ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
KATEDRA MATEMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Konstrukční úlohy v rovině ve středoškolské matematice

Plzeň, 2011 Martina Kalná

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů, jejichž úplný seznam je součástí práce.

V Plzni dne 26. července 2011 Martina Kalná

Poděkování

Chtěla bych poděkovat vedoucímu diplomové práce panu Doc. RNDr. Josefu Polákovi, CSc. za odbornou pomoc, ochotu a trpělivost.

Abstrakt

Tato práce se zabývá konstrukčními úlohami řešenými na středních školách. V první části je nastíněn historický vývoj konstrukčních úloh, poté následuje teoretická část zabývající se konstrukčními úlohami jako takovými. Další kapitola pojednává o řešitelnosti konstrukčních úloh pomocí pravítka a kružítka, přičemž jsou v této kapitole zařazeny také tři klasické eukleidovsky neřešitelné úlohy. Hlavní částí práce je pak metodické zpracování osmi vyučovacích hodin věnovaných konstrukčním úlohám. Poslední kapitola obsahuje zamyšlení nad užitím informační technologie při vyučování konstrukčních úloh.

Klíčová slova

Eukleidovské konstrukce, fáze řešení konstrukční úlohy, metody řešení konstrukční úlohy, řešitelnost konstrukční úlohy, eukleidovsky neřešitelné úlohy, přibližné konstrukce, dynamická geometrie

Abstract

This thesis deals with geometric constructions in Secondary School Mathematics. The first chapter is dedicated to its historical development followed by the theoretical explanation and description of it. The next chapter discusses solubility of construction problems by means of a ruler and compass (including three classical unsolvable constructions problems). The main focus of this work is in the methodical elaboration of eight different Math lessons concerned with planar geometric constructions. The last chapter ponders over the benefits information technology might bring in the connection with teaching (and learning) geometric constructions.

Keywords

Euclidean constructions, phases of solving of consruction problems, methods of solving of construction problems, solvability of construction problems, unsolvable consruction problems, approximate constructions, dynamic geometry

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Tato diplomová práce se zabývá konstrukčními úlohami řešenými na středních školách. S prvními konstrukčními úlohami se potýkali lidé již ve starověkém Egyptě a Babylonii, měly však spíše charakter praktický. V souvislosti s rozvojem znalostí v oblasti geometrie docházelo v průběhu tisíciletí také k vývoji problematiky konstrukčních úloh (hledání přesných konstrukcí, Platonův požadavek tzv. eukleidovského řešení konstrukční úlohy a zavedení schematu řešení těchto úloh, nezdary v hledání eukleidovského řešení některých konstrukčních úloh, ...). I přes takto dávnou historii je však toto téma stále aktuální a mnoho důkazů z oblasti geometrichých konstrukcí bylo podáno až v druhé polovině 19. století. Podrobnější historii tématu je věnována druhá kapitola této práce, při jejím zpracování jsem čerpala z [12], [1], [14], [11], [7], [52], [53], [54], [55], [9] a [56].

Na středních (i základních) školách se provádí řeší konstrukčních úloh tzv. eukleidovsky, tj. pomocí pravítka a kružítka. Přesné vymezení pojmu konstrukční úloha, eukleidovské řešení konstrukční úlohy a základní eukleidovské konstrukce jsou uvedeny v první části kapitoly Planimetrické konstrukční úlohy, která má teoretický charakter. Je zde dále provedeno třídění konstrukčních úloh podle různých hledisek, jsou zde také popsány fáze řešení konstrukčních úloh a metody, jak lze konstrukční úlohy řešit. V podkapitole Řešitelnost konstrukčních úloh pravítkem a kružítkem je vyslovena nutná podmínka eukleidovské řešitelnosti úlohy, včetně důkazu neřešitelnosti klasických úloh starověku pomocí pravítka a kružítka. V souvislosti s neřešitelností některých konstrukčních úloh jsou v následující kapitole uvedeny vybrané přibližné konstrukce. Teorii konstrukčních úloh jsem nastudovala z [4],[3], [8], [15], [11], [7], [10], [2], [5], [6], [9] a [12].

Hlavním cílem práce je didaktické zpracování několika vyučovacích hodin zaměřených na řešení konstrukčních úloh na střední škole (gymnáziu). Ty jsou obsahem kapitoly Metodické zpracování konstrukčních úloh v planimetrii na SŠ. Před samotné scénáře vyučovacích hodin jsou předřazeny dvě související kapitoly: Vývoj zpracování konstrukčních úloh ve SŠ učebnicích (pro tuto kapitolu jsem prostudovala dřívější i současné učebnice, jejichž výčet je uveden v seznamu použité literatury v závěru práce) a Konstrukční úlohy na ZŠ a SŠ — krátký úvod, který se týká zařazení tématu konstrukčních úloh na základních a středních školách. Poté následuje celkem osm scénářů, kdy je v každém z nich uveden obsah, cíl a písemné zpracování dané vyučovací hodiny. Všechny obrázky (konstrukce) použité v této a teoretické části práce jsou vytvořeny v programu GeoGebra. Zároveň jsou také součástí přiloženého CD, lze je tedy přímo využít během vyučovací hodiny v jejich původní dynamické podobě, či je případně předělat pro vlastní potřeby.

Poslední kapitola této diplomové práce je věnována zamyšlení nad využitím informační technologie při řešení konstrukčních úloh na střední škole, zejména dynamických geometrických programů.

Kapitola 2

Historie

Chceme-li se zabývat historickým vývojem konstrukčních úloh, je třeba nejprve hledat počátky geometrie jako takové.

Slovo geometrie je řeckého původu a znamená zeměměřičství. Svůj původ má ve starověkém Egyptě a Babylonii, kde byla využívána k vyměřování pozemků, výstavbě zavlažovacích kanálů a stavbě opevnění, chrámů a pyramid pravidelných tvarů — jednalo se např. o vytyčení pravých úhlů, výpočet výšky a od ní se odvíjející sklon bočních stěn, aj.. Geometrie tedy v tomto období zůstávala úzce spjata s řemesly na úrovni útržkovitých návodů. Až pozdější studium geometrických útvarů dalo geometrii charakter abstraktního matematického oboru, který využíval logiku a dedukci. Geometrie bývá považována za jeden z prvních matematických oborů vůbec.

V souvislosti s Babyloňany je třeba zmínit, že již oni zvládali konstruovat všechny pravidelné n-úhelníky. Některé přesně, některé jen přibližně, pro ně však tento rozdíl nebyl důležitý (přesnou konstrukci pravidelných n-úhelníků začali hledat až Řekové).

Podíváme-li se na počátky řecké vědy, dostáváme se do maloasijských přístavních měst Milétu a Efesu. Do tohoto období (6. – 4. století př. n. l.), spadá např. první snaha dělit úsečku v poměru zlatého řezu (dříve nazýván *božský poměr*, termín *zlatý řez* či *zlatý poměr* pochází až z 19. století) a pokusy vypočítat další střední hodnoty či průměry (dodnes zachován průměr aritmetický a geometrický).

Jedním z nejvýznamnějších učenců antického období je **Thales z Miletu (624–543 př. n. l.)**. Ten údajně stanovil výšku pyramidy tak, že změřil délku stínu svislé tyče známé délky a délku stínu pyramidy a z těchto tří délek určil hledanou výšku pyramidy. Již on tedy ovládal pojem podobnosti trojúhelníků. Tuto znalost využíval také například k určování výšek a vzdáleností lodí na moři. V matematice jsou mu přisuzovány následující výsledky: průměr dělí kruh na dvě poloviny, úhly při základně rovnoramenného trojúhelníku jsou shodné, vrcholové úhly jsou shodné, či s největší pravděpodobností světově nejstarší matematická věta: úhel vepsaný do půlkružnice je pravý, resp. všechny úhly nad průměrem jsou pravé. Nevíme však, zda je pouze formuloval nebo i dokázal. Mnoho z těchto Thaletových poznatků využíváme právě při řešení konstrukčních úloh.

Některé věty o úměrných úsečkách a o podobných obrazcích byly předmětem úvah vědců školy pythagorejské (6. a 5. století př. n. l.). Významnou postavou tohoto období je proto také **Pythagoras ze Samu (asi 560–480 př. n. l.)**. Je paradoxem, že ačkoliv je Pythagoras znám především díky geometrii (Pythagorova věta), pythagorejská koncepce matematiky byla výhradně aritmetická. Pythagorova škola pokládala za základ jsoucna číslo (arithmos). Věřili, že stavbu světa jde popsat přirozenými čísly a jejich poměry. Po objevení nesouměřitelných úseček, tj. úseček, jejichž poměr velikostí nelze vyjádřit jako celé číslo (např. délka úhlopříčky v jednotkovém čtverci), bylo nutné celou tehdy známou teorii úměrnosti úseček znovu přepracovat (tzv. I. krize matematiky).

Právě zde, v pythagorejské škole, se zrodilo studium pravidelných mnohoúhelníků. Pro pythagorejce byl (oproti Babyloňanům) rozdíl mezi přesnou a přibližnou konstrukcí zásadní. Přibližnou konstrukci chápali jen jako jakýsi řemeslnický návod, oproti tomu přesnou konstrukci považovali za znalost, pomocí které by mohli porozumět zákonům celého vesmíru. Magickým obrazcem byl pro ně pravidelný pětiúhelník. Od něj je také odvozen symbol pentagramu, využívaný v pythagorejské sektě jako poznávací znamení. Důvodem zvýšeného zájmu o něj může být, že jeho úhlopříčky jsou navzájem děleny v poměru zlatého řezu stejně dobře jako skutečnost, že schopnost sestrojit tento útvar pomocí pravítka a kružítka byl první velký úspěch řecké matematiky.

V pátém století před naším letopočtem byly též formulovány proslulé matematické **problémy starověku**:

1. Kvadratura kruhu
2. (Re)duplikace krychle
3. Trisekce úhlu

U každého z těchto problémů se jednalo o konstrukci jednoho geometrického objektu z jiného geometrického objektu užitím pravítka a kružítka. Jejich řešení přispělo k objevu nových matematických objektů, např. kuželoseček, některých kubických křivek, křivek čtvrtého řádu a jedné transcendentní křivky — kvadratrix.

Úloha týkající se kvadratury kruhu souvisí těsně s úlohou rektifikace kružnice, a tedy s číslem π. Jde o sestrojení takové úsečky délky x, aby obsah čtverce o straně délky x byl roven obsahu kruhu o daném poloměru r (tj. aby $x^2 = \pi r^2$).

Řekové, kteří se geometrii učili od Egypťanů, od nich převzali také problém kvadratury kruhu. První pokusy Antifona a Brisona získat kruh jako průměr opsaného a vepsaného mnohoúhelníku daly pouze přibližnou hodnotu. Zdálo se, že úloha je neřešitelná, protože podstatou kruhu je oblast, kdežto podstata mnohoúhelníku je přímost, proto nelze zaměňovat jedno za druhé. Problémem se v průběhu let zabývali různí vzdělanci, včetně největšího ze všech starověkých matematiků, Archimeda ze Syrakus. Ze středověkých učenců pak např. Fibonacci, Viéte, Leibniz a mnoho dalších. Nelze opomenout ani Poláka **Adama A. Kochanského (1631–1700)**, knihovníka a dvorního matematika krále Jana Sobieského. Ten vypracoval jednu ze známých přibližných kvadratur kruhu, přitom vypočetl π s přesností na 0,0000 01. Velmi známá je jeho přibližná rektifikace kružnice (viz kapitolu 5).

Další výzkum v oblasti kvadratury kruhu byl podnícen objevením existence tzv. Hippokratových měsíčků. Hippokratovy měsíčky (někdy též označované půlměsíčky či menisky) jsou určité plošné útvary ohraničené kruhovými oblouky, ke kterým je možné nalézt mnohoúhelníky o stejném obsahu (většinou se jedná o trojúhelník nebo lichoběžník).

Hippokrates z Chiu (2. pol. 5. století př. n. l.) napsal nedochované dílo *Základy*, které se stalo vzorem výkladu prvních čtyř knih Eukleidových *Základů* (viz dále). Z Hippokratova díla se dochovala pouze část, ve které je pojednáno o zmíněných měsíčkách. Hippokratova tvrzení sice dávala naději, že lze provést kvadraturu kruhu, ale bohužel i kvadraturu měsíčků je možné provést jen v několika konkrétních případech.

Matematici ani v průběhu následujících let nezanechávali hledání kvadratury kruhu. Pařížské Akademii věd bylo tehdy zasíláno takové množství údajných řešení, že ta v roce 1775 odmítla zkoumat řešení kvadratury kruhu, která jí budou zaslána. Teprve až v druhé polovině 19. století (1882) dokázali dva matematici, Francouz **Ch. Hermite (1822–1901)** a Němec **F. Lindemann (1852–1939)**, že číslo π není kořenem žádné algebraické rovnice s racionálními koeficienty. Tím byl zároveň podán důkaz, že není možné užitím pouze pravítka a kružítka sestrojit úsečku, jejíž délka by se přesně rovnala obvodu daného kruhu (tzv. rektifikace kružnice), ani čtverec, jehož obsah by se přesně rovnal obsahu daného kruhu. Od té doby se již nikdo tímto problémem nezabývá, neboť byl definitivně rozřešen - negativně.

Druhý problém antické matematiky, zdvojení krychle, je spojován s následujícím příběhem [53]:

Na ostrově Délos vypukla epidemie moru. Obyvatelé vypravili poselstvo do delfské věštírny s důležitým posláním: zjistit, jakým způsobem si naklonit bohy, aby mor pominul. Pýthie odpověděla, že je třeba zdvojit oltář boha Apollóna, který měl tvar krychle a byl ze zlata. Byla tedy odlita druhá zlatá krychle, stejně velká a postavená na krychli první. Mor však trval. Poselstvo se opět vydalo do delfské věštírny. Dozvěděli se, že je třeba zachovat navíc tvar oltáře. Tuto úlohu na ostrově Délos řešit neuměli. Obrátili se s prosbou o pomoc na Platona. Ten jim však pravil: "Bohové se na vás hněvají, neboť se málo věnujete geometrii."

Podle Hippokrata hranu krychle o objemu dvakrát větším než původní dostaneme dvojím sestrojením střední geometrické úměrné. Athénský geometr Menaichmos, který se také snažil rozřešit délský problém, k tomu užil dvou parabol (viz např. [57]). Ani jedno z těchto podaných řešení však není eukleidovské, tj. přesné řešení pouze pravítkem a kružítkem.

Třetí úloha, kterou starověcí matematici též nedokázali vyřešit, je úloha požadující rozdělit libovolný úhel na tři stejné části pomocí kružítka a pravítka.
Pythagorejci, zabývající se pravidelnými mnohoúhelníky, se pokoušeli rozdělit na tři stejné části úhel 120°, což by jim umožnilo sestrojit pravidelný devítiúhelník. K přibližnému rozdělení libovolného úhlu na tři stejné části bylo vymyšleno hned několik přístrojů. Jeden z nich je založen např. na křivce objevené **Hippiasem z Elidy (5. století př. n. l.)**, tzv. Hippiově trisektris, která byla později užita Deinostratosem k řešení kvadratury kruhu, odtud jiný, výše zmíněný název křivky — kvadratrix (její užití např. v [56]). Jiný přístroj zase využívá například tzv. Nikomédovy konchoidy.

Neřešitelnost problémů zdvojení krychle a trisekce úhlu byla dokázána dříve než neřešitelnost kvadratury kruhu, a to v roce 1837 francouzským matematikem **P. L. Wantzelem (1814–1848)**.

Často bývá k těmto třem starověkým úlohám přidávána ještě výše zmíněná rektifikace kružnice a konstrukce pravidelných n-úhelníků. Všechny tyto úlohy mají charakter čistě teoretický, v praxi není důvod se omezovat jen na pravítko a kružítko, jako byl kladen požadavek zde. Každá požadovaná konstrukce lze provést s dostatečnou přesností. Jejich praktický význam je proto téměř nulový, nabývají však na důležitosti ve srovnání se skutečností, že téměř 2500 let podněcovaly vývoj matematického myšlení. Až v 19. století bylo ukázáno, že tyto úlohy jsou neřešitelné a byla odvozena nutná a postačující podmínka pro možnost konstrukce pravidelných n-úhelníků (viz kapitolu 5).

Velký význam a vliv na vývoj konstrukčních úloh měla také Akademie založená kolem roku 377 př. n. l. matematikem a jedním z nejúspěšnějších filozofů té doby, Sokratovým žákem **Platonem (asi 427–347 př. n. l.)**.
Geometrii chápal jako nezbytnou průpravu filozofického bádání. Nad vchodem do Platonovy Akademie byl umístěn nápis:

"*Nevstupuj nikdo, kdo neznáš geometrii*".

Při řešení konstrukčních úloh byl v Platonově Akademii zaveden zvláštní postup (schéma), které v podstatě užíváme dodnes. Po formulaci úlohy byl vždy prováděn rozbor (analysa), poté následovala vlastní konstrukce včetně důkazu její správnosti. V pozdějších letech byl tento postup doplněn o zkoumání podmínek, za nichž je úloha řešitelná (determinace). V Platonově škole byl navíc rozvinut pojem *geometrického místa bodu* (dnes množiny bodů dané vlastnosti), na jehož principu je založena jedna z metod řešení konstrukčních úloh. Platon zároveň položil požadavek, aby se při konstrukcích používalo pouze pravítko a kružítko. Toto Platonovo omezení časově předchází Eukleidovi. Nevíme však, co Platona v tomto směru inspirovalo. Možným vysvětlením je, že konstrukce pomocí pravítka a kružítka jsou konstrukce pomocí nejzákladnějších geometrických prvků — přímek a kružnic. Při řešení konstrukčních úloh bylo tedy použito pouze těchto dvou základních konstrukcí:

1. Dvěma body vést přímku
2. Z daného bodu opsat kružnici s daným poloměrem

Přitom počet použitých základních konstrukcí při řešení jedné úlohy měl být konečný. Tento požadavek převzal Platonův žák Eukleides ve svých *Základech*, a proto konstrukce, které splňují předešlé podmínky, dnes nazýváme konstrukcemi eukleidovskými.

V souvislosti s eukleidovskými konstrukcemi se dostáváme k nejvýznamnější postavě historie geometrie:

Eukleides z Alexandrie (asi 325–260 př. n. l.), řecký matematik a geometr, o kterém v podstatě nevíme téměř nic. Pouze se domníváme, že Eukleides studoval na Akademii v Athénách, která byla tou dobou důležitým střediskem vědecké práce, a že byl prvním z členů světoznámé Alexandrijské knihovny. Eukleides provedl shrnutí tehdejších matematických poznatků do logicky provázané struktury po vzoru Aristotelových principů deduktivního systému. Vzniklo tak jedinečné dílo, jež v řečtině nese název *Stocheia*. Eukleides tímto ovlivnil vývoj matematiky a vyučování matematice na další dvě tisíciletí a teprve v druhé polovině 19. století přestává být Eukleidovo dílo hlavním učebním textem začínajících studentů.

Eukleidovy Základy (Stoicheia)

Eukleidovy *Základy* (latinsky *Elementa*) se skládají z 13 Knih (oddílů), kde obsahem Knihy I. – IV. je především planimetrie (studium geometrických útvarů v rovině). Kniha V. se zabývá Eudoxovo teorií proporcí, Kniha VI. podobností trojúhelníků, další knihy jsou věnovány teorii čísel (Kniha VII. – IX.), teorii kvadratických iracionalit a jejich odmocnin (Kniha X.) a stereometrii (Kniha XI. – XIII.).

Celé *Základy* jsou vybudovány podle jednotného logického schématu. Eukleides vychází z několika jednoduchých základních vět, jejichž platnost je zaručena pouze zkušeností. Z těchto základních vět pak logicky vyvodil téměř všechny do té doby známé matematické poučky. Výklad tedy spočívá na logické dedukci vět ze soustavy definic, postulátů a axiomů. Lze říci, že stěžejní význam *Základů* je dán ani ne tak samotným obsahem, jako právě formou jejich zpracování.

Nedostatkem tohoto Eukleidova díla je však definování primitivních pojmů jako bod, přímka a rovina. Zároveň Eukleides nepodal úplný výčet axiomů a postulátů (úplná soustava axiomů pochází až od **Davida Hilberta (1862–1934)** z roku 1899).

Ve vztahu k planimetrickým konstrukčním úlohám mají velký význam první čtyři Knihy:

Kniha I. – pojednává o přímkách, úsečkách, trojúhelnících, rovnoběžnících, jejich vlastnostech a vzájemných vztazích

Kniha II. – pojednává o dělení úseček a jejich důsledcích (geometrická algebra), transformaci geometrických útvarů

Kniha III. – pojednává o vlastnostech kružnic (tětivy, tečny, úhly v kružnicích, oblouky a úseče, mocnost)

Kniha IV. – pojednává o kružnici ve spojení s jinými útvary (opisování a vepisování kružnic trojúhelníkům a pravidelným mnohoúhelníkům)

Úvod k první knize je i úvodem k celému spisu. Skládá se z 23 definic (výměry, vymezení pojmů) a 14 vět bez důkazu — 9 axiomů (obecných počátků, zásad), 5 postulátů (úkolů prvotných; některé z nich v dnešní terminologii označujeme jako základní konstrukční výkony). Některé definice mají charakter definic dnešního významu, jiné jsou větami, které budí jen názornou představu o základních geometrických pojmech.

Úkoly prvotné jsou následující:

1. Vytvořit úsečku, která spojuje dva dané body.
2. Danou úsečku na jedné i druhé straně prodloužit tak daleko, jak potřebujeme.
3. Vytvořit kruh o daném středu, na jehož obvodě leží daný bod.
4. Všechny pravé úhly jsou si rovny.
5. Nechť úsečka u protíná úsečky p, q tak, že na jedné straně úsečky u je součet vnitřních úhlů α, β, které svírají sečky p, q s úsečkou u, menší než dva pravé úhly. Potom na této straně jest úsečky p, q prodloužit tak, aby se tato jejich prodloužení protla.

Odstavec každé Knihy je číslován, kdy následuje buď text matematické věty a její důkaz či zadání konstrukční úlohy (problému) a její řešení. Eukleides nerozlišoval mezi matematickou větou a konstrukcí (v prvních třech Knihách má konstrukční charakter třetina problémů, Kniha IV. je výhradně konstrukční). Každý odstavec má však stejnou strukturu:

1. Formulace věty, resp. zadání konstrukční úlohy
2. Popis objektů
3. Vlastní důkaz, resp. konstrukce
4. Závěr - zopakování věty, resp. zadání úlohy

Obsah těchto odstavců první knihy lze rozdělit na tři části. První část (věta 1 – 26) se zabývá především trojúhelníky a pravoúhelníky. V druhé části (věta 27 – 32) je vyložena teorie rovnoběžek, kde v poslední větě této skupiny je jí využito k důkazu tvrzení, že součet úhlů v trojúhelníku se rovná dvěma pravým. Poslední část (věta 33 – 48) se zabývá rovnoběžníky, čtverci a trojúhelníky. Poslední dvě věty Knihy I. obsahují důkaz Pythagorovy věty a a její obměny.

První úloha Knihy I. má následující znění [14]:

Na dané úsečce postav trojúhelník rovnostranný.

Danou úsečkou buď AB. Má se tedy na úsečce AB postaviti trojúhelník rovnostranný. Ze středu A poloměrem AB buď narýsován kruh BCD, a opět ze středu B poloměrem BA buď narýsován kruh ACE, a od bodu C, v němž kruhy se protínají, k bodům A,B buďte vedeny spojnice AC, CB. A ježto bod A je středem kruhu CDB, AC je stejné s AB; ježto dále bod B je středem kruhu CAE, jest BC stejné s BA. Bylo pak dokázáno, že i CA je stejné s AB; tedy jedna i druhá z CA, CB je stejná s AB. Veličiny však témuž rovné i navzájem rovny jsou; tedy též CA jest rovna CB; ty tři tedy, CA, AB, BC jsou si rovny.
Trojúhelník ABC je rovnostranný a postaven je na dané úsečce AB, což bylo úkolem vykonat.

Druhá kniha je ze všech nejkratší a obsahuje 14 vět, kterým předchází dvě definice (výměry).

Obsahem knihy je řecká geometrická algebra a věty, které jsou v ní obsažené, mají algebraickou interpretaci.

Příklady vět Knihy II. ([14]):

Věta 4 Když se úsečka libovolně rozdělí, čtverec z celé rovná se čtvercům z úseček a dvojnásobnému pravoúhelníku úsečkami sevřenému.
Věta 11 Rozděl danou přímku tak, aby pravoúhelník z celé a z jedné úsečky rovnal se čtverci úsečky zbývající.

Kniha III. obsahuje 37 vět a je věnována nauce o kruhu. Nejprve zde nacházíme 11 definic (výměr).

Příklady vět Knihy III. ([14]):

Věta 1 Najdi střed kruhu daného.
Věta 5 Kruh kruhu neprotíná ve více bodech než ve dvou.

V Knize IV., která se skládá z 16 úloh, zkoumá Eukleides útvary vepsané nebo opsané kružnici. Nejprve opět pomocí 7 definic (výměr) zavedl potřebné pojmy.

Příklady vět Knihy IV. ([14]):

Věta 4 Do trojúhelníku daného vepiš kruh.

Věta 8 Vepiš do čtverce daného kruh.

Základy byly přeloženy do velkého počtu jazyků a měly (kromě Bible) více vydání než kterákoli jiná kniha na světě. Po dobu téměř dvou tisíciletí byly používány na školách jako učebnice.

Opustíme-li Eukleida, dalším neméně významným matematikem a fyzikem starověku byl **Archimedes ze Syrakus (287–212 př. n. l.)**, pravděpodobně student Eukleidových žáků. Zabýval se hlavně kuželosečkami, objevil nové metody výpočtu obsahu obrazců, které jsou ohraničeny křivkami, a objemu těles, která jsou ohraničena křivými plochami. Dále objevil konstantní vztah mezi obvodem kruhu a jeho průměrem, který stanovil mezi 220/70 a 223/71, tedy Ludolfovo číslo π. Archimedes užil pravidelných n-úhelníků ($n = 6$, 12, 24, 48, 96) opsaných, resp. vepsaných danému kruhu. Vycházel přitom z předpokladu, že obvod kruhu je vždy menší, než obvod opsaného a větší než obvod vepsaného n-úhelníku. Obsah těchto mnohoúhelníků pak vypočetl.

Vedle Eukleida a Archiméda byl posledním velkým geometrem helénistického období Archimedův mladší součastník **Apollonios z Pergy (2. pol. 3. století – počátek 2. století př. n. l)**, který se mimo jiné také zabýval jistými typy konstrukčních úloh. S tímto učencem totiž souvisí tzv. Apolloniova úloha, kterou se Apollonios zabýval a řešil ji v díle *O dotycích*. Obecná Apolloniova úloha, sestrojit kružnici, která se dotýká daných tří kružnic v rovně, zaujímá mezi planimetrickými úlohami místo zvlášť významné.

Tato klasická úloha byla důležitým zdrojem četných nových geometrických pouček, které byly objeveny při jejím řešení. Zajímala geometry všech věků do té míry, že bylo podáno množství způsobů jejího řešení. Proto také lze na této úloze ukázat různé metody řešení složitějších konstrukčních úloh. Již Eukleides se ve své Knize IV. *Základů* věnuje vyšetřování dvou typů Apolloniových úloh. Věta 4 a věta 5 této knihy pojednává o kružnicích opsaných a vepsaných trojúhelníku, tj. nalezení kružnice procházející třemi body nebo dotýkající se třech přímek.

Vzhledem k tomu, že se zmíněná dvousvazková práce nedochovala, nelze s určitostí říci, jakým způsobem Apollonios úlohu řešil. Podle francouzského matematika Viéta Apollonios řešil úlohu obecně dilatací, o čemž se dočítáme v jeho díle *Apollonius Gallus...* z roku 1600 n. l.. Viétův vrstevník Adrain van Roomen rozřešil tuto úlohu užitím kuželoseček (provedení této konstrukce např. v [58]). Apollonios formuloval úlohu nejprve obecně pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem (kružnice o nulovém poloměru) a přímkou (kružnice o nekonečně velkém poloměru).

Jak již bylo řečeno, originální znění se nezachovalo, zato je známa reprodukce úlohy v díle *Mathématikai synagogai* řeckého matematika **Pappose Alexandrijského (3.**

století př. n. l.). Pappos uvádí úlohu v následujícím znění ([52]):

Nechť jsou dány tři předměty, z nichž každý může být bodem, přímkou nebo kruhem; má se narýsovat kruh, který prochází každým z daných bodů (jsou-li dány jen body) a dotýká se daných přímek či kruhů.

Z výše uvedeného zadání je možno vypozorovat počet možných variant úlohy. Hledáme vždy skupiny tří objektů ze třech druhů (bodů (B), přímek (p), kružnic (k)), přičemž pořadí daných objektů není podstatné. Existuje tedy celkem deset základních typů Apolloniových úloh (nových devět jsou zvláštní případy úlohy obecné), přičemž obecná úloha má nejvýše 8 řešení.

Jestliže jeden z daných bodů leží na dané přímce nebo na dané kružnici, hovoříme o úlohách Pappových. Takovýchto úloh je celkem šest - (pB)B, (kB)B, (pB)p, (kB)p, (pB)k a (kB)k, kde symbolem (pB)B rozumíme, že jsou dány dva body a přímka, kdy jeden z bodů leží na této přímce.

Pappos ve svém díle uvádí požadavek Apollonia, tedy řešení Apolloniovy úlohy pomocí kružítka a pravítka, přestože již Apollonios znal stejnolehlost i kruhovou inverzi. V současné době jsou známé také jiné metody, např. užitím kuželoseček, cyklografie, deskriptivní geometrií, geometrií projektivní (kolineací) apod..

Po zániku antického světa upadají díla řeckých učenců pomalu v zapomnění. Období nového rozkvětu matematiky přichází až s nástupem mohutné islámské říše, jež se stala centrem tehdejší vzdělanosti. Mnohá řecká díla, která se nedochovala, známe jen díky arabským překladům.

K renesanci geometrie došlo v Evropě v 16. – 17. století, zejména ve Francii. Zásadní zlom ve vývoji matematiky přišel v 17. století, kdy Francouzi **René Descartes (1596–1650)** a **Pierre de Fermat (1601–1665)** aplikací algebry při řešení geometrických úloh položili základy analytické geometrie. V 17. století následoval nejvýznamnější objev té doby — diferenciální a integrální počet, jehož užitím se rozvinula geometrie diferenciální a problematika útvarů vyšších stupňů, jež dnes řadíme do algebraické geometrie.

Novověk učinil v oblasti geometrie dva důležité kroky: odhalil existenci neeukleidovských geometrií a vytvořil analytickou geometrii. René Descartes zavedením kartézské soustavy souřadnic objevuje metodu, jak analyticky (tj. prostřednictvím čísel a rovnic) zkoumat geometrické útvary, což později vede k řešení mnoha klasických geometrických problémů, např. zmiňované otázky trisekce úhlu.

Záliba matematiků v teoretizování o konstrukcích kružítkem a pravítkem přinesla další zajímavé výsledky. Například Syrský matematik **Abul Vafa (940–997)**, později pak **Albrecht Dürer (1471–1528)** či **Leonardo da Vinci (1542–1619)** uvažovali o konstrukcích, při nichž kromě rýsování přímek a úseček podle pravítka bylo dovoleno rýsovat pouze kružnice téhož poloměru. Italský matematik **Lorenzo Mascheroni (1750–1801)** roku 1797 dokázal, že každou konstrukční úlohu, kterou lze řešit pomocí kružítka a pravítka, lze řešit pouze pomocí kružítka. Každou přímku při tom určujeme dvěma body, které na ní leží. Na druhé straně francouzský matematik a inženýr **Jean Victor Poncelet (1788–1867)** roku 1822 zjistil, že všechny konstrukční úlohy řešitelné pravítkem a kružítkem jsou řešitelné pouhým pravítkem, je-li v rovině narýsována některá kružnice a její střed (kružnice bez vyznačeného středu k tomu nestačí). Každou kružnici při tom určujeme třemi body, které na ní leží.

Zvláštní postavení mezi úlohami o sestrojení kružnice zaujímá *úloha G. F. Malfattiho*, nazvaná tak podle italského matematika, který ji poprvé vyslovil a algebraicky řešil roku 1803. Její znění je následující (v různých publikacích se však liší):

Do daného trojúhelníku vepište tři nepřekrývající se kruhy tak, aby jejich obsah byl co největší.

Malfatti se domníval, že úlohu vyřešil, když kruhy zvolil tak, aby se každý dotýkal dvou stran trojúhelníku a obou zbývajících kruhů (tzv. *Malfattiho kruhy*). Ryze geometrické, velmi elegantní řešení (bez důkazu) podal v roce 1827 J. Steiner, který úlohu zobecnil tím, že nahradil strany trojúhelníku kružnicemi. Steiner však vycházel ze stejného (chybného) předpokladu jako Malfatti — že se kružnice musí dotýkat jedna druhé a každá pak dvou stran trojúhelníku. Malfattiho řešení bylo ukázáno jako nesprávné, a to nejprve pro rovnostranný trojúhelník (H. Lob, H. W. Richmond, 1929), poté pro dlouhé a úzké trojúhelníky (H. Evans, 1965), nakonec bylo prokázáno jako nesprávné bez ohledu na tvar trojúhelníku (M. Goldberg, 1967). Kompletní řešení tohoto problému ukázali až roku 1992 ruští matematici V. A. Zalgaller a G. A. Los.

Kapitola 3

Planimetrické konstrukční úlohy

3.1 Pojem konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy jsou takové geometrické určovací úlohy, kde je úkolem sestrojit (zkonstruovat) geometrický útvar předepsaných vlastností. Realizace konstrukce, tj. narýsování obrazce, však není podstatou řešení konstrukční úlohy, ačkoliv na střední a zvláště pak na základní škole většinou neřešíme konstrukční úlohy bez rýsování. Vlastním řešením konstrukční úlohy budeme chápat deduktivní úvahu, jejímž cílem je vyhledat požadovaný geometrický útvar. Podstata řešení konstrukční úlohy spočívá v nalezení posloupnosti elementárních konstrukcí, které vedou na hledaný objekt. Při hledání řešení konstrukční úlohy si proto představujeme, jak bychom hledaný obrazec postupně rýsovali. K tomu lze využít různého rýsovacího náčiní. Není-li o tomto rýsovacím náčiní předem nic řečeno, předpokládáme, že se skládá z přímého pravítka a z kružítka. Použití obou pomůcek vymezuje Vyšín v [5] těmito úmluvami:

a) Podle přímého pravítka rýsujeme přímku (resp. část přímky), která spojuje dva známé body.

b) Pomocí kružítka rýsujeme kružnici, jejíž střed je známý bod a jejíž poloměr je dán dvěma známými body.

c) Vyjdeme z jisté skupiny daných (zvolených) bodů, další body sestrojujeme jako společné body narýsovaných přímek a kružnic (pokud ovšem existují).

Termínem *známý bod* máme na mysli bod buď předem daný, nebo již sestrojený. Rýsovací náčiní nám slouží k narýsování tzv. základních křivek, které následně používáme při konstrukcích. Pro eukleidovské konstrukce, kterými se v této práci zabývám (pojem eukleidovské konstrukce je blíže specifikován v následující kapitole), jsou základními křivkami všechny přímky a kružnice (křivky I. a II. stupně). Příslušné úmluvy pak můžeme přeformulovat takto:

a´) Přímku pokládáme za sestrojenou, jsou-li sestrojeny dva její body.

b´) Kružnici pokládáme za sestrojenou, je-li její střed sestrojený bod a je-li její poloměr dán dvěma sestrojenými body.

c´) Bod pokládáme za sestrojený, je-li jím některý z výchozích (daných či zvolených) bodů nebo je-li společným bodem dvou sestrojených základních křivek navzájem různých.

3.2 Eukleidovské konstrukce

Pod termínem eukleidovské konstrukce nebo též konstrukce pomocí pravítka a kružítka rozumíme konstrukci geometrických objektů užitím výhradně pravítka a kružítka.

Pravítko, pomocí něhož provádíme eukleidovské konstrukce, chápeme jako idealizované, tj. že má nekonečnou délku, jen jednu hranu a žádné značky pro měření. Takovéto eukleidovské pravítko lze použít pouze ke konstrukci přímek. Nelze používat např. ke konstrukci kolmic nebo rovnoběžek, ani k měření či k nanášení délky.

Kružítko v eukleidovském smyslu lze použít jen k sestrojení kružnice o daném středu a procházející daným bodem. Tento bod může být libovolně vzdálený. Nelze použít pro přenášení délky. Oproti tomu pomocí běžně užívaného kružítka můžeme sestrojit kružnici, jestliže je dán její střed a poloměr má délku rovnou délce dané úsečky.
Ve výsledku však není nutné mezi oběma modely kružítek rozlišovat, protože lze ukázat, že i eukleidovské kružítko má vlastnost přenášení délky — činí tak např. Lávička v [12].

Z historického hlediska patří eukleidovské konstrukce k nejvýznamnějším, jak bylo popsáno v kapitole 2. A právě takto také řešíme planimetrické konstrukční úlohy na základní a střední škole.

Eukleidovské konstrukce nejsou však jediným druhem konstrukcí. Jiné (neeukleidovské) konstrukce se opírají o jiné úmluvy a tyto úmluvy jsou sestaveny podle rýsovacího náčiní, které chceme používat. Místo pojmu rýsovací náčiní se v teorii geometrických konstrukcí používá označení *prostředky.* Hovoříme pak o *konstrukcích danými prostředky.* Může jimi být například tzv. rovnoběžkové pravítko (pravítko s dvěma přímými navzájem rovnoběžnými hranami, jejichž vzdálenost je známé číslo v), úhlové pravítko (trojúhelníkové pravítko, jehož dvě hrany svírají dutý úhel dané velikosti α — ve škole užívané pravoúhlé trojúhelníkové pravítko je jeho zvláštním případem pro $\alpha = 90°$), jednotkové pravítko (přímé pravítko, na jehož hraně jsou vyznačeny dva body ve vzdálenosti dané úsečky e), aj..

Na pojem neeukleidovské konstrukce lze ovšem také nahlížet z jiného úhlu pohledu. Tímto termínem se označují také konstrukce v takových geometriích (tj. systémech splňujících první čtyři Eukleidovy postuláty), které nesplňují pátý Eukleidův postulát.

Jsou to např. geometrie hyperbolická, eliptická (její zvláštní případ geometrie sférická), Riemannova či absolutní geometrie. Těmi se v této práci nezabývám. Naopak geometrie splňující pátý Eukleidův postulát se nazývá eukleidovská geometrie.

3.2.1 Základní eukleidovské konstrukce

Každá eukleidovská konstrukce se skládá z konečného počtu opakování pěti základních konstrukčních výkonů (někdy také označované jako základní konstrukční kroky), ve kterých pracujeme s body, úsečkami a kružnicemi, které byly vytvořeny již v některém z předchozích kroků. Jako základní konstrukční výkony chápe Štalmašek v [3] tyto:

1. Jsou-li dány (tj. v rovině již narýsovány) dva různé body, narýsovat přímku procházející těmito body.

2. Narýsovat kružnicí okolo daného bodu jako středu, jejíž poloměr má délku shodnou s délkou úsečky, která je určena další dvojicí různých krajních bodů.

3. Sestrojit průsečík přímek AB a CD, jsou-li v rovině dány body A, B, C, D.

4. Jsou-li dány body A, B, C a úsečka DE, sestrojit průsečíky přímky AB s kružnicí se středem C a poloměrem DE.

5. Jsou-li dány v rovině body A, B a dvě úsečky CD, EF, sestrojit průsečík kružnice se středem A a poloměrem CD s kružnicí se středem B a poloměrem EF.

V konstrukcích 3. – 5. předpokládáme, že průsečíky existují. Konstrukce 1. a 3. provádíme pomocí pravítka, konstrukce 2. a 5. pomocí kružítka a konstrukci 4. užitím pravítka i kružítka zároveň.

V různých publikacích lze pod termínem základní eukleidovské konstrukce nalézt různé konstrukce.
Mezi základní (jednoduché) konstrukce vytvořené jistou posloupností výše uvedených pěti základních konstrukčních výkonů Štalmašek v [3] řadí:

a) Nanést danou úsečku na danou polopřímku.
b) Vést daným bodem mimo danou přímku rovnoběžku.
c) Vztyčit v daném bodě dané přímky kolmici.
d) Nanést daný dutý úhel k dané polopřímce do dané poloroviny.
e) Rozdělit danou úsečku na n shodných dílů ($n \geq 2$).
f) Sestrojit osu úsečky.
g) Sestrojit osu úhlu.
h) Sestrojit střed úsečky.

Provádíme-li eukleidovské konstrukce, pak z daných bodů konečným počtem konstrukčních kroků 3., 4. a 5. sestrojujeme hledané body, které jsou s body danými vázané určitými geometrickými vztahy. To platí i v případě, jsou-li dané jen velikosti úseček a úhlů, protože úsečku dané velikosti můžeme nahradit dvěma různými body v předepsané vzdálenosti a úhel dané velikosti třemi různými body, které určují ramena tohoto úhlu. Základní úlohy b), c), e) - h) řeším v kapitole 7.

Poznámka
Každá eukleidovská konstrukce je také proveditelná jedním rovnoběžkovým pravítkem tj. lze jím nahradit náčiní *přímé pravítko*, *kružítko*. Obdobná situace je např. u konstrukcí jediným kružítkem, zvaných konstrukce Mascheroniovy (viz kapitola 2). Obráceně to však není možné, aniž bychom zmenšili okruh řešitelných úloh (tj. vypustit kružítko a ponechat pouze pravítko).

3.3 Klasifikace konstrukčních úloh

Pro správné provedení rozboru konstrukční úlohy a následné nalezení konstrukčního předpisu je zapotřebí konstrukční úlohy nejprve vhodně roztřídit. Existují různá hlediska třídění:

3.3.1 Rozdělení konstrukčních úloh na polohové a nepolohové úlohy

Polohové konstrukční úlohy
V těchto typech úloh je určeno umístění alespoň jednoho z daných prvků, tj. jeho poloha v rovině. Tím je zároveň jednoznačně určena také poloha hledaného útvaru. Řešení polohové konstrukční úlohy spočívá v tom, že hledáme jeden nebo více neznámých bodů sestrojovaného geometrického útvaru. Zadání takovéto úlohy vypadá například následovně:

Příklad 1
Sestroj tečny k dané kružnici $k(S, r)$ procházející daným bodem A, který leží ve vnější oblasti kružnice k.

V této úloze je dána poloha obou zadaných objektů — kružnice k i bodu A, hledali bychom polohu bodu dotyku sestrojované tečny a kružnice k.

Nepolohové konstrukční úlohy
V nepolohových konstrukčních úlohách jsou určeny jen tvar a velikost daných prvků, nikoliv však jejich poloha. Musíme proto nejprve provést lokalizaci, tj. vhodně umístit některé prvky. Nepolohová úloha poté přechází na úlohu polohovou. Jednu a tu samou nepolohovou úlohu lze lokalizovat více způsoby. Od tohoto umístění se poté odvíjí

celý způsob řešení úlohy, zejména její rozbor. Chceme-li vyhledat nejvhodnější způsob řešení, je dobré zkusit různé způsoby umístění. Tím ovšem můžeme dostat úlohy s jiným počtem neznámých bodů.
Následující příklad nastiňuje, jak různé umístění prvků může mít vliv na počet hledaných bodů, stejně jako na celkový počet řešení úlohy.

Příklad 2
Sestroj trojúhelník ABC, jsou-li dány délky strany $c = 5$ cm, výšky $v_c = 2$ cm a těžnice $t_c = 4$ cm.

Řešení (nástin)
Takto zadaná úloha je nepolohová. Na polohovou úlohu ji převedeme umístěním některého z prvků:

a) Umístíme stranu $AB = c$.
Neznámým bodem je poté pouze bod C (řešení viz kapitolu 7, III. vyučovací hodina, příklad 3.1).

b) Umístíme nejprve výšku $v_c = C_0C$, kde bod C_0 je pata výšky v_c v trojúhelníku ABC.
Hledané body jsou tentokrát tři: A, B (zbylé vrcholy trojúhelníku) a S (průsečík těžnice t_c se stranou AB).
Bod S nalezneme jako průsečík kružnice $k_1(C, t_c)$ a přímky p (komice na úsečku C_0C vedená bodem C_0).
Body A, B náleží průniku kružnice $k_2(S, \frac{c}{2})$ a přímky p.

3.3.2 Rozdělení konstrukčních úloh podle počtu neznámých bodů

O hledaném útvaru (kružnici, trojúhelníku, čtverci apod.) řekneme, že je sestrojený, sestrojíme-li jistou konečnou množinu bodů, která hledaný útvar jednoznačně určuje (střed kružnice a jeden její bod, vrcholy trojúhelníku nebo čtverce apod.). Proto můžeme za základní *neznámé* útvary považovat body, z čehož plyne možnost třídění konstrukčních úloh podle počtu neznámých (a tedy hledaných) bodů. Z tohoto hlediska dělíme konstrukční úlohy na úlohy s jedním, dvěma, třemi atd. neznámými (hledanými) body.

V případě více neznámých bodů sestrojujeme tyto body postupně, čímž převádíme řešení konstrukční úlohy s více neznámými body na řešení konstrukčních úloh s jedním neznámým bodem. Velmi často při řešení takovýchto úloh pro zjednodušení situace využíváme geometrická zobrazení nebo si pomáháme výpočtem (viz metody řešení konstrukčních úloh, kapitola 3.5).

3.3.3 Rozdělení na úlohy bez parametrů a úlohy s parametry

Dále můžeme konstrukční úlohy třídit podle toho, zda se v jejich zadání vyskytují proměnné prvky (parametry), na úlohy bez parametru či úlohy s parametry (jedním, dvěma, ...).

Konstrukční úloha s parametry představuje určitou množinu úloh, které řešíme najednou a v závěrečné fázi provedeme „rozvětvení“ pro konkrétní hodnoty parametru — provádíme diskusi řešení konstrukční úlohy.

Zadání úlohy s parametrem může vypadat například takto:

Příklad 3
Sestroj trojúhelník, je-li dána velikost jedné jeho strany, příslušné výšky a protilehlého vnitřního úhlu.

Řešení této úlohy uvádím v odstavci 3.4.5.

3.4 Fáze řešení konstrukční úlohy

Řešení konstrukční úlohy se člení zpravidla na čtyři úseky, tzv. fáze. Ty je třeba chápat jako nedělitelnou organickou část konstrukční úlohy. Fáze řešení konstrukční úlohy se nazývají:

1. Rozbor (analýza)
2. Konstrukce (vyslovení konstrukčního předpisu + realizace konstrukce)
3. Zkouška (odůvodnění konstrukce neboli důkaz)
4. Diskuse (u parametrických úloh)

Řešení konkrétní konstrukční úlohy podle právě popsaného postupu je zařazeno na závěr této kapitoly. Nyní podrobněji k jednotlivým fázím řešení.

3.4.1 Rozbor

Tato první fáze řešení konstrukční úlohy je ze všech nejpodstatnější. Jejím výsledkem by měl být zápis podmínek pro hledané body.
Chceme-li řešit konstrukční úlohu, předpokládáme, že je řešitelná. Toto řešení (útvar vyhovující podmínkám úlohy) načrtneme v podobě ilustračního obrázku. V náčrtu vyznačíme a popíšeme všechny prvky ze zadání a zakreslíme pomocné geometrické útvary

(přímky, kružnice, body), které budeme při řešeni úlohy využívat. Dále hledáme vztahy mezi prvky danými a hledanými — uvědomíme si, které význačné body jsou neznámé, a snažíme se pro ně najít nutné podmínky, jež musí splňovat. Následně kombinujeme, porovnáváme a na základě logických úvah a užitím vhodné metody řešení konstrukčních úloh hledáme cestu, jak úlohu vyřešit nebo ji převést na úlohu jinou — snadnější či řešenou dříve.
Rozbor úlohy je třeba provádět svědomitě, abychom případně při nedokonalém rozboru neztratili některá řešení. Zároveň ale také může nastat, že původní předpoklad řešitelnosti úlohy se ukáže jako nesprávný — to se projeví tak, že rozbor úlohy nás povede ke sporu s podmínkami úlohy nebo platnými matematickými větami. V takovém případě konstatujeme, že je úloha neřešitelná.

3.4.2 Konstrukce

Druhá část postupu řešení konstrukční úlohy plyne z podmínek pro hledané body vyslovených v závěru rozboru. Formulujeme zde konstrukční předpis (posloupnost základních konstrukcí), jak z daných prvků vytvoříme hledaný útvar eukleidovskými konstrukcemi.

Stručný symbolický zápis předpisu v bodech nazýváme zápis postupu konstrukce. Konstrukčním předpisem udáváme zpravidla pro každý z hledaných bodů dvě množiny bodů (křivky), kterým tento bod náleží. V samotném zápisu vždy nejdříve uvádíme, jaký útvar sestrojujeme a poté pomocí jaké jeho vlastnosti. Konstrukce pomocí této vlastnosti by měla být zřejmá (např. průnik dvou již sestrojených útvarů, osa úsečky, osa úhlu, . . .), konstrukce pomocí složitějších vlastností je třeba rozepsat do více bodů. Jednotlivé body zápisu konstrukce na sebe navazují. Zápis by měl být zároveň natolik jednoznačný a jasný, abychom jen podle něj byli schopni výsledný útvar skutečně zkonstruovat.

Tato fáze řešení obvykle zahrnuje též grafické provedení úlohy (realizaci konstrukce) — narýsování všech řešení úlohy.

3.4.3 Zkouška

Konstrukčním předpisem získáváme všechna možná řešení úlohy. Není však ale zajištěno, že útvary, které jsme sestrojili, splňují skutečně podmínky úlohy. Není to zaručeno z důvodu, že jsme je sestrojili z jistých vlastností, které hledané útvary nutně mají, ale nevíme, zda obráceně každý útvar těchto vlastností splňuje všechny podmínky úlohy. Může se také stát, že některé nebo všechny útvary sestrojené podle konstrukčního předpisu nevyhovují podmínkám úlohy a nejsou tudíž řešením úlohy. Je proto potřeba ukázat, že všechny útvary vzniklé podle konstrukčního předpisu mají požadované vlastnosti a případné nevyhovující útvary vyloučit. Zjednodušeně — při provádění zkoušky ověřujeme, zda stanovené nutné podmínky jsou též postačující.

Zkouška se zpravidla provádí tak, že obrátíme postup, který jsme absolvovali při rozboru. Opíráme-li se v úvahách v rozboru o ekvivalentní tvrzení, není nezbytné zkoušku provádět, stačí se pouze odvolat na rozbor (např. při řešení úlohy užitím metody množin všech bodů dané vlastnosti).
V případě, že zadání neobsahuje parametricky zadané prvky, je součástí zkoušky konstatování počtu řešení úlohy.

3.4.4 Diskuse

Řešíme-li konstrukční úlohu s parametry (proměnnými prvky), je třeba v závěru provést diskusi. Konstrukční úloha s parametry totiž představuje množinu konstrukčních úloh, které získáme volbou všech možných hodnot za parametry. Tím se nám úloha rozpadne na případy, kdy nemusí mít řešení vůbec, může mít jedno řešení nebo i více. V této fázi řešení pak stanovujeme, za kterých podmínek je úloha řešitelná a počet řešení.

Nemá-li úloha žádné proměnné prvky, jde o jedinou úlohu, proto diskuse odpadá a my pouze konstatujeme počet vyhovujících výsledků úlohy (viz odstavec 3.4.3).

Při diskusi postupujeme tak, že sledujeme postupně jednotlivé kroky konstrukčního předpisu získaného jako závěr rozboru a zjišťujeme podmínky (nutné a postačující), za nichž jsou proveditelné (tzv. podmínky řešitelnosti).

Chceme-li stanovit počet řešení konstrukční úlohy, je třeba rozlišit, zda se jedná o úlohu polohovou či nepolohovou:

Polohová úloha má tolik řešení, kolik útvarů vyhovujících podmínkám této úlohy lze sestrojit. V případě, že dostáváme osově souměrná řešení, je též možné se omezit na jednu polorovinu. Poté říkáme, že úloha má v dané polorovině tolik a tolik řešení (takové omezení v této práci neuvažuji).

U **nepolohové úlohy** je nutné vyslovit přesnou úmluvu o tom, která řešení budeme pokládat za různá. Pro všechny úlohy v dalším textu vycházím pro počty řešení nepolohových úloh z následující úmluvy: Při určení počtu řešení nepolohové úlohy vycházíme z počtu řešení polohové úlohy, na kterou ji převádíme.

Závěr diskuse lze zapsat jak větou, tak v podobě tabulky.

Poznámka
V různých publikacích lze nalézt i jinou konvenci o počtu řešení, např. pokud některými řešeními jsou shodné geometrické útvary, pokládáme je za jediné řešení nepolohové úlohy ([15]).

3.4.5 Řešený příklad

Příklad 3 z kapitoly 3.3.3
Sestroj trojúhelník, je-li dána velikost jedné jeho strany, příslušné výšky a protilehlého vnitřního úhlu.

Řešení
Nejprve označíme dané útvary — mějme tedy dány v trojúhelníku ABC např. délku c strany AB, výšku v_c a vnitřní úhel o velikosti γ.
Jde o nepolohovou úlohu s parametry, na polohovou ji převedeme umístěním některého z prvků — umístíme stranu AB. Zbylý neznámý bod C je tedy hledaným bodem.
Víme, že bod C leží ve vzdálenosti v_c od přímky AB a zároveň je úsečka AB z tohoto bodu vidět pod zorným úhlem γ (pojem zorný úhel je podrobněji vysvětlen v kapitole 7, v I. hodině).
Řešení úlohy se bude skládat ze všech čtyř výše popsaných fází. Při rýsování zvolíme za parametry konkrétní hodnoty, zde $c = 4$ cm, $\gamma = 30°$, $v_c = 3$ cm:

Rozbor
Hledaný bod: C
$C \in M_1 \cap M_2$, kde
$M_1 = \{X \in \rho; |X \leftrightarrow AB| = v_c\} = p \cup p'$
$M_2 = \{X \in \rho; |\angle AXB| = \gamma\} = k \cup k'$

Obrázek 3.1: Náčrtek

Konstrukce

1. AB; $|AB| = c$
2. p; $p || AB \wedge |p \leftrightarrow AB| = v_c$
3. S; S — střed kružnice k, které přísluší oblouk s obvodovým úhlem γ (konstrukce viz kapitolu 7, III. vyučovací hodinu)
4. k; $k(S, r = |SA|)$
5. C; $C \in k \cap p$

Zkouška

Z obrácení postupu rozboru plyne, že nalezené body C splňují všechny podmínky zadání úlohy — úsečka je z nich vidět pod úhlem 30° ($\gamma = 30°$) a leží ve vzdálenosti 3 cm od úsečky AB ($v_c = 3$ cm).

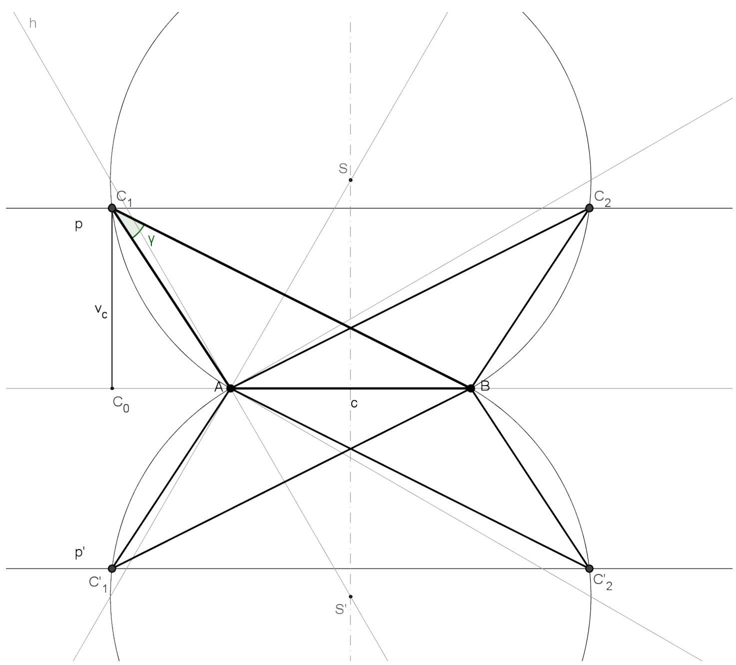
Diskuse

Aby byla úloha řešitelná, musí existovat alespoň jeden společný bod přímky p a kružnice k. Jinými slovy musí být splněna podmínka řešitelnosti:

$$v_c \leq \frac{c}{2} cotg \frac{\gamma}{2}.$$

Pro počet řešení této nepolohové úlohy (v souladu s výše zmíněnou úmluvou) platí:

- Je-li $v_c < \frac{c}{2} cotg \frac{\gamma}{2}$, má tato úloha 4 řešení: ΔABC_1, ΔABC_2, $\Delta ABC_1'$ a $\Delta ABC_2'$, viz obr. 3.2.
- Je-li $v_c = \frac{c}{2} cotg \frac{\gamma}{2}$, má tato úloha 2 řešení: rovnoramenné trojúhelníky ΔABC_1 a $\Delta ABC_1'$.
- Je-li $v_c > \frac{c}{2} cotg \frac{\gamma}{2}$, nemá úloha žádné řešení.



Obrázek 3.2: Konstrukce k příkladu 3

3.5 Metody řešení konstrukčních úloh

Pro řešení konstrukčních úloh využíváme různé metody. Ty lze rozdělit na metody ryze geometrické (metoda množin všech bodů dané vlastnosti a metoda geometrických zobrazení v rovině), metodu užití analytické geometrie a metodu algebraickou.

Jednotlivými metodami lze řešit většinou jen jednodušší konstrukční úlohy. Máme-li složitější úlohu, je třeba různé metody kombinovat.

Poznámka
V některých úlohách můžeme využít také speciální vztahy odvozené mezi danými a hledanými útvary. Poté nemůžeme hovořit ani o jedné z výše uvedených metod. V takovém případě říkáme, že úlohu sestrojujeme metodou založenou na speciálních vztazích (např. vlastnosti harmonicky sdružených bodů). S těmi se však na střední škole zpravidla nesetkáme, proto se jimi ani já v této práci více nezabývám.

3.5.1 Metoda množin všech bodů dané vlastnosti

Množinou všech bodů dané vlastnosti nazýváme takovou množinu bodů (tj. geometrický útvar), která obsahuje všechny body, které mají tuto vlastnost, a neobsahuje žádné body, které ji nemají.

Tuto metodu využíváme v případě, že máme vyhledat body o určité vlastnosti. Metoda užití množin všech bodů dané vlastnosti spočívá v tom, že pro každý z hledaných bodů X stanovíme dvě nutné podmínky, které musí splňovat, a pak určíme množiny M_1, M_2 všech bodů splňujících po řadě první a druhou podmínku. Hledaný bod X náleží průniku množin M_1, M_2. Body tohoto průniku sestrojujeme pomocí základních eukleidovských konstrukcí (viz předchozí příklad 3).

3.5.2 Metoda geometrických zobrazení v rovině

Je-li podle určitého předpisu každému bodu X geometrického útvaru U přiřazen jistý bod X' útvaru U', potom toto přiřazení nazýváme zobrazením, kde bod X' je obrazem bodu X a bod X je vzorem bodu X'.

Mezi základní zobrazení, která lze využít pro řešení konstrukčních úloh, patří osová souměrnost, otočení (speciálně středová souměrnost) a posunutí, společně nazývaná shodná zobrazení. Z podobných zobrazení se využívá stejnolehlost. Kromě těchto základních zobrazení je třeba zmínit ještě kruhovou inverzi, která je velmi užitečná například při řešení Apolloniových úloh.

Existují dva základní případy, kdy využíváme zobrazení při řešení konstrukčních úloh:
Prvním případem je situace, kdy neznámý bod lze sestrojit jako samodružný bod vhodného zobrazení (např. střed stejnolehlosti jako pomocný neznámý bod při konstrukci společných tečen dvou kružnic).
Druhým případem jsou takové úlohy, kdy lze neznámý bod X zobrazit na neznámý bod Y zobrazením, které je pomocí již sestrojených útvarů určeno. V tuto chvíli uplatňujeme jeden z těchto konstrukčních kroků ([42]):

a) Bod Y sestrojíme jako obraz bodu X v takovém zobrazení (to předpokládá, že v posloupnosti kroků konstrukce sestrojíme nejprve bod X).

b) Jednu z konstrukčních křivek, které obsahují bod X, zobrazíme na konstrukční křivku obsahující bod Y (to nevyžaduje, aby bod X byl už sestrojen).

Geometrická zobrazení můžeme obecně využít při řešení konstrukčních úloh dvojím způsobem, jak uvádí Polák v [15]:

a) Geometrické zobrazení použijeme na část geometrických útvarů, které se vyskytují v pomocném náčrtku při rozboru konstrukční úlohy. To nám umožní najít takové vztahy mezi danými a hledanými útvary, které by jinak mohlo být těžké objevit.

b) Geometrické zobrazení aplikujeme na celou geometrickou situaci představovanou náčrtkem při rozboru konstrukční úlohy. V tomto případě samozřejmě jako použitá geometrická zobrazení nepřicházejí v úvahu shodnosti, které by převedly všechny geometrické útvary v útvary s nimi shodnými, tj. dostali bychom tutéž geometrickou situaci. Z uvedených zobrazení lze tedy použít podobností, zejména stejnolehlosti.

Užití osové souměrnosti při řešení konstrukčních úloh
Při řešení konstrukčních úloh pomocí osové souměrnosti nahrazujeme útvar daný či hledaný (popřípadě jen jejich část) útvarem s ním osově souměrným podle vhodné přímky, aby řešení takto pozměněné úlohy bylo snadnější.

Příklad 4
Je dána přímka p a dva body A, B uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p. Najdi na přímce p bod X tak, aby součet jeho vzdáleností od bodů A, B byl co nejmenší.

Řešení
Jde o polohovou úlohu s jedním neznámým bodem X.

Rozbor
Hledaný bod: X

$X \in AB' \cap p$, kde B' je bod souměrně sdružený k bodu B podle přímky p.
Potom totiž platí:

$$|AX| + |BX| = |AX| + |B'X| = |AB'|.$$

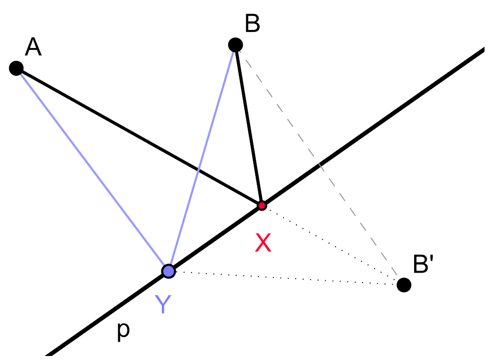
Pro každý jiný bod bod $Y \neq X$ přímky p dostáváme:

$$|AY| + |BY| = |AY| + |B'Y| > |AB'| \text{ (viz obr. 3.4)}.$$

Obrázek 3.3: Náčrtek

Konstrukce

1. A, B, p; $A, B \notin p \wedge A \notin\mapsto Bp$
2. B'; $O(p)$: $B \longmapsto B'$
3. AB'
4. X; $X \in AB' \cap p$



Obrázek 3.4: Konstrukce k příkladu 4

Zkouška
Plyne z rozboru.
Úloha má právě jedno řešení.

Užití posunutí při řešení konstrukčních úloh

Podstata metody rovnoběžného posunutí neboli translace spočívá v tom, že část útvaru rovnoběžně posuneme, čímž dostáváme hledané či potřebné pomocné body. Takovéto doplnění původního útvaru na útvar nový nám umožňuje transformaci dané úlohy na úlohu snadněji řešitelnou.

Příklad 5

Sestroj lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$, $|AB| > |CD|$), jsou- li dány délky jeho čtyř stran a, b, c, d.

Řešení úlohy provádím v kapitole 7, VI. vyučovací hodině (příklad 6.3).

Užití otočení při řešení konstrukčních úloh

Otočení neboli rotaci okolo bodu používáme při řešení konstrukčních úloh pro nalezení hledaných či potřebných pomocných bodů, které dostaneme jako průsečíky útvaru s jeho otočenou částí. Zavádíme tím do náčrtku jeden nebo více nových prvků, převádíme úhly nebo přímky do vhodné polohy. Obecně opět nahrazujeme úlohu novou jednodušší úlohou.

Příklad 6

Jsou dány dvě různé rovnoběžky p, q a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte takový rovnostranný trojúhelník ABC, kde $B \in p$, $C \in q$.

Řešení

Úloha je polohová s dvěma neznámými body.

Rozbor

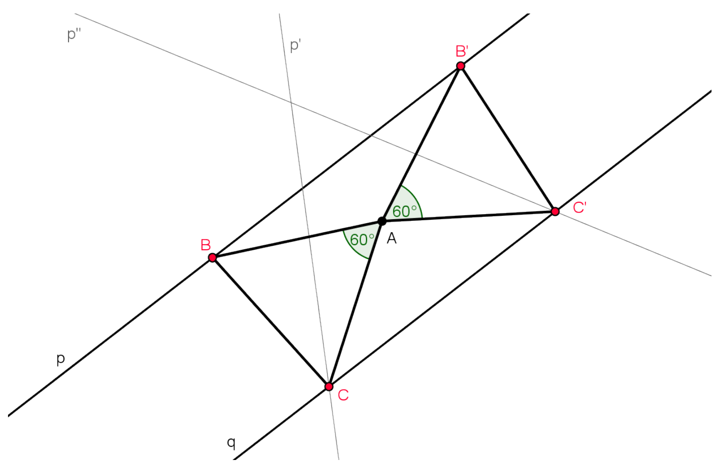
V rovnostranném trojúhelníku mají všechny vnitřní úhly velikost $60°$, stejně jako jsou shodné délky všech tří stran trojúhelníku. Proto obrazem bodu $B \in p$ (resp. strany AB) v otočení kolem bodu A o úhel velikosti $60°$ je bod C (resp. strana AC). Obrazem přímky p v tomto otočení bude přímka p'. Bod C získáme jako průsečík přímky p' s přímkou q. Provedeme-li poté zpětné otočení bodu C (tj. o stejně velký ale opačně orientovaný úhel), dostáváme bod B (viz obr. 3.6)

Hledané body: B,C
$C \in p' \cap q$, kde
p' získáme užitím otočení: $R(A; 60°)$: $p \longmapsto p'$
a bod B získáme z otočení: $R(A; -60°)$: $C \longmapsto B$.

Obrázek 3.5: Náčrtek

Konstrukce

1. p, q, A; $A \notin p, q$
2. p'; $R(A; 60°)$: $p \longmapsto p'$
3. C; $C \in p' \cap q$
4. b; $R(A; -60°)$: $C \longmapsto B$
5. ΔABC



Obrázek 3.6: Konstrukce k příkladu 6

Zkouška

Plyne z rozboru úlohy.

Úloha má vždy dvě řešení — přímku p lze rotovat kolem bodu A ve dvou smyslech otáčení.

Užití stejnolehlosti při řešení konstrukčních úloh

Existuje mnoho konstrukčních úloh takových, že zanedbáme-li při jejich řešení část daných podmínek, dostaneme nespočetné množství řešení, která mezi sebou tvoří vzájemně podobné útvary. Např. máme-li sestrojit trojúhelník, jsou-li zadané velikosti dvou jeho úhlů a délka obvodu, pak zanedbáním obvodu dostaneme nespočetné množství vzájemně podobných trojúhelníků. Úlohy tohoto druhu je vhodné řešit metodou užití podobnosti. Její podstata spočívá v tom, že nejdříve sestrojíme útvar podobný hledanému útvaru a ten podle dalších podmínek úlohy zvětšíme či zmenšíme v požadovaném poměru. Metodu podobnosti užíváme zejména v následujících případech:

a) Je-li mezi podmínkami pro hledaný útvar jen jediná délka a ostatní se vztahují na úhly či poměry. Vyloučením délky budou útvary splňující ostatní podmínky vzájemně podobné. Užití stejnolehlosti v popsaném případě je patrné z následujícího příkladu.

Příklad 7
Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno: $a : b : c = 3 : 5 : 6$, $v_c = 4$ cm.

Řešení
Nepolohová úloha s třemi neznámými body.

Vynecháním podmínky týkající se délky výšky dostáváme úlohu, jejímž řešením je celý systém stejnolehlých trojúhelníků. Vybereme jeden z nich, např. trojúhelník $A'B'C'$ s délkami stran 3 cm, 5 cm a 6 cm, ten sestrojíme. Pomocí stejnolehlosti se středem v bodě $C' = C$ sestrojíme trojúhelník ABC stejnolehlý s trojúhelníkem $A'B'C'$, pro který navíc platí, že jeho výška má délku $v_c = |CC_0| = 4$ cm. Tímto jsme zároveň umístili bod C (převedli jsme nepolohovou úlohu na polohovou).

Rozbor
Hledané body: C_0, A, B
Všechny tři body dostaneme užitím stejnolehlosti $H(C' = C)$: $C'_0 \longmapsto C_0, A' \longmapsto A, B' \longmapsto B$

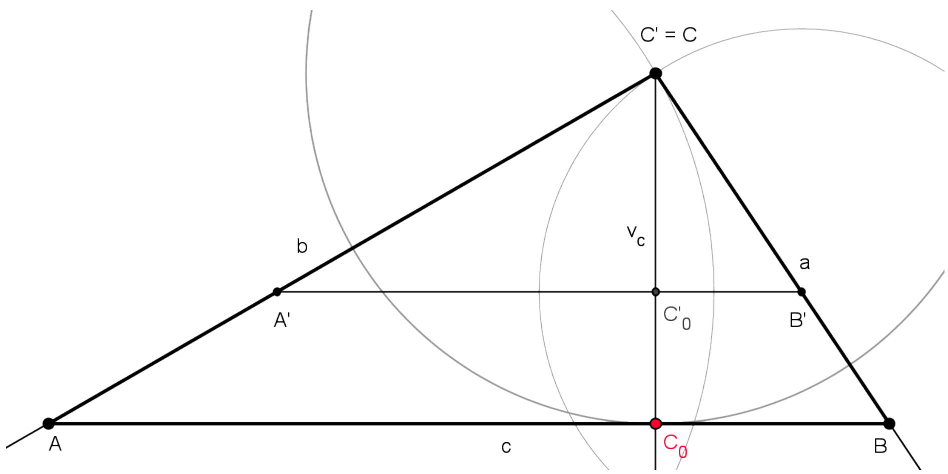
Obrázek 3.7: Náčrtek

Konstrukce

1. $\Delta A'B'C'$; $a = 3$ cm, $b = 5$ cm a $c = 6$ cm (podle věty *sss*)

2. v'_c; $v'_c = CC'_0$ je výška $\Delta A'B'C'$
3. C_0; $|CC_0| = v_c = 4$ cm $\wedge$ $H(C' = C) : v'_c \longmapsto v_c$
4. A, B; $H(C' = C)$: $A' \longmapsto A, B' \longmapsto B$
5. ΔABC

Zkouška
Trojúhelníky $A'B'C'$, ABC jsou podobné podle věty *uu*. Strany a, b, c jsou proto ve stejném poměru, jako strany a', b', c' trojúhleníku $A'B'C'$, tj. v poměru 3:5:6, viz obr. 3.8.



Obrázek 3.8: Konstrukce k příkladu 7

b) Má-li mít hledaný útvar určitou polohu vzhledem k jistým daným přímkám nebo bodu a vyloučením jedné podmínky dostaneme systém stejnolehlých útvarů.

Zadání úlohy včetně jejího řešení využitím stejnolehlosti lze nalézt v kapitole 7, VII. vyučovací hodině (příklad 7.2).

3.5.3 Metoda algebraická

Algebraická metoda řešení konstrukčních úloh se obecně využívá, je-li pro určení hledaných bodů vhodné vyjádřit vztahy mezi danými a hledanými body rovnicemi a poté sestrojit výrazy, které vznikly řešením těchto rovnic, nebo v případě, že máme sestrojit úsečku, jejíž délka je přímo zadaná algebraickým výrazem. Tuto metodu volíme zpravidla až tehdy, selžou-li všechny metody ryze geometrické nebo je-li konstrukce touto algebraickou metodou jednodušší než některou z ryze geometrických metod.

Konstrukční úlohy lze z hlediska užití algebraické metody rozdělit na základní a složitější, jak uvádí Polák v [15]:

a) **Základní úlohy** takto řešené jsou nepolohové konstrukční úlohy tohoto typu: Máme sestrojit úsečku, jejíž délka x je rovna předepsanému algebraickému výrazu $V(a, b, ...)$, kde a, b,... jsou dané délky úseček (určitá kladná čísla, popř. parametry).

b) Při řešení **složitějších konstrukčních úloh** algebraickou metodou, kdy není délka x sestrojované úsečky přímo zadána algebraickým výrazem, mluvíme o řešení konstrukční úlohy na základě výpočtu. Spočívá v tom, že v rozboru úlohy určíme vztah mezi hledanou délkou x a danými délkami úseček, který má tvar rovnice s neznámou x. Jejím řešením určíme algebraické vyjádření pro x a tím je daná úloha převedena na úlohu typu a). Diskuse řešení dané úlohy s parametry se provádí vyšetřováním řešitelnosti rovnice pro x.

Konstrukce algebraických výrazů

Nechť a, b, c,..., k, l jsou velikosti daných úseček, p a q daná přirozená čísla a x velikost hledané úsečky. Potom výraz

a) $x = a \pm b \pm c \pm ... \pm k \pm l$ vyjadřuje velikost součtu úseček o velikosti a, b, c,..., k, l

b) $x = \dfrac{ab}{c}$ vyjadřuje velikost čtvrté geometrické úměrné úsečky k úsečkám velikosti a, b, c

   Konstrukce čtvrté geometrické úměrné

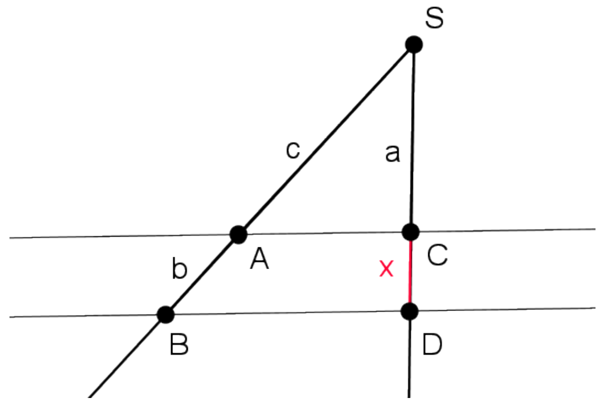
   Máme-li sestrojit úsečku x, která je čtvrtou geometrickou úměrnou k úsečkám a, b a c, je vhodné si rovnici nejprve převést na tvar

$$c : b = a : x$$

   a využít např. větu, která říká, že rovnoběžné příčky vytínají na polopřímkách svazku úměrné úseky. Stačí tedy libovolně zvolit dvě polopřímky a sestrojit k nim vhodné příčky (obr. 3.9).

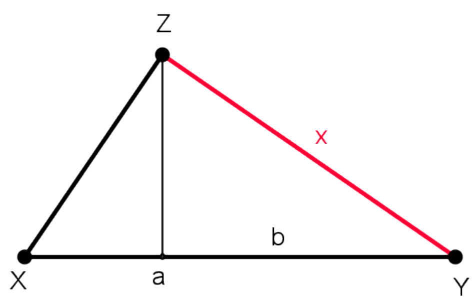
c) $x = \dfrac{p}{q}a$ vyjadřuje dělení p-násobku úsečky velikosti a na q shodných dílů

d) $x = \sqrt{ab}$ vyjadřuje velikost střední geometrické úměrné úsečky (geometrický průměr) k úsečkám velikosti a a b

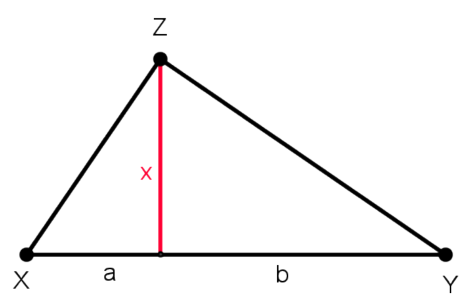


Obrázek 3.9: Konstrukce čtvrté geometrické úměrné

Konstrukce geometrického průměru
Geometrický průměr lze sestrojit pomocí Eukleidových vět, a to jako výšku pravoúhlého trojúhelníku, ve kterém úsečky a, b jsou úseky na přeponě (obr. 3.11), nebo jako odvěsnu, kde a je přepona a b úsek na přeponě přilehlý k hledané odvěsně (obr. 3.10).



Obrázek 3.10: Konstrukce geometrického průměru I



Obrázek 3.11: Konstrukce geometrického průměru II

e) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ vyjadřuje velikost přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o velikosti a a b

f) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ (kde $a > b$) vyjadřuje velikost odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, který má přeponu velikosti a a druhou odvěsnu o velikosti b

g) $x = a\sqrt{2}$ je úhlopříčka čtverce se stranou a

h) $x = a\sqrt{3}$ je dvojnásobná výška rovnostranného trojúhelníku o straně a

ch) $x = a\sqrt{5}$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku, kde jedna odvěsna má délku a, druhá $2a$

i) úsečka x z rovnice $x\sqrt{2} = a$ je strana čtverce, jehož úhlopříčka je a

j) úsečka x v rovnici $x\sqrt{3} = a$ je strana rovnostranného trojúhelníku, jehož dvojnásobná výška je a

k) úsečka $\sqrt{x}$ $(x \geq 2)$ je přepona pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna má délku 1, druhá $\sqrt{x-1}$

Každou druhou odmocninu z racionálního kladného čísla, které nelze rozložit na součet či rozdíl čtverců, je možné eukleidovsky sestrojit pomocí Eukleidových vět. V opačném (jednodušším) případě použijeme Pythagorovu větu.

Pomocí výše popsaných konstrukcí můžeme sestrojit i složitější výrazy (např. $x = \dfrac{abcd}{efg}$ sestrojíme pomocí postupných konstrukcí výrazů $y = \dfrac{ab}{e}$, $z = \dfrac{yc}{f}$ a $x = \dfrac{zd}{g}$).

3.5.4 Metoda souřadnic (užití analytické geometrie)

Tato metoda je vhodná např. při určování množin všech bodů dané vlastnosti. Postupujeme tak, že po vhodné volbě počátku a souřadných os pravoúhlé soustavy souřadnic (při vhodné volbě je vždy výsledná rovnice množiny mnohem jednodušší) označíme souřadnice libovolného bodu hledané množiny neznámými x, y a vyjádříme podmínky úlohy rovnicí, které tyto souřadnice vyhovují (tj. obdoba algebraické metody ovšem s užitím souřadnic daných a hledaných bodů).

Příklad 8 (podle [6], str. 125)
Máme dány polohy dvou kolmých přímek x, y a bodu A, jehož vzdálenosti od těchto přímek jsou v poměru 2:1. Sestroj takový rovnostranný trojúhelník ABC, kde $B \in x$, $C \in y$.

Řešení
Úlohu lze celkem snadno řešit využitím otočení. My ji však nyní budeme řešit užitím analytické metody (využitím souřadnic).
Souřadnice neznámých vrcholů označíme $B[x, 0]$, $C[0, y]$.
Z obr. 3.12 lze nahlédnout, že pro délky stran trojúhelníku platí:

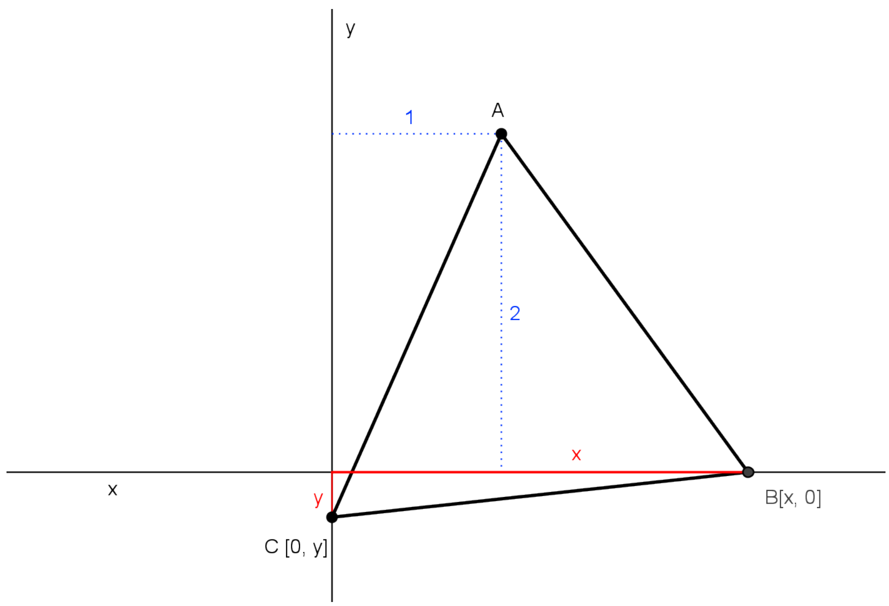
$$|AB| = \sqrt{(x-1)^2 + 2^2},\ |AC| = \sqrt{(2-y)^2 + 1^2},\ |BC| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Z podmínek rovnosti stran trojúhelníku ($AB = BC$, $AC = BC$) dostáváme soustavu dvou rovnic:

$$(x-1)^2 + 4 = x^2 + y^2$$
$$(y-2)^2 + 1 = x^2 + y^2,$$

po úpravě:

$$y^2 = 5 - 2x$$
$$x^2 = 5 - 4y.$$



Obrázek 3.12: Užití analytické metody

Vyjádříme-li z první rovnice x a dosadíme do druhé, dostáváme rovnici čtvrtého stupně:

$$y^4 - 10y^2 + 16y + 5 = 0.$$

Tu lze rozložit na součin dvou kvadratických trojčlenů:

$$(y^2 + 4y + 1) \cdot (y^2 - 4y + 5) = 0.$$

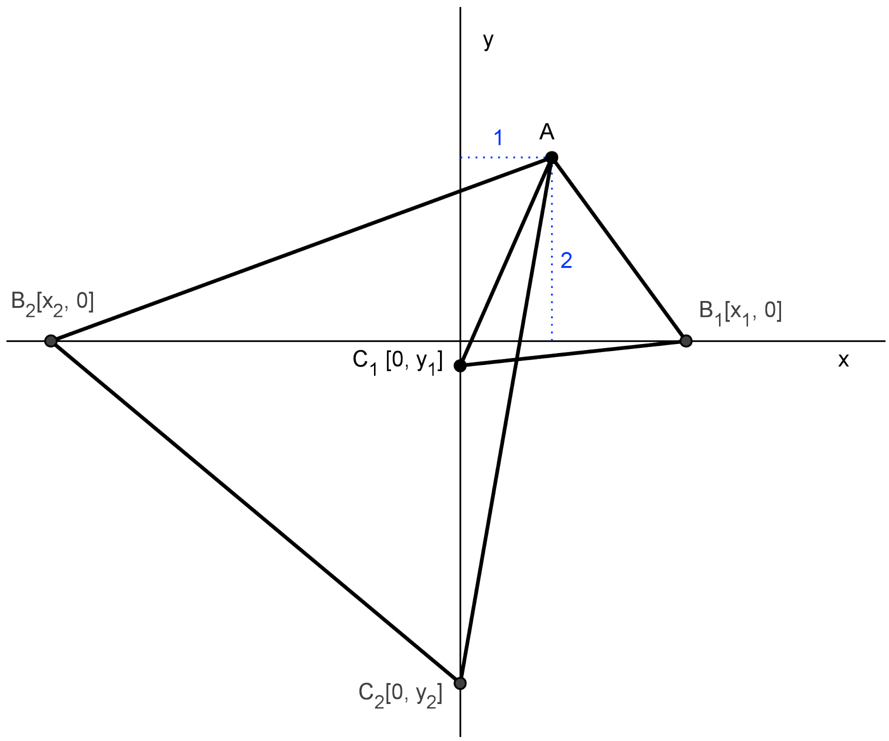
Řešení rovnice čtvrtého stupně tedy převádíme na řešení dvou kvadratických rovnic. Pouze první z nich má reálné kořeny:

$$y_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}.$$

Dopočítáme-li k nim příslušící hodnoty x, dostáváme:

$$x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{3}.$$

Tím získáváme dvě řešení úlohy:
$B_1[-1 + 2\sqrt{3}, 0]$, $C_1[0, -2 + \sqrt{3}]$ a $B_2[-1 - 2\sqrt{3}, 0]$, $C_2[0, -2 - \sqrt{3}]$ (viz obr. 3.13).



Obrázek 3.13: Konstrukce k příkladu 8

Kapitola 4

Řešitelnost konstrukčních úloh pravítkem a kružítkem

4.1 Teorie

Při rozhodování, zda daná úloha je či není řešitelná, je potřeba rozlišit dva pojmy, a to řešitelnost úlohy a možnost provést konstrukci danými prostředky. My se budeme zabývat řešitelností konstrukční úlohy pomocí pravítka a kružítka.

Definice 4.1 *O konstrukční úloze řekneme, že je řešitelná, jestliže existuje geometrický útvar splňující požadované vlastnosti.*

Definice 4.2 *O konstrukční úloze řekneme, že je řešitelná pomocí pravítka a kružítka (eukleidovsky), lze-li konečným počtem základních konstrukčních výkonů (kapitola 3.2.1) nalézt z daných bodů další body, které jsou s těmito danými body vázané určitými geometrickými vztahy a které určují hledaný geometrický útvar.*

Hledané body sestrojíme z určité skupiny bodů daných (či dříve sestrojených) jedním z následujících způsobů:

1. Jako průsečík dvou přímek, kdy každá z těchto přímek je určena dvěma danými či dříve sestrojenými body.

2. Jako průsečík přímky a kružnice, kdy přímka prochází dvěma danými či dříve sestrojenými body a kružnice má střed v daném či dříve sestrojeném bodě a prochází jiným daným či dříve sestrojeným bodem.

3. Jako průsečík dvou kružnic, jejichž středy jsou body dané či dříve sestrojené a prochází body danými či dříve sestrojenými

Ve smyslu definice 4.1 je neřešitelnou úlohou např. úloha následujícího znění:

Příklad 9
Lze sestrojit trojúhelník ABC se stranami o délkách 4 cm, 2 cm a 1 cm?

Odpověď
Tato úloha není řešitelná, neboť neexistuje žádný trojúhelník, který by splňoval požadované vlastnosti (zadané hodnoty nesplňují trojúhelníkovou nerovnost).

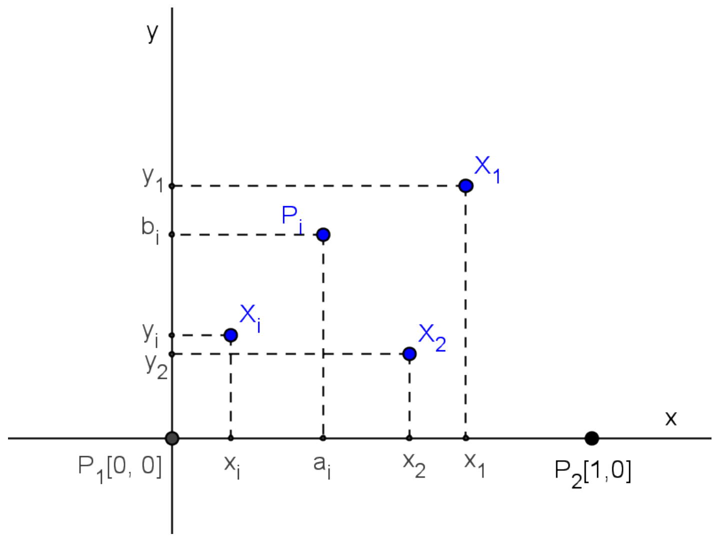
Příkladem konstrukční úlohy, která není řešitelná pomocí pravítka a kružítka je trisekce úhlu (viz kapitolu 2 a kapitolu 4.2.2). Tuto úlohu však lze řešit například užitím pomocné křivky kvadratrix, a proto je řešitelná (neeukleidovsky).

Poznámka
V této kapitole se věnuji pouze přesným řešením konstrukčních úloh, tj. takovým, které při použití konečného počtu dokonale přesných rýsovacích prostředků vedou ke konstrukci s matematicky přesnými vlastnostmi hledaného geometrického útvaru. Oproti tomu pak v následující kapitole lze nalézt některé z tzv. přibližných konstrukcí, jež nejsou přesné ani při užití dokonale přesných rýsovacích prostředků. Využíváme jich v případě, že danou konstrukční úlohu nelze řešit požadovanými rýsovacími prostředky (pravítkem a kružítkem).

Podle definice 4.2 je úloha řešitelná, podaří-li se nám nalézt hledané body konečným počtem opakování základních konstrukčních výkonů. Abychom poznali, které body lze sestrojit z daných bodů pomocí pravítka a kružítka, je velmi výhodné využít analytické geometrie. Zavedeme proto nyní kartézskou soustavu souřadnic.

Označme v konkrétní konstrukční úloze dané body P_1, P_2, $\cdots$, P_n a hledané body X_1, X_2, $\cdots$, X_m. Pomocí pravítka a kružítka nejprve sestrojíme dvě kolmé přímky (jedna ze základních eukleidovských konstrukcí, viz kapitolu 3.2.1). Provedeme to tak, aby jeden z daných bodů P_i byl jejich průsečíkem (např. bod P_1) a jiným daným bodem některá z přímek procházela (např. bodem P_2). Vzdálenost mezi těmito dvěma body zvolíme za jednotku délky. Tím máme zavedenu kartézskou soustavu souřadnic, v níž má bod P_1 souřadnice [0,0] a bod P_2 souřadnice [1,0].
Promítnutím každého z daných bodů $P_3, P_4, \cdots, P_n$ do souřadnicových os (pomocí pravítka a kružítka) získáme pro každý bod dvojici bodů, které jsou charakterizované čísly — jejich kartézskými souřadnicemi (obr. 4.1). Pomocí souřadnic můžeme takto jednoznačně popsat také body hledané. Geometrické vztahy, jimiž jsou provázány dané body P_i a hledané body X_i pak můžeme vyjádřit rovnicemi, kde neznámými budou právě souřadnice hledaných bodů.

Následující věta říká, kdy můžeme využitím výše popsaného systému souřadnic o konstrukční úloze prohlásit, že je eukleidovsky řešitelná.



Obrázek 4.1: Kartézský systém souřadnic

Věta 4.1 *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bylo možné konstrukční úlohu řešit eukleidovsky, je, že souřadnice hledaných bodů lze vypočítat ze souřadnic daných bodů pomocí racionálních operací (tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení) a pomocí konečného počtu reálných druhých odmocnin.*

Důkaz
Předpokládejme, že kromě daných bodů jsme již eukleidovsky sestrojili i některé další body, kde souřadnice těchto nových bodů lze vypočítat ze souřadnic daných bodů operacemi, které jsou uvedeny ve větě. Nyní chceme na některém z daných či již sestrojených bodů provést konstrukční výkon 3 – 5 z kapitoly 3.2.1, resp. 1. – 3. v této kapitole. Analyticky jde ve všech třech případech (konstrukce průsečíku dvou přímek, konstrukce průsečíku dvou kružnic a konstrukce průsečíku přímky a kružnice) o řešení soustav dvou rovnic následujícího tvaru:

- Při hledání průsečíku dvou přímek:

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$
$$b_1x + b_2y + b_3 = 0,$$

- Při hledání průsečíku dvou kružnic:

$$x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0$$
$$x^2 + y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0,$$

- Při hledání průsečíku přímky a kružnice:

$$
\begin{gathered}
a_1x + a_2y + a_3 = 0 \\
x^2 + y^2 + b_1x + b_2y + b_3 = 0,
\end{gathered}
$$

kde koeficienty a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 jsou racionálními funkcemi bodů, které určují příslušnou přímku či kružnici. Protože jsme předpokládali existenci reálných průsečíku, mají výše uvedené soustavy rovnic reálná řešení. Hodnoty neznámých jsou racionálními funkcemi koeficientů. Lze tedy souřadnice průsečíků vypočítat racionálními operacemi a výpočtem druhých odmocnin (v případě, že je některou z křivek kružnice) ze souřadnic známých bodů.

K důkazu věty zprava doleva bychom využili o několik řádků výše popsané skutečnosti — každý bod je jednoznačně určen dvojicí souřadnic, které lze chápat jako délky úseček, jejichž jedním krajním bodem je počátek souřadnicové soustavy a druhým krajním bodem je průmět tohoto bodu do jednotlivých os, tato část důkazu proto splývá s důkazem níže uvedené věty 4.2.

Užití analytické geometrie při řešení konstrukčních úloh je patrné z příkladu 8 v kapitole 3.5.4. Souřadnice hledaných bodů jsme v tomto případě vypočítali z algebraické rovnice čtvrtého stupně a to pouze užitím aritmetických operací a výpočtem druhé odmocniny. Zmíněná konstrukce je proto proveditelná eukleidovsky.

Následující příklad se týká konstrukce tečen ke kružnici vedených z vnějšího bodu kružnice. Tuto úlohu lze řešit užitím různých metod, nyní využijeme analytické geometrie. Výpočtem souřadnic bodu dotyku a užitím věty 4.1 ukážeme, že konstrukce tečny je skutečně řešitelná užitím pravítka a kružítka.

Příklad 10

Je dána kružnice $k(S, r = 5 \text{ cm})$ a vnější bod A tak, že $|SA| = 9$ cm. Sestroj všechny přímky, které prochází bodem A a dotýkají se kružnice k.

Řešení

Budeme hledat souřadnice bodu dotyku T tečny t a kružnice k. Nejprve vhodně zavedeme souřadnicový systém — střed kružnice ztotožníme s počátkem soustavy souřadnic, bod A umístíme na ose y. V tomto umístění jsou souřadnice středu kružnice $[0, 0]$, bod A má souřadnice $[9, 0]$. Analytické vyjádření kružnice a tečny t má následující tvar:

$$
\begin{gathered}
k\colon x^2 + y^2 = 25 \\
t\colon y = kx + 9.
\end{gathered}
$$

Dosazením za y z druhé rovnice do první rovnice dostáváme:

$$x^2 + (kx+9)^2 = 25,$$
$$\text{po úpravě } (1+k^2)x^2 + 18kx + 56 = 0.$$

Aby byla přímka t tečnou kružnice, musí mít tato kvadratická rovnice jeden dvojnásobný kořen x a tedy její diskriminant D musí být nulový. Z podmínky nulového diskriminantu určíme hodnotu směrnice přímky k:

$$D = 324k^2 - 224 - 224k^2 = 100k^2 - 224.$$

Kvadratická rovnice $100k^2 - 224 = 0$ má kořeny: $k_1 = \frac{2}{5}\sqrt{14}$, $k_2 = -\frac{2}{5}\sqrt{14}$.
Pro každou z těchto hodnot určíme souřadnice bodu dotyku T: $x_{1,2} = \dfrac{-18k \pm \sqrt{D}}{2(1+k^2)}$,

$$\text{pro } k_1 \text{ je } x = -\frac{10}{9}\sqrt{14},$$
$$\text{pro } k_2 \text{ je } x = \frac{10}{9}\sqrt{14}.$$

V obou případech po dosazení za x do rovnice tečny t dostáváme pro y-ovou souřadnici bodů T_1, T_2:

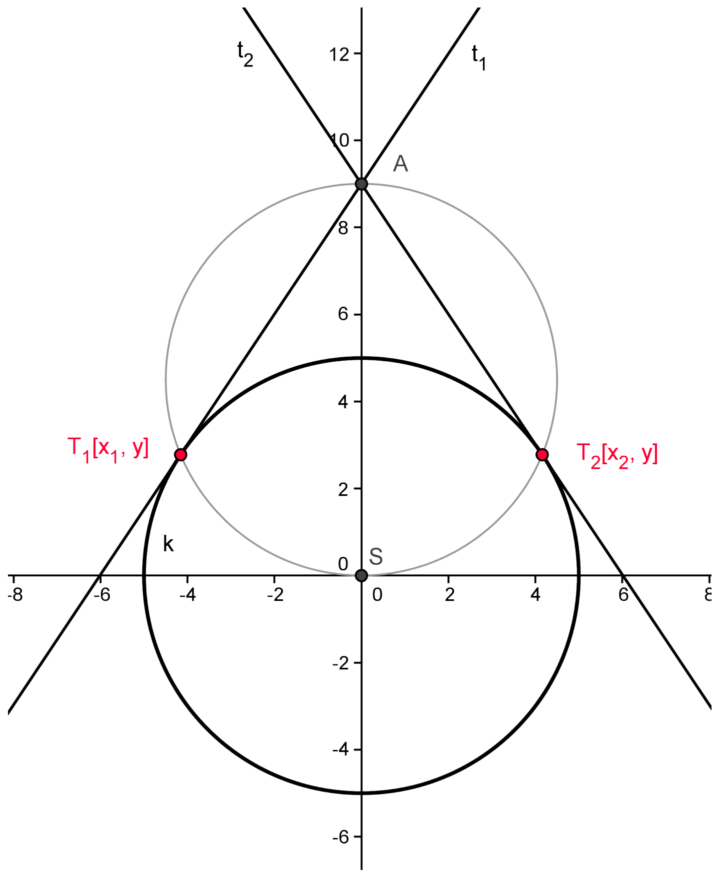
$$y = -\frac{2}{5}\sqrt{14} \cdot \frac{10}{9}\sqrt{14} + 9 = \frac{25}{9}.$$

Souřadnice bodů dotyku

$$T_1 = \left[-\frac{10}{9}\sqrt{14}; \frac{25}{9}\right],\ T_2 = \left[\frac{10}{9}\sqrt{14}; \frac{25}{9}\right]$$

jsme vypočítali ze souřadnic daných bodů pomocí aritmetických operací a výpočtu druhých odmocnin, tato úloha je proto eukleidovsky řešitelná — konstrukce pomocí Thaletovy kružnice je patrná z obr. 4.2.

Vzhledem k tomu, že souřadnice daného bodu v rovině jsou geometricky dány dvěma úsečkami, můžeme předchozí větu přeformulovat pro délky úseček, a to následovně:



Obrázek 4.2: Konstrukce k příkladu 10

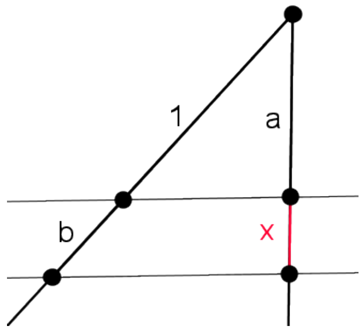
Věta 4.2 *Nutná a postačující podmínka pro to, aby bylo možné konstrukční úlohu řešit eukleidovsky je, že délka hledané úsečky x lze vypočítat z délek daných úseček $a, b, \ldots$ pomocí racionálních operací (tj. sčítání, odčítání, násobení a dělení) a pomocí konečného počtu reálných druhých odmocnin.*

Důkaz

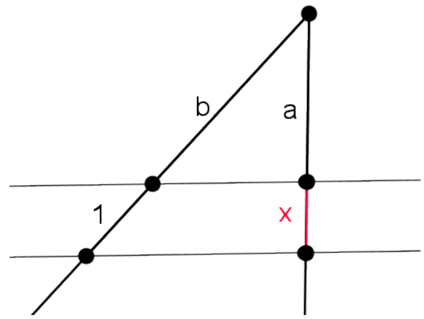
Pro důkaz věty stačí ukázat, že lze eukleidovsky sestrojit úsečku, jejíž délka je součtem, rozdílem, součinem a podílem délek dvou daných úseček a také úsečku, jejíž délka je druhou odmocninou z délky dané úsečky. Mějme v rovině sestrojené úsečky délek a, b.

1. Konstrukce součtu, resp. rozdílu délek úseček je velmi jednoduchá a známá — jde o nanášení úseček na přímku.

2. Součin, resp. podíl délek úseček a, b sestrojíme jako čtvrtou geometrickou úměrnou k těmto úsečkám a úsečce délky 1 (viz kapitola 3.5.3). Konstrukce je patrná z obr. 4.3 pro součin délek a z obr. 4.4 pro podíl délek.

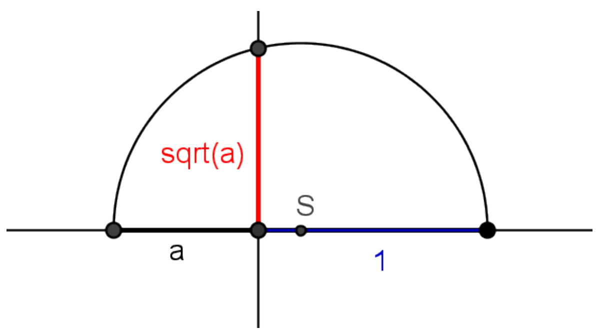


Obrázek 4.3: Konstrukce součinu délek dvou úseček



Obrázek 4.4: Konstrukce podílu délek dvou úseček

3. Máme-li dánu úsečku délky a, můžeme sestrojit úsečku o délce $\sqrt{a}$ užitím Eukleidovy věty o výšce (viz konstrukce geometrického průměru úsečky — kapitola 3.5.3, kde délka úsečky b je 1). Tato eukleidovská konstrukce je znázorněna na obr. 4.5.



Obrázek 4.5: Konstrukce druhé odmocniny

Tím je věta dokázána.

Řešení konstrukční úlohy často spočívá v nalezení neznámé úsečky (její konstrukci). V takovém případě je výše popsaná věta velmi užitečná. Chceme-li dokázat, zda úloha takového typu je či není řešitelná, sestavíme z daných délek rovnici pro délku hledané úsečky. Podaří-li se nám tuto úsečku vyjádřit z daných úseček v souladu s podmínkami věty 4.2, pak je tato úloha řešitelná pomocí pravítka a kružítka. Praktickou ukázkou je příklad 11.

Poznámka
Délka úsečky, kterou lze sestrojit pomocí pravítka a kružítka, se někdy označuje jako konstruovatelné číslo. Ostatní kladná čísla nazýváme nekonstruovatelná. Příkladem konstruovatelného čísla (délky eukleidovsky konstruovatelné úsečky) je $\sqrt{2}$. Oproti tomu mezi nekonstruovatelná čísla patří např. $\sqrt[3]{2}$, π, atd..

Při rozhodování, zda daná úloha je či není eukleidovsky konstruovatelná je třeba nejprve ověřit, zda sami zadané prvky jsou konstruovatelná čísla. Není-li tomu tak, nemá smysl zkoumat řešitelnost takové úlohy pomocí pravítka a kružítka, když nejsme schopni sestrojit ani prvky dané. Až teprve je-li úloha vhodně zadaná, tj. pomocí konstruovatelných čísel, má smysl se zabývat její eukleidovskou řešitelností.

Příklad 11
V trojúhelníku ABC jsou dané strany a, b a jeho obsah S, který je shodný s obsahem čtverce, jeho strana je úsečka délky m. Dokažte, že tento trojúhelník lze sestrojit eukleidovsky a konstrukci proveďte.

Řešení
Rozbor
Abychom mohli sestrojit požadovaný trojúhelník, je potřeba dourčit ještě jeden prvek, např. výšku v_a. Vyjádříme ji pomocí daných prvků.
Dané prvky: $a, b, S = m^2$

Ze vztahu pro obsah trojúhelníku:

$$S = \frac{av_a}{2}$$

vyjádříme výšku v_a a dosadíme $S = m^2$:

$$v_a = \frac{2m^2}{a}.$$

Délku výšky v_a jsme získali ze zadaných délek pomocí operací násobení a dělení. Úsečku délky v_a lze podle věty 4.2 sestrojit eukleidovsky, proto lze také z těchto prvků eukleidovsky sestrojit trojúhelník ABC (viz obr. 4.6).

Výšku $v_a = AA_0$ získáme postupnou konstrukcí úseček délek $x = m^2 = m \cdot m$, $y = 2x$ a $z = \dfrac{y}{a} = v_a$.

Hledané body: B, C
Pro nalezení hledaných bodů využijeme množin všech bodů dané vlastnosti:

$C \in M_1 \cap M_2$, kde
$M_1 = \{X \in \rho; XA_0 \perp v_a\} = p$
$M_2 = \{X \in \rho; |XA| = b\} = k(A, b)$.

$B \in L_1 \cap L_2$, kde
$L_1 = CA_0$
$L_2 = \{X \in \rho; |XC| = a\} = l(C, a)$.

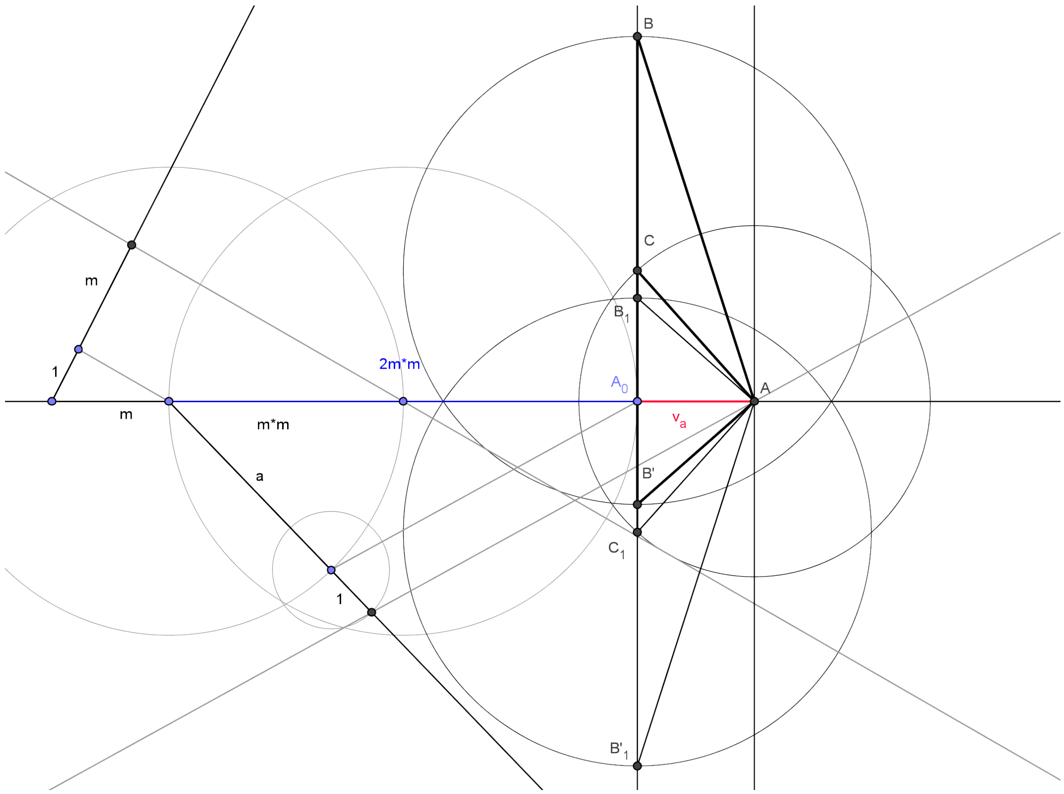
Obrázek 4.6: Náčrtek

Konstrukce

1. x, $x = m^2$ (konstrukce viz bod 2. důkazu věty 4.2)
2. y; $y = 2x$
3. v_a; $v_a = AA_0 = \dfrac{y}{a}$ (konstrukce viz bod 2. důkazu věty 4.2)
4. p; $p \perp v_a \wedge A_0 \in p$
5. k; $k(A, b)$
6. C; $C \in p \cap k$
7. l; $l(C, a)$
8. B; $B \in p \cap l$
9. ΔABC

Zkouška
Plyne z rozboru konstrukce.

Diskuse
Je-li $v_a > b$, úloha nemá řešení,
je-li $v_a = b$, úloha má právě 2 řešení (dva pravoúhlé trojúhelníky),
je-li $v_a < b$, úloha má právě 4 řešení (viz obr. 4.7, kde $m = 2$ cm, $a = 4$ cm a $b = 3$ cm).



Obrázek 4.7: Konstrukce k příkladu 11

Ukázat, že je daná úloha eukleidovsky řešitelná, bývá zpravidla snadnější než důkaz její neřešitelnosti pomocí pravítka a kružítka. Pro důkaz řešitelnosti nám vesměs stačí využít věty 4.1 a 4.2. Pro to, abychom ukázali, že daná konstrukční úloha není eukleidovsky řešitelná, je velmi výhodné se na tento problém podívat z pohledu číselných těles. Využitím tohoto algebraického nástroje můžeme přeformulovat výše uvedené věty o eukleidovských konstrukcích. Těch pak v závěru této kapitoly využijeme k důkazu neřešitelnosti třech proslulých úloh starověku pomocí pravítka a kružítka.

Opět vyjdeme z vhodně zvolené kartézské soustavy souřadnic. Nechť a_i, b_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), jsou souřadnice daných bodů P_i a x_j, y_j souřadnice hledaných bodů X_j ($j = 1, 2 \ldots, m$).
Vytvoříme nejmenší možné těleso, ve kterém jsou obsažena všechna čísla a_i, b_i. Toto těleso dostaneme sčítáním, odčítáním, násobením a dělením čísel a_i, b_i. Takto vytvořené těleso označíme symbolem $\mathbf{T}$.
V tělese $\mathbf{T}$ jsou obsažena všechna racionální čísla, je tedy nadtělesem tělesa $\mathbf{Q}$.

Jestliže hledané body X_i získáme z daných bodů $P_i\,[a_i, b_i]$ užitím pravítka, tj. jako průsečíky daných či dříve vytvořených přímek, budou souřadnice těchto bodů prvky tělesa $\mathbf{T}$, protože jak rovnice zmíněných přímek, tak souřadnice jejich průsečíku dosta-

neme ze souřadnic daných bodů pomocí racionálních operací.
Jiná situace ale nastává, použijeme-li ke konstrukci hledaného bodu kružítko, tj. získáme jej jako průsečík přímky a kružnice či dvou kružnic určených danými či dříve sestrojenými body. Zde již nemusíme vystačit pouze s racionálními operacemi, může totiž nastat, že v analytickém vyjádření takovéto konstrukce dostáváme také druhé odmocniny. Ty už však neleží v tělese $\mathbf{T}$. Souřadnice takového bodu leží v tělese, které vzniklo z tělesa $\mathbf{T}$ přidáním nějaké druhé odmocniny $\sqrt{c}$ $(c > 0)$, kde $c \in \mathbf{T}$, $\sqrt{c} \notin \mathbf{T}$.

Definice 4.3 *Jestliže $\boldsymbol{T}$ je těleso a c je kladné reálné číslo takové, že $c \in \boldsymbol{T}$, ale $\sqrt{c} \notin \boldsymbol{T}$, potom symbolem $\boldsymbol{T}(\sqrt{c})$ označujeme těleso $\left\{p + q\sqrt{c}; p, q \in \boldsymbol{T}\right\}$ a nazýváme jej kvadratickým vzhledem k tělesu $\boldsymbol{T}$.*

Budeme-li z daných či získaných bodů dále konstruovat další hledané body, může v případě použití kružítka opět nastat, že jejich souřadnice nebudou ležet v tělese $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}(\sqrt{c})$, tj. že se v těchto souřadnicích vyskytuje druhá odmocnina $\sqrt{d}$ nějakého čísla $d \in \mathbf{T}_1$. Označme $\mathbf{T}_2$ těleso, které vytvoříme z tělesa $\mathbf{T}_1$ přidáním prvku $\sqrt{d}$. Prvek takto nově vytvořeného tělesa má obecný tvar $e + f\sqrt{d}$, kde e, f jsou prvky tělesa $\mathbf{T}_1$. Kdybychom takto v úvahách postupovali dále, získáme konečnou posloupnost těles

$$\mathbf{T} \subset \mathbf{T}_1 \subset \mathbf{T}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{T}_{k-1} \subset \mathbf{T}_k,$$

ve které těleso $\mathbf{T}_l$ vzniklo z tělesa $\mathbf{T}_{l-1}$ přidáním nějakého čísla $\sqrt{c_{l-1}}$, kde $c_{l-1} \in \mathbf{T}_{l-1}$, $c_{l-1} > 0$ a $\sqrt{c_{l-1}} \notin \mathbf{T}_{l-1}$. Uvedenou posloupnost nazýváme posloupnost relativně kvadratických těles.

Nyní můžeme přeformulovat nutnou a postačující podmínku řešitelnosti konstrukční úlohy pomocí pravítka a kružítka využitím číselných těles:

Věta 4.3 *Nutná a postačující podmínka pro to, aby byl bod $X\,[x, y]$ eukleidovsky konstruovatelný z bodů $P_i\,[a_i, b_i]$ je, že jak pro souřadnici x, tak pro souřadnici y existuje konečná posloupnost relativně kvadratických těles*

$$\boldsymbol{T} \subset \boldsymbol{T}_1 \subset \boldsymbol{T}_2 \subset \ldots \subset \boldsymbol{T}_{k-1} \subset \boldsymbol{T}_k$$

takových, že číslo x (resp. y) $\in \boldsymbol{T}_k$. Těleso $\boldsymbol{T}$ je nejmenší číselné těleso, ve kterém jsou obsažené souřadnice $[a_i, b_i]$ bodů P_i.

Souřadnici x (a obdobně y) hledaného bodu X, popř. hledanou vzdálenost x dvou bodů je často možné vyjádřit jako kladný kořen určité algebraické rovnice

$$f(x) = 0,$$

jejíž koeficienty leží ve výše zavedeném tělese **T**.

Podaří-li se nám tuto rovnici algebraicky vyřešit pomocí racionálních operací a druhých odmocnin, pak hledaná délka úsečky x je eukleidovsky konstruovatelná. Nedovedeme-li však rovnici algebraicky řešit, anebo nalezený výraz pro x obsahuje vyšší odmocniny, lze často použít následující větu.

Věta 4.4 *Mějme dáno k úseček o délkách $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Nechť $\boldsymbol{T}$ je těleso, které vznikne z tělesa racionálních čísel $\boldsymbol{Q}$ přidáním čísel $a_1, a_2, \ldots, a_k$, tj. jde o nejmenší těleso obsahující čísla $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Nechť α je číslo, které je kořenem rovnice:*

$$z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n = 0$$

s koeficienty v tělese $\boldsymbol{T}$ a nerozložitelné nad $\boldsymbol{T}$. Nutnou (ne však postačující) podmínkou pro to, aby úsečka o délce α byla eukleidovsky konstruovatelná (a tedy pro to, aby číslo α bylo prvkem tělesa $\boldsymbol{T}_k$, které lze vytvořit pomocí řetězce relativně kvadratických těles), je, aby stupeň této rovnice byla přirozená mocnina čísla 2: $n = 2^l$, $l \in \boldsymbol{N}$.

Důkaz této věty je rozsáhlejší, proto jej zde neuvádím, čtenář jej může nalézt např. v [2], str. 458.

Důsledkem věty 4.4 je, že vede-li nějaká geometrická úloha v analytickém vyjádření k určení kořene rovnice $f(x) = 0$, kde $f(x)$ je nerozložitelný polynom stupně n nad tělesem **T** (těleso **T** chápeme ve výše popsaném významu) a není-li n přirozenou mocninou čísla 2, je tato úloha eukleidovsky neřešitelná. Praktickou ukázkou aplikace tohoto důsledku je obsah následujících podkapitol — důkazy neřešitelnosti klasických úloh starověku.

4.2 Klasické eukleidovsky neřešitelné úlohy

Důkaz neřešitelnosti každé z těchto úloh provedeme následovně:
Nejprve vždy úlohu převedeme do „řeči čísel“ — vyjádříme ji ve formě algebraické rovnice, kdy ukážeme, že stupeň této rovnice nesplňuje nutnou podmínku vyslovenou ve větě 4.4., tedy že rovnice nemá žádné řešení odpovídající délce eukleidovsky sestrojitelné úsečky, tj. konstruovatelnému číslu.

4.2.1 Reduplikace krychle

Znění úlohy: *Je dána krychle o hraně délky a. Sestroj krychli o hraně délky x takovou, že její objem je roven dvojnásobku objemu krychle dané.*

Řešení
Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že daná krychle je jednotková, tj. $a = 1$. Problém reduplikace krychle pak můžeme přeformulovat takto:
Je dána úsečka délky 1. Sestroj úsečku délky x, kde $x^3 = 2$.

Úlohu tak převádíme na určení kořenů kubické rovnice:

$$x^3 - 2 = 0.$$

Těleso $\mathbf{T}$ ve větě 4.4 je v tomto případě shodné s tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$. Racionálními kořeny této kubické rovnice s celočíselnými koeficienty by mohla být pouze čísla ± 1 a ± 2. Dosazením zjistíme, že ani jedno z těchto čísel není jejím kořenem, jsou proto splněny předpoklady věty 4.4. Zároveň však s ohledem na stupeň této algebraické rovnice není splněna nutná podmínka konstruovatelnosti kořene $\sqrt[3]{2}$ ($3 \neq 2^l$, $l = 0, 1\dots$), úsečku délky $\sqrt[3]{2}$ nelze sestrojit pomocí pravítka a kružítka.
Závěr: Reduplikaci krychle nelze eukleidovsky provést.

4.2.2 Trisekce úhlu

Znění úlohy: *Rozděl daný úhel na tři shodné části.*

Řešení
Abychom dokázali, že úloha není obecně řešitelná pomocí pravítka a kružítka, stačí ukázat, že existuje úhel, který nelze takto „roztřetit“. Důkaz neřešitelnosti provedu pro úhel $60°$.

Je-li dán úhel $\alpha = |\angle POR|$, kde body P, O, R jsou body eukleidovsky sestrojitelné, lze pomocí pravítka a kružítka sestrojit úsečku délky $\cos\alpha$ a naopak.
Zvolíme-li totiž vhodně kartézskou soustavu souřadnic (viz obr. 4.8), pak $\cos\alpha$ je x-ová souřadnice bodu, který dostaneme jako průsečík konstruovatelné přímky OR a jednotkové kružnice se středem v bodě O. Spuštěním kolmice v tomto bodě na osu x získáme úsečku požadované délky $\cos\alpha$.
Máme-li sestrojit třetinový úhel k úhlu danému, jde v podstatě o nalezení x-ové souřadnice bodu X (viz obr. 4.8).
K důkazu neřešitelnosti úlohy využijeme goniometrické identity:

$$\cos 3a = 4(\cos a)^3 - 3\cos a.$$

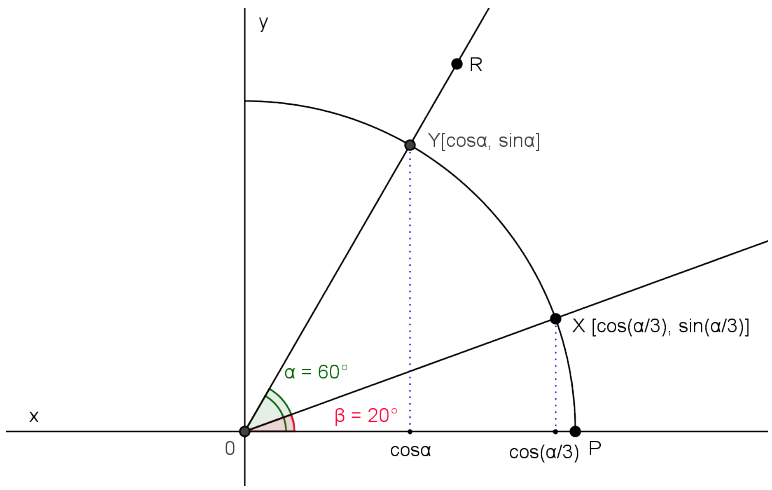
Položíme-li $a = \dfrac{\alpha}{3}$, dostáváme rovnici v následujícím tvaru:

$$\cos\alpha = 4(\cos\frac{\alpha}{3})^3 - 3\cos\frac{\alpha}{3}.$$

Pro $\alpha = 60^\circ$ dostáváme $\cos\alpha = \frac{1}{2}$. Položíme $\cos\frac{\alpha}{3} = x$, čímž získáme kubickou rovnici a můžeme problém trisekce 60° přeformulovat následovně:
Je dána úsečka délky 1. Sestroj úsečku délky x, pro kterou platí:

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Opět jsme úlohu převedli na hledání kořenů algebraické rovnice stupně 3.



Obrázek 4.8: Trisekce úhlu

Těleso **T** je i v tomto případě shodné s tělesem všech racionálních čísel **Q**. Ani tato rovnice však nemá racionální kořeny, protože by jimi mohla být pouze čísla ± 1, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$ či $\pm\frac{1}{8}$. Podmínky věty 4.4. jsou splněny. Avšak stejně jako v předchozím případě stupeň této algebraické rovnice nelze vyjádřit v podobě mocniny čísla 2, proto ani žádný kořen této rovnice (hledaná délka úsečky) není konstruovatelné číslo.
Závěr: Úhel 60° nelze užitím pravítka a kružítka rozdělit na tři shodné úhly, trisekce úhlu je eukleidovsky neřešitelná úloha.

Poznámka

Obecně je trisekce úhlu tvaru $\frac{\pi}{2^n}$ možná v případě, je-li n celé kladné číslo.

4.2.3 Kvadratura kruhu

Znění úlohy: *Sestroj čtverec, jehož obsah je shodný s obsahem kruhu o daném poloměru.*

Řešení

Bez újmy na obecnosti můžeme položit poloměr kruhu $r = 1$ (jednotkový kruh). Problém kvadratury kruhu lze poté přeformulovat následovně:
Je dána úsečka délky 1. Sestroj úsečku délky x, kde $x^2 = \pi$.
Úlohu tedy můžeme vyjádřit následující kvadratickou rovnicí:

$$x^2 - \pi = 0.$$

Tentokrát sice dostáváme kvadratickou rovnici, avšak kořen této rovnice $\sqrt{\pi}$ je transcendentní číslo, proto délka strany hledaného čtverce $\sqrt{\pi}$ nelze eukleidovsky sestrojit.
Závěr: Kvadratura kruhu také patří mezi eukleidovsky neřešitelné úlohy.

Kapitola 5

Přibližné konstrukce

Pomocí přibližné konstrukce sestrojujeme místo žádaného útvaru náhradní útvar, který se od něho „dostatečně málo liší“.

Jak popisuje Vyšín v [5], žádáme v případě konstrukcí přibližných úseček, aby se délka takové úsečky nelišila od délky skutečné úsečky o více než $0,2$ mm — jde o tzv. grafickou chybu, nejvyšší přesnost, s jakou můžeme rýsovat a měřit úsečky běžnými prostředky: pravítkem, kružítkem a pouhým okem (bez lupy).

Přibližných konstrukcí využíváme však jen v případech, kdy přesná eukleidovská konstrukce buď neexistuje, nebo je příliš složitá.
V následujících odstavcích uvádím vybrané přibližné konstrukce.

Vargiova přibližná konstrukce úsečky délky $\sqrt[3]{2}$
Tato konstrukce slouží k sestrojení přibližné délky hrany krychle, která má vzhledem k dané krychli dvojnásobný objem. Postup je následující:
Sestrojíme úsečku a_1 délky $\sqrt{2}$, dále střední geometrickou úměrnou a_2 úseček e (jednotková úsečka) a a_1, střední geometrickou úměrnou a_3 úseček a_1 a a_2 atd. až střední geometrickou úměrnou a_8 úseček a_6 a a_7. Pak a_8 je požadovaná délka úsečky.

Důkaz
Délky úseček podle výše popsaného postupu jsou následující:

$$a_2 = 2^{\frac{1}{4}},\ a_3 = 2^{\frac{3}{8}},\ a_4 = 2^{\frac{5}{16}},\ a_5 = 2^{\frac{11}{32}},\ a_6 = 2^{\frac{21}{64}},\ a_7 = 2^{\frac{43}{128}},\ a_8 = 2^{\frac{85}{256}}.$$

Logaritmicky vypočítáme, že $2^{\frac{85}{256}} \approx 1,25878$.

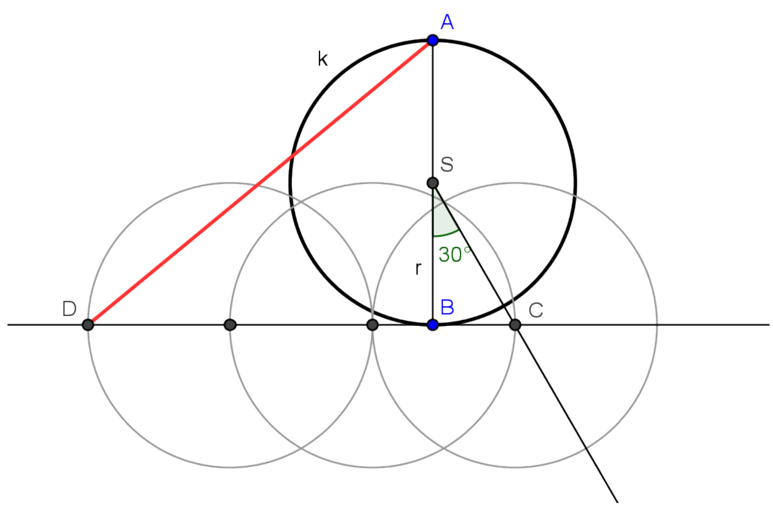
Protože je $\sqrt[3]{2} \approx 1,25992$, je $0 < \sqrt[3]{2} - 2^{\frac{85}{256}} \approx 0,0011\ldots < 0,002$.

Aby tento rozdíl zůstal v mezích grafické chyby, musí být délka jednotkové úsečky v mezích do 10 cm ([5]).

Existuje mnoho přibližných konstrukcí úsečky délky odpovídající délce dané kružnice. Jednou ze známějších přibližných konstrukcí je **Kochanskeho přibližná rektifikace kružnice**. Tato konstrukce je velmi přesná pro běžné poloměry (4 – 10 cm). Rozdíl oproti skutečné délce je v mezích grafické chyby pro poloměry do 2 m. Je založena na konstrukci úsečky, jejíž délka je přibližně polovina délky dané kružnice, viz obr. 5.1.

Konstrukce

1. k; $k(S, r)$
2. AB; $AB = d \ldots$ průměr kružnice
3. t; $B \in t \wedge$ t je tečna kružnice k
4. $\angle BSX$; $|\angle BSX| = 30°$
5. C; $C \in t \cap \mapsto SX$
5. D; $D \in \mapsto CB \wedge |CD| = 3r$
5. AD; $|AD| \approx \pi r$



Obrázek 5.1: Kochanskeho rektifikace kružnice

Nyní se podívejme na problematiku konstrukce pravidelných n-úhelníků. Na střední škole se ukazují eukleidovské konstrukce pro $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12$. Všechny tyto konstrukce považujeme za přesné. K jejich provedení je zapotřebí jen konečného počtu přímek a kružnic, které umíme přesně narýsovat, neuvažujeme-li nedokonalosti rýsovacích pomůcek a chyby vzniklé jejich používáním. Dále díky možnosti půlit úhly můžeme sestrojit $2n$-úhelník právě tehdy, když můžeme sestrojit n-úhelník.

Některé pravidelné mnohoúhelníky lze euklidovskou konstrukcí vytvořit jednoduše, jiné ne. Německý matematik Carl Friedrich Gauss se v roce 1796 zabýval problematikou mnohoúhelníků a vyřešil jeden z nejslavnějších problémů vyššího stupně — sestrojil eukleidovsky pravidelný sedmnáctiúhelník vepsaný do jednotkové kružnice a ukázal, že pravidelný n-úhelník lze euklidovskou konstrukcí vytvořit, pokud liché dělitele n jsou různá Fermatova prvočísla. To formuloval následující větou:

Věta 5.1 *Pravidelný n-úhelník lze sestrojit eukleidovsky tehdy a jen tehdy, je-li číslo n ve tvaru:*

$$n = 2^m p_1 p_2 p_3 \cdots p_k,$$

kde $m = 0, 1, \cdots$ a p_1, $p_2, \cdots$ jsou různá Fermatova prvočísla ve tvaru $2^{2^q} + 1$, $q = 0, 1, \cdots$.

C. F. Gauss se správně domníval, že tato podmínka je nejen nutná, ale i postačující, ale dokázat se to podařilo až Pierru Wantzelovi v roce 1837.

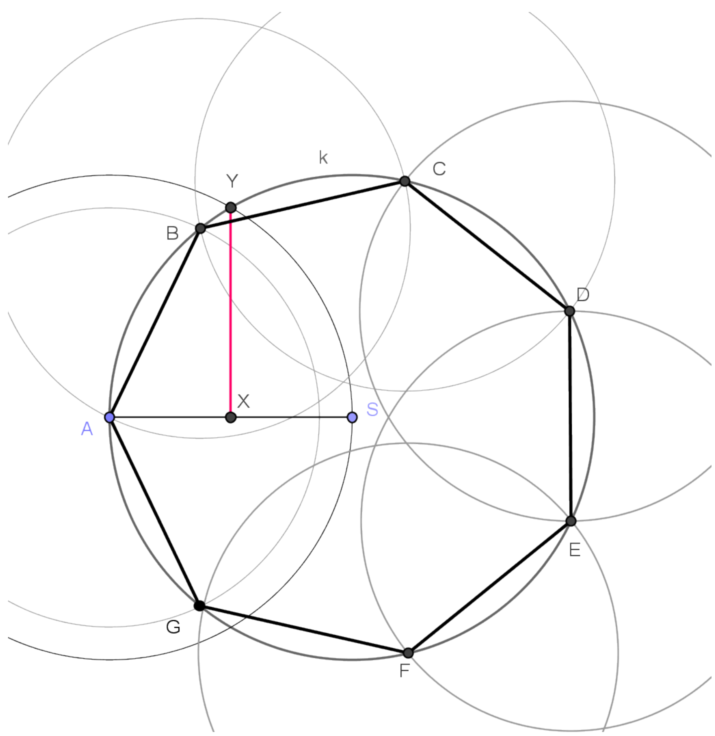
Mezi pravidelné mnohoúhelníky, které nelze eukleidovsky sestrojit, patří např. pravidelný sedmiúhelník, devítiúhelník, jedenáctiúhelník, třináctiúhelník, a další. I v tomto případě můžeme provést alespoň přibližnou konstrukci.

Přibližná konstrukce sedmiúhelníku

Neexistuje způsob, jak konstrukci provést pomocí pravítka a kružítka úplně přesně. Budeme-li chtít vepsat pravidelný sedmiúhelník do kružnice $k(S, r)$, lze za délku jeho strany použít výšku v rovnostranného trojúhelníku o straně r. Na dané kružnici zvolíme jeden bod a zbylé body získáme postupným nanášením tětiv o délce v na kružnici k (obr. 5.2). Tím získáme přibližnou konstrukci pravidelného sedmiúhelníku vepsaného do kružnice o daném poloměru.

Konstrukce:

1. k; $k(S, r)$
2. A; $A \in k$
3. X; $|AX| = |XS| \wedge X \in AS$
4. l; $l(A, r = |AS|)$
5. Y; $Y \in k \cap l$
5. v; $v = |XY|$
5. sedmiúhelník $ABCDEFG$ o straně délky v



Obrázek 5.2: Přibližná konstrukce sedmiúhelníku

Kapitola 6

Vývoj zpracování konstrukčních úloh ve SŠ učebnicích planimetrie

Konstrukční úlohy (ve starších učebnicích též nazývané strojné úlohy či úlohy konstruktivní) zaujímaly vždy důležité místo ve vyučování matematiky. U nás byl jejich význam umocněný vynikající úrovní české geometrické a deskriptivní školy. Modernizační proud začátkem šedesátých let dvacátého století však téměř vyloučil konstrukce z učiva střední školy. V dnešní době se planimetrické konstrukční úlohy z okrajového učiva opět staly jednou ze stěžejních částí výuky matematiky na středních školách.

V následujících odstavcích uvádím, jak bylo téma konstrukční úlohy probíráno v našich starších učebnicích a jak je zařazeno do učebnic současných.

První ucelená česká učebnice geometrie je [18] J. V. Sedláčka.

V této první české učebnici středoškolské geometrie autor (vyučující na gymnáziu v Plzni) řeší mimo jiné některé konkrétní konstrukční úlohy. Řešení každé úlohy rozděluje do tří částí zvaných *rozhodnutí* (v dnešní terminologii rozbor a slovní popis konstrukce), *důkaz* a *následek* (náznak diskuse řešení úlohy).

Pro ilustraci uvádím doslovně zadání několika konstrukčních úloh z II. části Sedláčkovy knihy nazvané Délkoměřictví a plochoměřictví [tj. planimetrie]:

§44. *Uloha.* Danou kteroukoli přímku [nyní úsečku] rozpoliti (do dvou částek rozděliti), a syce takovou přímkou, kteráby byla spolu kolmá (závažní) k té druhé dané přímce.

§45. *Uloha.* Kterýkoli daný uhel do dvou stejných částek rozděliti, t. j. každý uhel rozpoliti.

§52. *Uloha.* Ze tří daných stran sestrojiti neboli sestaviti trojuhelník.

§75. *Uloha.* Z daného bodu mimo okolek [dnes kružnici] táhnouti styčnou [tečnu] k okolku.

§80. *Uloha.* Táhnouti přímku, kteráby byla styčnou k dvěma daným od sebe vzdáleným rozličným kruhům, s tou příjemkou, že jest známá vzdálenost obou kruhů od středu ke středu, pak jejich poloměrové.

Učebnice geometrie druhé poloviny 19. století a začátku 20. století

První z významných učebnic spadající do tohoto období je [19] V. Jandečky. Velmi rozsáhlá učebnice je rozdělena do šesti knih (tj. kapitol). V přídavku (tj. dodatku) první z nich je článek nazvaný O místu geometrickém. V přídavku ke druhé knize (kapitole) Některá navedení k řešení úloh se nejprve vymezuje pojem úlohy v této učebnici, přičemž se jí rozumí úloha sestrojit nějaký tvar (v dnešní terminologii geometrický útvar). Vymezuje se klasifikace těchto úloh (z dnešního hlediska na úlohy polohové a nepolohové). Dále se objasňují klasické části jejich řešení: rozbor (analysa), sestrojení (konstrukce), důkaz a omezení (determinace, v dnešní terminologii diskuse řešení úlohy). Následují příklady konstrukcí trojúhelníků, čtyřúhelníků, pravidelných mnohoúhelníků a kruhů.

Druhou významnou učebnicí vydanou o pár desítek let později je [20] V. Jarolímka. Poměrně stručná učebnice obsahuje kapitolu o geometrických místech. Úlohy strojné se řeší ve většině kapitol, ale jen na konkrétních příkladech. Poslední kapitola je pak věnována tématu Řešení úloh geometrických algebrou.

Na přelomu 19. a 20. století pak byla ještě vydána učebnice [21] A. Strnada. Jde o velice podrobně a didakticky vhodně zpracovanou učebnici, která obsahuje jako jednu z významných kapitol: Strojné úlohy geometrické s články o geometrických místech, o strojné úloze a základních strojných úlohách. V dalších kapitolách jsou pak články: Strojné úlohy o trojúhelníku. Řešení úloh strojných užitím podobnosti a Řešení úloh geometrických užitím algebry.

Učebnice první poloviny 20. století

První významnou učebnicí první poloviny 20. století je [22] B. Bydžovského a J. Vojtěcha. Cílem této učebnice bylo uvést systematický přehled hlavních partií učiva reálek a jejich uvedení do vzájemných souvislostí. Přehled obsahuje mimo jiné kapitolu Konstrukce rozdělenou na články: Řešení úloh konstruktivních (postup řešení se dělí na rozbor, sestrojení (konstrukci), důkaz konstrukce a vymezení (determinaci čili diskusi)), základní konstrukce kružítkem a pravítkem, Methoda geometrických míst, Methoda transformační, Konstrukce na základě řešení algebraického, Řešitelnost konstruktivních úloh pravítkem a kružítkem, Příklady úloh neřešitelných, Omezené prostředky, Složitost a přesnost konstrukcí, Význam konstrukcí pro úvahy geometrické. Jednotlivé články jsou zaměřeny především na teoretický výklad částečně doplňovaný ilustrativními příklady a hlavně neřešenými úlohami pro samostatné procvičení.

Další významnou učebnicí tohoto období je [23] J. Vojtěcha. V učebnici není systematický výklad o eukleidovských konstrukcích. Pouze se průběžně v textu provádějí jednodušší konstrukce pravítkem a kružítkem. Samostatný paragraf Konstrukce algebraických výrazů je věnován tomuto tématu.

Učebnice [24] J. Vinše v kapitole O kružnici má paragraf Geometrické místo. Úloha strojná, kde jsou vysvětleny s příklady tyto pojmy a rozdělení postupu řešení úlohy strojné (tj. konstruktivní úlohy) na rozbor (analysu), sestrojení (konstrukci), důkaz správnosti řešení a omezení (diskusi). V kapitole Trojúhelník je paragraf Konstrukce trojúhelníků a v následující kapitole Přímka a kružnice je paragraf Konstrukce tečen kružnic.

Učebnice [26] autorů J. Holubáře a J. Vojtěcha je upravenou verzí Vojtěchovy učebnice [23]. Jsou zde doplněny paragrafy Geometrická místa, Konstruktivní úlohy, Konstruktivní úlohy o trojúhelníku, Konstruktivní úlohy na základě stejnolehlosti, Zlatý řez napsané zřejmě spoluautorem Holubářem. Kromě toho je zde upravený původní paragraf Konstruktivní úlohy řešené na základě algebraickém.

Čechovy učebnice geometrie ze čtyřicátých a padesátých let 20. století

V Čechově učebnici geometrie pro 1. třídu z [25] je zaveden pojem eukleidovské konstrukce a probírají se zde základní eukleidovské konstrukce. V učebnici pro 2. třídu se tato látka opakuje a ve cvičeních se procvičují konstrukce trojúhelníků, dále se zde uvádějí některá geometrická místa bodů v rovině a konstrukce tečen z bodu ke kružnici. V učebnici pro 3. třídu je kapitola o proměnách obrazců.

V učebnici [27] jsou kapitoly o geometrických místech bodů v rovině, o konstruktivních úlohách (euklidovských konstrukcích) a úlohách o tečnách z bodu ke kružnici. Výklad je veden pouze formou příkladů. Další četné úlohy jsou jen ve cvičeních.

V učebnici [28] je kapitola o konstruktivních úlohách obsahující úlohy o kružnici, konstrukcích trojúhelníků a společných tečnách dvou kružnic. Výklad je opět převážně veden formou řešení úloh, obsahuje však i několik důkazů geometrických vět. Mnoho dalších (neřešených) úloh je uvedeno ve cvičeních.

Další z Čechových učebnic [29], obsahující mj. látku planimetrie nemá žádnou souhrnnou kapitolu o konstruktivních úlohách. Ty jsou jen velmi sporadicky uváděny (ve velmi jednoduchých případech) v ostatních kapitolách.

Ani v učebnici [30] obsahující doplňující látku z planimetrie není žádná kapitola o konstruktivních úlohách. Lze tedy konstatovat, že v té době ve vyšších třídách středních škol jim nebyla věnována náležitá pozornost, čímž se situace značně změnila oproti předválečnému stavu na gymnáziích i stavu těsně po 2. světové válce (viz učebnici [26]).

Učebnice geometrie z padesátých až osmdesátých let 20. století

V učebnici [31] v kapitole Shodnost trojúhelníků jsou články o konstrukcích trojúhelníků a v kapitole Rovnoběžnost je článek Eukleidovské konstrukce, ve kterém jsou popsány nejjednodušší eukleidovské konstrukce a příklady složitějších konstrukcí.

Učebnice [32] obsahuje samostatnou kapitolu Konstruktivní úlohy rozdělenou na články: 1. Množina bodů dané vlastnosti, 2. Řešení konstruktivních úloh, 3. Konstruktivní úlohy o trojúhelníku, 4. Další vlastnosti trojúhelníku. Postup řešení konstruktivních úloh se objasňuje na příkladech, v nichž se důsledně dodržují kroky řešení: 1. Rozbor. 2. Konstrukce. 3. Důkaz konstrukce. 4. Diskuse řešení úlohy.

Úvodní kapitola Opakování a doplnění planimetrie v učebnici [33] také obsahuje článek Konstruktivní úlohy, ve kterém se opakuje a doplňuje toto téma z geometrie 7. a 8. ročníku. V kapitole Věty Eukleidovy, věta Pythagorova a jejich užití se dále téma rozšiřuje v článku Konstrukce algebraických výrazů.

V geometrické části učebnice [34] je kapitola Konstruktivní úlohy obsahující články: 1. Geometrická místa bodů, 2. Konstruktivní úlohy řešené užitím geometrických míst, 3. Užití geometrických míst bodů ke konstrukci trojúhelníka, 4. Užití geometrických míst bod ke konstrukci čtyřúhelníka. Kapitola Podobnost a stejnolehlost obsahuje články: Užití stejnolehlosti v konstruktivních úlohách a v praxi, Konstruktivní úlohy řešené pomocí výpočtu.

Učebnice matematiky v „modernizovaném pojetí“ [35] obsahuje kapitolu Planimetrické úlohy s články o množinách bodů daných vlastností v rovině a také článek Konstrukční úlohy, ty se pak probírají ve speciálních případech i v dalších článcích. Výklady učebnice jsou však spíše zaměřeny na množinově-logickou stránku a opomíjena je tradiční systematika poznatků.

Závěrečný sešit řady učebnic matematiky v „modernizačním pojetí“ [37] je určen pro opakování a doplnění učiva v maturitním ročníku gymnázia. V kapitole Geometrie v rovině a v prostoru jsou obsaženy články Vyšetřování množin bodů, Shodná a podobná zobrazení v rovině a Řešení konstrukčních úloh. Pojetí je obdobné jako ve 2. sešitu této řady učebnic, rozšířeno je však též o řešení konstrukčních úloh s parametry (nazývají se tu parametrickými systémy konstrukčních úloh).

Učebnice [38] obsahuje kapitolu Konstrukční úlohy, v níž se probírají některé množiny všech bodů dané vlastnosti a poté se na příkladech objasňuje postup řešení konstrukčních úloh rozdělovaný u složitějších úloh na rozbor, popis konstrukce, konstrukci a zkoušku (ověřování správnosti konstrukce).

V I. dílu učebnice [39] v kapitole Posunutí, otáčení je článek o užití posunutí a otáčení při řešení konstrukčních úloh na konkrétních příkladech.

V II. dílu [40] zmíněné učebnice v kapitole Podobnost a stejnolehlost jsou články o konstrukčním využití těchto geometrických zobrazení na konkrétních příkladech.

Učebnice [41] obsahuje kapitoly Základy geometrie v rovině, jejíž součástí jsou články Množiny všech bodů s danou vlastností a Konstrukční úlohy řešené pomocí množin bodů, dále pak kapitolu Geometrická zobrazení v rovině, jejímiž částmi jsou články Konstrukční úlohy řešené pomocí zobrazení a Stejnolehlosti a jejich konstrukční využití. Výklady v obou článcích o konstrukčních úlohách jsou poměrně velmi stručné, výklad je veden pouze formou příkladů a oba články nejsou náležitě zkoordinovány; teprve ve druhém z těchto článku se objevují pojmy rozbor, konstrukce a zkouška jako části řešení konstrukční úlohy. Diskuse řešení zde není, neboť se vůbec neuvažují úlohy s parametry.

Učebnice [43] v předposlední kapitole Systematizace poznatků o řešení geometrických úloh obsahuje články o řešení konstrukčních úloh s jedním a více neznámými body a též o konstrukčních úlohách s jedním parametrem. Výklad je veden na příkladech obdobně jako v příslušné učebnici pro I. ročník gymnázií. U konstrukčních úloh s parametrem se přímo neužívá termín diskuse řešení úlohy.

V případě učebnice [36] v kapitole 1.8 Konstrukční úlohy autoři J. Schmidmayer, O. Petránek a B. Šikola v Úvodu připomínají některé množiny bodů v rovině (dříve zvané geometrická místa bodů) a v následujícím článku Řešení konstrukčních úloh opět navazují na znalosti žáků ze ZŠ. Podobně objasňují čtyři části klasického řešení konstrukčních úloh, kterými jsou 1. Rozbor (analýza). 2. Konstrukce. 3. Zkouška (důkaz, kontrola). 4. Diskuse (u úloh s parametry). Poté uvádějí příklady konstrukčních úloh s podobným řešením a úlohy na procvičení. V kapitolách 1.9 Shodná zobrazení v rovině, 1.10 Podobnost (včetně vět Euklidových a věty Pythagorovy) a 1.11 Stejnolehlost v rovině se řeší některé konstrukční úlohy algebraicky a zejména užitím stejnolehlosti kružnic.

V učebnici [42] E. Caldy, O. Petránka a J. Řepové není věnována konstrukčním planimetrickým úlohám soustavná pozornost, stejně tak i v dalších učebnicích této řady. Jde o důsledek trendu v rámci tzv. „modernizace vyučování matematice“.

Současné učebnice geometrie

Ve druhém díle učebnice [46] je obsažena kapitola věnovaná přímo konstrukčním úlohám. Nejprve je v první podkapitole Množiny prvků daných vlastností na názorných příkladech vysvětlen tento pojem, je zde dále definována prázdná množina, jedno, dvou,... prvková množina. V následující podkapitole Množiny bodů daných vlastností je pak uveden přehled nejdůležitějších množin bodů definovaných nejprve pomocí vzdálenosti od jednoho daného geometrického útvaru a poté od dvou daných geometrických útvarů, což je méně časté pořadí ve srovnání s ostatními učebnicemi. V podkapitole Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků je nejprve zařazen řešený příklad, na kterém jsou průběžně popisovány fáze řešení konstrukční úlohy, následně jsou řazeny konstrukce trojúhelníků (řešené úlohy a úlohy k samostatnému procvičení) a konstrukce čtyřúhelníků (opět nejprve řešené, poté úlohy neřešené), včetně úloh parametrických. Poslední podkapitola se zaobírá konstrukcí kružnic s požadovanými vlastnostmi. Kromě této kapitoly jsou konstrukční úlohy obsaženy také v Souhrnných cvičeních a testech, test č. 2 je věnován výhradně konstrukčním úlohám. V poslední kapitole této učebnice nazvané Matematická herna lze ještě nalézt článek Kružnice a architektura, kde je nastíněno praktické využití konstrukcí kružnic daných vlastností v případě gotických oken.

Učebnice [47] O. Odvárka a J. Kadlečka zahrnuje také část o konstrukčních úlohách. Kapitola 4 Konstrukční úlohy obsahuje podkapitoly Množiny bodů v rovině, Konstrukce trojúhelníků (podle věty sss, usu a sus, nejprve řešené, poté jsou zařazeny obdobné úlohy k samostatnému procvičení, zároveň je zde popsán postup řešení konstrukční úlohy — rozbor, postup konstrukce, konstrukce, kontrola), Konstrukce čtyřúhelníků (nejprve rovnoběžníku, poté lichoběžníku a obecného konvexního čtyřúhelníku) a Úlohy na závěr určené k samostatnému řešení. V kapitole Souhrnná cvičení lze pak také nalézt několik konstrukčních úloh.

Sada učebnic určená pro nižší stupně víceletých gymnázií obsahuje díl [45], který je věnován přímo geometrickým konstrukcím, jak už sám název napovídá. V této učebnici je velmi pěkně systematicky zpracováno v celé šíři téma konstrukčních úloh, počínaje základními konstrukcemi, množinami všech bodů dané vlastnosti a jejich užití při řešení konstrukčních úloh, přes fáze řešení konstrukčních úloh, konstrukci trojúhelníků a čtyřúhelníků. Ze shodných zobrazení je zde podrobně popsáno pouze posunutí a jeho užití při řešení konstrukčních úloh (s osovou a středovou souměrností se žáci setkali již v primě). Na závěr jsou řazeny úlohy z matematické olympiády (složitější konstrukční úlohy) a souhrnná cvičení obsahující mnoho různých typů konstrukčních úloh.

V učebnici [48] jsou zajímavě a velmi názorně zpracovány na sebe navazující kapitoly Množiny bodů dané vlastnosti a Konstrukční úlohy. Tato kapitola je rozdělena do článků: 1. Opakování základních konstrukcí. 2. Řešení konstrukčních úloh, konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků (na příkladech s postupem důsledně rozděleným na rozbor, konstrukci se symbolickým zápisem a grafickým provedením, zkouškou a diskusi). 3. Další konstrukční úlohy (kružnice, mnohoúhelníky). 4. Souhrnná cvičení.

Jedna z řady velmi pěkně graficky i didakticky zpracovaných učebnic matematiky pro ZŠ je [49] H. Bitnerové, E. Fuchse a P. Tlustého. Obsahuje kapitolu Konstrukční úlohy a množiny bodů dané vlastnosti ve specifickém pojetí.

V Učebnici [44] E. Pomykalové, která je v současné době využívaná na většině gymnázií, je zahrnuta poměrně obsáhlá kapitola Konstrukční úlohy, pokrývající toto téma v plné šíři. V kapitole Konstrukční úlohy jsou kromě množin všech bodů dané vlastnosti a jednoduchých konstrukcí v jednotlivých článcích postupně vyloženy různé metody řešení konstrukčních úloh (užití množin všech bodů dané vlastnosti, konstrukce na základě výpočtu), užití metody geometrických zobrazení je však vyloženo až v následující kapitole Zobrazení v rovině. Této učebnici se věnuji také v kapitole 7.

V březnu tohoto roku vyšla nová učebnice [50] J. Molnára.
Lze v ní hned v první kapitole nazvané Základní planimetrické pojmy nalézt návod, jak zmenšit/zvětšit úsečku v daném poměru pomocí redukčního úhlu (článek Podobnost trojúhelníků), jedna celá kapitola je věnována konstrukcím úseček, jejichž délka je vyjádřena algebraickým výrazem. V následující kapitole se žáci seznámí s pojmem zlatý řez. Konstrukční úlohy jsou zde řazeny také jako samostatná kapitola (č. 3), kde je nejprve vyloženo téma Množiny bodů dané vlastnosti, na něž navazují samotné konstrukční úlohy (řešené užitím množin všech bodů dané vlastnosti). Následující kapitola nese název Geometrická zobrazení v rovině. Zde jsou postupně vyložena nejprve shodná zobrazení, skládání shodných zobrazení a stejnolehlost. Přímo v jednotlivých kapitolách jsou pak řešeny konstrukční úlohy využitím těchto zobrazení. Některé kapitoly jsou zakončeny tzv. exkurzí do historie, kde je např. v závěru kapitoly č. 5 nastíněn problém Apolloniových a Pappových úloh.

V závěru této kapitoly zmíním ještě dvě současné knihy J. Poláka, které sice nejsou učebnicemi v pravém slova smyslu, zato jsou na středních školách běžně využívány, a to jak učiteli k vlastní přípravě, tak žáky při procvičování či samostudiu. Jedná se o [15], kde je v kapitole Geometrie (Planimetrie a stereometrie) v rozsáhlém článku velmi přehledně zpracované téma konstrukčních úloh včetně řešených příkladů, stejně jako související kapitoly Množiny všech bodů dané vlastnosti v rovině a Geometrická zobrazení v rovině. Jako zásobárna příkladů k tomuto tématu pak velmi dobře poslouží [17], která obsahově kopíruje výše zmíněnou autorovu knihu. Každé skupině příkladů vztahující se k jednotlivým tématům je vždy předřazeno opakování potřebné teorie. Všechny úlohy obsažené v této knize jsou vyřešeny buď přímo v textu, nebo je alespoň náznak jejich řešení uvedený v závěru knihy. Konstrukční úlohy jsou obsahem kapitol: Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků, Konstrukce kružnic, Algebraická metoda řešení konstrukčních úloh, Užití geometrických zobrazení v důkazových planimetrických úlohách a Řešení konstrukčních úloh metodou užití geom. zobrazení v rovině.

Kapitola 7

Metodické zpracování konstrukčních úloh v planimetrii na SŠ

7.1 Konstrukční úlohy na ZŠ a SŠ

Řešení konstrukčních úloh má i v současné době v SŠ matematice svůj nezastupitelný význam — učí umět „dívat se“, přispívá k rozvoji logického myšlení, k systematičnosti, vynalézavosti, učí analyzovat problémy, vede k pečlivému vyřešení problému, ověření a vyšetření všech možností; může také přispívat k žádoucímu rozvíjení kreativity. [13]

Konstrukční úlohy na základní škole

Při vyučování konstrukčních úloh na střední škole, stejně jako při vyučování jakékoliv jiné látky, je třeba vždy vycházet ze znalostí žáků získaných na základní škole. Již zde, konkrétně na druhém stupni základní školy, se žáci s problematikou konstrukčních úloh poprvé seznamují. Není však výjimkou, že se na střední škole u některých žáků potýkáme s růzností a v některých případech i nedostatečností ve znalostech této látky. Ne vždy je však vina na straně studentů. Tento rozdíl ve vědomostech může souviset (a mnohdy i souvisí) se zavedením současných školních vzdělávacích programů (dále jen ŠVP).

ŠVP si sestavují jednotlivé školy samy a záleží pouze na nich, která témata v jednotlivých předmětech upřednostní a která naopak zařadí pouze okrajově či zcela vynechají. Jeden příklad za všechny: na střední škole využíváme geometrická zobrazení jako jednu z metod řešení konstrukčních úloh. Ze základní školy by žákům měla být známá shodná zobrazení, na SŠ pak přibývá stejnolehlost. Lze však nalézt takové základní školy, které vyučují shodná zobrazení v plném rozsahu, stejně jako ty, na kterých je probírána pouze osová a středová souměrnost a posunutí a otočení je zcela vynecháno.

S tím je tedy třeba v praxi počítat.

Jediné, co je pro všechny školy závazné a čeho se při přípravě na výklad konstrukčních úloh můžeme držet, je rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání (dále jen RVP). Ten musí školy při sestavování svých ŠVP a z nich vycházejících tematických plánů zohledňovat. Je jim jakousi předlohou a vodítkem.

V RVP (zde pro základní vzdělávání) je vždy stanoven očekávaný výstup pro jednotlivé tematické celky. Zaměříme-li se na tematický celek Geometrie v rovině a prostoru, můžeme v něm nalézt několik bodů, které se týkají právě konstrukčních úloh (přímo či okrajově), tedy takové, na kterých můžeme na střední škole následně stavět. Konkrétně jde o následující ([59]):

- Žák využívá pojem množina všech bodů dané vlastnosti k charakteristice útvaru a k řešení polohových a nepolohových konstrukčních úloh
- Načrtne a sestrojí rovinné útvary
- Užívá k argumentaci a při výpočtech věty o shodnosti a podobnosti trojúhelníků
- Načrtne a sestrojí obraz rovinného útvaru ve středové a osové souměrnosti, určí osově a středově souměrný útvar
- Analyzuje a řeší aplikační geometrické úlohy s využitím osvojeného matematického aparátu

S učivem konstrukční úlohy je v RVP také jednoznačně dáváno do souvislosti téma množiny všech bodů dané vlastnosti (osa úsečky, osa úhlu, Thaletova kružnice), osová souměrnost a středová souměrnost.

Tak jako není přesně stanoveno, co vše a do jaké hloubky by se mělo během vyučování stihnout s žáky probrat, není jednoznačně udán ani počet vyučovacích hodin na předmět. Je pouze stanovená minimální dotace hodin (16 hodin/týden pro matematiku a její aplikace), kdy školy mohou v rámci svých učebních plánu hodinové dotace přizpůsobit. Často bývá 17 hodin matematiky/týden, zpravidla po čtyřech vyučovacích hodinách v 6. – 8. třídách, v devátém ročníku pak hodin 5. I tento fakt má nemalý vliv na to, do jaké hloubky se konstrukční úlohy na jednotlivých základních školách probírají.

Podíváme-li se podrobněji na rozložení učiva ZŠ souvisejícího s konstrukčními úlohami, bývá první „větší“ konstrukční úlohou sestrojit trojúhelník, známe-li jeho tři strany (srovnej s první úlohou Eukleida v jeho *Základech*). Postupně se pak žáci učí, jak sestrojit trojúhelník, který je zadán pomocí jiných tří prvků, tj. konstrukce podle věty *sss*, *sus* a *usu*. Tomu je věnováno nemálo hodin v šestém či sedmém ročníku. Dále se žáci naučí sestrojit k danému trojúhelníku kružnici opsanou a vepsanou. Stejně tak bývá v tomto období probíráno dělení úsečky v daném poměru.

Později, nejčastěji v osmém ročníku, přichází na řadu jedna ze stěžejních částí planimetrie nutných pro pochopení a vůbec samotnou realizaci celé skupiny konstrukčních úloh, a to množiny všech bodů dané vlastnosti (dále jen MVBDV). Pomocí nich žáci řeší složitější konstrukční úlohy. Následuje souvislý tematický celek konstrukční úlohy. Zde se žáci již učí systematicky postupovat při řešení takové úlohy, seznámí se s jednotlivými fázemi řešení, jsou schopni určit počet řešení úlohy. Poté přibývají další konstrukční úlohy, jako např. konstrukce čtyřúhelníků, pravidelných n-úhelníků apod.. Stále však platí, že základní metodou řešení je metoda MVBDV. Po výkladu osové a středové souměrnosti se na závěr zařazují konstrukční úlohy, kde k řešení využíváme metody právě těchto geometrických zobrazení.

Shrnu-li tedy znalosti získané na ZŠ, které lze u žáků předpokládat, jde o následující:

1. Žáci by měli znát schéma postupu řešení konstrukčních úloh, měli by umět v rovině sestrojit bod, přímku a kružnici.

2. Ze základních geometrických konstrukcí, se kterými se na ZŠ setkali, by měli ovládat: Sestrojit osu dané úsečky, osu daného konvexního úhlu, rovnoběžku s danou přímkou, kolmici k dané přímce daným bodem a sestrojit střed dané úsečky. Dále by pro ně neměl být problém rozdělit danou úsečku na n shodných dílů. Co se týká konstrukce neznámého bodu, měli by vědět, že neznámý bod náleží zároveň dvěma množinám bodů dané vlastnosti.

3. Žáci by též měli být schopni rozdělit danou úsečku v daném poměru.

4. Z konstrukcí úhlů by sami měli zvládnout sestrojit úhel o velikosti 90°, 60°, 45° a 30° a to bez použití úhloměru (eukleidovsky). Dále pak sestrojit 2 přímky, které svírají předem daný úhel.

5. Podíváme-li se na konstrukce trojúhelníku, nemělo by jim činit problém sestrojit trojúhelník podle vět *sss*, *sus*, *usu* a *Ssu*. Také by měli zvládnout sestrojit těžiště a ortocentrum libovolného trojúhelníku či v jednodušších případech nalézt konstrukci pro trojúhelník daný pomocí tří různých prvků. Zároveň by mezi jejich dovednosti mělo patřit užití Pythagorovy věty při konstrukci pravoúhlého trojúhelníku.

6. Z čtyřúhelníků by se měli bez problémů vypořádat s konstrukcí čtverce a obdélníku, dále pak kosočtverce, kosodélníku a lichoběžníku. Z pravidelných mnohoúhelníků vědí, jak sestrojit pravidelný šestiúhelník a osmiúhelník.

7. V neposlední řadě by je neměla zaskočit konstrukce kružnice — jak kružnice trojúhelníku opsané, tak vepsané. Stejně jako sestrojit Thaletovu kružnici a tečny ke kružnici.

Konstrukční úlohy na střední škole, konkrétně na gymnáziu

Na gymnáziu téma konstrukční úlohy systematicky navazuje na stejnojmennou látku probíranou na základní škole, přičemž znalosti ze ZŠ jsou zde prohlubovány a obohacovány, žáci se učí rozlišovat polohové a nepolohové úlohy, řeší úlohy s parametry, obohacují řešení úloh o nové metody. Stejně jako na ZŠ jde i v tomto případě o řešení konstrukčních úloh užitím eukleidovských konstrukčních prostředků — pravítka a kružítka.

V současné době i na tomto stupni škol probíhá výuka podle ŠVP. Stejně jako u základních škol i gymnaziální (a ostatní středoškolský) ŠVP vychází z RVP, tentokrát pro gymnaziální vzdělávání (reps. střední odborné vzdělávání), a tedy musí plnit v něm stanovené očekávané výstupy na žáka. Následující řádky jsou výčtem vybraných výstupů žáka vztahujících se ke konstrukčním úlohám ([60]):

- Žák využívá náčrt při řešení rovinného nebo prostorového problému
- Řeší polohové a nepolohové konstrukční úlohy užitím všech bodů dané vlastnosti, pomocí shodných zobrazení a pomocí konstrukce na základě výpočtu

V ŠVP gymnázií je téma Konstrukční úloh zařazeno zpravidla do matematiky (planimetrie) ve 2. ročníku. Pořadí témat bývá voleno nejčastěji následující:

1. Množiny všech bodů daných vlastností
2. Jednoduché geometrické (eukleidovské) konstrukce
3. Pojem konstrukční úlohy v rovině a řešení metodou užití MVBDV
4. Konstrukce trojúhelníků a čtyřúhelníků
5. Konstrukce kružnic
6. Konstrukce na základě výpočtu (řešení konstrukčních úloh v rovině algebraickou metodou)
7. Shodná geometrická zobrazení v rovině
8. Řešení konstrukčních úloh v rovině metodou užití shodných zobrazení
9. Podobná zobrazení v rovině, stejnolehlost
10. Řešení konstrukčních úloh v rovině užitím podobných zobrazení (zejména stejnolehlosti)

Na některých středních školách se lze setkat s mírně pozměněným pořadím těchto témat — před bod 2. může být předřazen bod 7. a 9.. Toto pořadí je však méně časté než výše zmíněné.

Krátce se ještě vrátím k již zmiňované dotaci hodin. Vzhledem k odlišnostem v počtech hodin matematiky na jednotlivých školách (minimum je však 10 hodin matematiky souhrnně týdně ve čtyřech ročnících) nelze zcela přesně říci, kolik hodin bychom řešení konstrukčních úloh měli věnovat. Chceme-li však tuto látku přehledně a jasně vyložit tak, aby žáci byli následně schopni samostatně a logicky správně vyřešit jednotlivé typy úloh, aby dokázali zvolit vhodnou metodu pro jejich řešení, stejně jako v případě konstrukční úlohy s parametrem provedli korektní diskusi, a tedy nabyté vědomosti neměli jen formální charakter, shledávám 10 – 14 vyučovacích hodin jako minimum potřebné k dosažení těchto cílů.

V následující části uvádím metodické zpracování celkem osmi vyučovacích hodin tak, jak bych je při výkladu konstrukčních úloh na gymnáziu vyučovala. Náročnost a rozsah odpovídá čtyřletému gymnáziu (či vyššímu stupni víceletého gymnázia), jehož učební plán je nastaven na celkových 10 – 12 hodin matematiky týdně. Úlohy řešené v jednotlivých hodinách jsou voleny tak, aby jejich obtížnost gradovala. Zpočátku řadím úlohy polohové, neparametrické, kdy nejprve provádím řešení úloh pomocí metody MV-BDV. Až v následujících hodinách přibývají další metody řešení, pomocí nichž poté řeším o něco složitější úlohy, než jsou zprvu probírané úlohy základní. Řešení všech konstrukčních úloh uváděných v této kapitole obsahuje také provedení konstrukce v programu GeoGebra. V případě složitějších konstrukčních úloh je součástí rozboru ručně malovaný náčrtek. Ve všech těchto náčrtcích jsou červenou barvou zvýrazněny dané prvky (útvary), zelenou barvou prvky (útvary) pomocné.

Dále vycházím z toho, že nejčastěji využívanými učebnicemi matematiky na gymnáziu jsou knihy vydané nakladatelstvím Prometheus — monotematické učebnice s názvem Matematika pro gymnázia. Proto jsem se jich při zpracovávání vyučovacích hodin také držela, konkrétně pak učebnice [44]. Předpokládám, že tuto knihu mají žáci během vyučovací hodiny k dispozici. Odvolávám-li se ve zpracovaných scénářích vyučovacích hodin na některé stránky v učebnici a není-li řečeno jinak, mám na mysli právě tuto knihu.

Poznámka

Práce nese název Řešení planimetrických konstrukčních úloh na SŠ, tudíž v následujících odstavcích jde vždy pouze o rovinné konstrukční úlohy a tedy příslovce *v rovině* nadále vynechávám.

Následujících osm kapitol obsahuje scénáře jednotlivých vyučovacích hodin. Tyto hodiny na sebe však ne vždy přímo navazují, vzhledem k obsáhlosti některých témat. V případě, že by bylo třeba zařadit další procvičovací hodinu, upozorňuji na tuto skutečnost vždy na konci předchozího či na začátku následujícího scénáře.

7.2 Scénáře vyučovacích hodin

7.2.1 Téma: Množiny všech bodů dané vlastnosti

Cíl hodiny:
Žák zná konkrétní MVBDV a je si vědom nutnosti ověřování obou vlastností formulovaných v obecné definici MVBDV.

Obsah hodiny:

1. Zopakování některých MVBDV známých ze ZŠ
2. Zopakování Thaletovy věty a definice Thaletovy kružnice
3. Výklad — zorný úhel, úsečka viděná pod obecným zorným úhlem α
4. Zadání DÚ (další známé MVBDV)
5. Závěrečné shrnutí

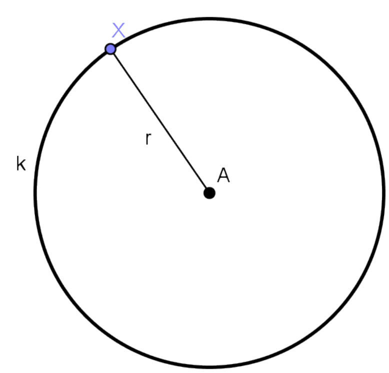
Tato hodina je spíše opakovací, úkolem je s žáky zopakovat a doplnit takové MVBDV, jejichž znalost bude později potřeba při řešení konstrukčních úloh.

Motivační otázka: Co je to kružnice? (obr. 7.1)
Rozhovorem s žáky formulace definice kružnice pomocí MVBDV.

Definice 7.1 *Kružice. Kružnice $k(S,r)$ je množina všech bodů roviny ρ, které mají od daného bodu S danou vzdálenost r. Symbolicky:*

$$k(S,r) = \{X \in \rho; |SX| = r\}.$$

Zdůrazním, že v tomto případě se jedná skutečně o definici.



Obrázek 7.1: Kružnice

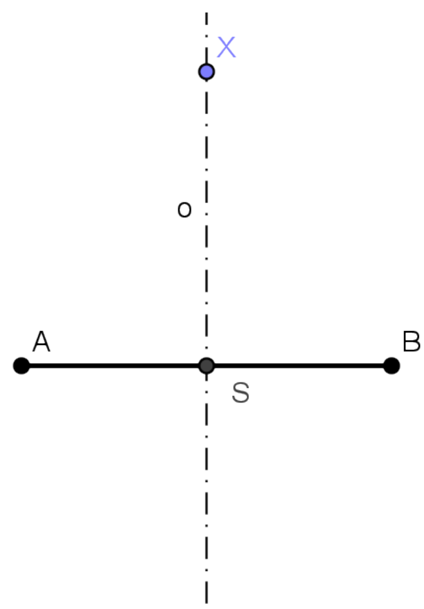
Formulace definice středu úsečky a následně osy úsečky (zde k definování nevyužíváme pojem množina všech bodů):

Definice 7.2 *Střed úsečky, osa úsečky. Střed úsečky AB je její vnitřní bod S, který je stejně vzdálený od krajních bodů úsečky A, B. Osa úsečky AB je přímka o, která prochází středem S úsečky AB a je kolmá k přímce $p = AB$.*

Ze znalosti definice osy úsečky odvodíme jinou formulaci, tentokrát právě pomocí MVBDV:

Věta 7.1 *Množina všech bodů roviny ρ, které mají od daných bodů A, B stejnou vzdálenost, je osa úsečky AB. Symbolicky:*

$$o = \{X \in \rho; |AX| = |BX|\}.$$



Obrázek 7.2: Osa úsečky

Důkaz
Budeme dokazovat dvě věty:

a) Náleží-li bod X ose úsečky AB, pak je stejně vzdálený od obou bodů A, B.

b) Je-li bod X stejně vzdálen od bodů A a B, pak leží na ose úsečky AB.

add a) Je-li X libovolný bod osy o, potom podle věty *sus* platí: $\Delta AXS \cong \Delta BXS$. Z toho plyne, že $|AX| = |BX|$.

add b) Platí-li pro libovolný bod X roviny ρ, že $|AX| = |BX|$, pak podle věty *sss* platí pro trojúhelníky $\Delta AXS \cong \Delta BXS$. Pro velikost vnitřních úhlů vyplývá, že $|\angle ASX| = |\angle BSX| = 90°$ a tedy $o \perp AB \wedge S \in o$. Z toho plyne, že o je osa AB (obr. 7.2).

Z výše popsaných konkrétních příkladů množin všech bodů roviny, které mají nějakou danou vlastnost, vyslovíme obecnou definici MVBDV:

Definice 7.3 *Množinou M všech bodů roviny ρ o dané vlastnosti V nazýváme takový geometrický útvar U, jehož body splňují současně tyto dvě podmínky:*

a) Každý bod útvaru U má danou vlastnost V.

b) Každý bod roviny ρ, který má danou vlastnost V, je bodem útvaru U.

Symbolicky:

$$M = \{X \in \rho; V(X)\}.$$

Při dokazování platnosti věty o konkrétní MVBDV je třeba dokázat vždy obě vlastnosti (viz osa úsečky), tj. $\forall X \in \rho$:

a) $X \in U \Longrightarrow X \in M$, tedy že každý bod útvaru U má vlastnost V

b) $X \in M \Longrightarrow X \in U$, tedy že každý bod s vlastností V patří útvaru U.

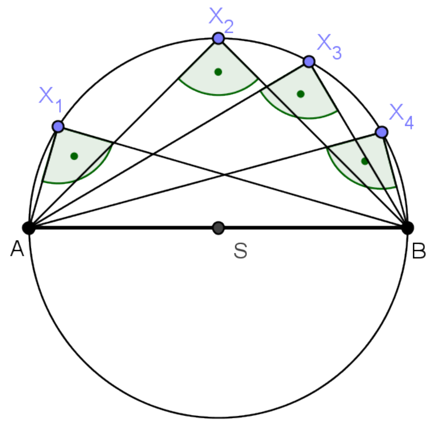
Tím, že dokážeme obě implikace, dokážeme rovnost množin $M = U$.

Poznámka
Někdy bývá výhodnější vlastnost b) nahradit obměněnou implikací:

$$X \notin U \Longrightarrow X \notin M.$$

V další části vyučovací hodiny se budeme zabývat Thaletovou větou, Thaletovou kružnicí a jedním obecnějším tvrzením. Zde půjde z části o opakování, z části o výklad nové látky (zorný úhel, úsečka pod zorným úhlem). Předpokládám, že žáci již znají pojem obvodový a středový úhel z některé z předchozích hodin.

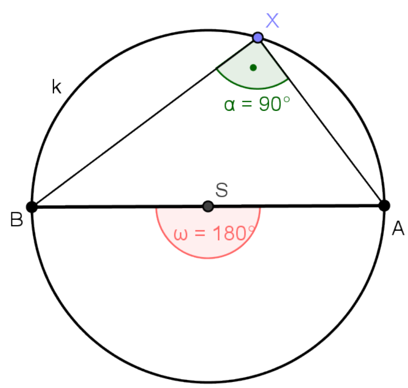
Věta 7.2 *(Thaletova) Všechny obvodové úhly nad průměrem kružnice jsou pravé (obr. 7.3).*



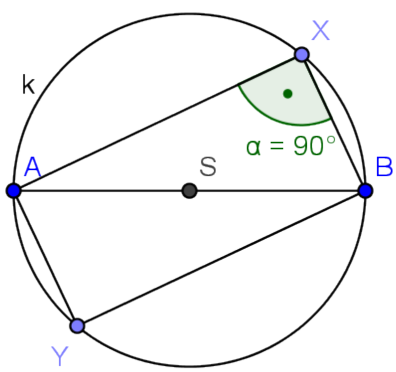
Obrázek 7.3: Thaletova věta

Důkaz

Bezprostředně plyne z vlastností středového a obvodového úhlu:
Středový úhel horní (resp. dolní) půlkružnice k_1 (resp. k_2) je $\omega = 180°$, tj. přímý úhel. Pro jeho obvodový úhel příslušný téže půlkružnici proto platí $\alpha = \dfrac{\omega}{2} = 90°$. Protože všechny obvodové úhly příslušné k danému oblouku jsou shodné, jsou také všechny pravé (obr. 7.4).



Obrázek 7.4: Důkaz Thaletovy věty



Obrázek 7.5: Důkaz Thaletovy věty

Poznámka

V případě, že by látka týkající se úhlů příslušných k oblouku kružnice nebyla ještě probrána, dokázali bychom platnost věty doplněním na obdélník $AXBY$, kde průměr kružnice AB je jeho přeponou (obr. 7.5).

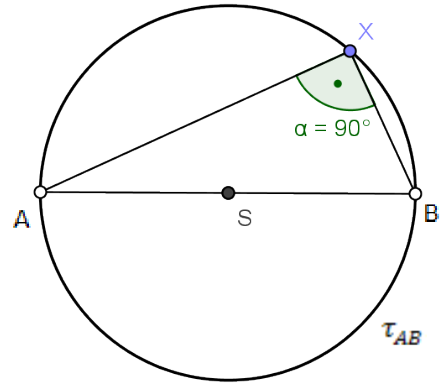
Nyní provedeme jinou formulaci předchozí věty, a to opět pomocí MVBDV:

Věta 7.3 *Množina všech vrcholů X pravých úhlů, jejichž ramena procházejí danými body A, B ($A \neq B$), tj. množina všech bodů $X \in \rho$, z nichž vidíme danou úsečku pod pravým úhlem, je kružnice s průměrem AB kromě bodů A, B.*

Položím žákům otázku, jak takovouto množinu nazýváme (znají ze ZŠ).

Definice 7.4 *Takovouto množinu bodů (o vlastnostech popsaných v předchozí větě) nazýváme Thaletova kružnice (obr. 7.6). Symbolicky:*

$$\{X \in \rho; |\angle AXB| = 90°\} = \tau_{AB}.$$



Obrázek 7.6: Thaletova kružnice

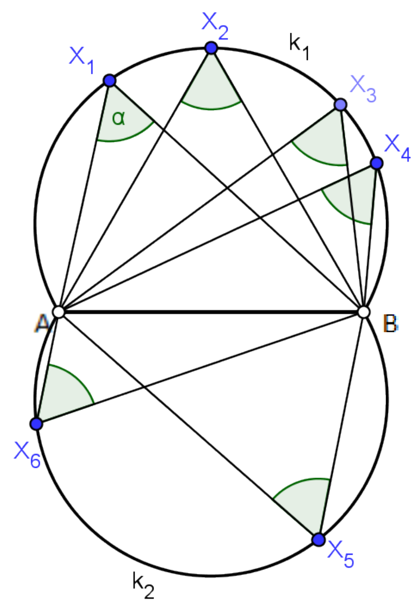
Poznámka

Budeme-li v budoucích úlohách potřebovat využít Thaletovu kružnici, musíme vždy nejprve určit její střed S (jako u jakékoliv jiné kružnice) — tj. nalézt střed úsečky AB, nad níž tuto kružnici sestrojujeme. Její poloměr je pak roven vzdálenosti $|AS|$, resp. $|BS|$.

V případě výše popsané věty můžeme formulovat i větu obecnější, a to pro libovolný konvexní úhel (kde pravý úhel je jen jeho speciálním případem). Předtím žákům přiblížím, co si představit pod pojmem zorný úhel (nejspíše se s ním již setkali ve sportu (střelecký úhel útočníka na branku) nebo ve fyzice v souvislosti s optikou či astronomií).

Věta 7.4 *Množina vrcholů všech úhlů o velikosti α, jejichž ramena procházejí danými body A, B ($A \neq B$), tj. množina všech bodů, z nichž vidíme danou úsečku AB pod daným zorným úhlem α, jsou dva shodné otevřené kružnicové oblouky k_1, k_2 s krajními body A, B (obr. 7.7). Symbolicky:*

$$\{X \in \rho; |\angle AXB| = \alpha\} = k_1 \cup k_2 \setminus \{A, B\}.$$



Obrázek 7.7: Kružnicové oblouky

Důkaz

Vzhledem k časové náročnosti bych v případě této věty důkaz v rámci vyučovací hodiny neprováděla. Pouze bych naznačila základní kroky, ze kterých by se skládal, a odkázala žáky na literaturu, kde si jej mohou případně dohledat (např. [15]).

Zároveň bych zatím nerealizovala konstrukci této množiny, jen bych s žáky situaci načrtla a přesnému rýsování bych se věnovala až v jedné z následujících vyučovacích hodin (viz II. vyučovací hodina).

Zadání DÚ

Zapsat a zakreslit do školního sešitu zbylé MVBDV známé ze ZŠ (učebnice str. 91 – 94) a pokusit se alespoň jednu z nich dokázat:

- Množina všech bodů, které mají od dané přímky danou nenulovou vzdálenost
- Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných rovnoběžek

- Množina všech bodů daného konvexního úhlu, které mají stejnou vzdálenost od přímek, v nichž leží jeho ramena
- Množina všech bodů, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných různoběžek

Závěrečné shrnutí - ústně (rozhovor s žáky):
Co rozumíme pojmem množina všech bodů dané vlastnosti?
Zdůrazním, že většinu geometrických útvarů popisujeme pomocí těchto množin a to v podobě matematických vět (kromě v úvodu hodiny zmíněné kružnice). Tyto věty je tedy třeba dokázat, přičemž vždy musíme ověřovat obě vlastnosti (bod a) i b) uvedený v obecné definici MVBDV).

7.2.2 Téma: Pojem Konstrukční úloha, eukleidovské konstrukce, jednoduché (základní) eukleidovské konstrukce

Cíl hodiny:
Žák zná pojem konstrukční úloha, ví, které konstrukce označujeme jako eukleidovské, umí provádět základní eukleidovské konstrukce.

Obsah hodiny:

1. Kontrola DÚ + souhrnné opakování MVBDV
2. Pojem konstrukční úloha a eukleidovské konstrukce (výklad)
3. Jednoduché eukleidovské konstrukce
4. Konstrukce kružnicových oblouků (speciálně Thaletovy kružnice)
5. Zadání DÚ
6. Závěrečné shrnutí

V této hodině se zaměřuji na zafixování základních konstrukcí, které později budou využívány jako dílčí kroky konstrukcí složitějších. Nejprve žákům vyložím, které úlohy z planimetrie nazýváme konstrukční, a zároveň jim vysvětlím, co znamená řešit takovouto úlohu eukleidovsky. V další části hodiny provedeme základní eukleidovské konstrukce. Poslední část vyučovací hodiny bude opět výkladová, kdy se studenti naučí sestrojit kružnicový oblouk.

Úvod hodiny:
Kontrolu DÚ (zadání viz I. vyučovací hodina), zároveň souhrnné opakování MVBDV.

Planimetrická konstrukční úloha
= Úloha, kde je úkolem sestrojit geometrický útvar předepsaných vlastností.
V této hodině se budeme zabývat těmi nejjednoduššími — základními konstrukcemi.

Eukleidovské konstrukce
= Konstrukce, při kterých používáme pouze přímé pravítko a kružítko.

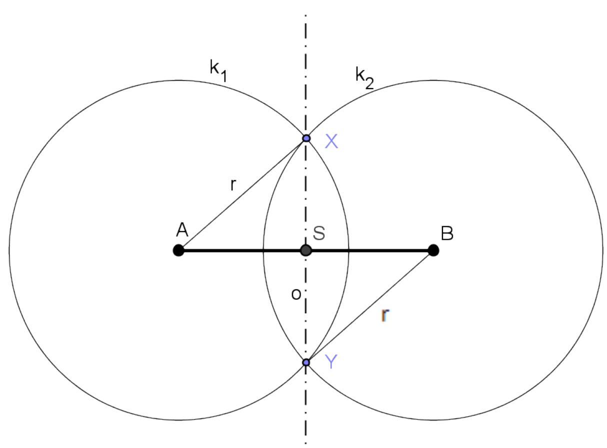
Základní eukleidovské konstrukce
Základními eukleidovskými konstrukcemi rozumíme následující jednoduché úlohy (v souladu s kapitolou 3.2.1):

1. Nanést danou úsečku na danou polopřímku
2. Přenést konvexní úhel k dané polopřímce do dané poloroviny
3. Sestrojit osu dané úsečky
4. Sestrojit střed dané úsečky
5. Sestrojit osu daného úhlu
6. Sestrojit rovnoběžku k dané přímce daným bodem
7. Sestrojit kolmici k dané přímce daným bodem

V učebnici je mezi základní konstrukce kromě těchto sedmi řazeno ještě několik dalších. My budeme jako základní eukleidovské konstrukce chápat takové jednoduché konstrukční úlohy, kde konstrukci nehledáme, kde víme, jak má požadovaný útvar vypadat a umíme úlohu okamžitě vyřešit. U takovýchto vesměs jednoduchých úloh nebudeme zapisovat postup konstrukce, stejně jako je později nebudeme podrobně rozepisovat v popisu konstrukce úloh složitějších.
První dvě základní konstrukce žáci prováděli již v některé z předchozích hodin při probírání jednotlivých geometrických útvarů v rovině, těmi se tedy nebudu podrobněji zabývat, postupně budu s žáky provádět až zbylých pět konstrukcí (značím ZEK 1 - ZEK 5):

ZEK 1: *Sestroj osu o dané úsečky AB ($A \neq B$).*

Řešení
Využijeme MVBDV (viz předchozí hodina):
Opíšeme kružnice $k_1(A, r)$ a $k_2(B, r)$ o stejném poloměru $r > \dfrac{1}{2}|AB|$ a označíme jejich průsečíky X, Y.
Přímka XY je hledaná osa o (přímka je jednoznačně určena dvěma různými body).



Obrázek 7.8: Konstrukce osy a středu úsečky

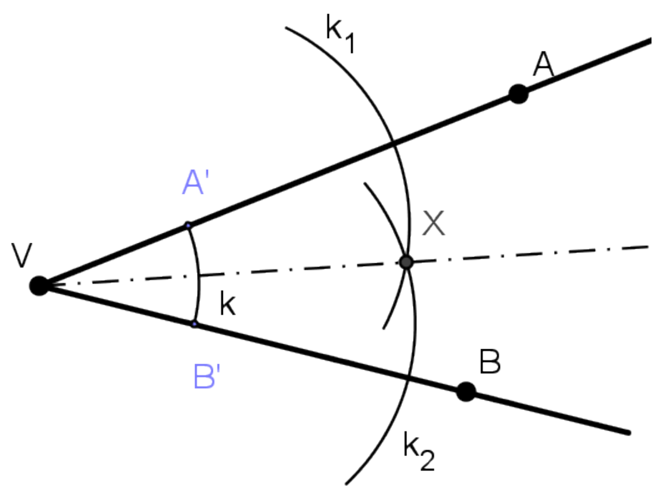
ZEK 2: *Sestroj střed S dané úsečky AB ($A \neq B$).*

Řešení
Využitím ZEK 1 — průsečík S osy o s úsečkou AB je střed úsečky AB (obr. 7.8).

ZEK 3: *Sestroj osu o daného konvexního úhlu AVB.*

Řešení

Kolem vrcholu V opíšeme kružnici $k(V, r)$, kde r je libovolný poloměr. Průsečíky kružnice k s rameny úhlu AVB označíme A', B'. Nyní sestrojíme osu úsečky $A'B'$ (viz ZEK 1, kde X leží v polorovině $A'VB'$). Přímka VX je osa $A'B'$ a tedy VX je hledaná osa konvexního úhlu AVB (k ní opačná polopřímka je osou nekonvexního úhlu AVB), obr. 7.9.



Obrázek 7.9: Konstrukce osy konvexního úhlu

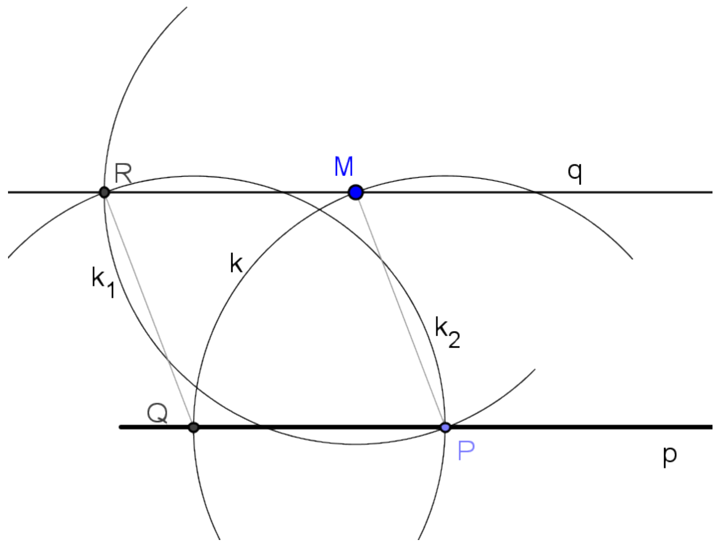
ZEK 4: *Sestroj rovnoběžku s danou přímkou p daným bodem M, $M \notin p$.*

Řešení

Využijeme vlastností kosočtverce:

Na přímce p zvolíme libovolně bod P. Sestrojíme kružnici $k(P, r = |PM|)$. Označíme Q jeden z jejích průsečíků s přímkou, poté sestrojíme kružnice $k_1(M, r = |PM|)$, $k_2(Q, r = |PM|)$. Jejich průsečík (různý od bodu P) označíme R.

Takto označený čtyřúhelník $PQRM$ je kosočtverec, z čehož plyne, že přímka MR je hledanou rovnoběžkou s přímkou p (obr. 7.10).



Obrázek 7.10: Konstrukce rovnoběžky

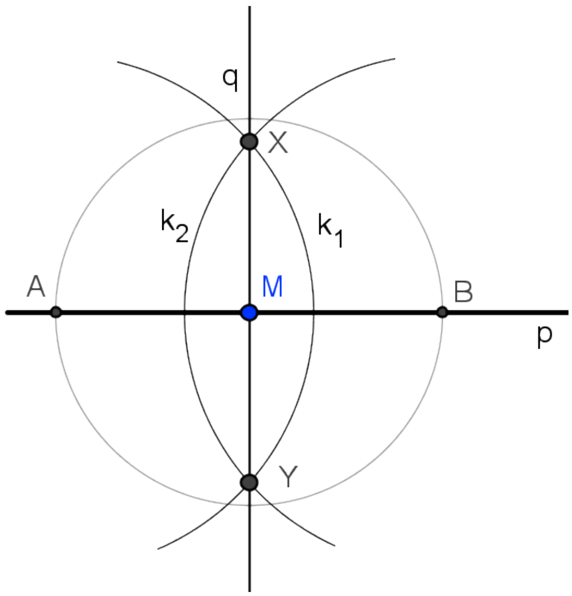
ZEK 5: *Sestroj kolmici k dané přímce* p *daným bodem* M.

Řešení

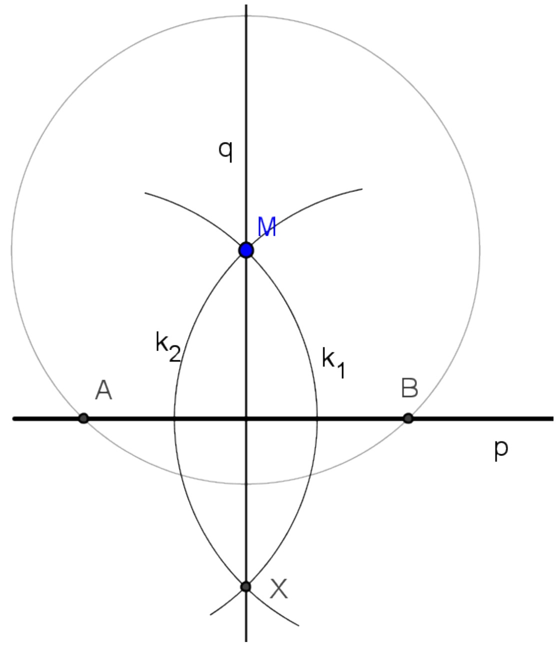
Rozdělíme úlohu na dva případy podle polohy bodu M:

a) $M \in p$
Bod M zvolíme za střed libovolné úsečky $AB \subset p$ a sestrojíme podle ZEK 1 osu úsečky AB. Tato přímka je hledaná kolmice q k přímce p (obr. 7.11).

b) $M \notin p$
Sestrojíme kružnici k se středem v bodě P tak, aby přímku p protínala ve dvou různých bodech K, L. Podle ZEK 1 sestrojíme osu úsečky KL. Tato přímka je hledaná kolmice q k přímce p (obr. 7.12).



Obrázek 7.11: Konstr. kolmice ($M \in p$)



Obrázek 7.12: Konstr. kolmice ($M \notin p$)

Druhá část vyučovací hodiny je výkladová.

Příklad 2.1
Sestroj množinu všech bodů roviny, ze kterých je daná úsečka AB o délce 4 cm vidět pod zorným úhlem $\alpha = 60°$.

Řešení
Žáci již vědí, co je množinou všech bodů X, z nichž vidíme úsečku AB pod zorným úhlem α (dva shodné otevřené kružnicové oblouky souměrné podle úsečky AB). Provedeme její konstrukci pomocí pravítka a kružítka — eukleidovsky.

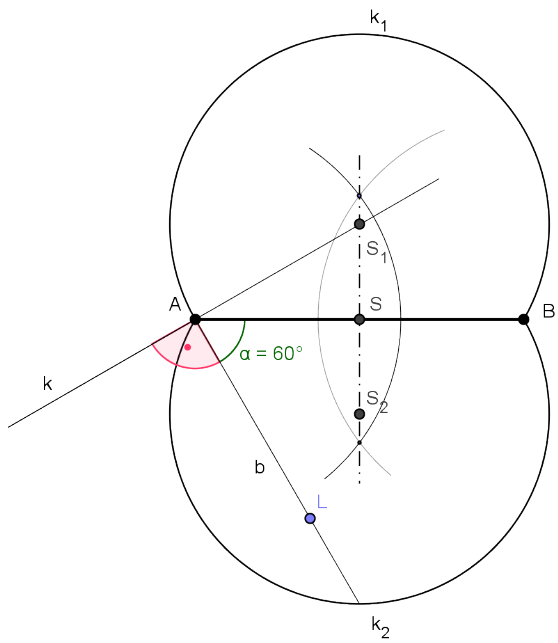
Umístíme úsečku AB, $|AB| = 4$ cm. Sestrojíme úhel α, kde $\alpha = |\angle BAL| = 60°$. Spustíme kolmici k na rameno AL, bod A je patou kolmice k. Dále sestrojíme osu o úsečky AB. Střed S_1 kružnice, které přísluší jeden z hledaných oblouků, je průsečíkem $k \cap o$.

Střed příslušící druhému oblouku v opačné polorovině určené přímkou AB nalezneme užitím osové souměrnosti středů podle přímky AB (obr. 7.13).

Důkaz správnosti konstrukce (podle [15])

- Je-li $\alpha < 90°$, je $|\angle BAL| = \alpha$ a $|\angle S_1AL| = 90°$. Z toho plyne, že $|\angle SAS_1| = 90° - \alpha$, a tedy $|\angle AS_1S| = |\angle BS_1S| = \alpha$. Proto velikost konvexního středového úhlu je $|\angle AS_1B| = 2\alpha$ a velikost příslušného obvodového úhlu je $|\angle AXB| = \alpha$.

- Je-li $90° < \alpha < 180°$, je $|\angle BAL| = \alpha$ a $|\angle S_1AL| = 90°$. Z toho plyne, že $|\angle SAS_1| = \alpha - 90°$, tedy $|\angle AS_1S| = |\angle BS_1S| = 180° - \alpha$. Čili $|\angle AS_1B| = 360° - 2\alpha$. Proto velikost nekonvexního středového úhlu je $|\angle AS_1B| = 2\alpha$ a velikost příslušného obvodového úhlu je $|\angle AXB| = \alpha$.



Obrázek 7.13: Konstrukce kružnicového oblouku

Speciální případ pro $\alpha = 90°$: Thaletova kružnice. Její konstrukci provádíme odlišně — jednodušším způsobem (viz předchozí hodina).

Zadání DÚ

Sestroj množinu všech bodů roviny, ze kterých je daná úsečka AB o délce 5 cm vidět pod zorným úhlem $\alpha = 120°$.

Závěrečné shrnutí

Konstrukční úloha je taková úloha, ve které je úkolem sestrojit útvar určitých požadovaných vlastností. Konstrukce, kterými jsme se dnes zabývali, jsme prováděli tzv.

eukleidovsky, tj. za použití jen přímého pravítka a kružítka. Existuje celá řada úloh, které lze řešit takto klasicky (eukleidovsky). Na druhou stranu existují konstrukční úlohy, o kterých je dokázáno, že je eukleidovsky řešit nelze (viz kapitola 4). Těmi se my ale zabývat nebudeme. V následujících hodinách budeme eukleidovsky řešit „složitější“ konstrukční úlohy, tj. takové, kde nejprve budeme muset pro neznámé body nalézt potřebné vztahy, a teprve pomocí nich vymyslet a sestavit postup, jak požadovaný útvar sestrojíme.

7.2.3 Téma: Řešení konstrukčních úloh metodou užití MVBDV

Cíl hodiny:
Žák zná jednotlivé fáze řešení konstrukční úlohy, umí provést rozbor konstrukční úlohy, zvládá zapsat postup konstrukce a podle něj daný útvar narýsovat.

Obsah hodiny:

1. Kontrola DÚ
2. Postup řešení složitějších konstrukčních úloh
3. Řešení polohové a nepolohové konstrukční úlohy
4. Konvence o počtu řešení nepolohové úlohy
5. Zadání DÚ
6. Shrnutí (opakování)

Téma této vyučovací hodiny navazuje na předchozí hodinu zabývající se základními konstrukcemi. Zde se žáci naučí řešit složitější konstrukční úlohy.
Pojmem „složitější úloha“ míním takovou konstrukční úlohu, u které konstrukci teprve hledáme, není nám předem jasná. Takové konstrukční úlohy budeme řešit napříč všemi fázemi, ze kterých se úplné řešení konstrukčních úloh skládá. Již v předchozích hodinách jsme vždy ústně prováděli rozbor úlohy, zatím jsme jej ale nijak systematicky nezapisovali, stejně jako jsme nezapisovali postup konstrukce. To budeme provádět až nyní.

Tato hodina je tedy úvodní výkladová hodina zabývající se řešením konstrukčních úloh.

Úvod hodiny
Kontrola domácího úkolu z předchozí vyučovací hodiny (konstrukce oblouku pro obvodový úhel 120°) - promítnout správné řešení v programu GeoGebra, viz přiložené CD. Dále opakování jednotlivých **fází řešení konstrukční úlohy** (rozhovor s žáky, znají ze ZŠ):

1. **Rozbor** - náčrtek hledaného útvaru, určení daných a hledaných bodů, nalezení vztahů mezi nimi (předpokládáme, že úloha má alespoň jedno řešení)
2. **Konstrukce** - zápis jednotlivých kroků konstrukce (slovní či symbolický), realizace konstrukce
3. **Zkouška** - důkaz konstrukce
4. **Diskuse** - u parametrických úloh (budeme řešit později), u neparametrických (úlohy řešené v této vyučovací hodině) pouze konstatujeme počet řešení

Při řešení konstrukčních úloh lze využít různé metody, my zatím budeme používat pouze metodu užití MVBDV.

Příklad 3.1
Sestroj trojúhelník ABC, je-li dána jeho strana AB o délce $|AB| = c = 5$ cm, výška ke straně AB délky $v_c = 3$ cm a těžnice na stranu AB o délce $t_c = 4$ cm.

Řešení
Polohová úloha (dána poloha prvků).

Rozbor
Vycházíme z předpokladu existence alespoň jednoho řešení úlohy, které načrtneme (velikosti délek v náčrtku nemusí odpovídat skutečným hodnotám, naopak črtáme hledaný trojúhelník co nejobecnější). Zvýrazníme ze zadání známé údaje (obr. 7.14).

Obrázek 7.14: Náčrtek

Trojúhelník je jednoznačně určen, jsou-li určeny všechny jeho vrcholy. Umístěním úsečky AB považujeme vrcholy A a B za dané, hledaným bodem je vrchol C.
Úloha je polohová s jedním hledaným bodem.

Využitím MVBDV nalezneme vztahy pro určení vrcholu C:
Bod C náleží výšce v_c a těžnici t_c.
Výška v_c udává vzdálenost bodu C od strany AB.
Množina všech bodů, které jsou od přímky AB vzdáleny o délku výšky v_c je dvojice přímek rovnoběžných se stranou AB ve vzdálenosti v_c.

$$C \in M_1, \text{ kde } M_1 = \{X \in \rho; |X \leftrightarrow AB| = v_c\} = p \cup p'.$$

(Do náčrtku zakreslujeme vždy jen jedno řešení, tj. vybereme jednu polorovinu, ve které úlohu řešíme. Celkový počet řešení budeme konstatovat až v závěru úlohy.)

Vypustíme podmínku výšky, uvažujeme těžnici t_c. Bod C leží ve vzdálenosti t_c od středu S úsečky AB. Množina všech bodů splňujících tuto podmínku je kružnice se středem ve středu S úsečky AB a poloměrem t_c.

$$C \in M_2, \text{ kde } M_2 = \{X \in \rho; |XS| = t_c\} = k(S, t_c).$$

Bod C náleží jedné i druhé výše popsané množině, náleží tedy jejich průniku.

$$C \in M_1 \cap M_2.$$

Konstrukce

Sepíšeme algoritmus (sekvenci kroků), jak budeme konstrukci provádět.
Zdůrazním, že samotné provedení konstrukce není nejdůležitější částí úlohy (později u některých příkladů z časových důvodů nebudeme konstrukci realizovat), podstata spočívá v sestavení logického sledu kroků konstrukce:

1. Umístíme úsečku AB dané délky c
2. Sestrojíme rovnoběžky p, p' s přímkou AB ve vzdálenosti v_c
3. Sestrojíme střed S úsečky AB
4. Sestrojíme kružnici $k(S, t_c)$
5. Určíme společné body C kružnice k s přímkami p, p'.
6. Trojúhelník ABC

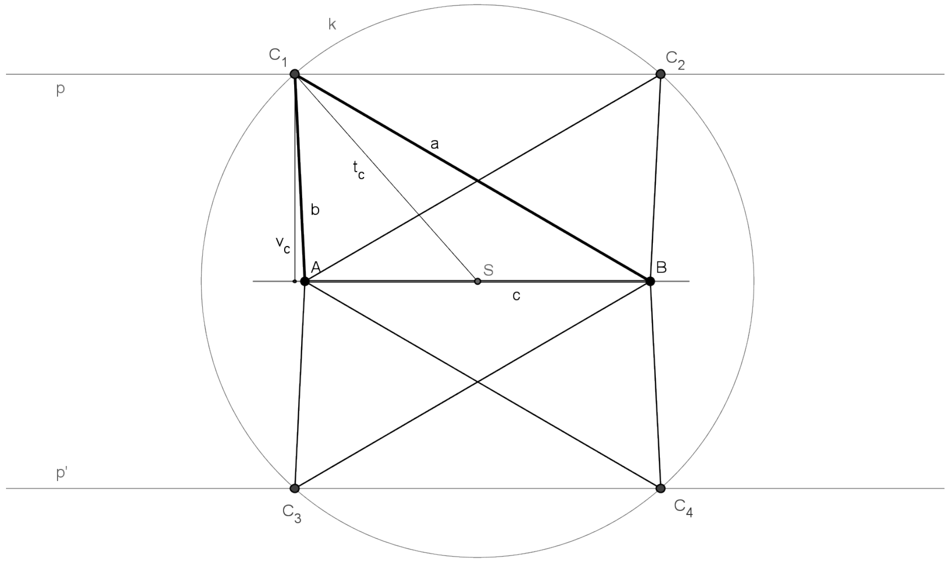
Zapsáno symbolicky:

1. AB; $|AB| = c = 5$ cm
2. S; $S \in c \wedge |AS| = |BS|$
3. k; $k\ (S, r = t_c = 4$ cm$)$
4. p; $|p \leftrightarrow AB| = v_c = 3$ cm
5. C; $C \in k \cap p$
6. ΔABC

Zkouška

Zde správnost konstrukce plyne ze samotného rozboru.

Počtem řešení polohové úlohy budeme rozumět počet všech nalezených (sestrojených) geometrických útvarů, splňující dané podmínky úlohy.
Tato úloha má celkem 4 řešení (vždy dvě v každé polorovině určené přímkou AB, obr. 7.15).



Obrázek 7.15: Konstrukce k příkladu 3.1

Příklad 3.2
Sestroj trojúhelník ABC, je-li dána délka jeho strany $c = 5$ cm, výška $v_c = 3$ cm a těžnice $t_c = 4$ cm.

Řešení př. 3.2
Tato úloha je nepolohová.

Rozbor
Úlohu převedeme na polohovou umístěním některé z úseček — např. úsečky CC_0 délky v_c. Opět předpokládáme existenci alespoň jednoho řešení úlohy, zakreslíme náčrtek (obdoba předchozího příkladu). Tentokrát jde však o úlohu se třemi hledanými body: A, B, S.

Obrázek 7.16: Náčrtek

Bod S leží na přímce p, která prochází bodem C_0 a je kolmá na úsečku CC_0.

$$S \in p, \text{ kde } p \perp CC_0 \wedge C_0 \in p.$$

Zároveň je bod S koncovým bodem těžnice t_c, tj. leží ve vzdálenosti t_c od vrcholu C. Množina všech takovýchto vrcholů je kružnice $k_1(C, t_c)$:

$$S \in M, \text{ kde } M = \{X \in \rho; |XC| = t_c\} = k_1(C, t_c).$$

Pro bod S tedy platí:

$$S \in p \cap k_1.$$

Body A, B leží také na přímce p, zároveň pro ně platí, že $|AS| = |SB| = \frac{c}{2}$. Určíme je tedy jako průnik přímky p s kružnicí $k_2(S, \frac{c}{2})$.

Konstrukce

1. Umístíme úsečku CC_0 dané délky v_c
2. Sestrojíme kolmici p na úsečku CC_0, p prochází bodem C_0
3. Sestrojíme kružnici $k_1(C, t_c)$
4. Určíme společné body S kružnice k s přímkou p
5. Sestrojíme kružnici $k_2(S, \frac{c}{2})$
6. Určíme průsečíky A, B kružnice k_2 s přímkou p
7. Trojúhelník ABC

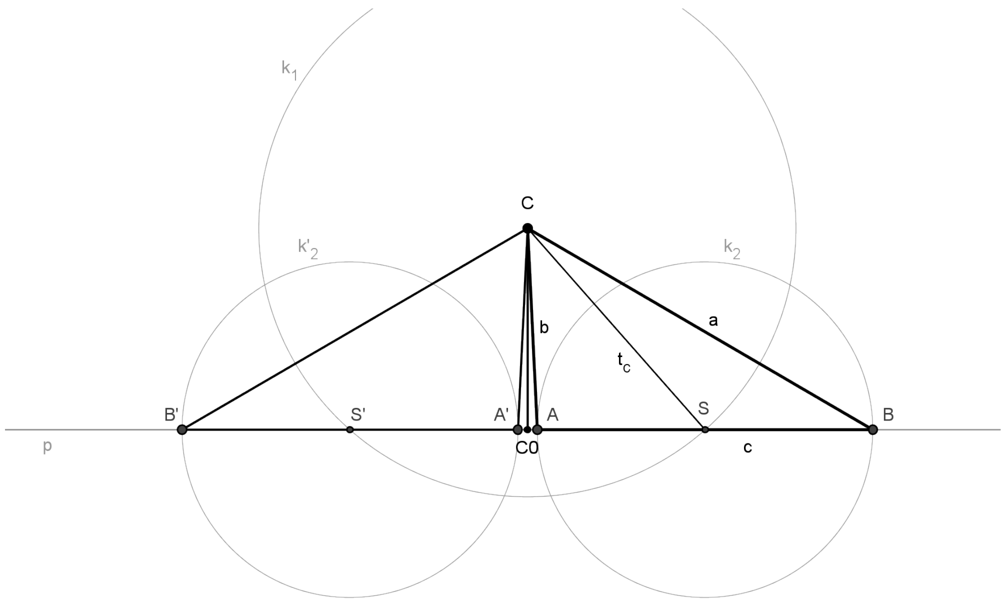
Dále budeme využívat již jen symbolického zápisu:

1. CC_0; $|CC_0| = v_c = 3$ cm
2. p; $p \perp CC_0 \wedge C_0 \in p$
3. k_1; $k_1\ (C, r = t_c = 4 \text{ cm})$
4. S; $S \in k_1 \cap p$
5. k_2; $k_2\ (S, r = \frac{c}{2} = 2,5 \text{ cm})$
6. A, B; $A, B \in k_2 \cap p$
7. ΔABC

Zkouška

Body A, B leží na kružnici se středem v bodě S. Bod S je tedy středem strany AB trojúhelníku ABC. Spojnice středu strany s protějším vrcholem C je těžnice t_c trojúhelníku ABC. Strana AB je kolmá na úsečku CC_0, úsečka CC_0 o délce v_c je výškou trojúhelníku ABC spuštěnou na stranu $c = AB$.

U nepolohových konstrukčních úloh provedu s žáky úmluvu o stanovení počtu jejich řešení (v souladu s úmluvou z kapitoly 3.4.4 a úmluvou uvedenou v učebnici): pro tuto a všechny další nepolohové úlohy budeme počet řešení stanovovat tak, že vyjdeme z počtu řešení polohové úlohy, na kterou ji převádíme.
Tato úloha má tedy celkem dvě řešení (obr. 7.17).



Obrázek 7.17: Konstrukce k příkladu 3.2

Je třeba žáky upozornit, že v různých publikacích lze nalézt i jinou konvenci o počtu řešení nepolohových úloh.

Příklad 3.3
Je dána délka úsečky $AB = 6$ cm. Sestroj všechny trojúhelníky ABC, pro které platí: $\alpha = 45°$, $v_a = 5,5$ cm.

Řešení
Zadaná úloha je nepolohová

Rozbor
Umístěním např. úsečky AB úlohu převedeme na polohovou, hledaným bodem je vrchol C.

Je však potřeba nalézt nějaký další pomocný bod, který je určen jako průsečík dvou známých křivek a teprve poté pomocí něj sestrojit hledaný bod C (obr. 7.18).
V této nepolohové úloze jsou proto dva hledané body: A_0, C.

Obrázek 7.18: Náčrtek

Bod A_0 je pata výšky v_a spuštěné na stranu a.
Podmínka pro výšku v_a: Bod A_0 je jejím koncovým bodem, leží tedy od vrcholu A ve vzdálenosti v_a. Množina všech bodů splňujících tuto podmínku je kružnice $k(A, v_a)$.

$$A_0 \in M_1, \text{ kde } M_1 = \{X \in \rho; |AX| = v_a\} = k(A, v_a)$$

Bod A_0 je patou výšky v_a, proto $|\angle AA_0B| = 90°$. Množina vrcholů všech takovýchto pravých úhlů je Thaletova kružnice nad průměrem AB.

$$A_0 \in M_2, \text{ kde } M_2 = \{X \in \rho; |\angle AXB| = 90°\} = \tau_{AB}$$

Bod A_0 náleží průniku těchto množin:

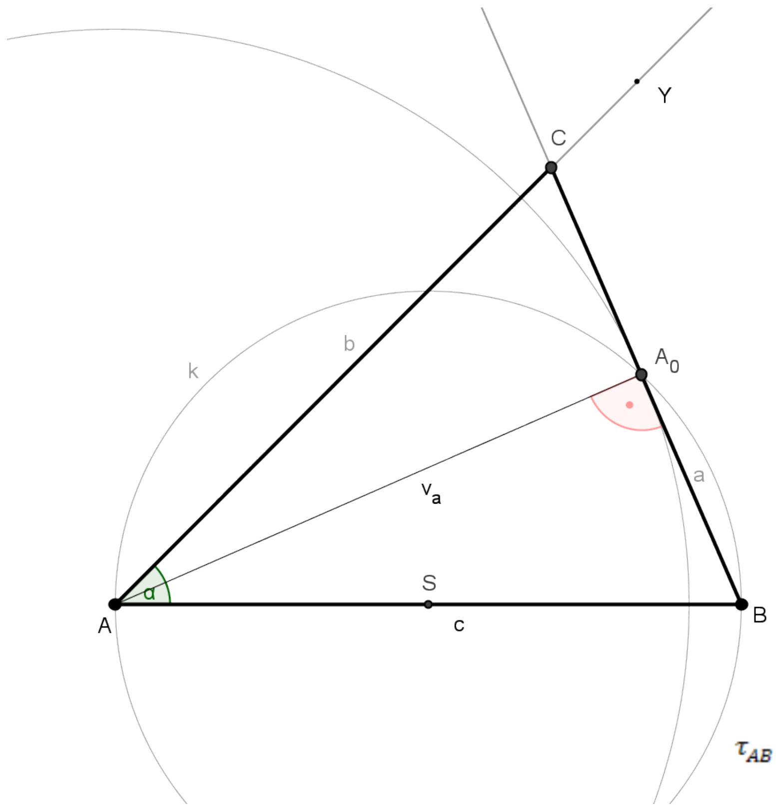
$$A_0 \in M_1 \cap M_2.$$

Bod C nalezneme jako průsečík jednoho ramene úhlu α a polopřímky BA_0:

$$C \in BA_0 \cap AY.$$

Konstrukce

1. AB; $|AB| = c = 6$ cm
2. $\angle YAB$; $|\angle YAB| = \alpha = 45°$
3. τ_{AB}
4. k; $k(A, r = v_a = 5,5 \text{ cm})$
5. A_0; $A_0 \in k \cap \tau_{AB}$
6. C; $C \in BA_0 \cap AY$
7. ΔABC



Obrázek 7.19: Konstrukce k příkladu 3.3

Zkouška

Správnost konstrukce opět plyne z rozboru úlohy.
Tato úloha má dvě řešení (vždy jedno v každé z polorovin určených přímkou AB, konstrukce jednoho z nich viz obr. 7.19).

Příklad 3.4

Je dána úsečka AA_1, $|AA_1| = 5$ cm. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí $b = 5$ cm, $c = 6$ cm.

Řešení

Úloha je polohová.

Rozbor

Neznámý vrchol C je opět určen pouze jednou známou křivkou, není však na první pohled vidět žádný pomocný bod, kterého by se dalo využít k nalezení bodu C.
Úlohu budeme řešit doplněním na čtyřúhelník $ABCD$, kde daná úsečka AA_1 představuje polovinu jeho úhlopříčky. Vzniklý pomocný trojúhelník ABD lze snadno sestrojit pomocí věty *sss* (obr. 7.20).

Polohová úloha se 3 hledanými body: D, B, C

Obrázek 7.20: Náčrtek

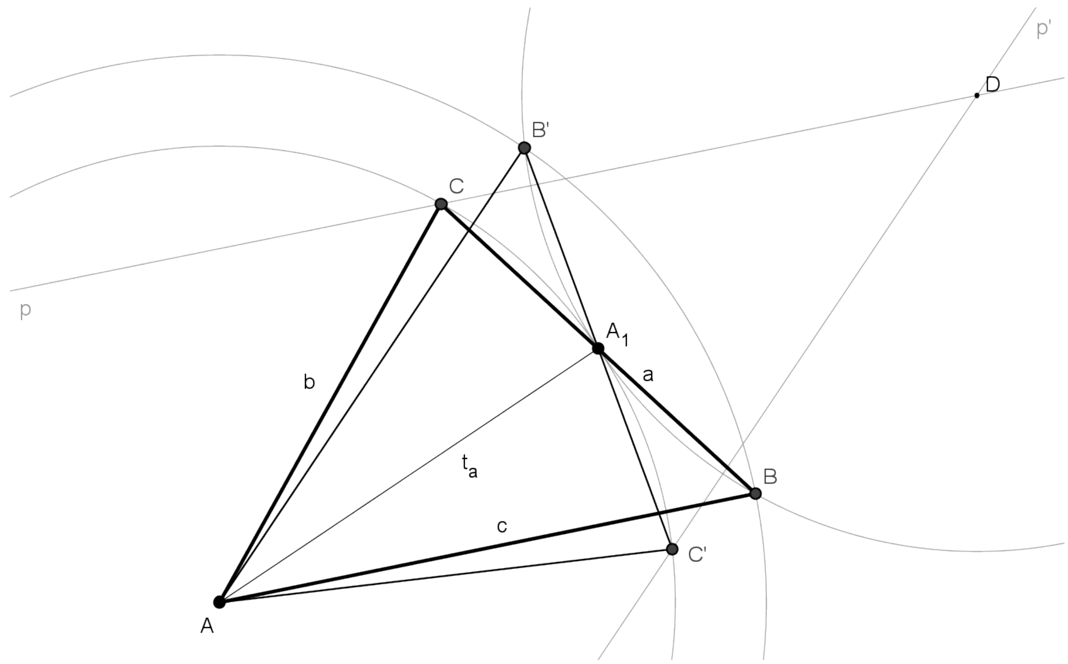
$$\begin{gathered}
D \in AA_1 \wedge |AA_1| = |A_1D|,\\
B \in M_1 \cap M_2, \text{ kde}\\
M_1 = \{X \in \rho; |DX| = b\} = k_1(D, r = b)\\
M_2 = \{X \in \rho; |AX| = c\} = k_2(A, r = c)\\
C \in L_1 \cap L_2, \text{ kde}\\
L_1 = \{X \in \rho; |AX| = b\} = k_3(A, r = b)\\
L_2 = \{X \in \rho; XD || AB\} = p
\end{gathered}$$

Konstrukce

1. AA_1; $|AA_1| = t_a = 5$ cm
2. D; $D \in\mapsto AA_1 \wedge |AA_1| = |A_1D| = 5$ cm
3. k_1; $k_1(D, r = b = 5$ cm$)$
4. k_2; $k_2(A, r = c = 6$ cm$)$
5. B; $B \in k_1 \cap k_2$
6. p; $p || AB \wedge D \in p$
7. k_3; $k_3(A, r = b = 5$ cm$)$
8. C; $C \in p \cap k_3$
9. ΔABC

Zkouška

Úsečky AD a CB jsou úhlopříčkami pomocného čtyřúhelníku $ABCD$, a tedy se vzájemně půlí. Bod A_1 je proto skutečně středem strany CB a tedy úsečka AA_1 je těžnicí t_a trojúhelníku ABC. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne existence pomocného trojúhelníku ABD, kterého jsme pro sestrojení neznámého vrcholu C využili.
Úloha má celkem 2 řešení (obr. 7.21).



Obrázek 7.21: Konstrukce k příkladu 3.4

Zadání DÚ

Sestroj tečnu t k dané kružnici k, procházející daným bodem A. Uvaž všechny možné polohy bodu A vzhledem ke kružnici k (proveď rozbor úlohy, zapiš postup konstrukce a řešení narýsuj).

Závěrečné shrnutí

Při řešení konstrukčních úloh vždy nejprve provádíme rozbor úlohy, kde předpokládáme existenci alespoň jednoho řešení. To zakreslíme, určíme body dané a hledané, určíme vztahy, jak tyto hledané body nalézt.
Dále sestavíme postup konstrukce (budeme zapisovat jen symbolicky) a tuto konstrukci zrealizujeme.
Poté zkonstatujeme počet řešení úlohy (u polohových úloh odpovídá počtu sestrojených vyhovujících útvarů, u nepolohových úloh budeme pro počet řešení vycházet z úlohy polohové, na kterou nepolohovou úlohu převádíme).
V závěru pak provedeme zkoušku, čímž zkontrolujeme správnost konstrukce.

V následujících hodinách by bylo zařazeno několik úloh parametrických, kde při určování počtu jejich řešení navíc provádíme diskusi vzhledem k různým hodnotám parametrů úlohy (minimálně 1 vyučovací hodina).

7.2.4 Téma: Konstrukce kružnic

Cíl hodiny:
Žák dokáže řešit některé Apolloniovy a Pappovy úlohy metodou užití MVBDV.

Obsah hodiny:

1. Konstrukce kružnice splňující dané podmínky
2. Seznámení s Apolloniovymi/Pappovo úlohami
3. Řešení některých Apollonivových úloh využitím PC (GeoGebra/Cabri)
4. Shrnutí - Co jsou to Apolloniovy a Pappovy úlohy

Do teď jsme se zabývali převážně konstrukcí trojúhelníků. Ideálním případem by bylo, kdyby mezi touto a předchozí popsanou vyučovací hodinou byla vložena hodina půlená, kde bych s menším počtem žáků procvičovala konstrukce dalších trojúhelníků. Tato vyučovací hodina je věnována konstrukcím kružnic, které splňují nějaké dané podmínky. Zde považuji za užitečné vzhledem k názornosti, přehlednosti a časové úspoře využít výpočetní techniky a ukázat žákům řešení některých takovýchto úloh na počítači užitím např. programu GeoGebra.

Motivační příklad:

Příklad 4.1
Je dána přímka p, na ní bod T a další bod A, který na přímce p neleží. Sestroj kružnici, která prochází bodem A a dotýká se přímky p v jejím bodě T.

Řešení
Polohová úloha s jedním hledaným bodem.

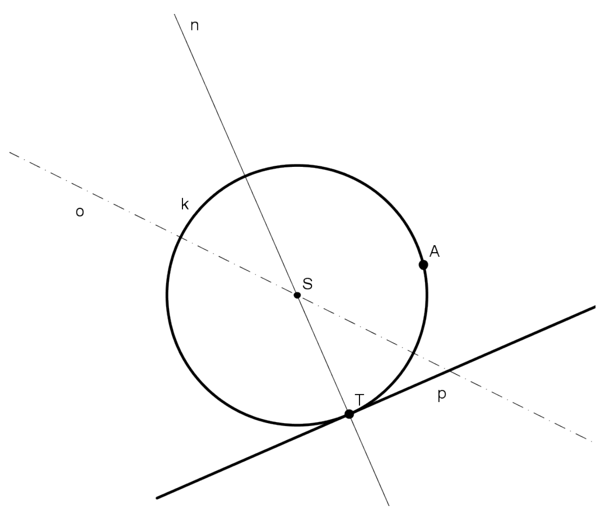
Rozbor
Hledaný bod: S, střed požadované kružnice.
Kružnice má procházet body A a T, její střed tedy leží na ose úsečky AT. Zároveň se dotýká přímky p v bodě T — přímka p je její tečnou, poloměr AT je na ni kolmý. Střed kružnice proto leží i na kolmici n k přímce p spuštěné v bodě T (obr. 7.22).

$$S \in L_1 \cap L_2, \text{ kde}$$
$$L_1 = \{X \in \rho; |AX| = |TX|\} = o \ldots \text{osa } AT$$
$$L_2 = \{X \in \rho; k(X, r = XT) \cap p = T\} = n$$

Obrázek 7.22: Náčrtek

Konstrukce

1. p, T, A; $T \in p, A \notin p$
2. o; o je osa AT
3. n; $n \perp p \wedge T \in n$
4. S; $S \in o \cap n$
5. k; $k(S, r = |ST|)$



Obrázek 7.23: Konstrukce k příkladu 4.1

Zkouška:

Plyne z rozboru konstrukce.
Vzhledem k zadání polohy bodů ($T \in n$, $A \notin n$) jsou přímky n a o vždy různoběžné, tj. existuje vždy právě jeden jejich průsečík. Úloha má proto právě jedno řešení (obr. 7.23).

Otázka pro žáky:

Co kdyby také bod T neležel na přímce p?
Diskuse nad řešením této obměněné úlohy (příklad 4.2). Úlohu rozdělíme na dva případy:

1. Body leží v opačných polorovinách $\Longrightarrow$ úloha nemá řešení (nelze nalézt kružnici, která by procházela oběma body a dotýkala se přímky, vždy ji bude protínat ve dvou bodech).

2. Oba body leží ve stejných polorovinách. Je třeba rozlišit:

   a) AT je různoběžná s p (obr. 7.24) — tuto úlohu nelze řešit užitím MVBDV, zakreslíme náčrtek (včetně obou možných řešení), žáky odkážu na některou z následujících hodin.

Obrázek 7.24: Náčrtek 2a)

Obrázek 7.25: Náčrtek 2b)

   b) AT je rovnoběžná s p (obr. 7.25) — zde již lze využít MVBDV, řešení této úlohy je obdobné jako v příkladu 4.1:

Řešení příkladu 4.2 b)

Rozbor

Hledané body: S, D

$$D \in o_1 \cap p,\ o_1 \ldots \text{osa } AT$$
$$S \in L_1 \cap L_2, \text{ kde}$$
$$L_1 = X \in \rho; |AX| = |TX| = o_1$$
$$L_2 = X \in \rho; |AX| = |DX| = o_2.$$

Poznámka

Po nalezení bodu D jde o konstrukci kružnice opsané trojúhelníku ATD — žáci prováděli v předchozích hodinách, nechám sestrojit za DÚ.

Ve vyučovací hodině pouze promítnu správné řešení v programu GeoGebra (obr. 7.26, dynamická podoba na přiloženém CD).

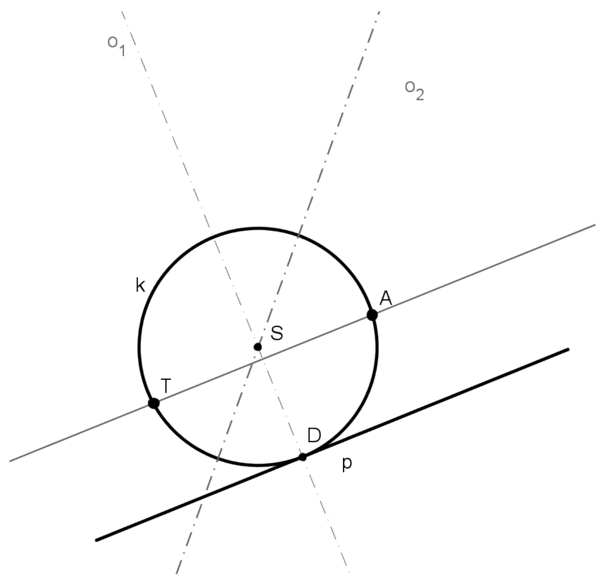
Postup konstrukce:

1. Dané prvky p, T, A; $T \notin p, A \notin p \wedge A \in \mapsto Tp$

2. o_1; o_1 je osa AT

3. D; $D \in o_1 \cap p$

4. o_2; o_2 je osa AD
5. S; $S \in o_1 \cap o_2$
6. k; $k(S, r = |SD|)$



Obrázek 7.26: Konstrukce k příkladu 4.2

Zkouška

Kružnici jsme sestrojovali jakožto opsanou trojúhelníku ATD, tudíž prochází danými body A, T.
Jde-li o kružnici opsanou, její střed leží v průsečíku os stran tohoto trojúhelníku. Vzhledem k rovnoběžnosti přímek AT a p je osa o_1 kolmá také na přímku p. Bod D také náleží kružnici a zároveň je průsečíkem osy o_1 s přímkou p. Přímka p je proto tečnou kružnice k (v bodě D).
Úloha má právě jedno řešení (plyne z existence právě jednoho průsečíku os o_1, o_2).

Apolloniova a Pappova úloha (pojem, stručná historie těchto úloh)

Předchozí dvě úlohy jsou velmi podobné, druhou úlohu jsme dostali z první tak, že jsme pouze „posunuli“ bod T mimo přímku p. Jinou úlohu bychom dostali, kdybychom přímku p zaměnili za kružnici (přímku můžeme chápat jako kružnici o nekonečném poloměru), či za třetí bod (= kružnice o nulovém poloměru). A takto bychom mohli měnit i zbylé dva body.
Těmito obměnami získáme celou sadu úloh, tzv. úlohy Apolloniovy (viz kapitolu 2).

Požadujeme-li aby kružnice procházela daným bodem (B), dotýkala se dané přímky (p) nebo dané kružnice (k) a kombinujeme-li tyto podmínky po třech, dostáváme celkem deset Apolloniových úloh. Ne všechny však lze řešit pomocí MVBDV (viz příklad 4.2 a)). Jestliže jeden z daných bodů leží na dané přímce či kružnici (jako v příkladu 4.1), mluvíme o úlohách Pappových.

Apollonios formuloval úlohu nejprve pro tři zadané kružnice, později byly tyto kružnice postupně nahrazeny bodem a přímkou. Originální znění se nezachovalo. Je však známa reprodukce úlohy v díle *Mathématikai synagogai* řeckého matematika Pappose Alexandrijského.

Nejen z časových důvodů, ale i kvůli vzájemné provázanosti jednotlivých Apolloniových resp. Pappových úloh bych v tuto chvíli dala přednost výpočetní technice a zbylé Apolloniovy úlohy bych s žáky prošla v elektronické podobě — jako velmi názorné považuji zpracování Evy Patákové, která na toto téma sestavila dynamickou učebnici geometrie [52]. Řeší zde kompletně všechny Apolloniovy (a tedy i Pappovy) úlohy. Žák zde krásně vidí souslednost jednotlivých kroků konstrukce, pokud některý z kroků nestihl, lze animaci posunout zpět, stejně jako s hotovou konstrukcí manipulovat. To je vhodné zejména pro názorné ukázání souvislostí jednotlivých typů úloh (přímka jako limitní případ kružnice). Stejně dobře může posloužit také volně stažitelný program GeoGebra.

V případě, že je třída vybavena interaktivní tabulí, zapojila bych do provádění konstrukce také žáky. Ideální by pak bylo pro výuku využít počítačovou učebnu a žáky ponechat některou z (nejen těchto) úloh sestrojit samostatně.

Závěrečné shrnutí
Apolloniova úloha je taková geometrická úloha, kde z množiny všech bodů, přímek a kružnic v rovině vybereme 3 prvky. Úkolem je pak sestrojit kružnici, která se těchto tří prvků dotýká. Leží-li speciálně daný bod na dané přímce či kružnici, dostáváme jednu z šesti úloh Pappových. Tyto úlohy vyžadují řešení různými metodami, my zatím umíme řešit jen některé z nich, a to metodou užití MVBDV.

Následující dvě vyučovací hodiny jsou tematicky řazeny za Shodná geometrická zobrazení v rovině. Výkladu shodných zobrazení (tj. osové souměrnosti, středové souměrnosti, posunutí a otočení) se proto v této práci věnovat nebudu a v níže zpracovaných hodinách předpokládám, že žáci již znají tato zobrazení z předchozí výuky. Zde se rozcházím s učebnicí, kde po výkladu jednotlivých zobrazení vždy následuje jejich využití při řešení konstrukčních úloh. V celkem dvou zpracovaných vyučovacích hodinách se zabývám řešením konstrukčních úloh metodou užití shodných zobrazení (v praxi by konstrukčním úlohám řešených touto metodou bylo vcelku věnováno ještě o jednu až dvě vyučovací hodiny více).

7.2.5 Téma: Konstrukční úlohy řešené užitím shodných zobrazení (osové souměrnosti a otočení)

Cíl hodiny:
Žák chápe principy této metody, umí je aplikovat při řešení konstrukčních úloh.

Obsah hodiny:

1. Zadání konstrukční úlohy, výklad principu metody užití shodných zobrazení
2. Řešení konstrukčních úloh metodou užití shodných zobrazení (osová souměrnost, otočení)
3. Zadání DÚ
4. Závěrečné shrnutí - které úlohy jsou typické pro užití osové souměrnosti a otočení

Úvod
Opakování shodných zobrazení + čím jsou tato zobrazení jednoznačně určena:

- **Osová souměrnost** — nepřímá shodnost, určena osou souměrnosti
- **Otočení (rotace)** — přímá shodnost, určena středem otočení, velikostí úhlu otočení a daným smyslem otočení
- **Středová souměrnost** — přímá shodnost, speciální případ otočení (úhel otočení α =180°), určena středem souměrnosti
- **Posunutí (translace)** — přímá shodnost, určena vektorem posunutí

Při užití shodných zobrazení pro řešení konstrukčních úloh budeme vycházet z následujících **principů** (podle [15]):

- Máme-li v rovině dánu přímku o a dvě křivky p, q, potom všechny dvojice bodů souměrně sdružených podle této přímky (osy o), které leží na křivkách p, q, dostaneme jako průsečíky křivky p s křivkou q', kde q' je obrazem q v osové souměrnosti podle osy o, a křivky q s křivkou p', která je obrazem p. Postačí nám vždy sestrojit jen průsečíky např. p s q' a body s nimi souměrně sdružené podle osy o na křivce q.

- Je-li v rovině dán bod S, úhel velikosti α a dvě různé křivky p, q, potom všechny body křivky p, které po otočení o úhel velikosti α ve zvoleném smyslu budou ležet na křivce q, dostaneme jako body průniku křivky q a křivky p' vzniklé otočením křivky p.

- Mějme v rovině dvě křivky p, q. Všechny body křivky p, které po posunutí daném vektorem posunutí budou ležet na křivce q, dostaneme jako průsečíky křivky q a p', která je obrazem křivky p v tomto posunutí.

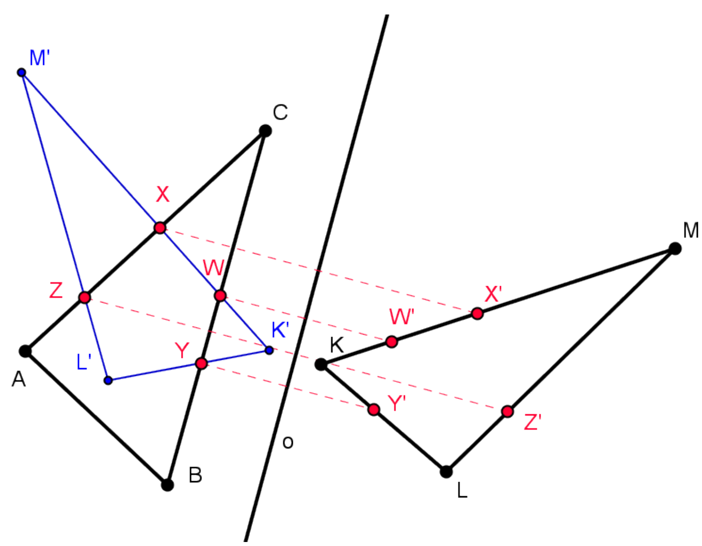
Příklad 5.1
V rovině ρ jsou dány přímka o a trojúhelníky ABC a KLM. Určete na stranách těchto trojúhelníků všechny dvojice bodů souměrně sdružených podle osy o.

Řešení
Polohová úloha.

Rozbor
Vyjdeme z výše popsaného principu, využitím osové souměrnosti podle osy o sestrojíme obraz trojúhelníku KLM, nalezneme jeho průsečíky s trojúhelníkem ABC a sestrojíme obrazy těchto bodů opět v osové souměrnosti podle osy o.

Konstrukce

1. Dané prvky ΔKLM, ΔABC, o
2. $\Delta K'L'M'$; $O(o)$: $\Delta KLM \longmapsto \Delta K'L'M'$
3. X; $X \in \Delta K'L'M' \cap \Delta ABC$
4. X'; $O(o) : X \longmapsto X'$



Obrázek 7.27: Konstrukce k příkladu 5.1

Počet nalezených dvojic souměrně sdružených bodů se odvíjí od umístění trojúhelníků a přímky p — na obr. 7.27 má daná úloha 4 řešení.
Např. v programu GeoGebra (také na přiloženém CD) bych názorně ukázala závislost počtu souměrně sdružených bodů na umístění objektů — od nekonečně mnoha (trojúhelníky ABC a KLM jsou osově souměrné podle osy o) až po žádné řešení (zobrazený trojúhelník $K'L'M'$ se s trojúhelníkem ABC neprotíná v žádném bodě).

Příklad 5.2

Jsou dány dva různé body A, B, které leží v opačných polorovinách určených přímkou p. Určete na přímce p bod X tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl nejmenší.

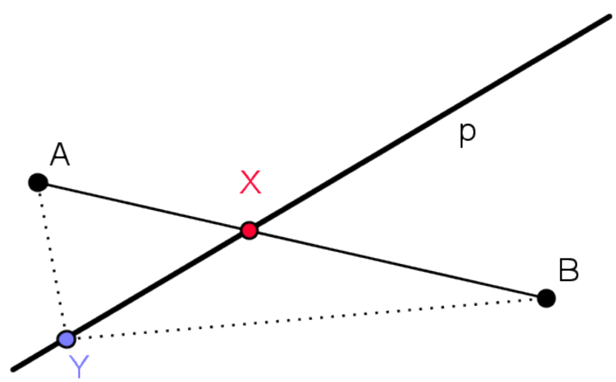
Řešení

Polohová úloha.

Rozbor

Bod X nalezneme jako průsečík úsečky AB s přímkou p ($|AX| + |BX| = |AB|$), obr. 7.28.
Z trojúhelníkové nerovnosti vyplývá pro libovolný bod $Y \in p$ různý od bodu X:

$$|AY| + |BY| > |AB|.$$



Obrázek 7.28: Konstrukce k příkladu 5.2

Příklad 5.3

Jsou dány dva různé body A, B, které leží v jedné z polorovin určených přímkou p. Určete na přímce p bod X tak, aby součet $|AX| + |BX|$ byl nejmenší.

Řešení

Práce s učebnicí (viz str. 127/Příklad 3), obměna předchozího příkladu.

Příklad 5.4

Sestroj všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich obvod $o = 7$ cm a úhly $\alpha = 60°$ a $\beta = 45°$.

Řešení

Nepolohová úloha.

Rozbor

Předpokládáme existenci alespoň jednoho takového trojúhelníku ABC, který zakreslíme. Na polopřímce BA sestrojíme pomocný bod X tak, aby platilo $|AX| = |AC|$, obdobně pak bod Y na polopřímce AB tak, že $|BE| = |BC|$. Pro délku úsečky XY tedy platí $|XY| = o$. Vzniklé pomocné trojúhelníky XAC a CBY jsou rovnoramenné, pro jejich úhly při základně platí:

$$|\angle AXC| = \epsilon = \frac{\alpha}{2},\ |\angle BYC| = \omega = \frac{\beta}{2} \text{ (plyne z věty o vnějším úhlu trojúhelníku).}$$

Využijeme osové souměrnosti těchto trojúhelníků.
Nejprve sestrojíme pomocný trojúhelník XYC (podle věty *usu*), obr. 7.29.
Úloha je nepolohová s dvěma hledanými body: A, B

$$A \in XY \cap o_1,\ o_1 \text{ je osa základny } XC \text{ trojúhelníku } XAC,$$
$$B \in XY \cap o_2,\ o_2 \text{ je osa základny } YC \text{ trojúhelníku } CBY.$$

Obrázek 7.29: Náčrtek

Konstrukce

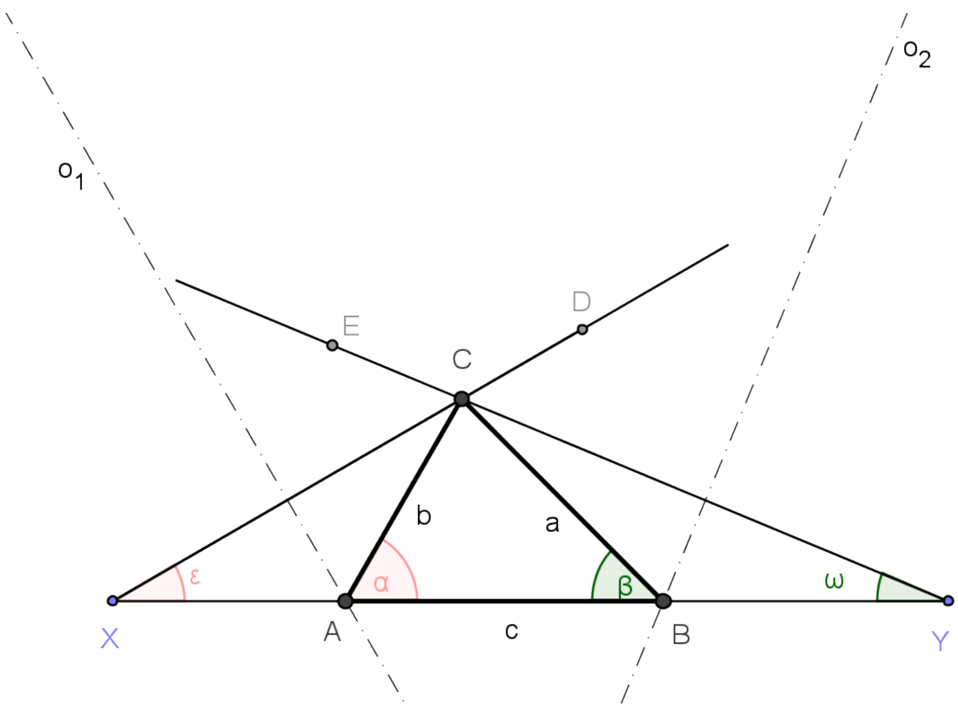
1. ΔXYC, sestrojíme podle věty *usu*
2. o_1; o_1 je osa XC
3. A; $A \in o_1 \cap XY$
4. o_2; o_2 je osa YC

5. B; $B \in o_2 \cap XY$

6. ΔABC

Zkouška

Plyne z rozboru úlohy.
Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.30).



Obrázek 7.30: Konstrukce k příkladu 5.4

Příklad 5.5

Do daného rovnoběžníku $ABCD$ vepiš čtverec $KLMN$ tak, aby každý jeho vrchol ležel na jiné straně rovnoběžníku ($K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$).

Řešení

Polohová úloha s parametrem.
Využijeme druhého principu zmíněného v úvodu hodiny.

Rozbor

Předpokládáme existenci hledaného čtverce $KLMN$. Takový čtverec musí mít s daným rovnoběžníkem $ABCD$ společný střed S (obr. 7.31).

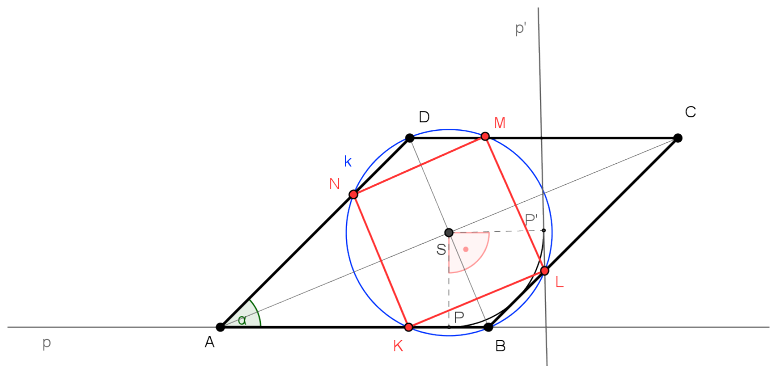
Úhlopříčky čtverce jsou k sobě kolmé, proto užitím otočení $R(S, +\frac{\pi}{2})$ převedeme bod $K \in AB$ do bodu $L \in BC$, přímka $p = AB$ se zobrazí na k ní kolmou přímku p', která prochází bodem L. Proto $L \in BC \cap p'$.

Obrázek 7.31: náčrtek

Konstrukce

1. Daný rovnoběžník $ABCD$
2. S; S je střed rovnoběžníku $ABCD$
3. p'; $R(S, +\frac{\pi}{2})$: $AB = p \longmapsto p'$
4. L; $L \in BC \cap p'$
5. k; $k(S, |SL|)$
6. K; $K \in AB \cap k$
7. M; $M \in CD \cap k$
8. N; $N \in AD \cap k$
9. čtverec $KLMN$

Zkouška
Plyne z rozboru úlohy.



Obrázek 7.32: Konstrkce k příkladu 5.5

Diskuse

Je-li rovnoběžník $ABCD$ čtverec, má úloha nekonečně mnoho řešení,
je-li rovnoběžník $ABCD$ obdélník, nemá žádné řešení,
je-li rovnoběžník $ABCD$ kosodélník nebo kosočtverec, je úloha řešitelná a má právě jedno řešení pouze tehdy, když průsečík přímky p' s úsečkou BC leží uvnitř této úsečky.

Zrealizujeme úlohu pro kosočtverec $ABCD$ se stranou délky $a = 4$ cm a vnitřním úhlem velikosti $\alpha = 45°$ (obr. 7.32).
Diskusi k tomuto příkladu bych doplnila demonstrací jednotlivých uvažovaných případů v programu GeoGebra (opět lze využít konstrukci na přiloženém CD).

Zadání DÚ

DÚ1: Je dána přímka p a dva různé body A, B, které leží uvnitř téže poloroviny s hraniční přímkou p. Sestrojte takový trojúhelník ABC, že vrchol C leží na přímce p a obvod o trojúhelníku je co nejmenší.
DÚ2: Učebnice str. 149, prostudovat řešený příklad 4.

Závěrečné shrnutí

Mezi konstrukční úlohy, které řešíme užitím osové souměrnosti, patří zejména úlohy o spojení několika bodů lomenou čarou, různé úlohy o odrazu a sestrojení trojúhelníků nebo čtyřúhelníků, je-li dán součet či rozdíl délek dvou stran. Rotace využíváme např. u konstrukčních úloh, kde máme sestrojit pravidelný útvar, jehož vrcholy leží na daných křivkách (kružnicích, rovnoběžkách, stranách čtyřúhelníku,. . .) a při konstrukci pravidelných n-úhelníků (bylo by obsahem některé z následujících, zde nezpracovaných vyučovacích hodin).

7.2.6 Téma: Konstrukční úlohy řešení užitím shodných zobrazení (středové souměrnosti, posunutí)

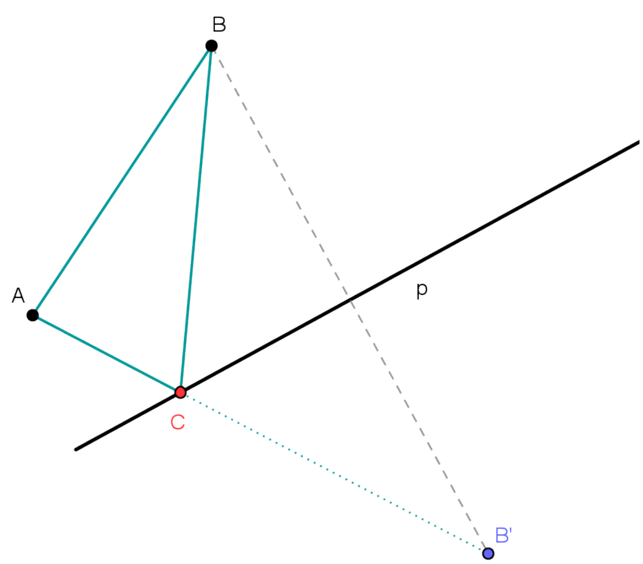
Cíl hodiny:
Žák chápe principy této metody, umí je aplikovat při řešení konstrukčních úloh.

Obsah hodiny:

1. Kontrola DÚ
2. Řešení konstrukčních úloh metodou užití shodných zobrazení (středové souměrnosti, posunutí)
3. Zadání DÚ
4. Závěrečné shrnutí

Tato vyučovací hodina je stejně jako předchozí věnována užitím shodných zobrazení při řešení konstrukčních úloh, konkrétně užití středové souměrnosti a posunutí.

Úvod
Kontrola DÚ z minulé hodiny (obdoba příkladu 5.2, ukázka řešení v programu GeoGebra), viz obr. 7.33:



Obrázek 7.33: Trojúhelník s minímálním obvodem

Příklad 6.1
Bodem M, který leží uvnitř konvexního úhlu AVB, veď přímku p protínající jeho ramena v bodech P, Q tak, že bod M je středem úsečky PQ.

Řešení
Polohová úloha s dvěma hledanými body.

Rozbor
Předpokládáme existenci řešení úlohy, nechť $P \in \mapsto VA$ a $Q \in \mapsto VB$ (obr. 7.34).
Hledané body: P, Q

Obrázek 7.34: Náčrtek

Je-li bod M středem úsečky PQ, pak bod Q je obrazem bodu P ve středové souměrnosti se středem M, neboli v otočení o úhel $\alpha = 180°$ okolo středu M.

Využitím principu vyloženého v úvodu předchozí hodiny (středová souměrnost je speciálním případem otočení), nalezneme bod Q jako průsečík ramene VB úhlu AVB a obrazu polopřímky VA ve středové souměrnosti podle středu M.

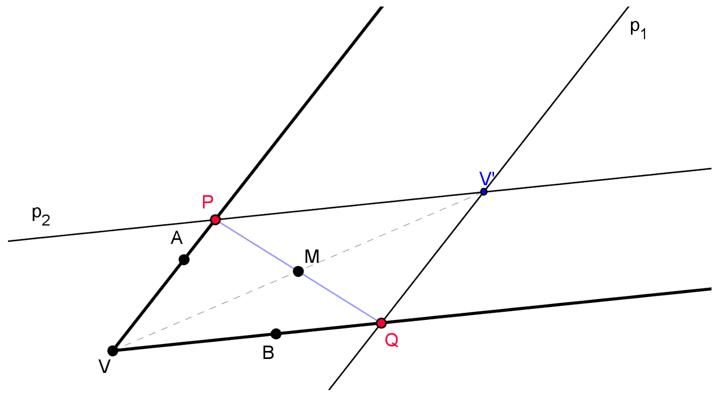
Obdobně bod P dostaneme jako průsečík ramene VA úhlu AVB a obrazu polopřímky VB ve středové souměrnosti podle středu M.
Pro určení neznámých bodů postačí sestrojit obraz úhlu AVB ve středové souměrnosti se středem M:

$$P \in VA \cap p_2, \text{ kde } S(M)\colon VB \longmapsto p_2,$$
$$Q \in VB \cap p_1, \text{ kde } S(M)\colon VA \longmapsto p_1.$$

Konstrukce

1. Konvexní úhel AVB, vnitřní bod M
2. p_1; $S(M)$: $VA \longmapsto p_1$
3. p_2; $S(M)$: $VB \longmapsto p_2$
4. P; $P \in \mapsto VA \cap p_2$

5. Q; $Q \in \mapsto VB \cap p_1$
6. Úsečka PQ



Obrázek 7.35: Konstrukce k příkladu 6.1

Zkouška

Bod V', průsečík přímek p_1 a p_2, je obrazem bodu V ve středové souměrnosti podle středu M, bod M je tedy střed úsečky VV'. Přímka a její obraz ve středové souměrnosti jsou vzájemně rovnoběžné, čtyřúhelník $VQV'P$ je proto rovnoběžník. Úsečka PQ je úhlopříčka rovnoběžníku $VQV'P$, bod M je její střed.
Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.35).

Příklad 6.2

Jsou dány tři různé body M, N, S, které neleží v přímce. Sestroj čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby bod M ležel na přímce AB a bod N na přímce CD.

Řešení

Polohová úloha.

Rozbor

Hledaný čtverec je středově souměrný podle svého středu S, přímky $m = AB$ a $n = CD$ jsou souměrně sdružené ve středové souměrnosti podle středu S, a tedy $m = n'$, $n = m'$. Pro obrazy bodů $M \in m$ a $N \in n$ platí:

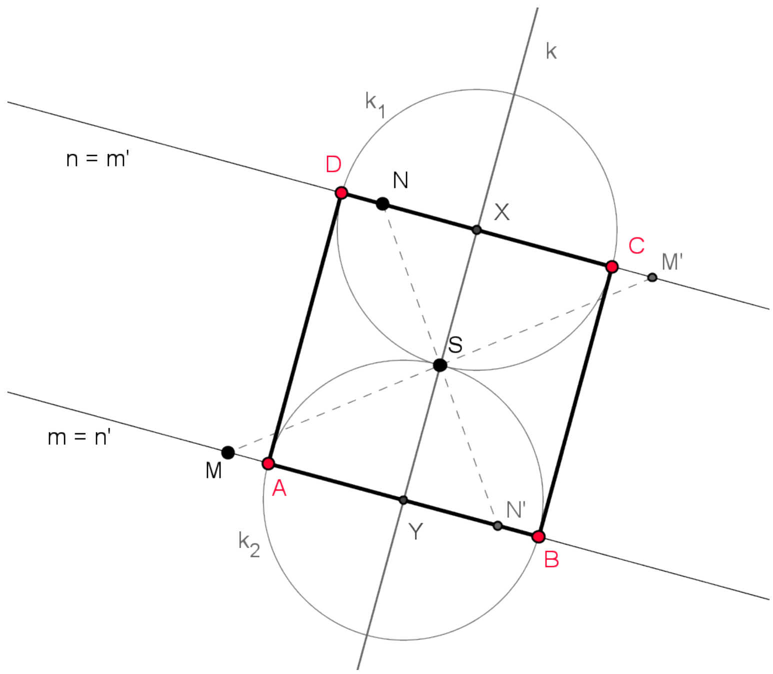
$$M' \in m' = n,\ N' \in n' = m.$$

Vrcholy čtverce nalezneme pomocí pomocných bodů X, Y — středů stran AB a CD čtverce $ABCD$ (osa stran k prochází středem S), obr. 7.36.

Obrázek 7.36: Náčrtek

Postup konstrukce

1. Dané body M, N, S (různé, neleží v jedné přímce)
2. M'; $S(S) : M \longmapsto M'$
3. n; $n = NM'$
4. N’; $S(S) : N \longmapsto N'$
5. m; $m = MN'$
6. k; $k \perp m, n$ $S \in k$
7. X, Y; $X \in k \cap n$, $Y \in k \cap m$
8. k_1; $k_1(X, r = |SX|)$
9. C, D; $C, D \in k_1 \cap n$
10. k_2; $k_2(Y, r = |SY|)$
11. A, B; $A, B \in k_2 \cap m$
12. Čtverec $ABCD$



Obrázek 7.37: Konstrukce k příkladu 6.2

Zkouška

Plyne z rozboru konstrukce.
Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.37).

Zadání DÚ

Učebnice str.137/3.23

Příklad 6.3

Sestroj lichoběžník $ABCD$ ($AB||CD$, $|AB| > |CD|$), jsou-li dány délky všech čtyř stran.

Řešení

Nepolohová parametrická úloha.

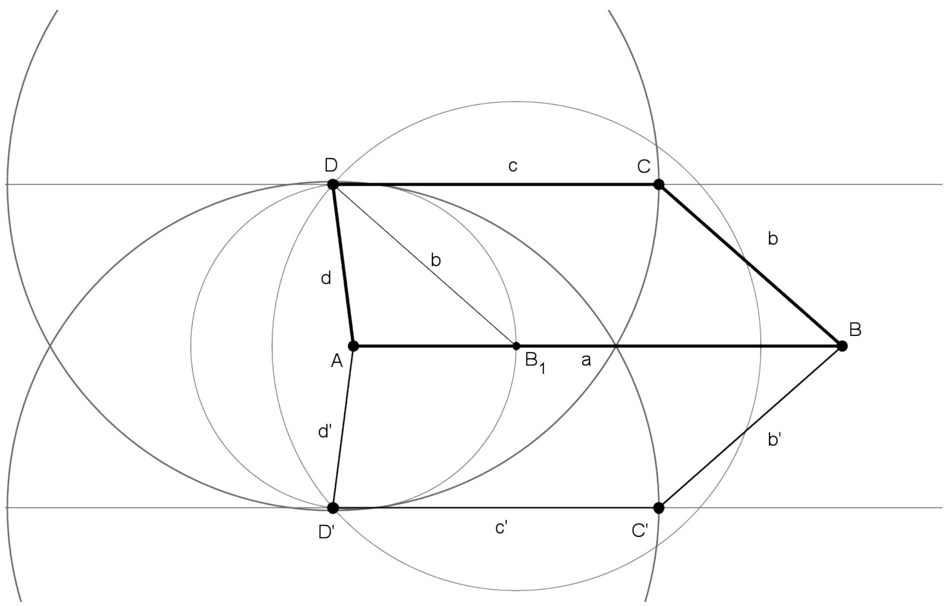
Rozbor

Předpokládáme, že je úloha řešitelná. Nejprve sestrojíme podle věty *sss* pomocný trojúhelník AB_1D, poté využijeme posunutí $\tau(\vec{XY})$, kde $|XY| = c$, $XY||AB_1$ (obr. 7.38). Při užití posunutí vycházíme z principu uvedeného na začátku předchozí hodiny.
Jde o nepolohovou úlohu s dvěma hledanými body: B, C.

Obrázek 7.38: Náčrtek

Konstrukce

1. Trojúhelník ADB_1; $|AD| = d$, $|AB_1| = a - c$, $|B_1C| = b$
2. B,C; $T(\vec{XY}) : B_1 \longmapsto B, D \longmapsto C$
3. Lichoběžník $ABCD$



Obrázek 7.39: Konstrukce k příkladu 6.3

Zkouška

Plyne z rozboru konstrukce.

Diskuse

Úloha je řešitelná a má právě dvě řešení (po jednom v každé z opačných polorovin určených přímkou AB) za splnění trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník ADB_1:

$$|b - d| < a - c < b + d.$$

Zrealizujeme úlohu pro lichoběžník $ABCD$ se stranami o délkách $a = 6$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm a $d = 2$ cm (obr. 7.39).

Závěrečné shrnutí

Kromě metody užití MVBDV známé ze ZŠ můžeme při řešení konstrukčních úloh využít také shodných geometrických zobrazení. Většina úloh však využívá MVBDV a metodu geometrických zobrazení zároveň. Existují také konstrukční úlohy, které lze řešit více metodami a na nás bude zvolit tu nejvhodnější, tj. tu, která vede nejsnáze k cíli.

Poslední dvě zpracované vyučovací hodiny navazují na téma Podobná zobrazení v rovině a Stejnolehlost.
V první vyučovací hodině se věnuji využití podobností (stejnolehlosti) při řešení konstrukčních úloh, druhá hodina se zabývá konstrukcemi na základě výpočtu. Také v tomto případě se nepatrně rozcházím s učebnicí, když řadím řešení úloh algebraickou metodou až za geometrická zobrazení. Toto pořadí shledávám vhodnější, vzhledem ke skupině úloh, týkajících se dělení úseček v daném poměru resp. dělení úseček na n shodných dílů, kde využíváme současně metodu výpočtu a metodu užití podobných zobrazení.

7.2.7 Téma: Konstrukční úlohy řešené užitím podobných zobrazení (stejnolehlosti)

Cíl hodiny:
Žák umí v konkrétních typech konstrukčních úloh určit mezi útvarem daným a hledaným vztah stejnolehlosti a ten pak využít při jejím řešení.

Obsah hodiny:

1. Úvod — opakování pojmu stejnolehlost
2. Konstrukce obrazu trojúhelníku v dané stejnolehlosti
3. Řešení konstrukčních úloh užitím stejnolehlosti
4. Zadání DÚ
5. Závěrečné shrnutí

Vyučovací hodina navazuje na téma stejnolehlost. V první úloze jde o konstrukci, kde mezi útvarem daným a hledaným existuje vztah stejnolehlosti.
V dalších příkladech se žáci naučí využívat stejnolehlosti k řešení takových konstrukčních úloh, kde je výhodné nejprve sestrojit pomocný útvar splňující podmínky na tvar hledaného obrazce, následně určit střed stejnolehlosti a převést pomocí ní tento útvar na útvar hledaný.

Úvod
Opakování pojmu stejnolehlost + souvislost se středovou souměrností.

Definice 7.5 *Stejnolehlost. Stejnolehlost (homotetie) se středem S a koeficientem $\kappa \neq 0$ je zobrazení $H(S, \kappa)$, které přiřazuje:*

- *Každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že platí:*

$$|SX'| = |\kappa||SX|,$$

  přitom pro $\kappa > 0$ leží bod X' na polopřímce SX, pro $\kappa < 0$ je bod X' bodem polopřímky opačné

- *Bodu S bod $S' = S$.*

Příklad 7.1 (Konstrukce stejnolehlého trojúhelníku)
K danému rovnostrannému trojúhelníku ABC se stranou délky $a = 4$ cm sestroj trojúhelník stejnolehlý, je-li střed stejnolehlosti v těžišti trojúhelníku a $\kappa = -2$.

Řešení
Polohová úloha se třemi hledanými body (vrcholy trojúhelníku).

Rozbor
Hledané body: A', B', C'
Hledané body určíme jako obrazy vrcholů trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem $S = T$, T je těžiště trojúhelníku ABC (obr. 7.40):

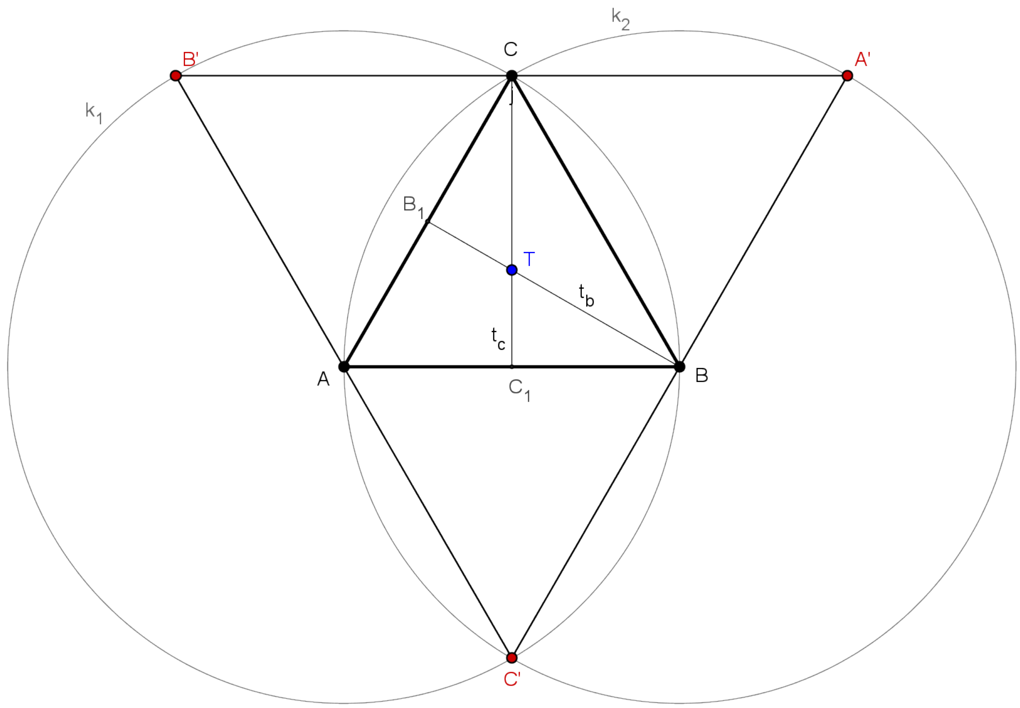
$$H(S = T; \kappa = -2)\colon A \longmapsto A', B \longmapsto B', C \longmapsto C'.$$

Obrázek 7.40: Náčrtek

Postup konstrukce

1. Trojúhelník ABC podle věty sss ($a = 4$ cm)
2. C_1; C_1 je střed AB
3. B_1; B_1 je střed AC
4. t_c, t_b; $t_b = BB_1$, $t_c = CC_1$
5. T; $T \in t_c \cap t_b$
6. A', B', C'; $H(S = T; \kappa = -2)\colon A \longmapsto A', B \longmapsto B', C \longmapsto C'$
7. Trojúhelník ABC

Zkouška
Plyne z rozboru konstrukce.
Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.41).



Obrázek 7.41: Konstrukce k příkladu 7.1

Příklad 7.2

Je dán konvexní úhel MVN a jeho vnitřní bod A. Veďte bodem A přímku p tak, aby vytínala na ramenech úhlu MVN úseky, jejichž délky jsou v poměru 2:3.

Řešení

Polohová úloha se dvěma hledanými body.

Rozbor

Hledané body: P, Q

Nejprve sestrojíme libovolnou úsečku, která vytíná na ramenech požadované úseky, pomocí stejnolehlosti sestrojíme její obraz procházející bodem A (obr. 7.42).

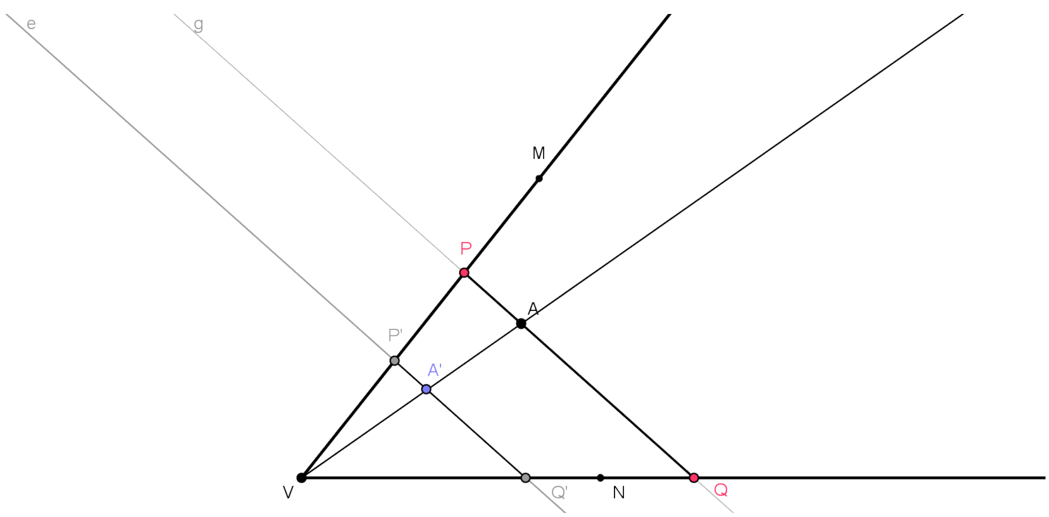
Zvolíme jednotkové vzdálenosti na jednotlivých ramenech např. 1 cm, dále pak body:

$$P' \in VM, |VP'| = 2 \text{ cm},$$
$$Q' \in VN, |VQ'| = 3 \text{ cm},$$
$$H(S = V)\colon \leftrightarrow P'Q' \longmapsto \leftrightarrow PQ \text{ tak, že } A \in PQ.$$

Obrázek 7.42: Náčrtek

Konstrukce

1. $\angle MVN$
2. P'; $P' \in VM, |VP'| = 2$ cm
3. Q'; $Q' \in VN, |VQ'| = 3$ cm
4. $\leftrightarrow P'Q'$
5. p; $H(S = V)$: $\leftrightarrow P'Q' \longmapsto \leftrightarrow PQ$, $A \in p$



Obrázek 7.43: Konstrukce k příkladu 7.2

Zkouška

Trojúhelníky PVQ a $P'VQ'$ jsou podobné podle věty *uu* (společný úhel u vrcholu V a souhlasné úhly u vrcholů P, P'), proto také $|VP| : |VQ| = 2 : 3$.
Úloha má vždy dvě řešení, závisí na volbě poměru úseků, tj. buď $|VP| : |VQ| = 2 : 3$ (obr. 7.43) nebo $|VP| : |VQ| = 3 : 2$.

Příklad 7.3

Sestroj trojúhelník, jsou-li dány jeho dva vnitřní úhly o velikostech $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$ a délka těžnice $t_c = 4$ cm.

Řešení

Polohová úloha s dvěma hledanými body.

Rozbor

Hledané body: A, B

Nejprve sestrojíme libovolný pomocný trojúhelník $A'B'C'$, jehož vnitřní úhly mají velikost $\alpha' = \alpha = 45°$, $\beta' = \beta = 60°$. Užitím stejnolehlosti se středem v bodě $C' = C$ sestrojíme trojúhelník ABC, jehož těžnice má požadovanou délku $t_c = 3$ cm (obr. 7.44).

$$H(S = C = C')\colon t'_c \longmapsto t_c, A' \longmapsto A, B' \longmapsto B.$$

Obrázek 7.44: Náčrtek

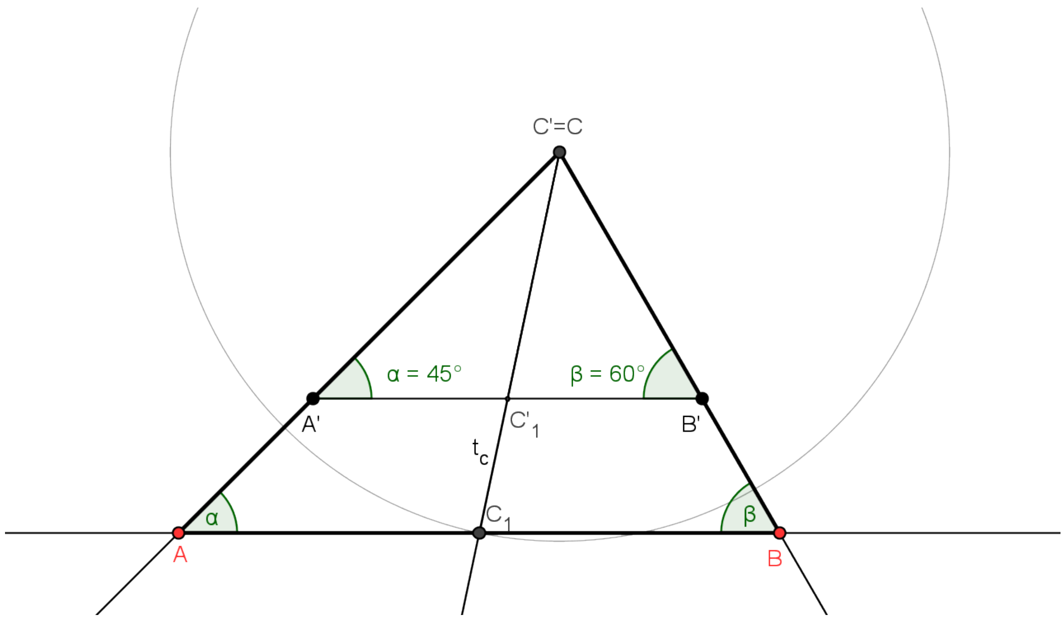
Konstrukce

1. Libovolný trojúhelník $A'B'C'$, $\alpha' = 45°$, $\beta' = 60°$
2. C'_1; C'_1 je střed $A'B'$
3. t'_c; $t_c = CC_1$
4. A, B; $H(S = C = C')\colon t'_c \longmapsto t_c, A' \longmapsto A, B' \longmapsto B$
5. Trojúhelník ABC

Zkouška

Každé dva stejnolehlé útvary, tedy také trojúhelníky ABC a $A'B'C'$ jsou podobné s koeficientem podobnosti $k = |\kappa| = \dfrac{t_c}{t'_c}$, odpovídající si vnitřní úhly podobných trojúhelníků jsou shodné.

Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.45).



Obrázek 7.45: Konstrukce k příkladu 7.3

Zadání DÚ

Sestroj trojúhelník ABC, je-li dáno α =45°, β =60°, r = 5 cm, kde r je poloměr kružnice trojúhelníku opsané .

Příklad 7.4

Jsou dány dvě různoběžky a, b a bod M, který neleží na žádné z nich. Sestrojte kružnici, která prochází bodem M a dotýká se přímek a, b.

Řešení

Práce s učebnicí (řešený příklad, učebnice str. 176/příklad 5)).

Závěrečné shrnutí

Kromě shodností lze k řešení úloh využívat také podobná zobrazení, zejména stejnolehlost. Stejnolehlost je vhodné užít například při sestrojování trojúhelníku, je-li jeden z daných prvků úsečka dané velikosti a ostatní prvky jsou úhly dané velikosti, poměr velikostí jeho stran či příček. Stejně dobře lze stejnolehlost využít při sestrojení obrazce, který má obsahovat daný bod.

7.2.8 Téma: Algebraická metoda řešení konstrukčních úloh

Cíl hodiny:
Žák umí aplikovat Pythagorovu a Eukleidovy věty při konstrukci úseček daných iracionálních délek, zvládá rozdělit danou úsečku v daném poměru a na n shodných dílů.

Obsah hodiny:

1. Motivační příklad
2. Výklad metody užití výpočtu při řešení konstrukčních úloh
3. Užití algebraické metody k sestrojení úsečky dané iracionální délky
4. Úloha na rozdělení úsečky v daném poměru
5. Závěrečné shrnutí — kdy a jak využíváme algebraickou metodu

V této hodině se budeme věnovat konstrukčním úlohám, kde bude třeba využít výpočtu. Hodina je koncipována jako výkladová s následnou aplikací na konkrétních příkladech.

Motivační příklad:

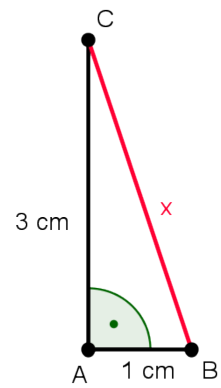
Příklad 8.1
Sestroj úsečku, která má při zvolené jednotkové úsečce délku $\sqrt{10}$.

Řešení
Zvolíme jednotku délky 1 cm. Úkolem je sestrojit úsečku o délce $x = \sqrt{10}$ cm.
Pro danou odmocninu platí:

$$\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = \sqrt{3^2+1^2},$$
$$\text{tedy } x = \sqrt{10} = \sqrt{3^2+1^2},$$
$$\text{resp. } x^2 = 3^2 + 1^2.$$

Hledáme úsečku, kde druhá mocnina její délky je dána součtem druhých mocnin délek úseček 3 cm a 1 cm. Využijeme Pythagorovu větu pro pravoúhlý trojúhelník, přeponou je hledaná úsečka x a odvěsnami úsečky o délkách 3 cm a 1 cm. Trojúhelník snadno sestrojíme podle věty *sss* (obr. 7.46).

Je-li úkolem sestrojit úsečku iracionální délky $x = \sqrt{y}$, snažíme se nalézt taková čísla, jejichž součet druhých mocnin dává základ této odmocniny a následně za využití Pythagorovy věty můžeme takovouto úsečku jednoduše sestrojit (jde o typ základní úlohy vedoucí k užití algebraické metody, viz kapitola 3.5.3).
Obdobně můžeme základ odmocniny rozložit na rozdíl druhých odmocnin s tím, že tentokrát by hledaná úsečka tvořila jednu z odvěsen pravoúhlého trojúhelníku.



Obrázek 7.46: Konstrukce k příkladu 8.1

- Výraz $x = \sqrt{a^2 + b^2}$ vyjadřuje délku přepony pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami o délkách a, b
- Výraz $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ vyjadřuje délku odvěsny pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má délku a a druhá odvěsna délku b

Příklad 8.2
Obdélník má strany o délkách $a = 4$ cm, $b = 3$ cm. Sestroj čtverec stejného obsahu.

Řešení
Rozbor
Nelze využít Pythagorovy věty, je třeba nalézt jiný postup.

Pro stranu hledaného čtverce platí:

$$x^2 = a \cdot b = 4 \cdot 3 \text{ (cm)}.$$

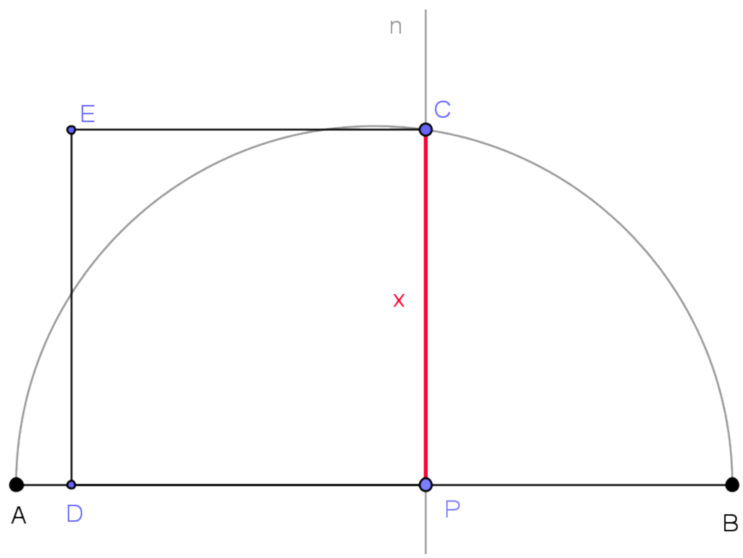
Příklad vede na využití Eukleidových vět:
V každém pravoúhlém trojúhelníku ABC, kde a, b jsou odvěsny, v je výška k přeponě c a c_a, c_b jsou úseky přepony přilehlé k odpovídajícím odvěsnám platí:

$$v^2 = c_a c_b \text{ (Euklidova věta o výšce)}$$
$$a^2 = cc_a,\ b^2 = cc_b \text{ (Eukleidova věta o odvěsně).}$$

V případě užití věty o výšce je hledaná úsečka výškou pravoúhlého trojúhelníku ABC spuštěná na přeponu o délce $a + b = 4 + 3 = 7$ (cm).

Konstrukce

1. Úsečka AB; $|AB| = a + b = 7$ cm
2. P; $P \in AB \wedge |AP| = a = 4$ cm
3. n; $n \perp AB \wedge P \in n$
4. τ_{AB}
5. C; $C \in n \cap \tau_{AB}$
6. x; $x = |PC| = \sqrt{3 \cdot 4}$
7. Čtverec $DPCE$



Obrázek 7.47: Konstrukce př. 8.2

Obdobně by se dala využít také Eukleidova věta o odvěsně (viz učebnice str. 116).

Poznámka

Úsečku délky $x = \sqrt{a \cdot b}$ nazýváme geometrický průměr úseček o délkách a, b.

Příklad 8.3
Jsou dány úsečky délek a, b. Sestroj úsečku o délce $\sqrt{a^2+b^2+ab}$.

Řešení
Úlohu budeme řešit postupnou konstrukcí dílčích úseček:
Užitím Eukleidovy věty o výšce sestrojíme pomocnou úsečku m, kde

$$m^2 = a \cdot b,$$

užitím Pythagorovy věty pomocnou úsečku c, pro niž platí:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Máme-li sestrojeny úsečky m a c, můžeme opět užitím Pythagorovy věty sestrojit také hledanou úsečku x takovou, že

$$x = \sqrt{c^2+m^2} = \sqrt{a^2+b^2+ab}.$$

Tím je úloha vyřešena.

Zadání DÚ
Sestroj úsečku $x = \sqrt{a^2+b^2+ab}$ podle postupu v př. 8.3, je-li $a = 4$ cm, $b = 3$ cm.

Dalším typem úloh jsou takové konstrukční úlohy, kde je úkolem rozdělit úsečku v daném poměru či na n shodných dílů. Tyto úlohy lze snadno řešit konstrukčně (eukleidovsky) užitím výpočtu a podobnosti.

Příklad 8.4
Danou úsečku AB o délce 5 cm rozdělte bodem C tak, aby platilo: $AC : CB = 5 : 2$.

Řešení
Polohová úloha s jedním hledaným bodem.

Rozbor
Hledaný bod: C
Úsečku rozdělíme na 7 shodných dílů, kde pro bod C bude platit, že $AC : CB = 5 : 2$. K tomu využijeme redukčního úhlu BAY, kde na rameno AY naneseme 7 shodných dílů o libovolné délce, např. 1 cm. Krajní bod Y spojíme s bodem B (obr. 7.48).

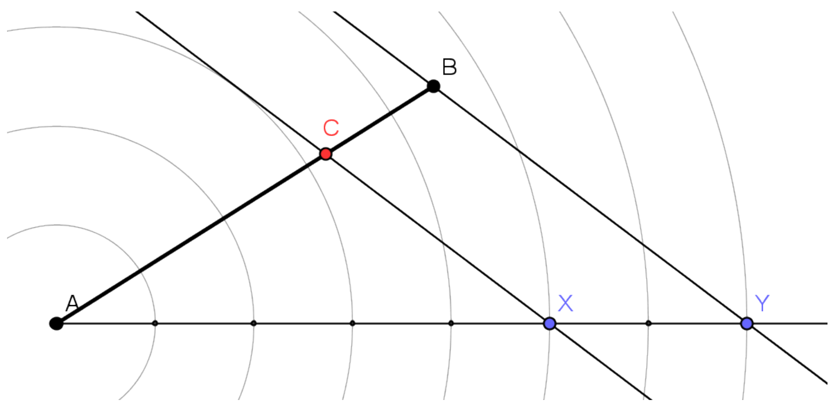
Dále sestrojíme obraz trojúhelníku BAY ve stejnolehlosti se středem A a koeficientem $\kappa = \dfrac{5}{7}$.

$$H(S = A)\colon \leftrightarrow YB \longmapsto \leftrightarrow XC$$

Obrázek 7.48: Náčrtek

Konstrukce

1. Úsečka AB; $AB = 5$ cm
2. Libovolný úhel BAY, $|AY| = 7j$
3. $\leftrightarrow BY$
4. C; $H(S = A)$: $\leftrightarrow YB \longmapsto \leftrightarrow XC$



Obrázek 7.49: Konstrukce k příkladu 8.4

Zkouška
Plyne z rozboru konstrukce (trojúhelníky BAY a CAX jsou podobné podle věty uu). Úloha má právě jedno řešení (obr. 7.49).

Závěrečné shrnutí
Existují konstrukční úlohy, kde nevystačíme pouze s čistou geometrií, ale je potřeba využít výpočtu. Této metodě řešení říkáme algebraická metoda řešení konstrukčních úloh. Využíváme ji také v případě, kdy je třeba rozdělit danou úsečky v daném poměru, resp. rozdělit danou úsečku na n shodných dílů.

Kapitola 8

Užití informačních technologií při řešení konstrukčních úloh na SŠ

V současné době se s výpočetní technikou setkáváme téměř ve všech oblastech běžného života, zároveň se také stává nedílnou součástí výuky na školách. Proto věnuji několik řádků této práce využití počítače při řešení konstrukčních úloh.

Budeme-li chtít do výuky tohoto tématu zařadit počítač, vidím následující dva způsoby, jak to provést (ve scénářích vyučovacích hodin obsažených v předchozí kapitole jsem se vždy snažila upozornit na konkrétní situaci, kdy shledávám využití počítače jako užitečné):

1. Využitím interaktivní tabule, kdy učitel spouští příslušný program ze svého počítače, žák provádí konstrukce na interaktivní tabuli
2. Využitím počítačové učebny, kdy každý žák (popř. ve dvojici) má k dispozici vlastní počítač, konstrukce provádí přímo v něm

Interaktivní tabule, součást téměř každé lépe vybavené školy, je zjednodušeně interaktivní plocha, ke které připojujeme počítač a datový projektor. Datový projektor promítá obraz z počítače na povrch tabule a my přes ni můžeme prstem, speciálními fixy nebo dalšími nástroji ovládat počítač, popř. pracovat přímo s interaktivní tabulí. Nejvíce rozšířené typy interaktivních tabulí jsou *SMART Board*, *Active Board* a *Interwrite*. Máme dvě možnosti, jak interaktivní tabuli využít.

První z nich je použití některého ze softwaru určeného pro tvorbu příprav na interaktivní tabuli, např. *ACTIVStudio*, *ActivInspire* atd., kde lze mezi nástroji těchto prostředí nalézt kromě jiného také pravítko a kružítko. Pomocí nich můžeme provádět přímo na interaktivní tabuli jednodušší eukleidovské konstrukce, přičemž žáci přesně vidí, jak oba tyto nástroje při rýsování použít. Tento způsob zapojení počítače do výuky konstrukčních úloh shledávám užitečnější u nižších ročníků gymnázií, kde probírané konstrukce nejsou příliš složité. Zařazení interaktivní tabule je spíše jakýmsi zpestřením, než aby nějak zásadně usnadnilo pochopení této látky. Jejím využitím však můžeme podpořit tvůrčí přístup a pracovitost žáků, protože ta stále zůstává na nich. Ani interaktivní tabule totiž nevyřeší nic za žáky, stejně jako tomu je při rýsování na papír. Při práci s interaktivní tabulí musíme však v počátku počítat s tím, že žáci se musí naučit psát na tabuli, pohybovat s objekty, pracovat s nástroji. Získávání těchto návyků tedy zabere nějaký čas.

V manipulaci s nástroji *pravítko a kružítko* nevidím zjednodušení oproti klasickému rýsování křídou na tabuli, spíše naopak. Nehledě na to, že přímky a kružnice vytvořené v těchto prostředích jsou lehce kostrbaté a průsečíky vytvořených křivek nelze přesně označit. Tudíž blíže než k přesné konstrukci mají narýsované útvary spíše charakter povedeného náčrtku. Na druhou stanu lze ve výuce poměrně užitečně využít animací (hlavně u slabších žáků či nižších ročníků). Jde o předem nahranou sekvenci jednotlivých kroků konstrukce, kdy po spuštění žák názorně vidí, jak který útvar v průběhu rýsování vzniká.

Jako výraznější a efektivnější vidím využití interaktivní tabule v podobě *zvětšeného monitoru* počítače, tj. případ, kdy máme spuštěný některý z široké nabídky programů dynamické geometrie a promítáme jej na interaktivní tabuli. Na ní poté provádíme dotykem stejné úkony, jako kdybychom seděli před počítačem a pracovali s myší. Takto lze interaktivní tabulí nahradit klasické rýsování křídou na tabuli, a to přesnější a časově méně náročnou formou. Nevýhoda je, že s interaktivní tabulí může pracovat vždy jen jeden člověk (jeden žák či učitel). Touto formou bych interaktivní tabuli využila v případě výkladu či demonstraci některé složitější konstrukce, která by na klasické křídové tabuli nemusela být přehledná (jak jsem již zmínila, takový způsob využití naznačuji v předchozí kapitole přímo ve scénářích některých vyučovacích hodin).

Jako nejlepší způsob užití počítače při řešení konstrukčních úloh shledávám využití počítačové učebny, kdy má každý ze studentů možnost samostatně provádět dynamické konstrukce přímo v geometrickém programu ve svém počítači. V současné době je na trhu k dostání mnoho druhů dynamických (interaktivních) geometrických programů vhodných pro školní výuku. Interaktivní geometrií chápeme takovou, kde prostředí spolupracuje s uživatelem, např. při konstrukci se dotazuje, nabízí možnosti, komentuje situaci, vytvořené objekty nejsou definitivní, ale dají se interakcí s uživatelem změnit. Dynamická geometrie zase dokáže pohybem vnést nový pohled, který situaci ozřejmí právě pohybem objektů [16]. Pojmy dynamická a interaktivní geometrie bývají v různých literaturách zaměňovány, např. Vaníček chápe dynamickou geometrii jako část geometrie interaktivní.

Mezi dostupné programy dynamické geometrie patří např. německá Cinderella, původně francouzská Cabri, rakouská GeoGebra, český GEOM, americký Geometer´s sketchpad, německý GEONExT a jiné. Mnoho z těchto programů je volně ke stažení na internetu, některé z nich (např. nejužívanější Cabri a GeoGebra) lze dohledat i v české verzi. Osobně mě nejvíce zaujala práce v GeoGebře, ve které jsem vytvářela i veškeré konstrukce použité v této práci a kterou bych já sama využívala při výuce konstrukčních úloh, a to konkrétně v následujících situacích:

1. **Jako motivaci pro žáky či jako zpestření vyučovací hodiny**
   Práce na počítači je pro žáky zcela jistě atraktivnější než tradiční rýsování do sešitu. Je však třeba ohlídat, aby veškerá pozornost žáků nesklouzla k prozkoumávání funkcí programu místo přemýšlení nad zadanou úlohou.

2. **Při řešení parametrických úloh**
   Řeší-li studenti takovéto úlohy na papíře, provedou diskusi pro všechny možné hodnoty parametru a vždy narýsují hledaný útvar pouze pro jednu konkrétní hodnotu parametru. Využitím dynamických geometrických programů lze změnou polohy volných prvků hotové konstrukce nechat plynule překreslit zbytek konstrukce se zachováním vazeb. Tím konstrukce jakoby *ožívá* a žáci mohou sledovat, jak se bude měnit počet řešení konstrukční úlohy se změnou parametru. Nejsou tedy zatěžováni nutností si situaci představit a vyvodit závěry a lépe si proto uvědomují jednotlivé vztahy a souvislosti.

3. **Při realizaci složitější konstrukce**
   Některé konstrukce je vzhledem k velkému množství čar takřka nemožné zrealizovat na tabuli klasicky křídou či fixem. V tomto případě je využití geometrického programu velmi užitečné. Zejména proto, že lze v prováděné konstrukci nechat některé pomocné objekty skrýt, což je při rýsování na tabuli/do sešitu nereálné. Tím se celá konstrukce mnohonásobně zpřehlední. Zároveň jedná-li se o obtížnější úlohu, kdy žákům není některý z provedených kroků jasný či ho neprovedou správně, mohou se vždy použitím tlačítka *zpět* vrátit. To je také jednou z velkých výhod oproti rýsování na tabuli/do sešitu.

Shrnu-li výhody provádění konstrukcí v dynamických geometrických programech, pak jednou z největších je zcela jistě přesnost rýsování. Ovládání nástrojů většiny programů je naprosto intuitivní, z vlastní zkušenosti vím, že žáci se naučí pracovat v tomto prostředí velmi rychle, tudíž jako jednu z dalších výhod můžeme vidět časovou úsporu vzhledem k rychlosti provedení konstrukce v počítači ve srovnání s rýsováním na papír. Dále lze hotové konstrukce ukládat, zpětně se k nim vracet, popř. je měnit. Pracujeme-li s nadanějšími studenty, můžeme je nechat vytvářet makra — nové vlastní nástroje, které lze zařadit do základní nabídky nástrojů a nadále je vhodně využívat. Další z výhod je jednoduchá kontrola, zda student opravdu provedl danou konstrukci správně, tj. zda ji „nenašvindloval“. Můžeme pohnout některým z volných prvků, a pakliže žák rýsoval správně, konstrukce se „nezboří“, v reálném čase se překreslí v závislosti na nové poloze posunutého prvku. Takovouto rychlou kontrolu nám statický obrázek v sešitě neumožňuje. Stejně tak i samotný žák manipulací s vhodnými objekty dostává okamžitou zpětnou vazbu, tím se stává samostatnější, méně závislý na učiteli. V neposlední řadě je rýsování na počítači velkým ulehčením pro manuálně méně zručné žáky, kdy k provedení celé konstrukce stačí pouhá myš počítače.

Jako nevýhoda se může jevit časová náročnost domácí přípravy učitele. Na druhou stranu existuje mnoho zpracovaných výukových materiálů týkajících se právě řešení konstrukčních úloh, které lze při výuce přímo využít, či je vhodně předělat pro vlastní potřeby.
Například na internetových stránkách [62] ZŠ v Havlíčkově Brodě Mgr. Bronislav Návojský poskytuje celou sadu příprav pro práci s interaktivní tabulí v hodině matematiky pro druhý stupeň ZŠ. Využití přímo programů dynamické geometrie lze pak nalézt v [16] J. Vaníčka či na výukovém CD Mikulášského Gymnázia, které obsahuje několik desítek příprav (nejen) pro výuku konstrukčních úloh na SŠ.

Dalším ze zdrojů, které lze při přípravě výuky na počítači využít, je již v předchozí kapitole zmíněné zpracování Apolloniových úloh dostupné z [52] či webové stránky [63] k učebnici Matematika pro SOŠ. Na posledních zmíněných webových stránkách je k nalezení také kompletní řešení Apolloniových úloh, dále konstrukce společných tečen dvou kružnic či dělení úsečky v poměru 2:3. Všechny tyto úlohy jsou zpracovány v programu GeoGebra.

Jako nejužitečnější internetový odkaz, se kterým jsem se při psaní této práce setkala, shledávám webové stránky [51] již zmiňovaného J. Vaníčka. Kromě mnoho dalších velmi užitečných odkazů zde lze v sekci „Témata“ dohledat jednak sadu obrázků z obyčejné učebnice matematiky pro 6. – 8. třídy („Obživlá učebnice“), tak Sbírku úloh pro víceletá gymnázia (A. Vrba), kde jsou v Cabri řešeny konkrétní úlohy z [45], včetně podrobného vysvětlení a metodických připomínek k úlohám. V neposlední řadě je na tomto odkazu k nalezení původně diplomová práce (zde v podobě webových stránek), poskytující náměty k využití Cabri Geometrie.

CD přiložené k této práci obsahuje dynamické konstrukce jak z části teoretické, tak z části metodické. V diplomové práci jsou využity v podobě statických obrázků. Ve výuce je lze použít v rámci jednotlivých scénářů jako ukázku správných řešení jednotlivých úloh, popř. jako základ pro vlastní přípravy.

Zamyslím-li se nad tím, kolik času bych já osobně viděla jako optimální věnovat práci s počítačem při výuce konstrukčních úloh, pak s přihlédnutím k informacím získaným v průběhu psaní této práce musím říci, že oproti původnímu, poměrně radikálnímu, názoru dnes na celou věc nahlížím poněkud odlišně.

Než jsem začala práci psát, zastávala jsem spíše tradiční názor, tedy zůstat u rýsování tužkou na papír, počítač a příslušné programy jsem chápala spíše jako něco navíc, než běžnou součást výuky konstrukčním úlohám. Tento můj názor však souvisel spíše s neznalostí, neměla jsem ucelenou představu, co vše je v současné době v souvislosti s výukou tohoto tématu dostupné a v podstatě připravené k použití.
V průběhu zpracovávání diplomové práce jsem se setkala s různými programy, výukovou informační technologií a publikacemi, které při troše snahy a minimu věnovaného času

lze poměrně efektivně využít ve vlastní výuce. Měla jsem možnost učit ve třídě, kde žáci poprvé pracovali v programu GeoGebra a jejich reakce byla více než pozitivní. Už proto si myslím, že má smysl výuku tímto směrem inovovat.
Nepřeceňovala bych význam počítače jako takového a rozhodně se zcela nevzdávám tradičního rýsování, na druhou stranu ale vidím téměř jako nutnost (hlavně do budoucna) alespoň určitý čas výuky dynamickým geometrickým programům věnovat. Nehledě na to, že tohoto trendu si všímají také autoři učebnic a sami přicházejí s novými interaktivními učebnicemi matematiky.
V současné době je téměř v každé učebně k dispozici plátno s dataprojektorem, tudíž minimálně v této podobě lze hotové applety využít. Spíše se ale přikláním k „zapojení žáků", nechat je samostatně provádět konstrukce na vlastním počítači, ať už doma nebo ve škole. Například domácí úkol v podobě nějaké konstrukce na počítači bude pro žáky určitě mnohem zajímavější. Zároveň při změně některých parametrů konstrukční úlohy či v případě podobných úloh si může student otestovat znalosti hned na několika příkladech najednou (jednotlivá řešení si v průběhu ukládá), aniž by musel každou úlohu rýsovat vždy od začátku, což bezesporu ocení.

Kapitola 9

Závěr

Cílem této práce bylo metodicky zpracovat několik vyučovacích hodin věnovaných konstrukčním úlohám řešeným na střední škole.
Na střední škole jsou konstrukční úlohy řešeny eukleidovsky, tj. pomocí pravítka a kružítka. Pojem Eukleidovské konstrukce je vysvětlen ve stejnojmenném odstavci kapitoly 3. O tom, jak rozhodnout, zda je či není daná úloha eukleidovsky řešitelná, pojednává kapitola 4. V případě eukleidovsky neřešitelných úloh lze využít přibližných konstrukcí — některé z nich jsou obsahem kapitoly 5.
Chceme-li danou konstrukční úlohu řešit, je potřeba vybrat vhodnou metodu řešení a nevynechat žádnou z fází, ze kterých se úplné řešení konstrukční úlohy skládá. Všechny tyto potřebné znalosti jsem se pokusila shrnout v kapitole 3, jejichž aplikaci ukazuji na řešených příkladech buď přímo v textu, nebo odkazuji na příklad zařazený v některém ze scénářů vyučovacích hodin. První vyučovací hodina je věnována tématu množiny všech bodů dané vlastnosti, v další hodině je probírán pojem konstrukční úloha a jsou zde prováděny základní eukleidovské konstrukce. Ve třetí vyučovací hodině jsou řešeny konstrukční úlohy užitím metody množin všech bodů dané vlastnosti, čtvrtá vyučovací hodina je věnována konstrukcím kružnic. V následujících třech scénářích vyučovacích hodin jsou řešeny konstrukční úlohy užitím metody geometrických zobrazení. Poslední vyučovací hodina je pak věnována řešení konstrukčních úloh algebraickou metodou. Tyto scénáře mají sloužit jako hotové přípravy pro vyučování konstrukčním úlohám. Nepokrývají však téma konstrukčních úloh kompletně (je-li žádoucí proložit zpracované hodiny některou další vyučovací hodinou, zejména opakovací, uvádím to přímo v dané přípravě). Všechny řešené příklady jsou doplněny o konstrukci v programu GeoGebra, ty lze během vyučování také využít. Stejně dobře lze využít volně stažitelných dynamických programů (GeoGebra je jedním z nich) a nechat žáky provádět probírané konstrukce u tabule, samostatně na počítači či je v této formě zadat jako domácí úkol. Tím se konstrukční úlohy stanou pro žáky jistě atraktivnější a možná je to jedna z cest k jejich snadnějšímu pochopení žáky.

Literatura

[1] *Holubář, J.*: **O methodách rovinných konstrukcí.** (Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné.) Praha: JČSMF, 1949.

[2] *Kořínek, V.*: **Základy algebry.** Praha: NČSAV, 1953.

[3] *Štalmašek, J.*: **Teória geometrických konštrukcií.** (Skripta.) Bratislava: SPN, 1955.

[4] *Štalmašek, J.*: **Geometrické konštrukcie.** Bratislava: SNTL, 1959.

[5] *Vyšín, J. a kol.*: **Geometrie pro pedagogické fakulty. I. díl.** Praha: SPN, 1965.

[6] *Šofr, B.*: **Eukleidovské geometrické konštrukcie.** Bratislava: ALFA, 1976.

[7] *Kowal, S.*: **Matematika pro volné chvíle.** Praha: SNTL, 1986.

[8] *Švrček, J. — Vančura, J.*: **Geometrie trojúhelníka.** Praha: SNTL, 1988.

[9] *Hejný, M. a kol.*: **Teória vyučovania matematiky 2.** Bratislava: SPN, 1990.

[10] *Kuřina, F.*: **Deset pohledů na geometrii.** Praha: MÚ AV ČR, 1996.

[11] *Martin, G. E.*: **Geometric Constructions.** New York: Springer-Verlag, 1998.

[12] *Lávička, M.*: **Geometrie 1.** (Skripta.) Plzeň: ZČU, 2002.

[13] *Pomykalová, E.*: **Konstrukční úlohy v matematice na gymnáziu.** 8. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol, 2002, str. 251 – 254.

[14] *Eukleides z Alexandrie*: **Základy, Knihy I – IV.** (Ed. P. Vopěnka) Nymburk: OPS, 2007.

[15] *Polák, J.*: **Přehled středoškolské matematiky.** Praha: Prometheus, 2008. (9. vydání.)

[16] *Vaníček, J.*: **Počítačové kognitivní technologie ve výuce geometrie.** Praha: Pedagogická fakulta UK, 2009.

[17] *Polák, J.*: **Středoškolská matematika v úlohách II.** Praha: Prometheus, 2011. (2. vydání.)

[18] *Sedláček, W. (Josef Vojtěch)*: **Základowé měřičstwj čilo Geometrye.** (Tištěno novogotickým písmem frakturou.) Praha: Vydavatelství vdovy Jozefy Feterlové z Wildenbrunu, 1822.

[19] *Jandečka, V.*: **Geometria pro vyšší gymnasia**. (díl prvý — Planimetria) Praha: nákladem spisovatelovým, 1864.

[20] *Jarolímek, V.*: **Geometrie pro II. a III. třídu škol reálných — Planimetrie.** Praha: Nákladem JČM, 1891.

[21] *Strnad, A.*: **Geometrie pro vyšší gymnasia.** Praha: nakladatel F. Kytka, 1893 (1. vydání), 1904 (2. vydání I. dílu Planimetrie).

[22] *Bydžovský, B. — Vojtěch, J.*: **Mathematika pro nejvyšší třídu reálek.** Praha: Nákladem JČM, 1912.

[23] *Vojtěch, J.*: **Geometrie pro IV. a V. třídu škol středních.** Praha: Nákladem JČSMF, 1924. (5. uprav. vydání.)

[24] *Vinš, J.*: **Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol (Vydání pro reálky a reformní reálná gymnasia).**(Planimetrie — 1. část.) Praha: Nákladem České grafické unie a. s., 1927.

[25] *Čech, E.*: **Geometrie pro 1. – 3. třídu středních a měšťanských škol.** Praha: Nákladem JČMF, 1943, 1946 (dotisk).

[26] *Holubář, J. — Vojtěch, J.*: **Geometrie pro V. třídu středních škol.** Praha: Nákladem JČSMF, 1947. (Upravený dotisk 6. vydání.)

[27] *Čech, E. a kol.*: **Geometrie pro třetí třídu středních škol.** Praha: Státní nakladatelství učebnic, 1950.

[28] *Čech, E. a kol.*: **Geometrie pro čtvrtou třídu středních škol.** Praha: Státní nakladatelství učebnic, 1950.

[29] *Čech, E. a kol.*: **Matematika pro I. třídu gymnásií.** Praha: Státní nakladatelství učebnic, 1951.

[30] *Čech, E. a kol.*: **Matematika pro II. třídu gymnásií.** Praha: Státní nakladatelství učebnic, 1951.

[31] *Kraemer, E. a kol.*: **Matematika pro 7.postupný ročník všeobecně vzdělávacích škol.** Praha: SPN, 1954.

[32] *Dubec, A. a kol.*: **Matematika pro 8. postupný ročník všeobecně vzdělávacích škol.** Praha: SPN, 1954.

[33] *Vyšín, J. a kol.*: **Geometrie pro 9. až 11. postupný ročník.** Praha: SPN, 1954.

[34] *Zedek, M. a kol.*: **Matematika pro I. ročník SVVŠ.** Praha: SPN, 1964.

[35] *Šedivý, J. a kol.*: **Matematika pro I. ročník gymnázia. 2. sešit.** Praha: SPN, 1978.

[36] *Schmidtmayer, J. — Petránek, O. — Šikola, B.*: **Matematika 2 pro SPŠ a SZTŠ.** Praha: SPN, 1979.

[37] *Šedivý, J. a kol.*: **Matematika pro gymnázia (pro IV. ročník gymnázia). 8. sešit.** Praha: SPN, 1980.

[38] *Műllerová, J. a kol.*: **Matematika pro 7. ročník ZŠ. II. díl.** Praha: SPN, 1982.

[39] *Bobok, J. a kol.*: **Matematika pro 8. ročník ZŠ. I. díl.** Praha: SPN, 1983.

[40] *Bobok, J. a kol.*: **Matematika pro 8. ročník ZŠ. II. díl.** Praha: SPN, 1983.

[41] *Smida, J. a kol.*: **Matematika pro I. ročník gymnázií.** Praha: SPN, 1984.

[42] *Calda, E. — Petránek, O. — Řepová, J.*: **Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU - 1. část.** Praha: SPN, 1984.

[43] *Riečan, B. a kol.*: **Matematika pro IV. ročník gymnázií.** Praha: SPN, 1987.

[44] *Pomykalová, E.*: **Matematika pro gymnázia. Planimetrie.** Praha: Prometheus, 1993.

[45] *Herman, J. a kol.*: **Matematika pro tercii víceletých gymnázií. 5. díl - Geometrické konstrukce.** Praha: Prometheus, 1998.

[46] *Šarounová, A. a kol.*: **Matematika pro 8. ročník ZŠ. II. díl.** Praha: Prometheus, 1999.

[47] *Odvárko, O. — Kaleček, J.*: **Matematika pro 8. ročník ZŠ. 3. díl.** Praha: Prometheus, 2000.

[48] *Molnár, J. a kol.* : **Matematika 8.** Olomouc: Prodos, 2000.

[49] *Bitnerová, H. — Fuchs, E. — Tlustý, P.*: **Matematika 8.** Plzeň: Nakladatelství Fraus, 2009.

[50] *Molnár, J.* : **Matematika pro SOŠ. Planimetrie.** Praha: Prometheus, 2011.

[51] *http://www.pf.jcu.cz/cabri/*

[52] *http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/*

[53] *http://www.docstoc.com/docs/18531464/Řecká-matematika-1*

[54] *http://euler.fd.cvut.cz/predmety/matematika/historie/*

[55] *http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Malfatti.shtml*

[56] *http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=507*

[57] *http://svp.muni.cz/ukazat.php?docId=378*

[58] *http://www.is.muni.cz/th/66307/pedf_m/Kunes_Tomislav*

[59] *http://www.msmt.cz/vzedlavani/ramcovy-vzdelavaci-program-pro-zakladni-vzdelavani-verze-2007*

[60] *http://www.vuppraha.cz/wp-content/uploads/2009/12/RVPG-2007-07_final.pdf*

[61] *http://www.dagles.klenot.cz/rihova/pravnuhel.pdf*

[62] *http://www.conti-sw.wz.wz*

[63] *http://www.planimetrie.cz*

[64] *http://kmd.fp.tul.cz/lide/zackova/GE1/Mnohouhelniky.pdf*