pro každé otáčky upravit matice $\omega_0 \mathbf{G}$, $\omega_0^2 \mathbf{K}_d$ a $\omega_0^2 \mathbf{K}_\omega$ a vektor odstředivých sil $\omega_0^2 \mathbf{f}_\omega$ v modelu (2.155) jedné lopatky a matic $\omega_0 \widehat{\mathbf{G}}$, $\widehat{\mathbf{K}}_\Omega(\omega_0)$ včetně vektoru $\omega_0^2 \widehat{\mathbf{f}}_\omega$ v modelu olopatkovaného disku (2.162).

Proměnná	Značka	Hodnota
Koeficient proporcionálního tlumení	β	10^{-5} [–]
Statický koeficient tření	f_s	0,5 [–]
Dynamický koeficient tření	f_d	0,25[–]
Koeficient spádu (Deacy coefficient)	d	4 [–]
Předpětí	P_{stress}	3,27 [MPa]
Budicí síla dýzy	F_x	100 [N]
Počet dýz	n_d	50
Otáčky	ω_0	od 10 [ot/min] do 3800 [ot/min]
Pozn.: Hodnoty koeficientů f_s , f_d a d byly použity dle dříve prováděného výpočtu [Pešek et al. (2017)].		

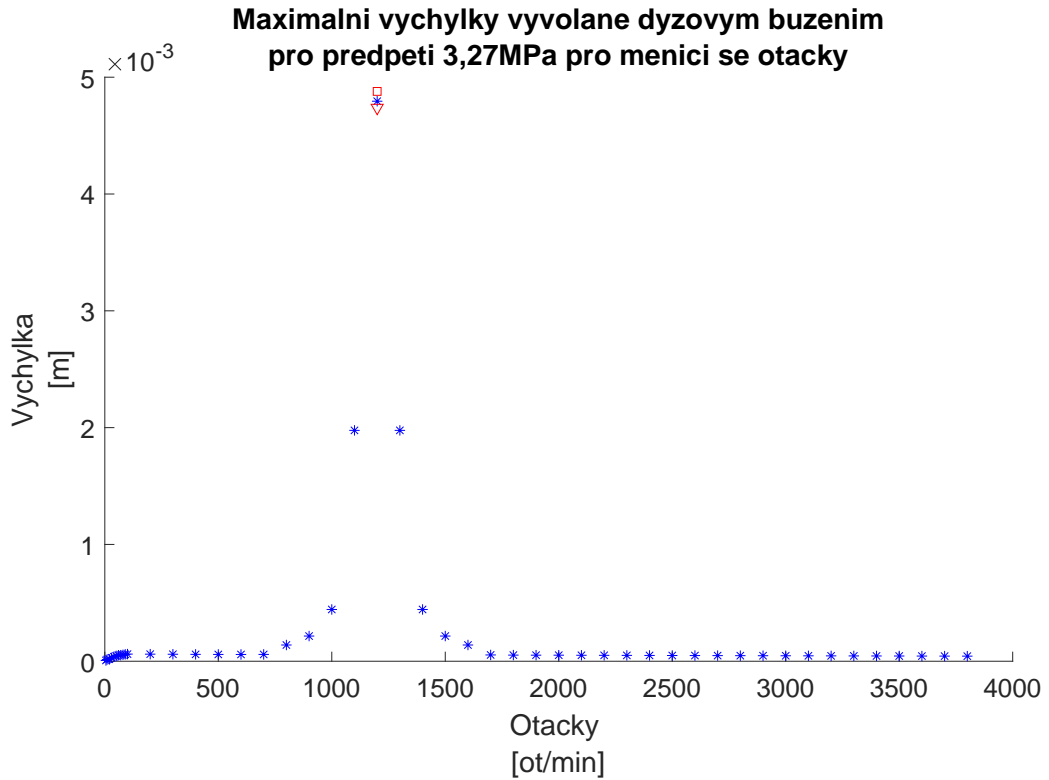
Tabulka 5.4: Tabulka vstupních parametrů pro parametrickou studii vlivu rotace.

Získaná amplitudová charakteristika na Obrázku 5.22 koresponduje s nejnižší vlastní frekvencí předeprnutého disku uvedenou v Tab. 5.1, kdy maximum ustálené odezvy pro 50 budicích dýz je v oblasti 1200 [ot/min], což odpovídá frekvenci dýzového buzení $\omega = 1000$ Hz. Je to místo předpokládané rezonance, kde hodnoty ustálené výchylky dosahují řádově vyšších hodnot. Dále je patrné, že s měnícími se otáčkami dochází velmi rychle k redukci kmitů. Pro 1200 [ot/min] bylo také provedeno porovnání ustálené odezvy pro parametr tření $p = 0,75$ (červený čtvereček) s 1,25 (červený trojúhelník). Z porovnání plyne, že tření má opět pozitivní vliv na redukci ustálené odezvy dýzově buzeného disku. Malý rozdíl v odezvě v rezonanci pro jednotlivé parametry tření p je příkládán opět použití velmi tuhých rhombických lopatek. V rezonanci dochází téměř k uzamčení, tudíž pozitivní vliv tření na redukci kmitů se projevuje minimálně. Lze předpokládat, že pro poddajnější lopatky bude vliv tření výraznější.

Vyšetřené rezonanční otáčky odpovídají stavu danému rovností

$$\frac{n}{60}n_d = f(ND, 0), \quad (5.2)$$

kde $f(ND, 0)$ je vlastní frekvence s 50-ti uzlovými průměry ($ND = n_d$) a žádnou uzlovou kružnicí. Tento stav je charakterizován nejen rovností vlastní frekvence olopatkovaného disku s dýzovou frekvencí buzení, ale též tvarem buzení odpovídajícím vlastnímu tvaru kmitu olopatkovanému disku.



Obrázek 5.22: Maximální výchylky uzlu POI při ustáleném kmitání při konstantním předpětí 3,27 MPa, referenčních hodnotách tření a měnících se otáčkách.

Kapitola 6

Závěr

6.1 Shrnutí výsledků

Předkládaná práce se zabývá problematikou kmitání těles s kontaktními vazbami s aplikacemi na dynamiku lopatek a olopatkovaných disků. Představené postupy a modely platí zcela obecně a lze je tedy aplikovat i na jiné výpočetní případy. Řešení této problematiky má na Katedře mechaniky Fakulty aplikovaných věd ZČU v Plzni dlouhou tradici a tato disertační práce ji vhodně doplňuje a umožňuje její další rozvoj.

Obsahem první kapitoly je stručná rešerše současného stavu problematiky kmitajících těles, poddajných lopatek a kontaktních úloh. V závěru kapitoly jsou vytýčeny cíle, které jsou v práci postupně plněny.

Druhá kapitola obsahuje teoretický popis užívaných matematických modelů, na kterých je poté vystavěna celá práce. Autorovou snahou bylo popsat postup co nejpodrobněji, proto obsahuje ucelený návod pro modelování lopatek pomocí lopatkových 1D konečných prvků se zahrnutím vlivu tuhé bandáže a dále prezentuje možnost modelování pomocí 3D konečných prvků vhodných pro obecné geometrie. V poslední části kapitoly je popsán postup zahrnutí vlivu rotace do matematického modelu soustavy lopatek, což je jedna z klíčových pasáží textu.

Ve třetí kapitole je věnována pozornost propojení komerčního MKP softwaru ANSYS s vlastním programem sestaveném v MATLABu, kdy jsou z ANSYSu vyexportovány matice hmotnosti \mathbf{M} , tuhosti \mathbf{B} , tlumení \mathbf{K} a vektorů pravých stran \mathbf{f} jedné lopatky. Z exportovaných matic jsou sestaveny výpočtové modely lopatky, dle postupu popsaného v předchozí kapitole, od konzervativního modelu po modely respektující vliv rotace a materiálového tlumení. Výpočtené přechodové kmity modálně redukováného 3D modelu rhombické lopatky jsou porovnány s přechodovými kmity plného 3D modelu, kdy oba dva přístupy jsou řešeny přímou integrací v časové oblasti. Z výsledků plyne velmi dobrá shoda.

Seznámení se a testování jednotlivých přístupů modelování kontaktu je hlavním obsahem čtvrté kapitoly. S ohledem na fakt, že se jedná primárně o popis chování kontaktu, všechny analýzy v této kapitole jsou prováděny na dvojici lopatek se zjednodušenou geometrií. V první části je uvažován tuhostní přístup modelování kontaktu, kdy provázání těles je provedeno pomocí matice tuhosti kontaktu \mathbf{K}_c . Přístup je vhodný při vyšetřování modálních vlastností olopatkovaných disků, avšak je výpočtově náročnější pro řešení kontaktních úloh se třením. Dále je věnována pozornost silovému přístupu, kdy se vliv kontaktu projevuje pouze pomocí akčních a reakčních silových účinků ve vektoru pravých stran. Obsahem je také porovnání několika modelů tření a popsání metody pro časově proměnnou velikost kontaktní plochy.

Spojení všech prezentovaných přístupů je provedeno v páté kapitole, kdy je modelován olopatkovaný disk rhombických lopatek. Správné modelování disku je ověřeno několika kontrolními výpočty, kdy výsledky jsou náležitě okomentovány tak, aby čtenáři byly poskytnuty všechny informace o chování zvoleného disku. Tím je myšleno vysvětlení počtu vlastních tvarů, kterými je provedena modální redukce každé lopatky, a dále modální analýza olopatkovaného disku při uvažování různých velikostí předpětí. V druhé části je pak provedena simulace chování olopatkovaného disku rhombických lopatek při uvažování tření, vlivu rotace i předepnutí. Výsledky celkově korelují s výsledky uvedenými v předchozích kapitolách.

6.2 Přínos práce

Hlavní přínos předkládané disertační práce spočívá v navržení metod modelování kmitání poddajných těles s uvažováním vlivu materiálového tlumení, tření v kontaktních vazbách těles a ustálené rotace. Významným přínosem je sestavení modelu olopatkovaného disku o zredukovaném počtu stupňů volnosti s využitím kondenzovaných modelů jednotlivých lopatek. Zredukovaný model lze pak řešit přímou integrací v časové oblasti v přiměřeném výpočtovém čase. Tím je vhodně rozšířeno portfolio možných přístupů modelování kmitání olopatkovaných disků, které jsou na Katedře mechaniky rozvíjeny.

Praktickým přínosem pro modelování geometricky složitých poddajných těles v interakci je využití komerčního softwaru (ANSYS), který po exportu matic a kondenzaci umožňuje modelování i složité soustavy těles v prostředí MATLAB. V disertační práci je zprogramován postup pro export matic ze softwaru ANSYS pomocí metod zvládajících práci s velkými soubory. Na sérii ověřovacích výpočtů byl prověřen způsob modelování kontaktních ploch pomocí diskretizace kontaktních ploch, včetně modelu tuhosti kontaktu.

Aplikačním přínosem disertační práce je modelování disku rhombických lopatek, vyšetření modálních vlastností a simulace jeho chování při uvažování tření v kontaktních plochách bandáží lopatek, předepnutí a vlivu rotace při skokovém a dýzovém harmonickém buzení.

6.3 Další rozvoj řešené problematiky

Na základě získaných poznatků autor disertační práce navrhuje rozšíření popsaného postupu modelování kmitání rotujících poddajných těles s kontaktními vazbami v těchto směrech:

1. Provedení testů vyvinutých metod a výpočtových programů na dalších typech reálných geometrií lopatek. Dle vypočtených výsledků lze předpokládat, že u disků s poddajnějšími lopatkami se pomocí popsaného postupu projeví citlivější chování na změnu parametrů modelujících tření v kontaktu a předeptnutí.
2. Zohlednění uložení lopatek k rotujícímu disku na poddajném hřídeli. Podajnost hřídele a uložení lopatky ovlivňuje chování celého olopatkového disku, jak bylo již dříve publikováno např. v [Kellner (2009)].
3. Aplikace reálných sil od proudění na celý povrch lopatky. Výhodou prezentované metody je, že silové účinky lze aplikovat do libovolného místa konečnoprvkové sítě. Bude tedy velmi zajímavé vyřešit vliv protékajícího média přes olopatkovaný disk.
4. Se znalostí exportu a zpracování matic lopatky ze softwaru ANSYS zpřesnění výpočtů kmitání olopatkovaného disku v prostředí MATLAB.

Literatura

- [Anderson et al. (2009)] Anderson, R. W. G., Long, A. D., Serre, T.: Phenomenological continuous contact–impact modelling for multibody simulations of pedestrian–vehicle contact interactions based on experimental data, *Nonlinear Dynamic*, Vol. 58, p. 199–208, (2009).
- [ANSYS Conference (2002)] http://ansys.net/ansys/papers/nonlinear/cyclic_symmetry_analysis.pdf
- [ANSYS Help (2016)]
- [Bathe (2014)] Bathe, K. J.: Finite Element Procedures (second edition), *K. J. Bathe*, Watertown, USA, (2014)
- [Blau (2009)] Blau, P. J.: Friction science and technology: From concepts to applications (second edition), *CRC Press*, Boca Raton, London, New York, (2009)
- [Borrajo et al. (2006)] Borrajo, J. M., Zucca, S., Gola, M. M.: Analytical Formulation of the Jacobian Matrix for Non-linear Calculation of the Forced Response of Turbine Blade Assemblies with Wedge Friction Dampers, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 41, p. 1118-1127, (2006).
- [Brožovský & Materna (2012)] Brožovský, J., Materna, A.: Metoda konečných prvků ve stavební mechanice, skriptum, *Vysoká škola báňská - Technická univerzita Ostrava a Západočeská univerzita v Plzni*, (2012).
- [Brůha (2010)] Brůha, J.: Kmitání lopatek s třecí kontaktní plochou, bakalářská práce, *Západočeská univerzita v Plzni*, (2010).
- [Brůha & Zeman (2011)] Bruha, J., Zeman, V.: Detuning impact of couple of blades with friction element on bending vibration, *Engineering Mechanics*, Institute of Thermo-mechanics AS CR, Praha, Vol. 18, p. 237-246, (2011).
- [Brůha & Zeman (2012)] Brůha, J., Zeman, V.: Analysis of friction characteristic parameters impact on vibration of couple of blades with friction element, *Engineering Mechanics*, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, Vol. 19, p. 309-323, (2012).

- [Brůha & Zeman (2016)] Brůha, J., Zeman, V.: Numerical analysis of the modal properties of a shroded turbine blading, *Book of full texts, 22nd Engineering Mechanics 2016*, Svratka, p. 94-97, (2016).
- [Byrtus et al. (2010)] Byrtus, M., Hajžman, M., Zeman, V.: Dynamika rotujících soustav, *Západočeská univerzita v Plzni*, (2010).
- [Byrtus et al. (2013)] Byrtus, M., Hajžman, M., Zeman, V.: Linearization of friction effects in vibration of two rotating blades, *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 7, p. 5-22, (2013).
- [Charleux et al. (2006)] Charleux, D., Gibert, C., Thouverez, F., Dupeux, J.: Numerical and Experimental Study of Friction Damping in Blade Attachments of Rotating Bladed Disks, *International Journal of Rotating Machinery*, Hindawi Publishing Corporation, Vol. 26, p. 1-13, (2006).
- [Cigeroglu & Ozguven (2006)] Cigeroglu, E., Ozguven, H. N.: Nonlinear Vibration Analysis of Bladed Disks with Dry Friction Dampers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 295, p. 1028-1043, (2006).
- [Csaba (1998)] Csaba, G.: Forced Response Analysis in Time and Frequency Domains of a Tuned Bladed Disk with Friction Dampers, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 214, p. 395-412, (1998).
- [Dupal (2004)] Dupal, J.: Výpočtové metody mechaniky, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2004).
- [Drumwright & Shell (2011)] Drumwright, E., Shell, D. A.: An Evaluation of Methods for Modeling Contact in Multibody Simulation, *IEEE International Conference Robotics and Automation (ICRA) 2011*, p. 1695-1701, (2011).
- [Feeny & Moon (2007)] Feeny, F. B., Moon, F. C.: Empirical Dry-friction Modeling in a Forced Oscillator Using Chaos, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 47, p. 129-141, (2007).
- [Firrone & Zucca (2010)] Firrone, C. M., Zucca, S.: Modelling Friction Contacts in Structural Dynamics and its Application to Turbine Bladed Disks, *Politecnico di Torino, Department of Mechanics*, Italy, (2010).
- [Flores & Lankarani (2010)] Flores, P., Lankarani, H. M.: Spatial rigid-multibody systems with lubricated spherical clearance joints: modeling and simulation, *Nonlinear Dynamic*, Vol. 60, p. 99-114, (2010).
- [Gharib & Hurmuzlu (2012)] Gharib, M., Hurmuzlu, Y.: A New Contact Force Model for Low Coefficient of Restitution Impact, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 79, p. 4506- (2012).

- [Hippmann (2004)] Hippmann, G.: Modellierung von Kontakten komplex geformter Körper in der Mehrkörperdynamik, Dissertation, Universität Wien, (2004).
- [Kappagantu & Feeny (2000) a] Kappagantu, R. V., Feeny, B. F.: Part 1: Dynamical Characterization of a Frictionally Excited Beam, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 22, p. 317-333, (2000).
- [Kappagantu & Feeny (2000) b] Kappagantu, R. V., Feeny, B. F.: Part 2: Proper Orthogonal Modal Modeling of a Frictionally Excited Beam, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 23, p. 1-11, (2000).
- [Kubín & Hlous (2014)] Kubín, Z., Hlous, J.: Measurement of rhombic bladed disk, High Speed Testing Rig - 5 500 RPM, *Doosan Škoda Power*, (2014).
- [Kellner (2009)] Kellner, J.: Kmitání turbínových lopatek a olopatkovaných disků, Disertační práce, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2009).
- [Lankarani & Nikravesh (1994)] Lankarani, H. M., Nikravesh, P. E.: Continuous Contact Force Models for Impact Analysis in Multibody Systems, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 5, p. 193-207, (1994).
- [Lazan (1968)] Lazan, B. J.: Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, *Pergamon Press*, New York, (1968).
- [Linhart (2009)] Linhart, J.: Mechanika tekutin I, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň (2009).
- [Machado et al. (2012)] Machado, M., Moreira, P., Flores, P., Lankarani, H. M.: Compliant contact force models in multibody dynamics: Evolution of the Hertz contact theory, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 53, p. 99 - 121, (2012).
- [Miguel & Otaduy (2012)] Miguel, E. , Otaduy, M. A.: Efficient Simulation of Contact between Rigid and Deformable Bodies, *Multibody Dynamics*, Brussels, Belgium, (2012).
- [Míšek & Kubín (2009)] Míšek, T., Kubín, Z.: Static and Dynamic Analysis of 1 220 mm Steel Last Stage Blade for Steam Turbine, *Applied and Computational Mechanics*, Vol. 3, p. 133 - 140, *Západočeská univerzita v Plzni*, (2009).
- [MSC software (2000)] http://www.mscsoftware.com/support/library/conf/adams/na/2000/32_ford_steering_shafts.pdf
- [Mukras et al. (2010)] Mukras, S., Kim, N. H., Mauntler, N. A., Schmitz, T., Sawyer, W. G.: Comparison Between Elastic Foundation and Contact Force Models in Wear Analysis of Planar Multibody System, *Journal of Tribology*, Vol. 132, ASME, (2010).

- [Polach (2007)] Polach, P.: Evaluation of the suitability of the bladed disk design regarding the danger of the resonant vibration excitation, *Engineering Mechanics*, Vol. 18, p. 181-191, (2011).
- [Pešek et al. (2011)] Pešek, L., Půst, L., Vaněk, F., Veselý, J.: FE Modeling of Blade Couple with Friction Contacts under Dynamic Loading, *13th World Congress in Mechanism and Machine Science*, Guanajuato, Mexico, (2011).
- [Pešek et al. (2015)] Pešek, L., Půst, L., Zeman, V., Hajžman, M., Byrtus, M., Brůha, J.: Experimental and Numerical Investigation of Friction Element Dissipative Effects in Blade Shrouding, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 79, p. 1711-1726, (2015).
- [Pešek et al. (2017)] Pešek, L., Půst, L., Bula, V., Cibulka, J.: Numerical analysis of dry friction damping effect of the boss couplings on three blade bundle, *IDETC/CIE*, Cleveland, USA (2017).
- [Petrov (2011)] Petrov, E. P.: Explicit Finite Element Models of Friction Dampers in Forced Response Analysis of Bladed Disks, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, Vol. 130, ASME, (2008).
- [Petrov & Ewins (2003)] Petrov, E. P., Ewins, D. J.: Analytical Formulation of Friction Interface Elements for Analysis of Nonlinear Multi-Harmonic Vibrations Of Bladed Disks, *Journal of Turbomachinery*, Volume 125, ASME, (2003).
- [Plánička et al. (2007)] Plánička, F., Zajíček, M., Adámek, V.: <http://www.kme.zcu.cz/kmet/pp/>, Podpůrné materiály pro studenty, *Katedra mechaniky, Západočeská univerzita Plzeň, Plzeň*, (2007).
- [Rao & Saldanha (2003)] Rao, J. S., Saldanha, A.: Turbomachine Blade Damping, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, p. 731-738, (2003).
- [Rivin (1999)] Rivin, E.: Stiffness and Damping in Mechanical Design, *Wayne State University*, Detroit, Michigan, Dekker, Inc., (1999).
- [Rychecký (2011)] Rychecký, D.: Kmitání mechanických soustav s kontaktními vazbami, Diplomová práce, *Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň*, (2011).
- [Sanliturk et al. (2011)] Sanliturk, K. Y., Ewins, D. J., Elliott, R., Green, J. S.: Friction Damper Optimization: Simulation of Rainbow Tests, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, ASME, Vol. 123, p. 930-939, (2001).
- [Shabana (1998)] Shabana, A. A.: Computer Implementation of the Absolute Nodal Coordinate Formulation for Flexible Multibody Dynamics, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 16, p. 293-306, Kluwer Academic Publishers, (1998).

- [Sanliturk et al.(1999)] Sanliturk, K. Y.: Ewins, D. J., Standbridge, A. B., Underplatform Dampers for Turbine Blades: Theoretical Modelling, Analysis and Comparison with Experimental Data, *Imperial College of Science, Technology and Medicine Mechanical Engineering Department, Centre of Vibration Engineering*, London, (1999).
- [Stangeland & Bampton (2002)] Stangelanf, M. L., Bampton, C. C.: Turbine Blade Tip Shrouded Enclosed Friction Damper, *United States Patent, No. Us 6,371,727 B1*, (2002).
- [Sextro et al. (2001)] Sextro, W., Popp, K., Krzyzynski, T.: Localization in Nonlinear Mistuned Systems with Cyclic Symmetry, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 25, p. 207-220, (2001).
- [Šašek (2010)] Šašek, J.: Vybrané problémy dynamiky rotorových soustav, Disertační práce, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2010).
- [Tokar' et al. (2003)] Tokar', I. G., Zinkovskii, A. P., Matveev, V. V.: On the Problem of Improvement of the Damping Ability of Rotor Blades of Contemporary Gas-Turbine Engines, *Strength of Materials*, Vol. 35, p. 368–375, (2003).
- [Toufine et al. (1999)] Toufine, A., Barrau, J. J., Berhillie, M.: Dynamic Study of a Structure with Flexion-Torsion Coupling in the Presence of Dry Friction, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 18, p. 321-337, (1999).
- [Yang et al. (1998)] Yang, B. D., Chu, M. L., Menq, C. H.: Stick-Slip–Separation Analysis and Non-linear Stiffness and Damping Characterization of Friction Contacts Having Variable Normal Load, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 210, p. 461-481, (1998).
- [Yao et al. (2011)] Yao, M. H., Chen, Y. P., Zhang, W.: Nonlinear Vibrations of Blade with Varying Rotating Speed, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 68, p. 487–504, (2011).
- [Yu et al. (2010)] Yu, L., Zhao, Z., Tang, J., Ren, G.: Integration of absolute nodal elements into multibody system, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 62, p. 931-943, (2010).
- [Yuan et al. (2010)] Yuan, J. , Scarpa, F., Allegri, G., Titurus, B., Patsias, S., Rajasekara, R.: Efficient computational techniques for mistuning analysis of bladed discs: A review, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 87, p. 71-90, (2017).
- [Zeman et al. (2010)] Zeman, V., Byrtus, M., Hajžman, M.: Harmonic Forced Vibration of two Rotating Blades with Friction Damping, *Engineering Mechanics*, Vol. 17, p. 187-200, (2010).
- [Zeman & Hlaváč (2004)] Zeman, V., Hlaváč, Z.: Kmitání mechanických soustav, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2004).

[Zucca et al. (2011)] Zucca, S., Furrone, C. M., Gola, M. M.: Numerical Assessment of Friction Damping at Turbine Blade Root Joints by Simultaneous Calculation of the Static and Dynamic Contact Loads, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 67, p. 1943-1955, (2011).

Soupis publikací autora související s tématem práce

- [α 1] Rychecký, D., Hajžman, M.: Comparison of Two Approaches to the Modelling of Vibrating Bodies with Mutual Frictional Contact, *Applied Mechanics 2012*, p. 125-128, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2012), ISBN: 978-80-261-0097-3.
- [α 2] Rychecký, D.: Dvojice lopatek s třecí vazbou buzená silami ve dvou kolmých rovinách, *Studentská vědecká konference 2012*, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2012), ISBN: 978-80-261-0127-7.
- [α 3] Hajžman, M., Rychecký, D.: Multipoint Contact Approach to the Analysis of Interacting Flexible Bodies Vibration, *Advances in Mechanisms Design*, vol. 8, p. 181 - 186 Springer, Dordrecht (2012), ISBN: 978-94-007-5125-5.
- [α 4] Rychecký, D., Hajžman, M.: Effect of a Contact Stiffness Model on the Vibration of Interacting Beams, *Colloquium Dynamics of Machines 2013*, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, (2013), ISBN: 978-80-87012-44-4.
- [α 5] Rychecký, D.: Metoda pro řešení kontaktní úlohy se třením vykazující malé relativní výchylky, *Studentská vědecká konference 2013*, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2013), ISBN: 978-80-261-0238-0.
- [α 6] Hajžman, M., Brůha, J., Pešek, L., Zeman, V., Rychecký, D.: Basic Optimization Methodology for the Design of Friction Damping in Blade Shrouds, *ASME Conference*, New York, (2013), ISBN: 978-0-7918-5596-6.
- [α 7] Rychecký, D., Hajžman, M.: Dynamic Behaviour of Interacting Three Blades Excited by General Forces, *Cumputational Mechanics 2013*, *Západočeská univerzita v Plzni*, Plzeň, (2013), ISBN 978-80-261-0282-3.
- [α 8] Hajžman, M., Rychecký, D.: The Blade Interaction Model Suitable for Nonlinear Simulations of Bladed Disks, *The 7th Asian Conference on Multibody Dynamics 2014*, Seoul, (2014). p. 231-232, ISBN: 978-89-950027-7-3.
- [α 9] Brůha, J., Rychecký, D.: Modeling of Rotating Twisted Blades as 1D Continuum, *Engineering Mechanics*, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, p. 32-33, (2015), ISSN: 1805-8248.
- [α 10] Brůha, J., Rychecký, D.: Modeling of Rotating Twisted Blades as 1D Continuum, *Applied Mechanics and Materials*, Praha, (2016), ISSN: 1662-7482.
- [α 11] Rychecký, D., Hajžman, M.: Nonlinear Interaction in Dynamical Systems with Clearances, *DYMAMESI, International Colloquium*, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, (2016), ISBN: 978-80-87012-60-4.

- [α 12] Marques, F., Rychecký, D., Isaac, F., Hajžman, M., Polach, P., Flores, P.: Spatial Revolute Joints with Clearance and Friction for Dynamic Analysis of Multibody Mechanical Systems, *International Conference on Multibody System Dynamics*, Montreal, (2016), ISSN: 1662-7482.
- [α 13] Rychecký, D., Hajžman, M., Zeman, V.: Modeling of Rotating Bladed Disks by using conservative model analysis, *Engineering Mechanics*, Institute of Thermomechanics AS CR, Praha, p. 733-736, (2018), ISBN: 978-80-86246-88-8.