ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

POSLOUPNOSTI REÁLNÝCH ČÍSEL A ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Bc. Pavla Bělašková

Učitelství pro základní školy, obor Učitelství matematiky pro základní školy

Vedoucí diplomové práce: **PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.**

Plzeň 2018/2019

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň, 27. června 2019

....

vlastnoruční podpis

PODĚKOVÁNÍ
Děkuji vedoucímu diplomové práce PhDr. Lukášovi Honzíkovi, Ph.D., za cenné rady a připomínky, které mi během psaní diplomové práce poskytl.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

Seznam znaků 3
Úvod 4
Kapitola první: Pojem posloupnost 5
Vymezení pojmu 5
Definice (Posloupnost reálných čísel) 5
Motivace 5
Způsoby zadávání posloupností 5
Grafické (geometrické) znázornění posloupnosti 6
Příklad 1 (Grafické znázornění posloupnosti) 7
Vlastnosti posloupností 8
Příklad 2 (Určení omezenosti posloupnosti) 8
Příklad 3 (Určení monotónnosti posloupnosti) 10
Extrémy posloupností 10
Minimum a maximum: 10
Infimum a supremum: 11
Příklad 4 (Vyšetření extrémů posloupnosti) 11
Příklad 5 (Úloha k procvičení vyšetření vlastností posloupnosti) 13
Podposloupnost posloupnosti 16
Věta: Monotónní podposloupnost 16
Věta: Bolzano – Weierstrassova 16
Limity posloupnosti 16
Definice (Limita posloupnosti) 17
Vlastnosti konvergentních posloupností 17
Algebra limit 19
Neurčité výrazy v limitách posloupností 20
Definice Eulerova čísla 22
Věty o nerovnostech posloupností 23
Věta o sevření posloupnosti 23
„Vedlejší“ vlastnosti limit posloupností 24
Věta: O limitě podposloupnosti vybrané z dané posloupnosti 28
Kapitola druhá: Nejběžnější posloupnosti 29
Aritmetická posloupnost 29
Definice aritmetické posloupnosti 29
Geometrická posloupnost 39

Definice geometrické posloupnosti 39
Pravidelný přírůstek, pravidelný úbytek 47
Kapitola třetí: Další řešené příklady 51
Vyšetřování vlastností posloupností 51
Určení vzorce pro analytické a rekurentní vyjádření posloupnosti dané výčtem prvků 57
Převody mezi rekurentním a analytickým vyjádřením u nekonečných posloupností 59
Kapitola čtvrtá: Speciální posloupnosti 63
Fibonacciho posloupnost 63
Definice zlatého čísla 67
Věta: Prvočísla ve Fibonacciho posloupnosti 72
Kapitola pátá: Shrnutí 73
Závěr 76
Resumé 77
Resumé [CZ] 77
Resumé [EN] 77
Zdroje a použitá literatura 78

Seznam znaků

$\mathbb{N}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\subset$	relace „býti podmnožinou“
a_n, b_n, x_n,…	označení n-tého členu posloupnosti a, b, x…
s. v. n.	pro skoro všechna *n*
$\in$	náleží
$\exists$	existuje
$\nexists$	neexistuje
$\forall$	pro všechny prvky

Úvod

Má diplomová práce na téma „Posloupnosti reálných čísel a řešené příklady" pojednává, jak už název napovídá, o posloupnostech reálných čísel.
Pod pojmem posloupnost si dokáže něco představit už středoškolák, protože právě na střední škole se o posloupnostech něco dozvídáme prvně.

Ráda bych čtenáře seznámila nejen se základními typy posloupností jako je aritmetická a geometrická, které právě známe už ze střední školy, ale i těmi méně známými posloupnostmi mezi lidmi, kteří se matematikou nezabývají. Takovou posloupností je např. Fibonacciho posloupnost.

U každého typu posloupnosti, který tu budu zmiňovat uvedu několik příkladů, aby vše bylo názorné a snadné k pochopení, protože z příkladů se člověk naučí lépe než z teorie.

V první kapitole si připomeneme, co to vlastně posloupnost je, jaké má vlastnosti a jak se vyšetřuje.
V druhé kapitole se budu věnovat těm nejběžnějším posloupnostem – těmi jsou aritmetická a geometrická a zvlášť i přirozený přírůstek a úbytek.
Třetí kapitola bude věnovaná pouze řešeným příkladům a převodům mezi jednotlivými zadáními posloupnosti.
Čtvrtá kapitola bude právě o speciálních posloupnostech, tou je třeba Fibonacciho posloupnost.

Kapitola první: Pojem posloupnost

Vymezení pojmu

Definice (Posloupnost reálných čísel)

Posloupnost reálných čísel, resp. **reálná posloupnost** je funkce, která na definičním oboru nabývá hodnot množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$ a na oboru hodnot nabývá hodnot podmnožiny reálných čísel $\mathbb{R}$.

Je to tedy vlastně zobrazení. Pokud tuto podmnožinu reálných čísel označíme $\mathbb{H}$, tedy $\mathbb{H} \subset \mathbb{R}$, pak toto zobrazení můžeme zapsat jako

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{H}: n \rightarrow x_n.$$

N-tý člen posloupnosti značíme jako a_n, nebo jakékoli jiné písmeno s dolním indexem n, podle toho, jak je posloupnost nazvaná.

Motivace

Proč vlastně posloupnosti zavádět? Každé téma si zaslouží krátkou motivaci.

1. modelování diskrétních jevů – ekonomické a finanční modely, demografie, biologie, výpočetní složitost, …

2. pomocí posloupností (popř. řad) se definuje spojitá analýza, zavádíme pojmy spojité analýzy jako jsou například: limita, spojitost, derivace, integrály, …

Způsoby zadávání posloupností

- Vzorcem pro n-tý člen (explicitně): Zadaná posloupnost a_n je funkce s proměnnou n.
  Příklad: $a_n = n!$

- Rekurentním zápisem: Výpisem členů a vzorcem.
  Příklad: $a_1 = 5$; $a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1$; $n \in \mathbb{N}$
- Výčtem prvků: Příklady: (1, 2, 3, 4, 5, 6, …); (1, 4, 9, 16, 25, 36, …)
  Nejznámějším rekurentním zápisem posloupnosti jsou aritmetická a geometrická posloupnost, se kterými se blíže seznámíme v další kapitole.

Mezi jednotlivými způsoby zadání posloupnosti se může přecházet. To si ukážeme na krátkém příkladu:

Př.: Mějme posloupnost zadanou výčtem prvků: (-7, -2, 3, 8, 13, …). Určete rekurentní a explicitní zadání posloupnosti.

Řešení:

- několik prvních členů posloupnosti:

$a_1 = (-7)$

$a_2 = (-2)$

$a_3 = 3$

$a_4 = 8$

$a_5 = 15$

$\vdots$

Postřeh: další člen se získá přičtením 5 k předchozímu členu posloupnosti →

rekurentní zápis: $a_1 = (-7)$; $a_{n+1} = a_n + 5$; $n \in \mathbb{N}$

- hledám závislost mezi n a numerickou hodnotou n-tého členu posloupnosti, při znalosti, že je každý následující člen o 5 větší

- např. $a_1 = (-7) = 5 \cdot 1 - 12$

$a_2 = (-2) = 5 \cdot 2 - 12$

$\vdots$

→ explicitní zápis: $a_n = -12 + 5n$; $n \in \mathbb{N}$

Grafické (geometrické) znázornění posloupnosti

Posloupnosti, stejně jako klasické funkce, můžeme i graficky znázorňovat. Pro znázorňování posloupností se nejčastěji využívá souřadnicového systému v rovině. Dalším, avšak méně častým způsobem je znázorňování na reálné číselné ose. Oba tyto způsoby si nyní ukážeme, ale v dalších řešených příkladech v této práci budu užívat už jen souřadnicového rovinného systému.

Příklad 1 (Grafické znázornění posloupnosti)

Zadání: Vypište prvních 10 členů posloupnosti $a_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)_{n=1}^{\infty}$ a graficky je znázorněte.

Výpočet:

$$a_1 = \frac{1+1}{1+2} = \frac{2}{3} \qquad a_6 = \frac{6+1}{6+2} = \frac{7}{8}$$

$$a_2 = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4} \qquad a_7 = \frac{7+1}{7+2} = \frac{8}{9}$$

$$a_3 = \frac{3+1}{3+2} = \frac{4}{5} \qquad a_8 = \frac{8+1}{8+2} = \frac{9}{10}$$

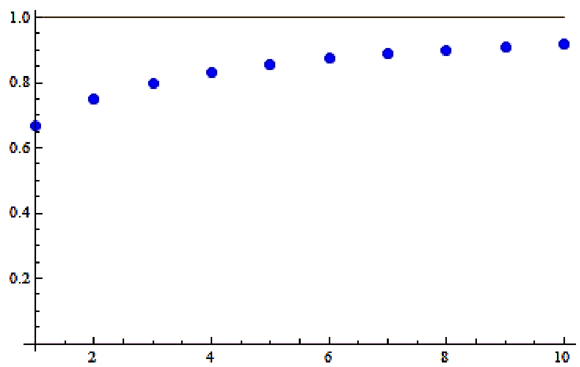
$$a_4 = \frac{4+1}{4+2} = \frac{5}{6} \qquad a_9 = \frac{9+1}{9+2} = \frac{10}{11}$$

$$a_5 = \frac{5+1}{5+2} = \frac{6}{7} \qquad a_{10} = \frac{10+1}{10+2} = \frac{11}{12}$$

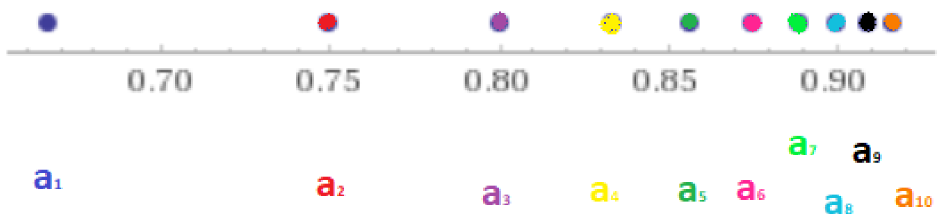
Graf v rovinné soustavě souřadnic vygeneruji pomocí matematického softwaru Mathematica8:

```
In[1]:= a[n_] = (n + 1)/(n + 2);

        Table[a[n], {n, 1, 10}]

Out[2]= {2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, 7/8, 8/9, 9/10, 10/11, 11/12}

In[3]:= Show[Plot[{y, 0, 1}, {x, 1, 10}],
         ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 10}],
          PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}]]
```

Out[3]=



A ještě zbývá zobrazení na reálné číselné ose:



Zde se samozřejmě jedná pouze o diskrétní body.

Vlastnosti posloupností

V definici reálné posloupnosti jsme si připomněli, že se vlastně jedná o zvláštní případ funkce mající za definiční obor množinu přirozených čísel $\mathbb{N}$. Takže stejně jako funkce mají i posloupnosti vlastnosti, které dokážeme určit.

1. OMEZENOST

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- shora omezená, jestliže ∃ číslo S takové, že platí: $a_n \leq S, \ \forall n \epsilon \mathbb{N}$,
- zdola omezená, jestliže ∃ číslo Z takové, že platí: $a_n \geq Z, \ \forall n \epsilon \mathbb{N}$,
- omezená, jestliže ∃ číslo A>0 tak, že platí: $|a_n| \leq A, \ \forall n \epsilon \mathbb{N}$,
  nebo–li je omezená shora a zdola zároveň.

Důležitým tvrzením při určování omezenosti je právě toto tvrzení: Jestliže (a_n) konverguje na množině $\mathbb{R}$, pak je (a_n) omezená.

Musíme si dát ovšem pozor na to, že se zde jedná o implikaci „⇒“, ne o ekvivalenci „⇔“, takže toto tvrzení nemusí platit obráceně.

<u>Příklad 2 (Určení omezenosti posloupnosti)</u>

Zadání: Určete, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ omezená, omezená shora či zdola, nebo není omezená. $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1 - \frac{1}{n}$

Jako první si ověřme konvergenci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1$$

Posloupnost je konvergentní, je tedy zaručeně omezená. Vypíšeme-li si prvních pár členů, hned poznáme, jakými hodnotami je omezená.

$$a_1 = 1 - 1 = 0$$

$$a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$a_4 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_5 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

$$\vdots$$

$$a_{20} = 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20}$$

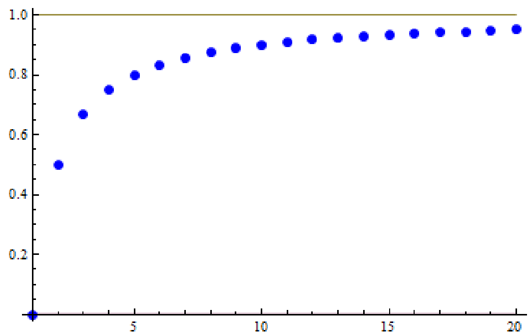
In[3]:= $a[n\_] = 1 - \frac{1}{n};$

```
Table[a[n], {n, 1, 20}]
```

Out[4]= $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{10}{11}, \frac{11}{12}, \frac{12}{13}, \frac{13}{14}, \frac{14}{15}, \frac{15}{16}, \frac{16}{17}, \frac{17}{18}, \frac{18}{19}, \frac{19}{20}\right\}$

In[7]:=
```
Show[Plot[{y, 0, 1}, {x, 1, 20}],
 ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 20}],
  PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}]]
```

Out[7]=



Tato posloupnost je tedy shora omezená hodnotou 1 a zdola omezená hodnotou $\frac{1}{2}$.

2. MONOTÓNNOST

Jestliže je posloupnost monotónní, tak to znamená, že je buď rostoucí, nebo klesající, nerostoucí či neklesající.

Posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- rostoucí, právě tehdy když $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ *platí, že*: $a_{n+1} > a_n$,
- klesající, právě tehdy když $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ *platí, že*: $a_{n+1} < a_n$,
- neklesající, právě tehdy když $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ *platí, že*: $a_{n+1} \geq a_n$,
- nerostoucí, právě tehdy když $\forall n \epsilon \mathbb{N}$ *platí, že*: $a_{n+1} \leq a_n$.

V odborných textech se můžeme setkat i s pojmem „ryze monotónní posloupnost“ což je posloupnost, která je ostře rostoucí nebo ostře klesající.

Příklad 3 (Určení monotónnosti posloupnosti)

Zadání: Vyšetřete, zda je posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \frac{(n+1)!}{2^n}$ monotónní.

Výpočet:

$$a_n \quad ?? \quad a_{n+1}$$

$$\frac{(n+1)!}{2^n} \quad ?? \quad \frac{(n+2)!}{2^{n+1}}$$

$$\frac{(n+1)\cdot n!}{2^n} \quad ?? \quad \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n!}{2\cdot 2^n}$$

$$1 \quad ?? \quad \frac{n+2}{2}$$

$$1 \quad ?? \quad \frac{n}{2}+1$$

$$0 \quad < \quad \frac{n}{2}$$

Výsledkem je, že ***n-tý*** člen posloupnosti je menší než ***n + prvý*** člen. Takže tato posloupnost je ostře rostoucí, je tedy i ryze monotónní.

Extrémy posloupností

Minimum a maximum:

Minimálním členem posloupnosti (a_n) je člen $\boldsymbol{a_m}$ ⇔ platí pro každé n ∈ ℕ:

$$a_n \geq a_m.$$

Maximálním členem posloupnosti (a_n) je člen $\boldsymbol{a_m}$ ⇔ platí pro každé n ∈ ℕ:

$$a_n \leq a_m.$$

V některé literatuře jsou tyto členy označovány jako nejmenší (minimální) a největší (maximální) členy posloupnosti.

Infimum a supremum:

Infimum posloupnosti (a_n) nazýváme infimum množiny $M = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$, je – li posloupnost (a_n) zdola neomezená; zapisujeme $\inf(a_n) = -\infty$.

Supremum posloupnosti (a_n) nazýváme supremum množiny $M = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$, je – li posloupnost (a_n) shora neomezená; zapisujeme $\sup(a_n) = \infty$.

Jinými slovy se všechny tyto 4 extrémy posloupnosti dají shrnout do této souhrnné definice:

Nechť M je neprázdná množina, potom: Minimum množiny M je nejmenší prvek množiny M, maximum množiny M je největší prvek množiny M, infimum množiny M je největší dolní mez množiny M, supremum množiny M je nejmenší horní mez množiny M, pokud existují.

Příklad 4 (Vyšetření extrémů posloupnosti)

Vyšetřete extrémy následujících posloupností:

$(a_n)_1^\infty = (-1)^n$

$(b_n)_1^\infty = \frac{1}{n}$

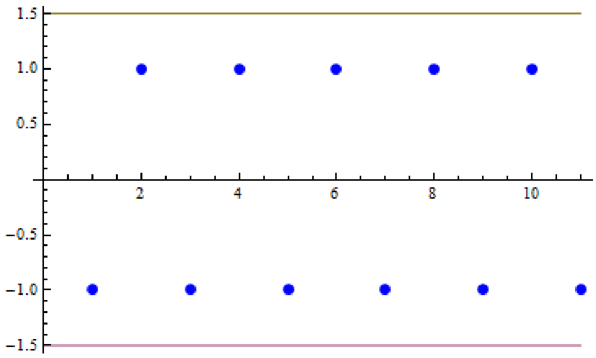
$(c_n)_1^\infty = (-2)^n$

	MIN	**MAX**	**INF**	**SUP**
$\boldsymbol{(a_n)_1^\infty}$	-1	1	-1	1
$\boldsymbol{(b_n)_1^\infty}$	$\nexists$	1	0	1
$\boldsymbol{(c_n)_1^\infty}$	$\nexists$	$\nexists$	$-\infty$	$+\infty$

Vše je hezky vidět i z grafů daných posloupností. Tyto grafy byly vytvořeny v softwaru Mathematica8.

1. posloupnost (a_n)

```
In[1]:= a[n_] = (-1)^n
        Table[a[n], {n, 1, 11}]
        Show[Plot[{y, -1.5, 1.5}, {x, 0, 11}],
         ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 11}],
          PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}]]

Out[1]= (-1)^n

Out[2]= {-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1}

Out[3]=
```



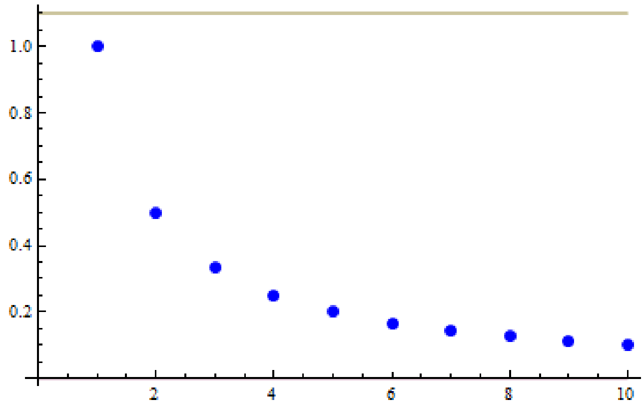
2. posloupnost (b_n)

```
In[4]:= b[n_] = (1/n)
        Table[b[n], {n, 1, 10}]
        Show[Plot[{y, 0, 1.1}, {x, 0, 10}],
         ListPlot[Table[b[n], {n, 1, 10}],
          PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}]]
```

Out[4]= $\frac{1}{n}$

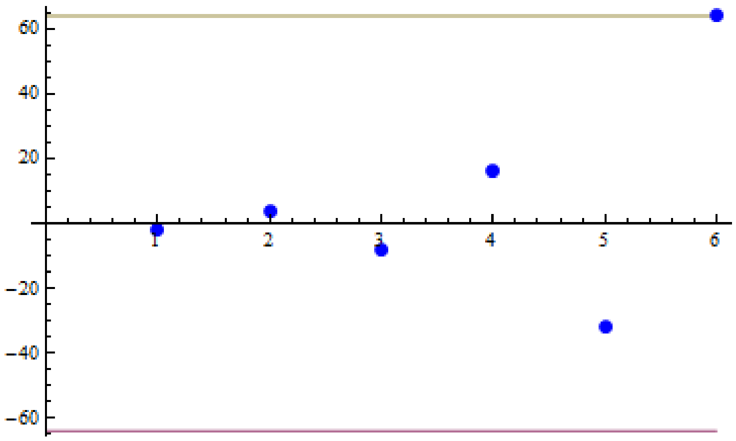
Out[5]= $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\right\}$

Out[6]=



3. posloupnost (c_n)

```
In[10]:= c[n_] = (-2)^n
         Table[c[n], {n, 1, 11}]
         Show[Plot[{y, -64, 64}, {x, 0, 6}],
          ListPlot[Table[c[n], {n, 1, 11}],
           PlotStyle → {Blue, PointSize[0.02]}]]

Out[10]= (-2)^n

Out[11]= {-2, 4, -8, 16, -32, 64, -128, 256, -512, 1024, -2048}

Out[12]=
```



Příklad 5 (Úloha k procvičení vyšetření vlastností posloupnosti)

Pro zadanou posloupnost $(a_n)_1^\infty = \frac{2n-5}{2n-11}$:

a) Určete prvních 10 členů

b) Zjistěte, zda je monotónní

c) Zjistěte, zda je omezená

d) Vykreslete graf posloupnosti

Řešení:

a) $a_1 = \frac{2\cdot1-5}{2\cdot1-11} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

$a_2 = \frac{2\cdot2-5}{2\cdot2-11} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$

$a_3 = \frac{2\cdot3-5}{2\cdot3-11} = \frac{1}{-5} = -\frac{1}{5}$

$a_4 = \frac{2\cdot4-5}{2\cdot4-11} = \frac{3}{-3} = -1$

$a_5 = \frac{2\cdot5-5}{2\cdot5-11} = \frac{5}{-1} = -5$

$a_6 = \frac{2\cdot6-5}{2\cdot6-11} = \frac{7}{1} = 7$

$a_7 = \frac{2\cdot7-5}{2\cdot7-11} = \frac{9}{3} = 3$

$a_8 = \frac{2\cdot8-5}{2\cdot8-11} = \frac{11}{5} = \frac{11}{5}$

$a_9 = \frac{2\cdot9-5}{2\cdot9-11} = \frac{13}{7} = \frac{13}{7}$

$a_{10} = \frac{2\cdot10-5}{2\cdot10-11} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$

b)

$a_n \quad ??? \quad a_{n+1}$

$\frac{2n-5}{2n-11} \quad ??? \quad \frac{2\cdot(n+1)-5}{2\cdot(n+1)-11}$

$\frac{2n-5}{2n-11} \quad ??? \quad \frac{2n-3}{2n-9}$

$4n^2-28n+45 \;???\; 4n^2-28n+33$

$45 \quad > \quad 33$

Výsledkem je, že ***n-tý*** člen posloupnosti je větší než ***n + prvý*** člen. Takže tato posloupnost je ostře klesající, je tedy i ryze monotónní.

c) Nejprve si ověřme konvergenci:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n-11}\right) = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2n\cdot\left(1-\frac{5}{2n}\right)}{2n\cdot\left(1-\frac{11}{2n}\right)}\right] = 1$$

Posloupnost je konvergentní, je tedy zaručeně omezená. Shora je omezená šestým členem, tedy číslem 7, zdola je omezená pátým členem, tedy číslem (-5).

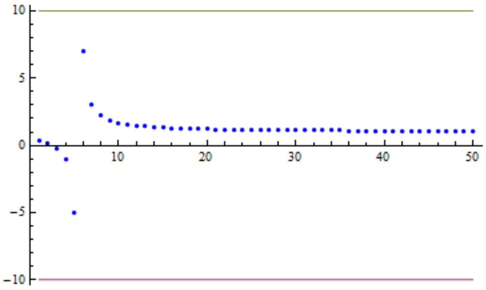
d) Graf vygenerovaný softwarem Mathematica8:

```
In[22]:= a[n_] = ((2 n - 5) / (2 n - 11))
         Table[a[n], {n, 1, 30}]
         Show[Plot[{y, -10, 10}, {x, 1, 50}],
          ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 50}],
           PlotStyle → {Blue, PointSize[0.01]}]]
```

Out[22]= $\dfrac{-5+2\,n}{-11+2\,n}$

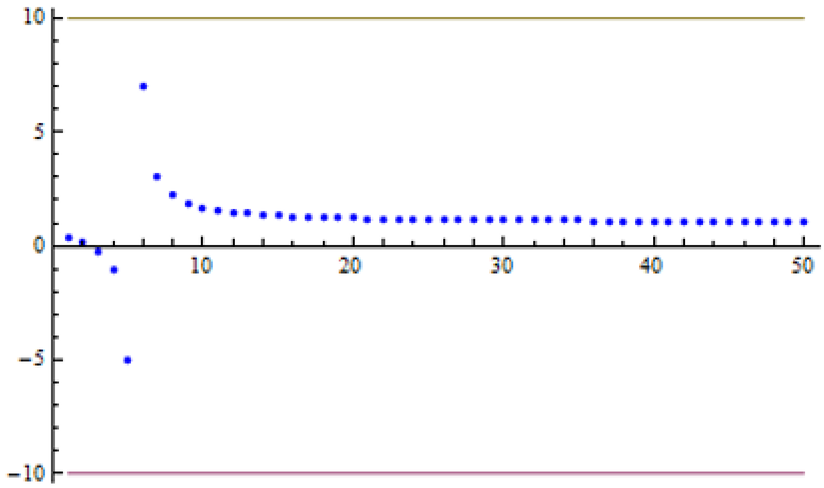
Out[23]= $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{5}, -1, -5, 7, 3, \frac{11}{5}, \frac{13}{7}, \frac{5}{3}, \frac{17}{11}, \frac{19}{13}, \frac{7}{5}, \frac{23}{17}, \frac{25}{19}, \frac{9}{7}, \frac{29}{23}, \frac{31}{25}, \frac{11}{9}, \frac{35}{29}, \frac{37}{31}, \frac{13}{11}, \frac{41}{35}, \frac{43}{37}, \frac{15}{13}, \frac{47}{41}, \frac{49}{43}, \frac{17}{15}, \frac{53}{47}, \frac{55}{49}\right\}$

Out[24]=



Zvětšení samotného grafu:

Out[24]=



Podposloupnost posloupnosti

Pro danou reálnou posloupnost (a_n): $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ a posloupnost přirozených čísel (k_n): $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ zavádíme **podposloupnost** posloupnosti (a_n) a značíme ji $\boldsymbol{(a_{k_n})}$.

Příklady:

$a_n = (-1)^n \longrightarrow (a_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots)$

$b_n = 2n \longrightarrow (b_n) = (2, 4, 6, 8, 10, \dots)$

$(a_{b_n}) = (1, 1, 1, \dots)$

$(b_{b_n}) = (4, 8, 12, 16, \dots)$

$(b_{b_{b_n}}) = (8, 16, 32, 64, \dots)$

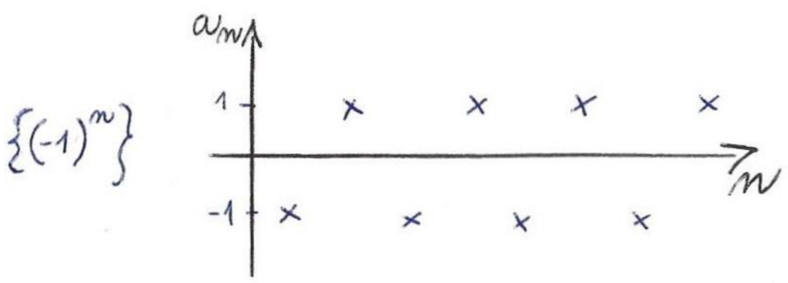
<u>**Věta: Monotónní podposloupnost**</u>

Z každé posloupnosti lze vybrat monotónní podposloupnost.

<u>**Věta: Bolzano – Weierstrassova**</u>

Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

<u>Ilustrace:</u>



Limity posloupnosti

„Limita" pochází z latinského „limes" což by v jazyce českém bylo přeloženo jako „mez".

Výše již byla limita posloupnosti vypočítaná u ověření, zda je posloupnost omezená.

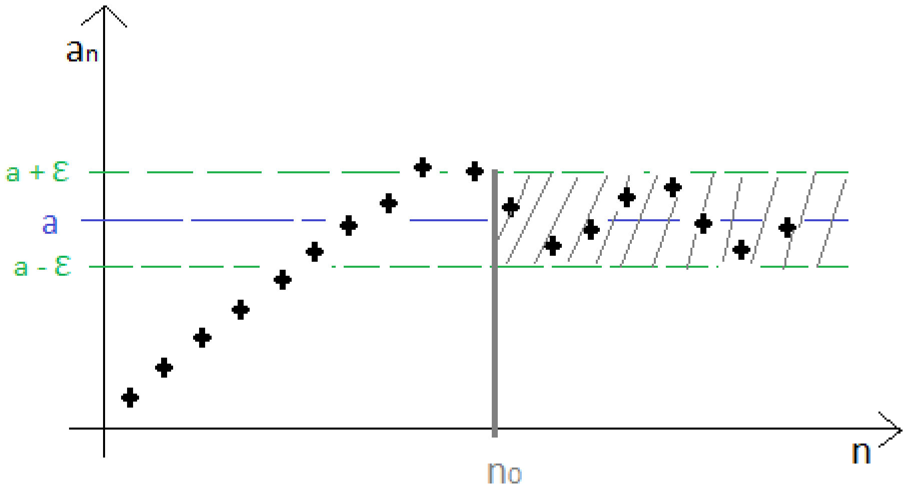
Definice (Limita posloupnosti)

a) Řekneme, že posloupnost (a_n) má vlastní limitu, existuje – li $a \in \mathbb{R}$ tak, že platí:

pro všechna $\mathcal{E} > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad pro\ všechna \quad n \in \mathbb{N}\colon\ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$

Poté říkáme, že posloupnost (a_n) je KONVERGENTNÍ a píšeme:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a}$$



b) Posloupnost je DIVERGENTNÍ, pokud není konvergentní (tedy nemá vlastní limitu).

- diverguje k $+\infty$, pokud pro všechna $K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ pro\ všechna\ n > n_0 \Rightarrow a_n > K$
- diverguje k $-\infty$, pokud $\forall K > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ pro\ všechna\ n > n_0 \Rightarrow a_n < -K$

Nevlastní limita .... $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty}$

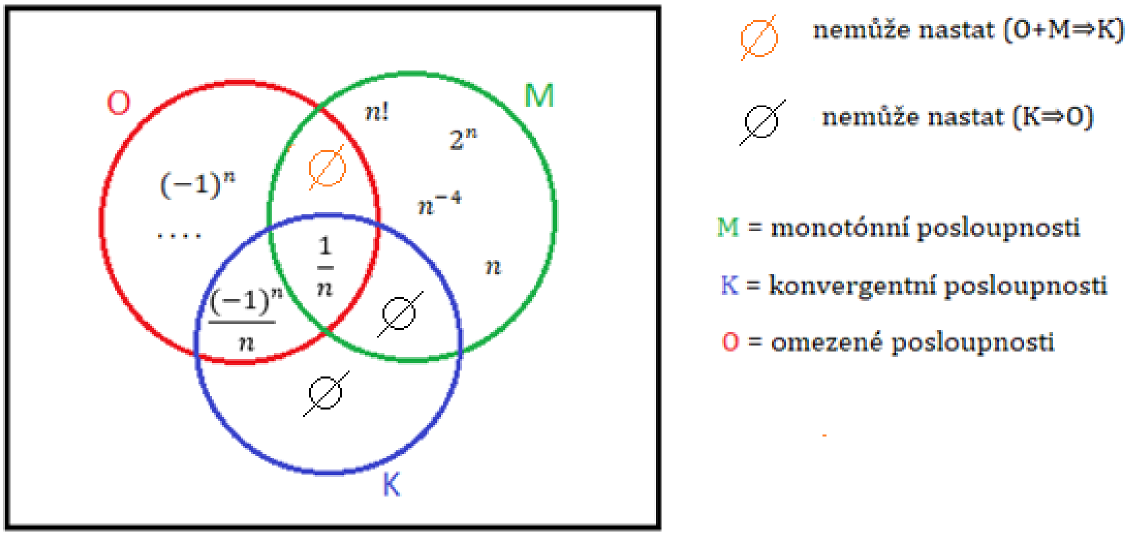
c) Takové posloupnosti, která nemá ani vlastní limitu ani nevlastní limitu říkáme posloupnost OSCILUJÍCÍ. Její limita tedy neexistuje.

Vlastnosti konvergentních posloupností

Pro každou konvergentní posloupnost platí, že:

1. každá posloupnost má nejvýše jednu limitu,
2. každá konvergentní posloupnost je omezená, $\boxed{K \Rightarrow O}$
3. každá omezená a zároveň monotónní posloupnost je konvergentní. $\boxed{O+M \Rightarrow K}$

Posloupnosti



<u>Důkazy:</u>

<u>1. ∃ nejvýše 1 limita</u>

SPOREM: ∃ alespoň 2 limity a, b

$$\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon \ \exists n_0 \ \ \forall n\colon \ n > n_0 \ \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists b \neq a, b \in \mathbb{R} \ \ \forall \varepsilon \ \exists n_1 \ \ \forall n\colon \ n > n_1 \ \Rightarrow |a_n - b| < \varepsilon$$

Stačí zvolit $\varepsilon = \frac{|b-a|}{2}$

$\exists n_0\colon \ n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{|b-a|}{2}$

a z toho plyne

$|a_n - b| > \frac{|b-a|}{2} = \varepsilon$ ↯ $\blacksquare$

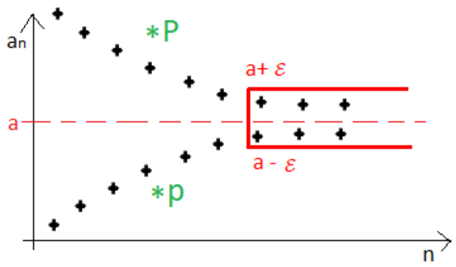
2. K ⇒ O

Z definice konvergence: $\exists a \;\; \forall \mathcal{E} \;\; \exists n_0 \;\; \forall n, \;\; n > n_0\colon \;\; |a_n - a| < \varepsilon$

zvolím pevné Ɛ: $\exists n_0\colon \; \forall n > n_0 \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

Množina $M = \{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}\, je\ konečná \;\Rightarrow\; \exists P = max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$

$$\exists p = min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$$



$m = min\{p, a - \varepsilon\}$

$M = max\{P, a + \varepsilon\}$

■

3. O + M ⇒ K

Z definice omezenosti: $\exists m, M \in \mathbb{R} \;\; m \leq a_n \leq M$ (existuje infimum a supremum posloupnosti a_n).

$\exists \sup a_n \;\rightarrow \boxed{\forall \varepsilon} \;\; \exists n^* \in \mathbb{N} \qquad a_{n^*} > \sup a_n - \varepsilon$

$$a_{n^*}\ je\ uvnitř\ \varepsilon - pásu$$

stačí zvolit $n_0 = n^* - 1$ ■

Algebra limit

Mějme dvě konvergující posloupnosti *(a_n)* a *(b_n)* takové, že jejich limity:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$$

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = b.$$

Potom ∃ limity $a_n + b_n;\ a_n \cdot b_n; \frac{a_n}{b_n}\ kde\ b_n \neq 0\ a\ b \neq 0$.

a) $\lim\limits_{n\to+\infty}(\boldsymbol{\alpha} \cdot a_n \pm \boldsymbol{\beta} \cdot b_n) = \boldsymbol{\alpha} \cdot a \pm \boldsymbol{\beta} \cdot b$ $\qquad kde\ \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Neurčité výrazy v limitách posloupností

Někdy při výpočtu limity posloupnosti se stane, že vyjde tzv. „neurčitý výraz". Za neurčité výrazy považujeme $\frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, \frac{cokoliv}{0}, 0^0, \infty^0, 1^\infty$. Tyto neurčité výrazy poskytují různé výsledky a způsob výpočtu těchto limit bude ukázán v řešených příkladech níže.

LIMITY POSLOUPNOSTI – ŘEŠENÉ PŘÍKLADY

▸ Limity bez neurčitých výrazů

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + 5\right) = 5$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(4 + \frac{8}{3n}\right) = 4$

Tyto nejjednodušší typy limit vypočítáme snadno. Za ***n*** se dosadí hodnota, která je dána pod symbolem pro limity „*lim*" a vyjde hodnota celé limity.

Limitám, ve kterých vyjde konkrétní číslo, říkáme limity **vlastní**. Naopak v případech, kdy vyjde $\pm\infty$, tak těmto limitám říkáme **nevlastní**.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1}{2}$

V tomto příkladě se n nevyskytuje jen jednou a limitu vypočteme tak, že najdeme nejvyšší stupeň ***n*** – v tomto konkrétním příkladě je to $\boldsymbol{n^1}$ a výsledek odpovídá jejich koeficientům.

‣ Některé způsoby výpočtů limit s neurčitými výrazy

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n^4+n^2}{n^4+n^2} = "\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4\left(4+\frac{1}{n^2}\right)}{n^4\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 4$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2\cdot(n-2)}{(1-3n)\cdot(2+n^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-4n^2}{2+n^2-6n-3n^3} = -\frac{2}{3}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+27}{n^4+15} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4\cdot\left(\frac{1}{n}+\frac{27}{n^4}\right)}{n^4\cdot\left(1+\frac{15}{n^4}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}+\frac{27}{n^4}\right)}{\left(1+\frac{15}{n^4}\right)} = 0$

V tomto případě se už nejvyšší stupně mocniny u ***n*** nerovnaly. Proto se musí vytknout stejný stupeň mocniny ***n*** před závorku a v dalším kroku vykrátit.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n+2)!}{(n+4)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)!+(n+2)\cdot(n+1)!}{(n+4)\cdot(n+3)\cdot(n+2)\cdot(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+(n+2)}{n^3+9n^2+26n+24} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+3}{n^3+9n^2+26n+24} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3\cdot\left(\frac{1}{n^2}+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\cdot\left(1+\frac{9}{n}+\frac{26}{n^2}+\frac{24}{n^3}\right)} = 0$

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n+2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt[6]{(n+2)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{1/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}{n^{1/2}\cdot\left(\sqrt[6]{\frac{n^2+4n+4}{n^3}}\right)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt[6]{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}} = "\frac{1}{0+}" = \infty$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+2\cdot5^n}{5^{n+1}-2^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n\cdot\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+2\right]}{5^n\cdot\left[5-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right]} = \frac{2}{5}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1} = \infty\text{-}\infty = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n^2+n)-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}} = "\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}\right)} = \frac{1}{2}$

V tomto příkladu se elegantně vynásobením „chytrou jedničkou“ přejde od neurčitého výrazu "$\infty - \infty$" k neurčitému výrazu "$\frac{\infty}{\infty}$", který se lépe počítá a byl počítán v příkladech výše.

- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{n+5} - \frac{n^2}{n+4}\right) = \text{“}\infty\text{-}\infty\text{“} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2(n+4)-n^2(n+5)}{(n+4)(n+5)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+4n^2-n^3-5n^2}{n^2+9n+20} =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-n^2}{n^2+9n+20} = -1$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n+1} = "\frac{\infty}{\infty}"$ → dostaneme-li neurčitý výraz $"\frac{\infty}{\infty}"$ můžeme použít tzv.

L' Hospitalovo pravidlo [čteme: Lopitalovo], které říká, že samostatně čitatel i jmenovatel zlomku se musí zderivovat. Toto pravidlo lze použít i opakovaně v jednom příkladu. Teď se vraťme k příkladu a dopočítáme jej:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n+2}{n+1} = "\frac{\infty}{\infty}" \overset{\text{L.P}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{5}{1} = 5$$

<u>Definice Eulerova čísla</u>

Eulerovo číslo je iracionální – má tedy nekonečný desetinný rozvoj bez periody. Dále je Eulerovo číslo i transcendentní – tzn., že nemůže být kořenem konečného mnohočlenu, který má celočíselné koeficienty.
Zadefinuji ho pomocí limity:

$$\boxed{e \coloneqq \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

limita *„e"* – pro ostře rostoucí posloupnost (a_n)

- pro omezenou posloupnost (a_n)

- pro konvergentní posloupnost (a_n)

e = 2,71828 18284…

$e \notin \mathbb{Q}$

- <u>Výpočty limit s „e":</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+3}{n+4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left[\left(1-\frac{1}{n+4}\right)^{n+4}\right]^{\frac{n}{n+4}} = e^{-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\cdot n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2\cdot\frac{1}{n}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+7}\right)^{n+6} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+5+2-2}{2n+7}\right)^{n+6} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{2}{2n+7}\right)^{n+6}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{2n+7}{2}}\right)^{(n+6)\cdot\frac{\frac{2n+7}{2}}{\frac{2n+7}{2}}} = e^{-1}$$

Věty o nerovnostech posloupností

a) $a_n \geq b_n$ pro skoro všechna $\boldsymbol{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n > \lim\limits_{n\to\infty} b_n \Rightarrow a_n > b_n$ pro skoro všechna $\boldsymbol{n}$

Poznámka: Pozor!

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \boxed{\geq} \lim\limits_{n\to\infty} b_n \not\Rightarrow a_n \boxed{\geq} b_n$

$a_n \boxed{>} b_n$ pro skoro všechna $\boldsymbol{n} \not\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n \boxed{>} \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

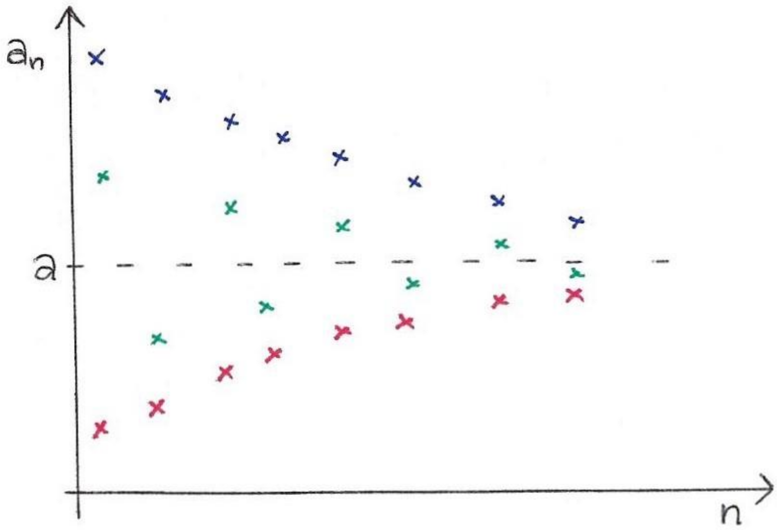
Věta o sevření posloupnosti

Tato věta je i známá jako věta „O dvou policajtech“.

Mějme posloupnosti (a_n), (b_n), (c_n) splňující:

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro skoro všechna $\boldsymbol{n}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$

   pak platí, že $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.



Příklady s řešením, které využívají větu o sevření:

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$

h – velmi malá hodnota

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \ldots \qquad n < (1+h)^n \quad s.v.n. \quad / \sqrt[n]{}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + h$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot \ldots \cdot n} \leq \boxed{\frac{1}{n}}$$

$c_n \to 0$

$a_n \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

„Vedlejší" vlastnosti limit posloupností

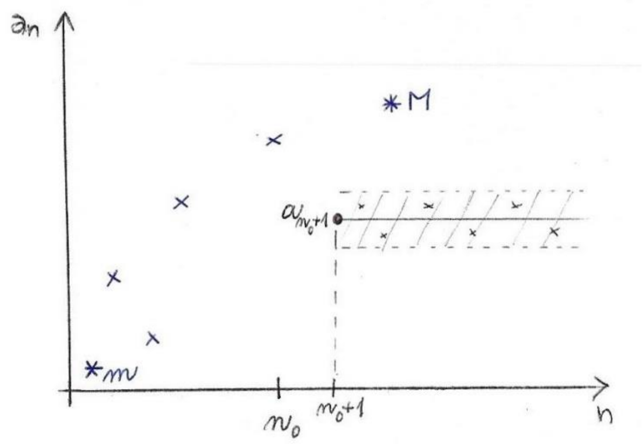
1. „Cauchyovskost" – alternativní definice limity

Posloupnost (a_n) je Cauchyovská, pokud

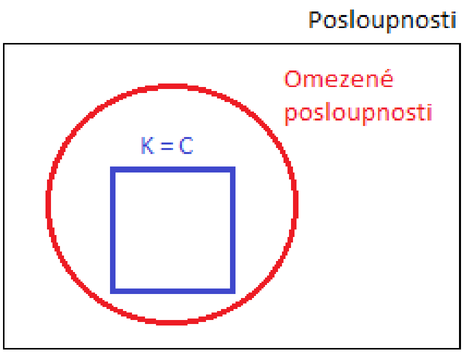
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_0 \quad m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| <$$ „2 prvky se liší libovolně málo"

Lemma:

- C ⇒ O [je-li posloupnost Cauchyovská, je i omezená]



- K ⇔ C [posloupnost je konvergentní právě tehdy, když je Cauchyovská]



2. Hromadný bod posloupnosti

(a_n) je reálná posloupnost. Číslo $c \in \mathbb{R}$ je hromadný bod (částečná limita) posloupnosti (a_n), existuje-li podposloupnost $a_{k_n} = c$.

Množinu všech částečných limit posloupnosti (a_n) označíme

$$M \coloneqq \{c \in \mathbb{R}\colon c\ je\ částečná\ limita\ (a_n)\}.$$

Příklady (hromadný bod posloupnosti):

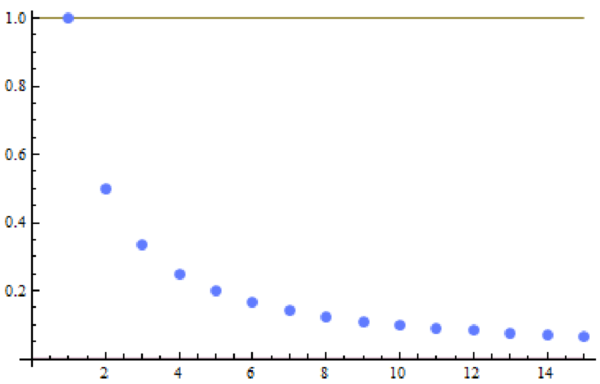
$$1.\ a_n = \frac{1}{n}$$

```
In[6]:= a[n_] = 1/n
        Table[a[n], {n, 1, 15}]
        Show[Plot[{y, 0, 1}, {x, 0, 15}],
         ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 15}]]]
```

Out[6]= $\frac{1}{n}$

Out[7]= $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \frac{1}{13}, \frac{1}{14}, \frac{1}{15}\right\}$

Out[8]=



M = {0}

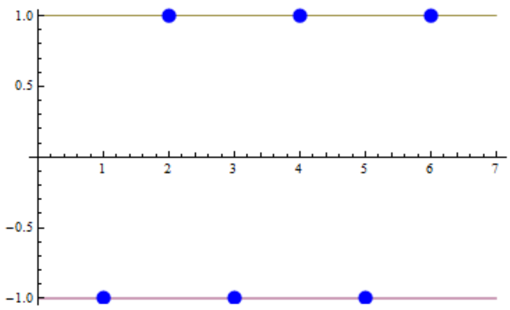
$$2.\ b_n = (-1)^n$$

```
In[4]:= b[n_] = (-1)^n
        Table[b[n], {n, 1, 6}]
        Show[Plot[{y, -1, 1}, {x, 0, 7}],
         ListPlot[Table[b[n], {n, 1, 6}],
          PlotStyle → {Blue, PointSize[0.03]}]]
```

Out[4]= $(-1)^n$

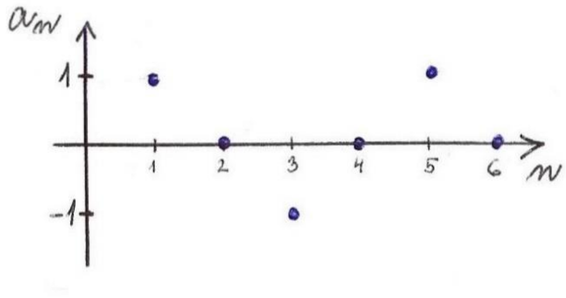
Out[5]= {-1, 1, -1, 1, -1, 1}

Out[6]=



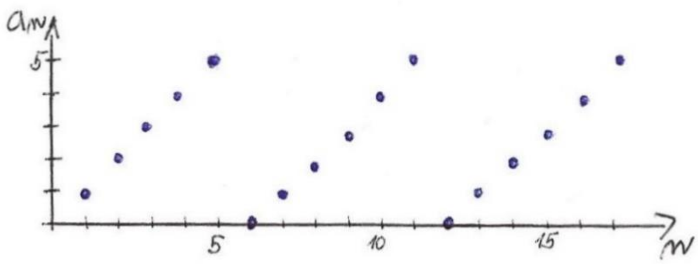
M = {-1; 1}

3. $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$



M = {-1; 0; 1}

4. $d_n = (n \bmod 6)$



M = {0; 1; 2; 3; 4; 5}

3. „Dolní“ a „horní“ limita

Množinu všech částečných limit posloupnosti (a_n) označíme

$$M \coloneqq \{c \in \mathbb{R}: c \text{ je částečná limita } (a_n)\}.$$

Dolní (spodní) limita posloupnosti (a_n) je číslo $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n \coloneqq \inf M = \liminf_{n\to\infty} a_n$ jinak známá i jako LIMES INFERIOR.

Horní limita posloupnosti (a_n) je číslo $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n \coloneqq \sup M = \limsup_{n\to\infty} a_n$ jinak známá i jako LIMES SUPERIOR.

Značení:

- DOLNÍ LIMITA: $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n$
- HORNÍ LIMITA: $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n$

Příklady:

$\varliminf\limits_{n\to\infty} (-1)^n = -1$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} (-1)^n = 1$

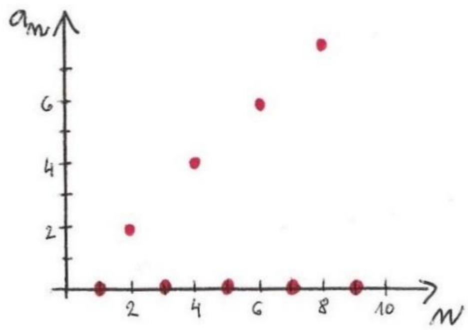
$\varliminf\limits_{n\to\infty} (-2)^n = -\infty$

$\varlimsup\limits_{n\to\infty} (-2)^n = +\infty$

Příklad: Určete předpis (+graf) posloupnosti, která má $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

$a_n = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{ když } n \text{ je liché} \\ \boldsymbol{n}, \text{ když } n \text{ je sudé} \end{cases}$

M = {0; + ∞}



Věta: O limitě podposloupnosti vybrané z dané posloupnosti

Má-li posloupnost (a_n) limitu, pak každá její podposloupnost (a_{k_n}) má tutéž limitu.

Kapitola druhá: Nejběžnější posloupnosti

Aritmetická posloupnost

Definice aritmetické posloupnosti

Aritmetickou posloupností rozumíme takovou posloupnost, v níž je rozdíl dvou (bezprostředně) po sobě jdoucích členů konstantní. Tento rozdíl $a_{n+1} - a_n = d$, kde d je tzv. DIFERENCE, $d \in \mathbb{R}$.

DŮLEŽITÉ VZORCE PRO VÝPOČTY V ARITMETICKÉ POSLOUPNOSTI

Rekurentní vzorec aritmetické posloupnosti:

$\boxed{a_{n+1} - a_n = d}$ neboli $\boxed{a_{n+1} = a_n + d}$ kde $n \in \mathbb{N}$.

Vzorec pro ***n*-tý člen** aritmetické posloupnosti:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1) \cdot d}$$

Vzorec pro výpočet **součtu prvních *n* členů**:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\boxed{s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}}$$

Vzorec pro **rozdíl dvou členů** aritmetické posloupnosti:

$$\boxed{a_r - a_s = (r - s) \cdot d}$$

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY NA ARITMETICKOU POSLOUPNOST

1. Je dána posloupnost {2, 5, 8, 11, 14, 17, ...}. Určete, zda se jedná o aritmetickou posloupnost a pokud ano, vypočítejte a_{20}.

<u>Řešení:</u>

Jedná se o aritmetickou posloupnost, protože $\boldsymbol{d = 3}$.

$\mathbf{a_{20}} = a_1 + 19 \cdot d = 2 + 19 \cdot 3 = 2 + 57 = \mathbf{59}$

2. Rozhodněte, zda se jedná o aritmetickou posloupnost, která je dána rekurentně:

$a_1 = 7$

$a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 3n - 1$

Řešení:

Abychom mohli rozhodnout, zda se jedná o aritmetickou posloupnost, dopočítáme několik dalších členů a zjistíme, jestli má posloupnost diferenci.

$a_2 = 2 \cdot a_1 - 3 \cdot 1 - 1 = 2 \cdot 7 - 3 - 1 = 10$

$a_3 = 2 \cdot a_2 - 3 \cdot 2 - 1 = 2 \cdot 10 - 6 - 1 = 13$

$a_4 = 2 \cdot a_3 - 3 \cdot 3 - 1 = 2 \cdot 13 - 9 - 1 = 16$

$a_5 = 2 \cdot a_4 - 3 \cdot 4 - 1 = 2 \cdot 16 - 12 - 1 = 19$

$\boxed{\mathbf{d = 3}}$

⋮

Posloupnost je tedy aritmetická.

Důkaz:

$a_{n+1} = 2a_n - 3n - 1$

$a_{n+1} = a_n + d = a_n + 3$

$2a_n - 3n - 1 = a_n + 3$

$4 = a_n - 3n$

$\underline{\underline{a_n = 4 + 3n}}$

- dále platí, že: $a_n = d \cdot (n-1) + a_1 = 3 \cdot (n-1) + 7$

$3 \cdot (n-1) + 7 = 4 + 3n$

$3n - 3 = 4 + 3n - 7$

$3n - 3 = 3n - 3 \quad \rightarrow \quad$ to musí platit pro všechna *n*. ■

3. Je dána aritmetická posloupnost: $a_4 = 11$

$a_5 = 14$

$a_1 = ?$

$d = ?$

<u>Řešení:</u>

$d = a_5 - a_4 = 14 - 11 = 3$

$a_1 = a_4 - 3 \cdot 3 = 11 - 9 = 2$

4. Je dána aritmetická posloupnost: $a_{20} = 35$

$a_{30} = 55$

$a_{25} = ?$

<u>Řešení:</u>

$a_{30} = a_{20} + 10 \cdot d \rightarrow 10 \cdot d = a_{30} - a_{20} = 55 - 35 = 20 \rightarrow \mathbf{d} = 20 : 10 \mathbf{= 2}$

$\mathbf{a_{25}} = a_{20} + 5 \cdot d = 35 + 5 \cdot 2 = 35 + 10 \mathbf{= 45}$

5. Je dána aritmetická posloupnost: $a_1 = 450$

$d = (-24)$

$a_n = 210$

$s_n = ?$

<u>Řešení:</u>

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$210 = 450 + (n - 1) \cdot (-24)$

$210 - 450 = (-24n) + 24$

$210 - 450 - 24 = (-24n)$

$-264 = (-24n)$

$n = 11$

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{11} = \frac{11 \ \cdot (450 + 210)}{2} = \frac{11 \cdot 660}{2} = 11 \cdot 330 = 3\,630$$

6. Je dána aritmetická posloupnost: $a_1 = 2$

$d = 3$

$s_n = 77$

$n = ?$

$a_n = ?$

Řešení:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

Do vzorce pro prvních *n*-členů potřebuji a_n, které ze zadání neznáme:

$\mathbf{a_n} = a_1 + (n - 1) \cdot d = 2 + (n - 1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 \mathbf{= 3n - 1}$

Teď už můžeme člen a_n dosadit do vzorce pro součet prvních *n*-členů, zatím vyjádřený pomocí neznámého *n*.

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$77 = n \cdot \frac{2 + 3n - 1}{2}$$

$$154 = n \cdot (3n + 1)$$

$$154 = 3n^2 + n$$

$$3n^2 + n - 154 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-154) = 1 + 1\,848 = 1\,849$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{1\,849} = 43$$

$$n_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm 43}{6}$$

$$n_1 = \frac{42}{6} = 7$$

$$n_2 = \frac{-44}{6} = -\frac{22}{3}$$

Tzn., že n = 7. Dopočítejme člen a_n:

$a_n = 3n - 1$

$a_n = 3 \cdot 7 - 1$

$a_n = 20$

7. Je dána aritmetická posloupnost: $a_1 = -\frac{7}{3}$

$d = \frac{2}{3}$

$n = 10$

$a_n = ?$

$s_n = ?$

Řešení:

$a_{10} = a_1 + (n - 1) \cdot d = \left(-\frac{7}{3}\right) + (10 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \left(-\frac{7}{3}\right) + 9 \cdot \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{10} = \frac{-\frac{7}{3} + \frac{11}{3}}{2} \cdot 10 = \frac{\frac{4}{3}}{2} \cdot 10 = \frac{4}{3} \cdot 5 = \frac{20}{3}$$

8. Je dána aritmetická posloupnost: $a_{50} = 6$

$d = 0{,}04$

$n = 100$

$a_1 = ?$

$a_{100} = ?$

$s_n = ?$

<u>Řešení:</u>

$\mathbf{a_1} = a_{50} - 49 \cdot d = 6 - 49 \cdot 0{,}04 = 6 - 1{,}96 \mathbf{= 4{,}04}$

$\mathbf{a_{100}} = a_1 + 99 \cdot d = 4{,}04 + 99 \cdot 0{,}04 = 4{,}04 + 3{,}96 \mathbf{= 8}$

$$\boldsymbol{s_n} = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = \frac{100 \cdot (4{,}04 + 8)}{2} = \frac{100 \cdot 12{,}04}{2} = \frac{1\,204}{2} = \mathbf{602}$$

9. Určete aritmetickou posloupnost pomocí prvního členu *a1* a diference *d*, když víte, že součet druhého a šestého členu je roven 18 a součet čtvrtého a devátého členu je roven 38.

<u>Řešení:</u>

$a_2 + a_6 = 18$

$a_4 + a_9 = 38$

$(a_1 + d) + (a_1 + 5 \cdot d) = 18$

$(a_1 + 3 \cdot d) + (a_1 + 8 \cdot d) = 38$

$2 \cdot a_1 + 6 \cdot d = 18 \qquad / \cdot (-1)$

$+$

$2 \cdot a_1 + 11 \cdot d = 38$

$5 \cdot d = 20$

$\underline{\underline{d = 4}}$

- dosaďme např. do první rovnice:

$2 \cdot a_1 + 6 \cdot d = 18$

$2 \cdot a_1 = 18 - 24$

$\underline{\underline{a_1 = (-3)}}$

Zkouška rovnice:

L1 = (-3) + 4 + (-3) + 5 · 4 = (-2) + 20 = 18 = P1

L2 = (-3) + 3 · 4 + (-3) + 8 · 4 = (-3) + 12 – 3 + 32 = 38 = P2

Tato aritmetická posloupnost je tedy určena takto: a_1 = (-3), d = 4.

Slovní úlohy řešené pomocí aritmetické posloupnosti:

10. Dělník za svou směnu vyrobí 25 součástek. Kdyby zvyšoval svůj výkon denně o 3 součástky, kolik by vyrobil celkem součástek za 18 dní? A kolik součástek by vyrobil osmnáctý den?

Řešení:

Zápis:

a_1 = 25

a_2 = 28

d = 3

Výpočet:

a_{18} = a_1 + 17 · d = 25 + 17 · 3 = 25 + 51 = 76

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = s_{18} = \frac{18 \cdot (25 + 76)}{2} = \frac{18 \cdot 101}{2} = 9 \cdot 101 = 909$$

Slovní odpověď: Osmnáctý den by dělník vyrobil 76 součástek. Celkem by za 18 dní vyrobil 909 součástek.

11. Roční spoření na letní či zimní dovolenou: Kdybychom první měsíc dali stranou 300 Kč, druhý měsíc 600 Kč, třetí měsíc 900 Kč a tak dále, zvládli bychom našetřit na dovolenou, aniž bychom dávali stranou velký obnos peněz?

Řešení:

a_1 = 300

d = 300

n = 12 (spoříme celý rok po měsíci)

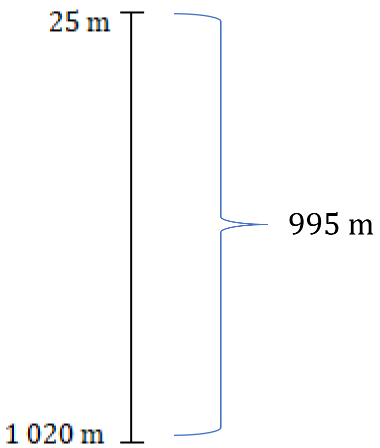
$a_{12} = a_1 + 11 \cdot d = 300 + 11 \cdot 300 = 300 + 3\,300 = 3\,600$

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = s_{12} = \frac{12 \cdot (300 + 3\,600)}{2} = \frac{12 \cdot 3\,900}{2} = 6 \cdot 3\,900 = 23\,400$$

Což znamená, že při spoření tímto způsobem by se za 12 měsíců našetřilo 23 400 Kč. Za to už lze dovolenou sehnat. Poslední částka, která se odloží stranou je za 12. měsíc 3 600 Kč.

12. Jaká teplota je v dole 1 020 m pod povrchem, víme-li že teplota přibývá o 1 °C na 33 m hloubky. Dále víme, že v hloubce 25 m pod povrchem je 9 °C.

Řešení:



$a_1 = 0$

$d = 33$

$a_n = 995$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$995 = 0 + (n - 1) \cdot 33$

$995 = 33n - 33$

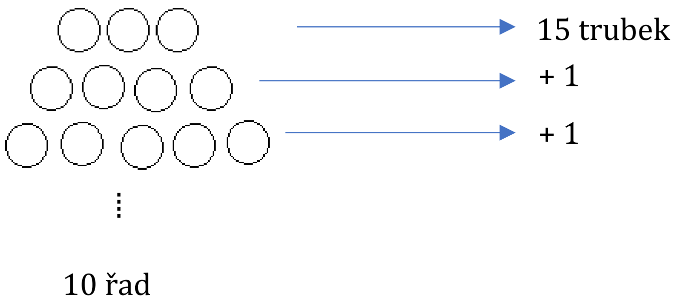
$1\,208 = 33n$

$n = 31,\overline{15}$

V hloubce 1 020 m pod povrchem je v dole teplota $31,\overline{15}$ °C.

13. Železné trubky jsou srovnány v deseti řadách tak, že vrchní řada má 15 trubek a každá další řada má o 1 trubku více. Kolik je celkem těchto trubek?

Řešení:



$a_1 = 15$

$d = 1$

$n = 10$

$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

$a_{10} = 15 + (10 - 1) \cdot 1 = 15 + 9 = 24$

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$s_{10} = \frac{10 \cdot (15 + 24)}{2} = 5 \cdot 39 = 195$$

Trubek je celkem 195.

14. Kolik členů aritmetické posloupnosti vložíme mezi čísla 8 a 20 tak, aby jejich součet byl 196?

Řešení:

$a_1 = 8$

$a_n = 20$

$s_n = 196$

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

$$196 = \frac{n \cdot (8 + 20)}{2}$$

$$196 = \frac{n \cdot 28}{2}$$

$$196 = 14n$$

$n = 14$ ⇾ vloženo 12 čísel, protože 2 členy nám byly známy

Mezi čísla 8 a 20 vložíme 12 členů aritmetické posloupnosti.

POHÁDKA O MALÉM GAUSSOVI

O kom že je řeč? O Friedrichu Gaussovi narozeném rok 1 777 v Brunšviku na území dnešního Německa. Říká se, že to byl jeden z nejgeniálnějších matematiků od dob Archiméda a traduje se o něm nespočet historek, jejichž pravdivost asi zůstane zahalena. Prý uměl počítat a číst ještě před nástupem do školy. Číslům věnoval ale vždy větší pozornost než-li písmenům.

Do školní docházky nastoupil v sedmi letech a mezi svými 100 spolužáky nijak nezářil. To se ale mělo změnit v jeho devíti letech. Ta nejznámější historka se totiž stala, právě když Gaussovi bylo devět let.

Gaussův učitel – J. G. Büttner si chtěl při jedné hodině odpočinout, a tak zadal žákům nelehký úkol: „Sečtěte čísla od 1 do 100“, řekl. Žáci měli poté výsledek napsaný na břidlicové tabulce odevzdat ke kontrole učiteli.

Za okamžik malý Gauss odevzdal – se slavným výrokem „tady je“, ale učitel tomu nijak přespříliš pozornosti nevěnoval. Při kontrole výsledků, když došel ke spodní tabulce, si vybavil bledého hocha, který měl výsledek záhy. A výsledek? Hoch tam měl výsledek 5 050. Učitel užasl a hned se nevýrazného chlapce zeptal, jak je možné, že odevzdal správný výsledek za tak krátký čas.

Gauss vysvětloval: „Výsledek se dá říci téměř hned zpaměti, není potřeba postupného součtu všech čísel. Stačí si všimnout, že součet 1 + 100 je 101 a součet 2 + 99 je také 101, dále součet 3 + 98 je opět 101 a tak dále. Poté je nutné si uvědomit, kolik takových dvojit je právě v tomto součtu – no a těch je 50. Teď už jen stačí vynásobit 50 a 101 a dostaneme výsledek 5 050.“

Když to učitel slyšel obstaral Gaussovi tehdy nedostupnou učebnici matematiky a prohlásil, že už Gausse nemá co naučit.

A proč celý tento příběh? Výpočet, kterým součet Gauss provedl by nám měl být povědomý. Jedná se vlastně o součet aritmetické posloupnosti. Jako zkoušku si klidně můžeme dosadit do vzorečku:

$$s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2} = s_{100} = \frac{100 \cdot (1 + 100)}{2} = \frac{100 \cdot 101}{2} = 50 \cdot 101 = 5\,050.$$

Geometrická posloupnost

Definice geometrické posloupnosti

Geometrická posloupnost je taková posloupnost, v níž je podíl dvou (bezprostředně) po sobě jdoucích členů konstantní. Tento podíl značíme jako $\boldsymbol{q}$, $q \in \mathbb{R}$, říkáme mu KVOCIENT.

DŮLEŽITÉ VZORCE PRO VÝPOČTY V GEOMETRICKÉ POSLOUPNOSTI

Rekurentní vzorec geometrické posloupnosti:

$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$ neboli $\boxed{q = \frac{a_{n+1}}{a_n}}$ kde $n \in \mathbb{N}$

Vzorec pro ***n*-tý člen** geometrické posloupnosti:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Vzorec pro výpočet **součtu prvních *n* členů:**

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$\boxed{s_n = n \cdot a_1 \qquad \boxed{pro\ q = 1}}$$

$$\boxed{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \qquad \boxed{pro\ q \neq 1}}$$

Pro **každé dva členy** geometrické posloupnosti platí:

$$\boxed{a_r = a_s \cdot q^{r-s}}$$

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY NA GEOMETRICKOU POSLOUPNOST

1. Geometrická posloupnost je dána: $a_1 = 2$, $q = \frac{1}{3}$. Vypočítejte prvních 5 členů této posloupnosti využitím rekurentního vzorce.

Řešení:

$a_2 = a_1 \cdot q = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$a_3 = a_2 \cdot q = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$

$a_4 = a_3 \cdot q = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}$

$a_5 = a_4 \cdot q = \frac{2}{27} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{81}$

2. Geometrická posloupnost je dána: $a_1 = 8$, $q = \frac{1}{2}$. Vypočítejte prvních 5 členů této posloupnosti využitím vzorce pro *n*-tý člen.

Řešení:

$a_2 = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4$

$a_3 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2$

$a_4 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 1$

$a_5 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2}$

3. Je dána geometrická posloupnost: $a_3 = 16$

$a_5 = 1$

$a_1 = ?$

$q = ?$

Řešení:

$a_5 = a_3 \cdot q^2$

$q^2 = \frac{a_5}{a_3} = \frac{1}{16}$

$q = \pm\frac{1}{4}$

① pro $q = +\frac{1}{4}$: $a_1 = a_3 : q^2 = 16 : \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 16 \cdot 16 = 256$

② pro $q = -\frac{1}{4}$: $a_1 = a_3 : q^2 = 16 : \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = 16 \cdot 16 = 256$

4. Rozhodněte, zda je daná posloupnost geometrická.

4.1: $\{2^n\}$

$a_1 = 2^1 = 2$

$a_2 = 2^2 = 4$

$a_3 = 2^3 = 8$

$a_4 = 2^4 = 16$

$\boxed{\mathbf{q = 2}}$

Jedná se o geometrickou posloupnost.

4.2: $\left\{\frac{3^{n-1}}{2^{n-2}}\right\}$

$a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = \frac{9}{2}$; $a_4 = \frac{27}{4}$

$\boxed{q = \frac{3}{2}}$

Jedná se o geometrickou posloupnost.

5. Znázorněte graficky prvních 5 členů geometrické posloupnosti jejíž první 2 členy jsou 1 a 2.

Řešení:

$a_1 = 1$

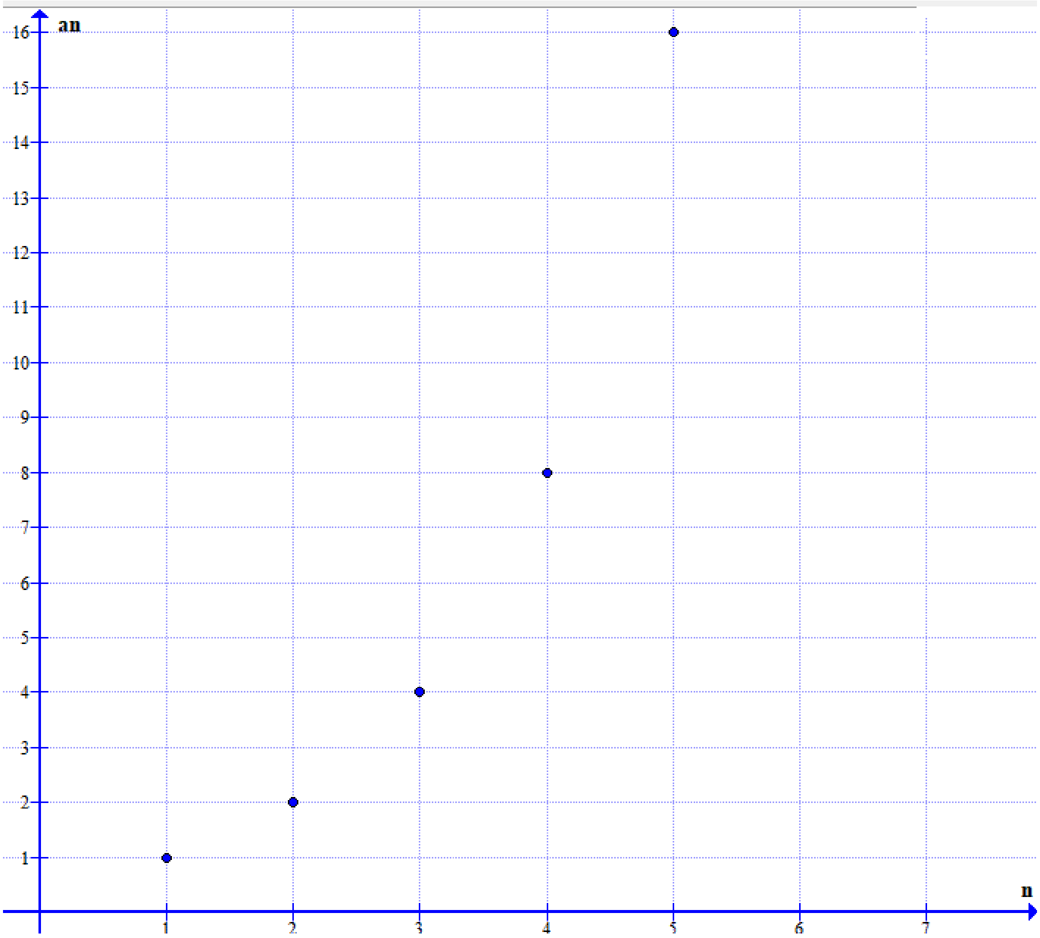
$a_2 = 2$

$$\boxed{q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{1} = 2}$$

$a_3 = 2 \cdot 2 = 4$

$a_4 = 4 \cdot 2 = 8$

$a_5 = 8 \cdot 2 = 16$



Graf posloupnosti byl vytvořen v programu „Graph“.

6. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1 = 4$, $q = 3$, $a_8 = ?$, $s_8 = ?$.

Řešení:

$a_8 = a_1 \cdot q^7 = 4 \cdot 3^7 = 4 \cdot 2\,187 = 8\,748$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_8 = a_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 4 \cdot \frac{3^8 - 1}{3 - 1} = 4 \cdot \frac{6\,561 - 1}{2} = 2 \cdot 6\,560 = 13\,120$$

7. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_1 = 2$, $a_6 = 486$, $q = ?$, $s_6 = ?$.

Řešení:

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$486 = 2 \cdot q^5$

$q^5 = 243$

$q = \sqrt[5]{243}$

$\underline{\underline{q = 3}}$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

$$s_6 = a_1 \cdot \frac{q^6 - 1}{q - 1} = 2 \cdot \frac{3^6 - 1}{3 - 1} = 2 \cdot \frac{729 - 1}{2} = 728$$

8. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_4 = 54$, $a_7 = 1\,458$, $a_{10} = ?$, $s_{12} = ?$.

Řešení:

$a_7 = a_4 \cdot q^3$

$1\,458 = 54 \cdot q^3$

$q^3 = 27$

$\underline{\underline{q = 3}}$

$a_1 = a_4 : q^3$

$a_1 = 54 : 27$

$\underline{\underline{a_1 = 2}}$

$a_{10} = a_4 \cdot q^6$

$a_{10} = 54 \cdot 3^6$

$a_{10} = 54 \cdot 729$

$\underline{\underline{a_{10} = 39\,366}}$

$s_{12} = a_1 \cdot \frac{q^{12}-1}{q-1}$

$s_{12} = 2 \cdot \frac{3^{12}-1}{3-1} = 2 \cdot \frac{531\,441-1}{2} = \underline{\underline{531\,440}}$

9. V geometrické posloupnosti je dáno: $a_3 = 18$, $a_6 = 486$, $a_n = ?$, $n = ?$.

Řešení:

$a_6 = a_3 \cdot q^3$

$486 = 18 \cdot q^3$

$q^3 = 27$

$\underline{\underline{q = 3}}$

$a_1 = a_3 : q^2$

$a_1 = 18 : 9$

$\underline{\underline{a_1 = 2}}$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$1\,458 = 2 \cdot 3^{n-1}$

$729 = 3^{n-1}$

$3^6 = 3^{n-1}$

$6 = n - 1$

$\underline{\underline{n = 7}}$

10. Mezi kořeny rovnice $2x^2 - 33x = (-16)$ vložte 4 čísla tak, aby tvořila rostoucí geometrickou posloupnost.

<u>Řešení:</u>

$2x^2 - 33x + 16 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-33)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 16 = 1\,089 - 128 = 961$

$\sqrt{D} = \sqrt{961} = 31$

$x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \dfrac{33 \pm 31}{4}$

$x_1 = \dfrac{64}{4} = 16$

$x_2 = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

protože má být posloupnost ROSTOUCÍ, tak se výsledky musí vzít v opačném pořadí

⇩

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_6 = 16$

$a_6 = a_1 \cdot q^5$

$16 = 0{,}5 \cdot q^5$

$32 = q^5$

$\underline{\underline{q = 2}}$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = 4$

$a_5 = 8$

11. Určete první člen a kvocient geometrické posloupnosti, pro kterou platí: $a_1 - a_2 + a_3 = 9$ a $a_4 - a_5 + a_6 = 72$.

<u>Řešení:</u>

$a_1 - a_2 + a_3 = 9$

$a_4 - a_5 + a_6 = 72$

$a_1 - (a_1 \cdot q) + a_1 \cdot q^2 = 9$

$a_1 \cdot q^3 - a_1 \cdot q^4 + a_1 \cdot q^5 = 72$

$a_1 \cdot (1 - q + q^2) = 9$

$a_1 \cdot (1 - q + q^2) \cdot q^3 = 72$

$9 \cdot q^3 = 72$

$q^3 = 72 : 9$

$q^3 = 8$

$\underline{\underline{q = 2}}$

$a_1 \cdot (1 - q + q^2) = 9$

$a_1 \cdot (1 - 2 + 4) = 9$

$a_1 \cdot 3 = 9$

$a_1 = 9 : 3$

$\underline{\underline{a_1 = 3}}$

12. Geometrická posloupnost má součet všech členů roven 16 400. Poslední člen této posloupnosti je roven 10 935. Určete hodnotu prvního členu a celkový počet členů posloupnosti, jestliže q = 3.

Řešení:

$s_n = 16\,400$, $a_n = 10\,935$, $q = 3$, $a_1 = ?$, $n = ?$

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$10\,935 = a_1 \cdot 3^{n-1}$

$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

$16\,400 = a_1 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} = \frac{1-3^n}{-2}$

$-32\,800 = a_1 \cdot (1-3^n)$

2 rovnice o 2 neznámých:

$10\,935 = a_1 \cdot 3^{n-1}$

$-32\,800 = a_1 - a_1 \cdot 3^n$

$10\,935 = a_1 \cdot 3^{n-1}$

$-32\,800 = a_1 - a_1 \cdot 3 \cdot 3^{n-1}$

$-32\,800 = a_1 - 3 \cdot 10\,935$

$-32\,800 = a_1 - 32\,805$

$a_1 = 5$

$10\,935 = a_1 \cdot 3^{n-1}$

$10\,935 = 5 \cdot 3^{n-1}$

$2\,187 = 3^{n-1}$

$3^7 = 3^{n-1}$

$7 = n - 1$

$n = 8$

Slovní úlohy řešené pomocí geometrické posloupnosti:

13. Vyroste-li z 1 zrna za 1 rok 16 zrn, kolik zrn potom vyroste z 1 zrna za 20 let?

Řešení:

Zápis:

$a_1 = 1$

$q = 16$

$a_{21} = ?$¨

Výpočet:

$a_{21} = a_1 \cdot q^{20}$

$a_{21} = 1 \cdot 16^{20}$

$a_{21} = 16^{20}$

Slovní odpověď:

Za 20 let by z takového zrna vyrostlo 16^{20} zrn.

14. Bakterie se množí dělením tak, že z 1 bakterie za 1 hodinu vzniknou 2 bakterie. Kolik bakterií vznikne za 24 hodin z jedné bakterie?

Řešení:

$a_1 = 1$

$q = 2$

$a_{25} = ?$

$a_{25} = a_1 \cdot q^{24}$

$a_{25} = 1 \cdot 2^{24}$

$a_{25} = 2^{24}$

$a_{25} = 16\,777\,216$

Jedna taková bakterie se za 24 hodin rozmnoží na 16 777 216 bakterií.

15. Legend o vynálezu šachu koluje nespočet. Nicméně jedna z nejzajímavějších legend o vynálezu šachu praví, že šachy měl vynaleznout indický mudrc pro indického vládce a jako odměnu si řekl o zrna obilí. Tato zrna obilí měla splňovat podmínku, že na prvním šachovém poli je 1 zrno, na druhém šachovém poli jsou 2 zrna, na třetím šachovém poli jsou 4 zrna… atd. Vždy dvojnásobek zrn předchozího pole. Víme, že šachovnice má 64 polí. Jenže v této legendě nakonec vládce zjistil, že by produkce obilí jeho země nestačila. Kolik vagónů po 10 tunách měl mudrc dostat od vládce, připadá-li na 1 kg 20 000 zrn obilí?

Řešení:

$a_1 = 1$

$q = 2$

$s_{64} = ?$

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

$$s_{64} = 1 \cdot \frac{1-2^{64}}{1-2}$$

$$s_{64} = 2^{64} - 1$$

$$s_{64} \doteq 1{,}84 \cdot 10^{19}$$

výpočet počtu vagónů:

$1{,}84 \cdot 10^{19} : 20\,000 = 9{,}2 \cdot 10^{14}$ → váha zrn [kg]

$9{,}2 \cdot 10^{14} : 10\,000 = 9{,}2 \cdot 10^{10}$ → počet vagónů

Indický mudrc z této legendy by měl dostat $9{,}2 \cdot 10^{10}$ desetitunových vagónů zrn obilí.

16. Do čtverce, který má délku strany 10 cm je vepsán další čtverec tak, že jeho vrcholy leží ve středech stran původního čtverce. Tomuto je vepsán čtverec stejným způsobem. Postup se opakuje. Určete součet obsahů těchto všech čtverců.

Řešení:

$a_1 = 10^2 = 100$

$q = \frac{1}{2}$ (protože vrcholy dalšího čtverce leží v polovině stran původního čtverce)

$S_{celk.} = ?$

$$S_{celk.} = 10^2 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 100 \cdot 2 = 200$$

Součet obsahů těchto čtverců by byl 200 cm^2.

Pravidelný přírůstek, pravidelný úbytek

Pravidelný přírůstek (úbytek) je zvláštním druhem geometrické posloupnosti. Ve své práci jsem se rozhodla je popsat jako podkapitolu zvlášť, protože mají své vlastní vzorce.

VZORCE PRO VÝPOČTY PRAVIDELNÉHO PŘÍRŮSTKU ČI ÚBYTKU

Pro **pravidelný přírůstek** užíváme vzorec:

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$$

Pro **pravidelný úbytek** užíváme vzorec:

$$\boxed{a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n}$$

kde:

a_n..............je hodnota po n letech

a_0..............je počáteční hodnota

n................je počet let (roků)

p................je počet procent, o které se hodnota každoročně mění (zvyšuje či snižuje)

ŘEŠENÉ PŘÍKLADY NA PRAVIDELNÝ PŘÍRŮSTEK A PRAVIDELNÝ ÚBYTEK

1. Za jakou dobu vzroste jistina 85 000 Kč na částku 408 000 Kč při úroku 7,5 % p. a.?

a_0 = 85 000

a_n = 220 000

p = 7,5 %

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$408\,000 = 85\,000 \cdot \left(1 + \frac{7{,}5}{100}\right)^n$$

$4{,}8 = (1 + 0{,}075)^n$

$4{,}8 = 1{,}075^n$

$\log 4{,}8 = n \cdot \log 1{,}075$

$$n = \frac{\log 4{,}8}{\log 1{,}075} \doteq 21{,}7$$

Jistina vzroste z částky 85 000 na částku 408 000 Kč při úroku 7,5% p. a. za 21,7 let.

2. Jakou částku dnes musíme vložit na účet s 8 % úrokem p. a., aby nám za 15 let vzrostla na 200 000 Kč?

Řešení:

n = 15

p = 8 %

a_{10} = 200 000

a_0 = ?

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$a_{10} = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{10}$$

$$200\,000 = a_0 \cdot \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10}$$

$$200\,000 = a_0 \cdot (1{,}08)^{10}$$

$$a_0 \doteq 92\,638{,}7 \doteq 92\,639\ Kč$$

Dnes bychom museli vložit 92 639 Kč.

3. Částka 10 000 Kč vzrostla za 12 let na částku 30 000 Kč. Kolika procentním úrokem p. a. byla částka zhodnocena?

Řešení:

a_n = 30 000

a_0 = 10 000

n = 12

p = ?

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

$$30\,000 = 10\,000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}$$

$$3 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{12}$$

$$\sqrt[12]{3} = 1 + \frac{p}{100}$$

$$\pm 1{,}1 = 1 + \frac{p}{100}$$

$-1{,}1$ nevyhovuje, protože se jedná o přírůstek. Počítáme tedy s hodnotou +1,1.

$+1{,}1 = 1 + \frac{p}{100}$

$0{,}1 = \frac{p}{100}$

$p = 10$

Částka byla zhodnocena deseti procentním úrokem p. a.

4. Vzroste-li výroba v podniku každý rok o 4 %, určete, o kolik procent vzroste výroba za 7 let.

Řešení:

1. rok: a_0

2. rok: $a_1 = a_0 + a_0 \cdot 0{,}04 = 1{,}04 \cdot a_0$

3. rok: $a_2 = a_1 \cdot 1{,}04 = 1{,}04 \cdot a_0 \cdot 1{,}04 = 1{,}04^2 \cdot a_0$

⋮ ⋮

7. rok: $a6 = 1{,}04^6 \cdot a_0 \doteq 1{,}27 \cdot a_0$

Výroba vzroste zhruba o 27 %.

5. Počet obyvatel města Plzně v roce 1 869 činil 23 681. Za dalších 149 let vzrostl počet obyvatel Plzně na 158 023. Určete, jaký byl průměrný roční přírůstek obyvatel Plzně v procentech.

Řešení:

$a_0 = 23\,681$

$a_{149} = 158\,023$

$n = 149$

$p = ?$

$a_n = a_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$

$158\,023 = 23\,681 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{149}$

$6{,}67 = \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{149}$

$1{,}0128 = 1 + \frac{p}{100}$

$0{,}0128 = \frac{p}{100}$

$p \doteq 1{,}28$

Průměrný roční přírůstek obyvatelstva Plzně byl od roku 1 869 každý rok 1,28 %.

6. Stroj ztrácí opotřebováním každý rok 16 % své ceny. Kdy klesne jeho cena na polovinu?

Řešení:

$a_n = \frac{a_0}{2}$

p = 16 %

n = ?

$$\frac{a_0}{2} = a_0 \cdot \left(1 - \frac{15}{100}\right)^n$$

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{85}{100}\right)^n$$

$$\log 0{,}5 = n \cdot \log 0{,}85$$

$$n = \frac{\log 0{,}5}{\log 0{,}85} \doteq 4{,}265$$

Cena stroje klesne na polovinu za 4,265 let.

7. Průměr kovového drátku se každým tažením zmenšuje o 9 %. Jaký bude jeho průměr po čtrnácti taženích, byl-li původní průměr 4 mm? Kolik tažení je nutných k tomu, aby se průměr drátu zmenšil na polovinu původního průměru?

Řešení:

p = 9 %

n = 14

$a_0 = 4$

$a_{14} = ?$

$$a_n = a_0 \cdot \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

$$a_{14} = 4 \cdot \left(1 - \frac{9}{100}\right)^{14}$$

$$a_{14} = 4 \cdot \left(\frac{91}{100}\right)^{14}$$

$$a_{14} \doteq 1{,}07$$

Průměr tohoto drátku bude po 14 taženích 1,07 mm.

Kapitola třetí: Další řešené příklady

Vyšetřování vlastností posloupností

1. Vyšetřete vlastnosti nekonečné posloupnosti zadané vzorcem pro n-tý člen takto: $a_n = 2 + n$

Řešení:

a) monotónnost: předpokládáme, že je rostoucí → ověříme

$$a_{n+1} >^? a_n$$
$$2 + n + 1 >^? 2 + n$$
$$n + 3 >^? n + 2$$
$$3 > 2$$

Posloupnost je ROSTOUCÍ.

b) omezenost: z věty K ⇒ O víme, že každá konvergentní posloupnost je zároveň omezená, takže si nejprve ověříme konvergenci:

$\lim\limits_{n\to+\infty}(2+n) = +\infty$ ➔ Divergence, nicméně to ještě neurčuje omezenost, vyšetřujme tedy dále…

- můžeme zatím akorát tvrdit, že posloupnost není shora omezená
- protože je posloupnost rostoucí, bude její první člen zároveň i minimem posloupnosti → posloupnost je tedy OMEZENÁ ZDOLA
- posloupnost tedy není omezená, ale je jen omezená zdola

c) extrémy posloupnosti:

- posloupnost je rostoucí a omezená zdola, takže první člen posloupnosti je i jejím minimem

$$\min a_n = a_1 = 3$$

- pokud má posloupnost minimum je infimum rovno minimu

$$\inf a_n = a_1 = 3$$

- z toho, že posloupnost je rostoucí plyne, že maximum nemá (neexistuje)

$$\max a_n \nexists$$

- zbývá urči supremum, to určíme z limity, kterou jsme již vypočítali výše:
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(2+n) = +\infty$ a z toho tedy víme, že

$$\sup a_n = +\infty$$

2. Určete vlastnosti posloupnosti $\left\{\frac{5n+2}{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a vykreslete její graf.

Řešení:

a) monotónnost: vyjdeme z předpokladu, že je rostoucí

$$a_{n+1} >^{?} a_n$$

$$\frac{5\cdot(n+1)+2}{n+1+1} >^{?} \frac{5n+2}{n+1}$$

$$\frac{5n+7}{n+2} >^{?} \frac{5n+2}{n+1}$$

$$(5n+7)\cdot(n+1) >^{?} (5n+2)\cdot(n+2)$$

$$5n^2+12n+7 \ >^{?} 5n^2+12n+4$$

$$7 > 4 \ \checkmark$$

Posloupnost je ROSTOUCÍ.

b) omezenost:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+2}{n+1} = "\frac{\infty}{\infty}" \overset{\text{L.P.}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{5}{1} = 5$$

- z věty K ⇒ O můžeme rovnou udělat závěr: posloupnost je OMEZENÁ.

c) extrémy posloupnosti:

- posloupnost je rostoucí a omezená, takže její první člen je jejím minimem

$$\min a_n = a_1 = \frac{7}{2}$$

- a infimum je stejné jako minimum

$$\inf a_n = a_1 = \frac{7}{2}$$

- maximum nelze najít

$$\max a_n \nexists$$

- supremum zjistím pomocí limity, tu jsme si již vypočítali

$$\sup a_n = 5$$

d) graf posloupnosti: tento graf je vygenerovaný pomocí programu Mathematica8.

- na ose „y“ jsem zvolila nejmenší hodnotu rovnou třem, jelikož je nejmenší člen 3,5

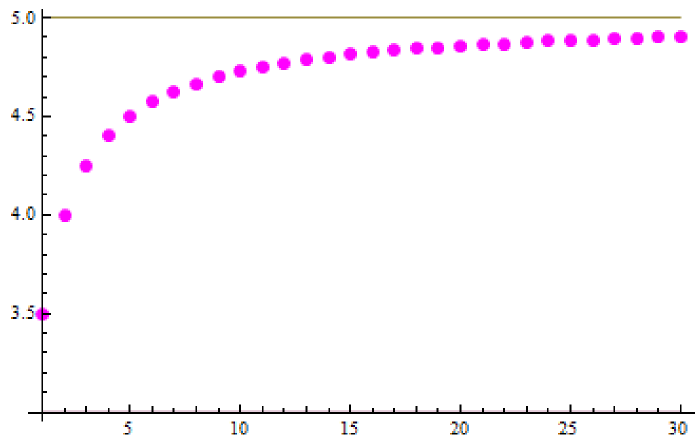
Untitled-1 *

```
In[13]:= a[n_] = (5 n + 2) / (n + 1)
         Table[a[n], {n, 1, 20}]
         Show[Plot[{y, 3, 5}, {x, 1, 30}],
          ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 30}],
           PlotStyle → {Magenta, PointSize[0.02]}]]
```

Out[13]= $\frac{2+5\,n}{1+n}$

Out[14]= $\left\{\frac{7}{2}, 4, \frac{17}{4}, \frac{22}{5}, \frac{9}{2}, \frac{32}{7}, \frac{37}{8}, \frac{14}{3}, \frac{47}{10}, \frac{52}{11}, \frac{19}{4}, \frac{62}{13}, \frac{67}{14}, \frac{24}{5}, \frac{77}{16}, \frac{82}{17}, \frac{29}{6}, \frac{92}{19}, \frac{97}{20}, \frac{34}{7}\right.$

Out[15]=



3. Určete vlastnosti posloupnosti $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ a vykreslete její graf.

<u>Řešení:</u>

a) monotónnost: předpoklad – posloupnost je rostoucí

$$a_{n+1} >^{?} a_n$$

$$1+\frac{1}{n+1} >^{?} 1+\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} >^{?} \frac{1}{n}$$

$$n >^{?} n+1$$

$$0 < 1$$

Zde byl špatně zvolen předpoklad – posloupnost je tedy KLESAJÍCÍ.

b) omezenost:

$$\lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

- z věty K ⇒ O můžeme rovnou udělat závěr: posloupnost je OMEZENÁ

c) extrémy posloupnosti:

- posloupnost je klesající a omezená, takže její první člen je jejím maximem:

$$\max a_n = a_1 = 2$$

- supremum je tedy také zřejmé:

$$\sup a_n = 2$$

- minimum v tomto případě nenajdeme, proto

$$\min a_n \nexists$$

- infimum určíme z limity:

$$\inf a_n = 1$$

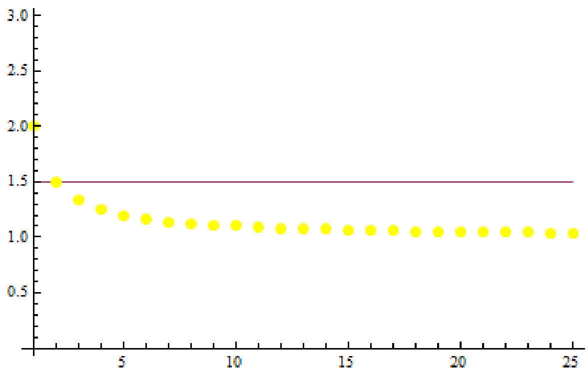
d) graf posloupnosti:

```
In[1]:= a[n_] = (1 + (1 / n))
        Table[a[n], {n, 1, 25}]
        Show[Plot[{y, 1.5, e}, {x, 1, 25}],
         ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 25}],
          PlotStyle → {Yellow, PointSize[0.02]}]]
```

Out[1]= $1 + \frac{1}{n}$

Out[2]= $\left\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{7}, \frac{9}{8}, \frac{10}{9}, \frac{11}{10}, \frac{12}{11}, \frac{13}{12}, \frac{14}{13}, \frac{15}{14}, \frac{16}{15}, \frac{17}{16}, \frac{18}{17}, \frac{19}{18}, \frac{20}{19}, \frac{21}{20}, \frac{22}{21}, \frac{23}{22}, \frac{24}{23}, \frac{25}{24}, \frac{26}{25}\right\}$

Out[3]=



4. Vyšetřete vlastnosti posloupnosti $\left\{\frac{n-2}{n^2+1}\right\}$ a vykreslete její graf.

Řešení:

a) monotónnost: předpokládejme např., že je rostoucí

$$a_{n+1} >^? a_n$$
$$\frac{n+1-2}{(n+1)^2+1} >^? \frac{n-2}{n^2+1}$$
$$\frac{n-1}{n^2+2n+2} >^? \frac{n-2}{n^2+1}$$
$$(n-1)\cdot(n^2+1) >^? (n-2)\cdot(n^2+2n+2)$$
$$n^3-n^2+n-1 >^? n^3-2n-4$$
$$0 >^? n^2-3n-3$$

Tato nerovnost by musela platit pro všechna $n \in \mathbb{N}$, aby posloupnost byla rostoucí podle předpokladu. Jenomže je na první pohled patrné, že se bude jednat o nějakou parabolu, tudíž tato podmínka splněna nebude. Nyní to ověříme pro několik členů.

$n = 1$: $0 >^? 1^2 - 3\cdot 1 - 3$

$0 > -5$ ✓

$n = 2$: $0 >^? 2^2 - 3\cdot 2 - 3$

$0 > -11$ ✓

$n = 3$: $0 >^? 3^2 - 3\cdot 3 - 3$

$0 > -3$ ✓

$n = 4$: $0 >^? 4^2 - 3\cdot 4 - 3$

$0 \not> 1$

ZÁVĚR: posloupnost je rostoucí do členu a_3 a tím jsme získali i maximum posloupnosti. Od členu a_4 je ale posloupnost klesající ⇒ posloupnost jako celek tedy NENÍ MONOTÓNNÍ.

b) omezenost:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-2}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)}{n\cdot\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{2}{n}}{n+\frac{1}{n}} = 0$$

Z věty K ⇒ O můžeme rovnou učinit závěr, že tato posloupnost je OMEZENÁ.

c) extrémy posloupnosti:

- při vyšetřování monotónnie jsme zjistili zároveň i maximum posloupnosti:

$$\max a_n = a_4 = \frac{2}{17}$$

- supremum je tedy také jasné:

$$\sup a_n = a_4 = \frac{2}{17}$$

- minimum je v tomto případě:

$$\min a_n = a_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

- zbývá určit infimum:

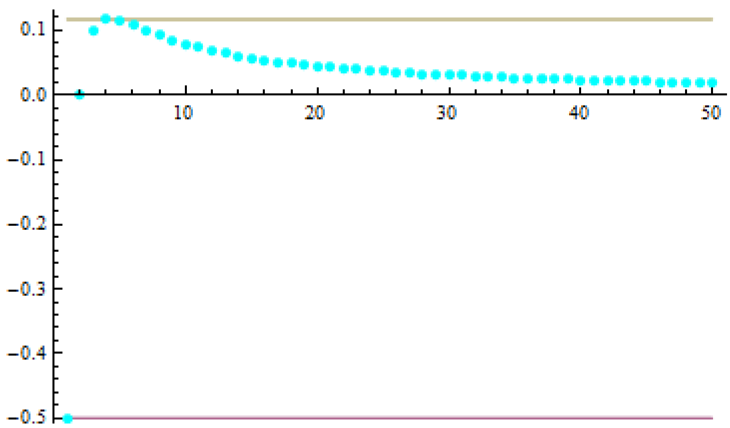
$$\inf a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)$$

d) graf posloupnosti:

V grafu je výrazně vzdálen první člen, proto nejdříve ukážu graf celý a potom i graf bez prvního členu.

Graf s prvním členem:

Out[6]=



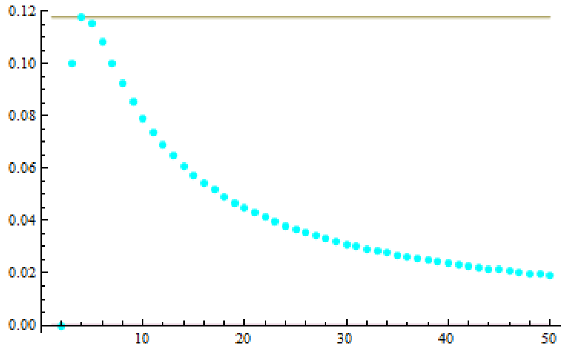
Graf bez prvního členu:

```
In[28]:= a[n_] = (n - 2) / (n^2 + 1)
         Table[a[n], {n, 1, 20}]
         Show[Plot[{y, 0, 2 / 17}, {x, 1, 50}],
          ListPlot[Table[a[n], {n, 1, 50}],
           PlotStyle → {Cyan, PointSize[0.015]}]]
```

Out[28]= $\frac{-2+n}{1+n^2}$

Out[29]= $\left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{17}, \frac{3}{26}, \frac{4}{37}, \frac{1}{10}, \frac{6}{65}, \frac{7}{82}, \frac{8}{101}, \frac{9}{122}, \frac{2}{29}, \frac{11}{170}, \frac{12}{197}, \frac{13}{226}, \frac{14}{257}, \frac{3}{58}, \frac{16}{325}, \frac{17}{362}, \frac{18}{401}\right\}$

Out[30]=



Určení vzorce pro analytické a rekurentní vyjádření posloupnosti dané výčtem prvků

Pro připomenutí:

- u rekurentního vyjádření známe první člen posloupnosti a vyjádření pro *n+prvý* člen posloupnosti
- u analytického vyjádření známe předpis pro *n-tý* člen posloupnosti

1. Určete vzorec rekurentního a analytického vyjádření posloupnosti
$\{\mathbf{-2}; \mathbf{4}; \mathbf{8}; \mathbf{-16}; \mathbf{-32}; \mathbf{64}; \dots\}$.

Řešení:

a) rekurentní vyjádření: pokusme se jednotlivé členy vyjádřit pomocí předchozího členu a nalézt nějakou pravidelnost ve vyjádření

$a_1 = -2 = -2 = a_1$

$a_2 = 4 = -2 \cdot (-2) = a_1 \cdot (-2)$

$a_3 = 8 = 4 \cdot 2 = a_2 \cdot 2$

$a_4 = -16 = 8 \cdot (-2) = a_3 \cdot (-2)$

$a_5 = -32 = -16 \cdot 2 = a_4 \cdot 2$

$a_6 = 64 = -32 \cdot (-2) = a_5 \cdot (-2)$

$\vdots$

u sudých n → (-2)

u lichých n → 2

$a_1 = (-2);\ a_{n+1} = a_n \cdot 2 \cdot (-1)^n$

REKURENTNÍ VYJÁDŘENÍ

b) analytické vyjádření: u určování analytického vyjádření budeme používat sčítací, nebo násobící metodu, podle vhodnosti u konkrétního příkladu; podle toho, zda člen vyjádříme pomocí předchozího členu vhodným vynásobením či přičtením nějakého čísla

$a_1 = -2$

$a_2 = a_1 \cdot (-2)$

$a_3 = a_2 \cdot 2$

$a_4 = a_3 \cdot (-2)$

$\vdots$

$a_{n+1} = a_n \cdot 2 \cdot (-1)^n$

$\cdot$ → násobení

Vynásobíme levé a pravé strany a dostaneme rovnici:

$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1} = -2 \cdot a_1 \cdot (-2) \cdot a_2 \cdot 2 \cdot a_3 \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot a_n \cdot 2 \cdot (-1)^n$

Co nejvíce zjednodušme:

$\cancel{a_1} \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_4} \cdot \ldots \cdot \cancel{a_n} \cdot a_{n+1} = -2 \cdot \cancel{a_1} \cdot (-2) \cdot \cancel{a_2} \cdot 2 \cdot \cancel{a_3} \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot \cancel{a_n} \cdot 2 \cdot (-1)^n$

Dostaneme:

$a_{n+1} = -2 \cdot (-2) \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot (-1)^n$

$a_{n+1} = 2 \cdot [(-1)^1 \cdot (-1)^1 \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^5 \cdot \ldots \cdot (-1)^n$

$a_{n+1} = -2 \cdot (-1)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}}$

$a_n = -2 \cdot (-1)^{\frac{(n-1) \cdot n}{2}}$ $\rightarrow$ ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

- poznámka: z předpisu pro a_{n+1} uděláme předpis pro a_n tak, že u *n* všude odečteme 1

2. Určete vzorec rekurentního a analytického vyjádření posloupnosti $\{\mathbf{4}; \mathbf{7}; \mathbf{13}; \mathbf{25}; \mathbf{49}; \mathbf{97}; \ldots\}$.

a) rekurentní vyjádření:

$a_1 = 4$

$a_2 = 7 = 2 \cdot a_1 - 1$

$a_3 = 13 = 2 \cdot a_2 - 1$

$a_4 = 25 = 2 \cdot a_3 - 1$

$a_5 = 49 = 2 \cdot a_4 - 1$

$a_6 = 97 = 2 \cdot a_5 - 1$

$\vdots$

$a_1 = 4;\ a_{n+1} = 2 \cdot a_n - 1 \rightarrow$ REKURENTNÍ VYJÁDŘENÍ

nebo ještě jinak:

$a_1 = 4$

$a_2 = 7 = a_1 + 3 = a_1 + 3 \cdot 2^0$

$a_3 = 13 = a_2 + 6 = a_2 + 3 \cdot 2^1$

$a_4 = 25 = a_3 + 12 = a_3 + 3 \cdot 2^2$

$a_5 = 49 = a_4 + 24 = a_4 + 3 \cdot 2^3$

$\vdots$

$a_1 = 4;\ a_{n+1} = a_n + 3 \cdot 2^{n-1} \rightarrow$ JINÉ REKURENTNÍ VYJÁDŘENÍ

b) analytické vyjádření:

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 4\\
a_2 &= a_1 + 3 \cdot 2^0\\
a_3 &= a_2 + 3 \cdot 2^1\\
a_4 &= a_3 + 3 \cdot 2^2\\
a_5 &= a_4 + 3 \cdot 2^3\\
&\vdots\\
a_{n+1} &= a_n + 3 \cdot 2^{n-1}
\end{aligned}\right\} \oplus \quad \rightarrow \quad \text{sčítání}$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cdots + a_{n+1} = 4 + \cancel{a_1} + 3 \cdot 2^0 + \cancel{a_2} + 3 \cdot 2^1 + \cancel{a_3} + 3 \cdot 2^2 + \cdots + \cancel{a_n} + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{n+1} = 4 + 3 \cdot 2^0 + 3 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \cdots + 3 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_{n+1} = 4 + 3 \cdot \underbrace{[2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1}]}$$

částečný součet geometrické posloupnosti $\{g_n\}$:

q = 2; $s_n = g_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} = \frac{2^n - 1}{1} = 2^n - 1$ → máme *n* sčítanců

$$a_{n+1} = 4 + 3 \cdot (2^n - 1)$$

$$a_{n+1} = 4 - 3 + 3 \cdot 2^n$$

$$a_{n+1} = 1 + 3 \cdot 2^n$$

$a_n = 1 + 3 \cdot 2^{n-1}$ → ANALYTICKÉ VYJÁDŘENÍ

Převody mezi rekurentním a analytickým vyjádřením u nekonečných posloupností

1 Převod: ANALYTICKÝ → REKURENTNÍ

- potřebuje zjistit první člen posloupnosti $\{a_1\}$ – ten zjistíme výpočtem
- dále potřebujeme zjistit předpis *n+prvého* členu posloupnosti, který je funkcí *n* a $a_n \rightarrow a_{n+1} = f(n, a_n)$
- můžeme řešit:
  - podílem: $\frac{a_{n+1}}{a_n}$
  - rozdílem: $a_{n+1} - a_n$

Příklad: Převeďte analytické vyjádření posloupnosti $(a_n) = \left(\frac{n+5}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ na rekurentní vyjádření.

Řešení:

- pro představu o posloupnosti je dobré si vypsat několik prvních členů:

$$a_1 = \frac{1+5}{1+1} = 3$$

$$a_2 = \frac{2+5}{2+1} = \frac{7}{3}$$

$$a_3 = \frac{3+5}{3+1} = 2$$

$$a_4 = \frac{4+5}{4+1} = \frac{9}{5}$$

$$a_5 = \frac{5+5}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\vdots$$

$$\left\{3; \frac{7}{3}; 2; \frac{9}{5}; \frac{5}{3}; \dots\right\}$$

- nejprve zkusme podílem:

$$a_n = \frac{n+5}{n+1};\ a_{n+1} = \frac{n+6}{n+2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+6}{n+2}}{\frac{n+5}{n+1}} = \frac{n+6}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+5} = \frac{n^2+7n+6}{n^2+7n+10} \qquad / \cdot a_n$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n^2+7n+6}{n^2+7n+10}$$

- teď zkusme pomocí rozdílu:

$$a_n = \frac{n+5}{n+1};\ a_{n+1} = \frac{n+6}{n+2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+6}{n+2} - \frac{n+5}{n+1} = \frac{(n+6)\cdot(n+1) - (n+5)\cdot(n+2)}{(n+2)\cdot(n+1)}$$

$$= \frac{(n^2+7n+6) - (n^2+7n+10)}{n^2+3n+2}$$

$$= \frac{-4}{n^2+3n+2} \qquad /+a_n$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{4}{n^2 + 3n + 2}$$

Oba tyto předpisy jsou rekurentním vyjádřením téže zadané posloupnosti.

② Převod: REKURENTNÍ → ANALYTICKÝ

- zadaný tedy bude první a *n+prvý* člen posloupnosti
- vyjádříme si několik prvních členů posloupnosti a budeme mezi nimi hledat nějakou souvislost; nejlépe tak, aby se dal člen vyjádřit pomocí předchozího členu
- formulujeme hypotézu pro *n+prvý* člen vyjádřený pomocí *n*-tého členu
- úpravami (např. sčítací/násobící metoda) dojdeme k předpisu pro *n*-tý člen
- tento předpis platí, pokud je pravdivá hypotéza
- to je nutné ověřit důkazem – MI (matematická indukce)

Příklad: Převeďte rekurentní vyjádření posloupnosti: $\boldsymbol{a_1 = 2}$

** $\boldsymbol{a_{n+1} = \left(1 + \frac{3}{n}\right) \cdot a_n}$

na analytické vyjádření.

Řešení:

$$a_1 = 2 \qquad = a_1 \qquad = a_1$$

$$a_2 = \left(1 + \frac{3}{1}\right) \cdot 2 = 8 \qquad = a_1 + 6 \qquad = a_1 + 2 \cdot 3$$

$$a_3 = \left(1 + \frac{3}{2}\right) \cdot 8 = 20 \qquad = a_2 + 12 \qquad = a_2 + 3 \cdot 4$$

$$a_4 = \left(1 + \frac{3}{3}\right) \cdot 20 = 40 \qquad = a_3 + 20 \qquad = a_3 + 4 \cdot 5$$

$$a_5 = \left(1 + \frac{3}{4}\right) \cdot 40 = 70 \qquad = a_4 + 30 \qquad = a_4 + 5 \cdot 6$$

$$a_6 = \left(1 + \frac{3}{5}\right) \cdot 70 = 112 \qquad = a_5 + 42 \qquad = a_5 + 6 \cdot 7$$

$$\vdots$$

$$\boxed{\text{HYPOTÉZA: } a_{n+1} = a_n + (n+1) \cdot (n+2)}$$

Nyní musíme hypotézu ověřit.

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= 2 \\
a_2 &= a_1 + 2 \cdot 3 \\
a_3 &= a_2 + 3 \cdot 4 \\
a_4 &= a_3 + 4 \cdot 5 \\
&\vdots \\
a_{n+1} &= a_n + (n+1) \cdot (n+2)
\end{aligned}\right\} \quad + \quad \text{sčítání}
$$

$$\cancel{a_1} + \cancel{a_2} + \cdots + a_{n+1} = 1 \cdot 2 + \cancel{a_1} + 2 \cdot 3 + \cancel{a_2} + 3 \cdot 4 + \cdots + \cancel{a_n} + (n+1) \cdot (n+2)$$

$$a_{n+1} = \underbrace{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + \cdots + (n+1) \cdot (n+2)}$$

$$\sum_0^n [(n+1) \cdot (n+2)] = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{3} \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$$

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$$

- teď je na řadě důkaz

MI:

1) $n = 1$: $\quad a_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 2$

2) $n = k$: $\quad a_k = \frac{1}{3} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \quad \to IP$

3) $n = k+1$: $\quad a_{k+1} = \frac{1}{3} \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3)$

$$** \qquad \left(1 + \frac{3}{k}\right) \cdot a_k = \left(1 + \frac{3}{k}\right) \cdot \frac{1}{3} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{k}\right) \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) = \frac{1}{3} \cdot (k+3) \cdot (k+1) \cdot (k+2) \blacksquare$$

Důkaz vyšel, hypotéza je tedy platná, a proto platí, že:

$a_{n+1} = a_n + (n+1) \cdot (n+2)$ je analytickým vyjádřením zadané posloupnosti.

Kapitola čtvrtá: Speciální posloupnosti

Fibonacciho posloupnost

O SAMOTNÉM FIBONACCIM

Byl vlastním jménem Leonardo Pisánský a narodil se v roce 1 170 v Pise. Fibonacci se mu začalo říkat z přezdívky, kterou měl jeho otec – Bonacci. Což volně přeloženo znamená „dobrák". Předpona „Fi" představuje syna, tedy Fibonacci můžeme volně přeložit jako „syn dobrákův". Pravděpodobně se mu tak ale začalo říkal až po jeho smrti v roce 1 250, protože není žádný záznam o tom, že by se mu tak za jeho života říkalo.

Jeho otec „Bonacci" byl mezinárodní obchodník a Fibonacci mu pomáhal s účetnictvím. A právě díky počtům v účetnictví se Fibonacci dostal k matematice. Z počátku se učil matematice od arabských a indických matematiků na obchodních cestách s otcem. Právě Fibonaccimu vděčíme za zavedení arabských číslic i u nás, v Evropě – byl tímto systémem číslování okouzlen.

Zdroj obrázku: hackernoon.com

Fibonacci je autorem několika matematických děl pojednávajících o geometrii, algebře, a hlavně o teorii čísel – které je vlastně autorem. Nejznámějším spisem je ten o počtech – *Liber Abaci*, neboli *Kniha počtů* vydaná v roce 1 202.

Tato jeho nejznámější kniha pojednává o účetnictví, výhodách arabských číslic, rozklad na součin prvočísel, dále se zabývá dělitelností atd. Nejznámějším problémem je však úloha, která je formulována následovně:

„Kolik králičích párů budeme mít na konci roku, pokud začneme s jedním párem, který každý měsíc zplodí jeden nový pár, který se bude moci rozmnožovat za dva měsíce?“

Pojďme to řešit stejně jako Fibonacci – ten si několik prvních generací těchto králičích rodinek zaznamenal do tabulky a sledoval, kolik králičích párů má na konci každého měsíce.

Generace / **Měsíc**	1.	2.	3.	4.	5.	6.	Celkem
1	1						1
2	1						1
3	1	1					2
4	1	2					3
5	1	3	1				5
6	1	4	3				8
7	1	5	6	1			13
8	1	6	10	4			21
9	1	7	15	10	1		34
10	1	8	21	20	5		55
11	1	9	28	35	15	1	89
12	1	10	36	56	35	6	144

Na první pohled si můžeme všimnout: každý člen této posloupnosti je součtem dvou předchozích členů. Členy posledního sloupce jsou tedy členy tvořící takzvanou Fibonacciho posloupnost, která je rekurentně definována takto:

$$a_1 = 1;$$
$$a_2 = 1;$$
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad pro\ n > 2.$$

ZAJÍMAVÉ VLASTNOSTI FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI

1. Součet členů Fibonacciho posloupnosti

Sečteme-li libovolnou desítku bezprostředně po sobě jdoucích členů Fibonacciho posloupnosti, tak vždy dostaneme násobek 11.

Např. prvních deset členů Fibonacciho posloupnosti:

$$1+1+2+3+5+8+13+21+34+55=143$$

$$143=11\cdot 13$$

Nebo jiná desítka:

$$55+89+144+233+377+610+987+1\,597+2\,584+4\,181=10\,857$$

$$10\,857=11\cdot 987$$

Čeho si dále je možno všimnout?

V prvním případě se $143=11\cdot 13$, kde 13 je na sedmém místě součtu těchto deseti členů.

V druhém případě se $10\,857=11\cdot 987$, kde 987 je také na sedmém místě součtu těchto deseti členů. Takže toto je další zajímavá „podvlastnost“ – v součtu libovolných deseti členů Fibonacciho posloupnosti je výsledek ***n***-tým násobkem 11, kde ***n*** je sedmým sčítancem těchto deseti členů.

Další takovou zajímavostí je, že v součtu prvních *n* členů Fibonacciho posloupnosti je tento součet roven číslu odpovídajícímu: $a_{n+2}-1$. Toto tvrzení se dá vyjádřit i vzorcem jako: $1+1+2+3+5+8+13+\cdots+a_n=a_{n+2}-1$.

Např.:

$$1+1+2+3+5+\cdots+1\,597=a_{19}-1=4\,181-1=4\,180$$

2. Vztah mezi členy Fibonacciho posloupnosti

Jestliže vezmeme tři bezprostředně po sobě jdoucí členy Fibonacciho posloupnosti a vynásobíme krajní hodnoty, dostaneme prostřední hodnotu umocněnou na druhou a zvětšenou, nebo zmenšenou o jedničku.

$$a_n^2-a_{n-1}\cdot a_{n+1}=(-1)^{n-1}$$

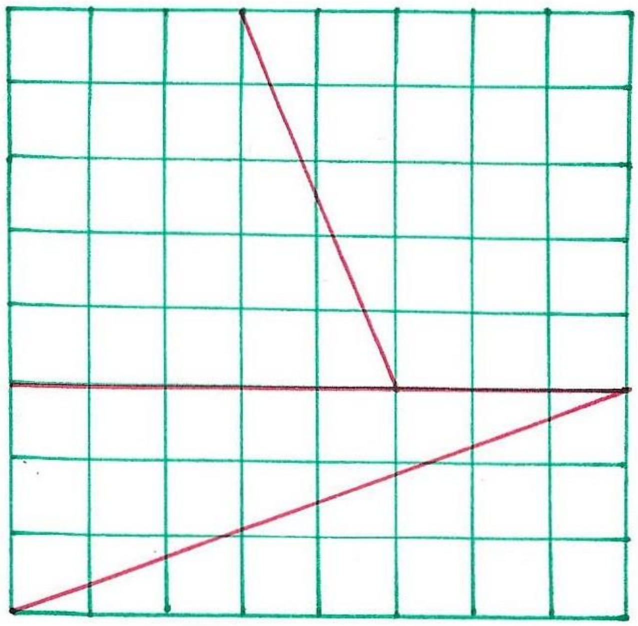
Např.: a) členy 3, 5, 8

$3\cdot 8=5^2-1$

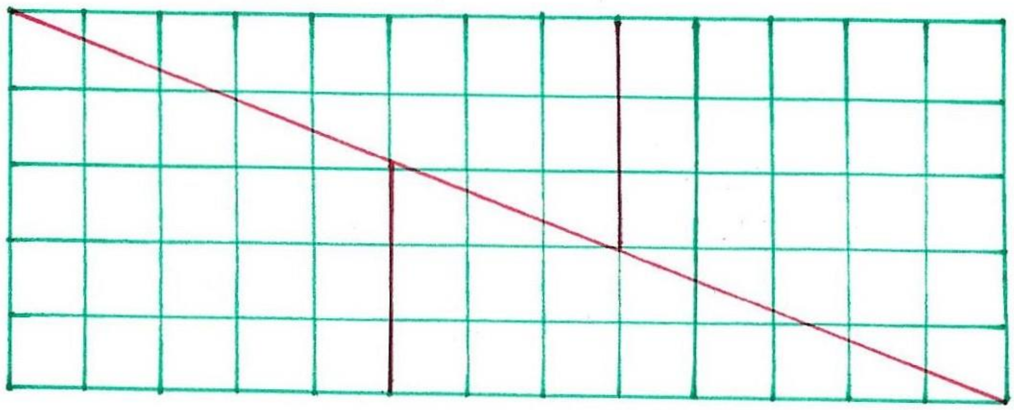
b) členy 5, 8, 13

$5\cdot 13=8^2+1$

Tato vlastnost v geometrii vyjadřuje něco, co je vcelku záhadné. Existuje např. „trik“ s čokoládovou tabulkou, která když se rozláme na malé čtverečky a tyto čtverečky se přeskládají, tak jeden čtvereček zbyde. Ukážu to, na obrázku se čtvercovou sítí: Narýsuji čtverec o straně délky 8 cm a rozdělím ho na malé čtverečky o straně délky 1 cm. Čtverečků tedy bude 64.



Dále ho rozdělím na 4 části dle obrázku. Kdybych tyto části vystřihla, mohla bych je různě přesouvat. Jednou z variant, jak tyto části znovu poskládat je obdélník se stranami 5 a 13 cm.



Jenomže: Obsah čtverce byl 64 cm^2, zatímco obsah obdélníku je 65 cm^2.
Jak je to možné? Kdybych části skutečně vystřihla, bylo by možné si všimnout, že na sebe přesně nesednou. Jinými slovy úhly mezi úsečkami rozdělujícími jednotlivé části nejsou v obou obrázcích naprosto shodné, ale nepatrně rozdílné, tzn., že nevytvořím dokonalý obdélník – jsou v něm vynechaná malá místa. Plocha těchto vynechaných míst je právě plochou jednoho čtverečku.
Stejně funguje i zmiňovaný trik s čokoládou.

Před zavedením obecného předpisu Fibonacciho posloupnosti zavedu některé pojmy s Fibonacciho posloupností související.

ZLATÉ ČÍSLO, ZLATÝ ŘEZ

Lidé jsou odjakživa fascinováni různými čísly, která mají svá jména - π, e, … Teď si představíme další takové číslo, číslo Φ, neboli zlaté číslo.
Zatímco Fibonacciho posloupnost je záležitost z dob Fibonacciho, tedy z jeho knihy vydané roku 1 202, tak zlaté číslo je objevem Řeků klasického období. První psané zmínky o něm jsou sepsané ve slavných Základech od Eukleida z Alexandrie, které byly napsané někdy kolem roku 300 př. n. l.
Fibonacciho posloupnost a zlaté číslo mají společného více než mnoho. Abychom si to mohli ukázat, nejdříve se něco dozvíme o zlatém čísle.

<u>Definice zlatého čísla</u>

Zlaté číslo označujeme řeckým písmenem Φ [čteme FÍ]. Je to číslo iracionální.
Definice zlatého čísla se objevila v šesté knize Euklidových základů.
Citace Tartagliovy verze:
„Rozděl úsečku na dva díly tak, aby obdélník, jehož strana je celá úsečka a druhá strana je jeden z dílů, měl stejný obsah jako čtverec nad druhým dílem.“
Jinými slovy:

poměr *celá úsečka : delší část* se musí rovnat poměru *delší část : kratší část*.

<u>Odvození:</u>

Úsečku o délce *x* rozdělíme na část o délce 1 a část o délce *x*-1.
Sepíšeme poměry dle definice a upravujeme:

$$x : \ 1 = 1 : (x - 1)$$

$$x \cdot (x - 1) = 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = \ (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = 1 + 4 = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

a protože nás zajímá jen kladné řešení rovnice (jedná se o délku):

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618033989$$

a toto je tedy vyjádření zlatého čísla:

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618}$$

Na začátku bylo řečeno, že zlaté číslo je iracionální. Nyní je vidět proč. Ve vzorci se objevila $\sqrt{5}$, a kvůli ní je Φ iracionální.

Někdy se místo „zlatého čísla“ můžeme setkat se „zlatou proporcí“ či dokonce „božskou proporcí“ nebo „božským číslem“. A to proto, že se s ním setkáváme každý z nás téměř každý den. Objevuje se v umění, v přírodě, ve vesmíru, v antických stavbách atd.

Zlaté číslo vypsané na prvních 100 desetinných míst:

1, 6180339887 4989484820 4586834365 6381177203 0917980576 2862135448 6227052604 6281890244 9707207204 1893911375

Nicméně pro výpočty se užívá hodnota se třemi desetinnými místy, nebo pro velmi přesné výpočty s pěti desetinnými místy.

Zajímavost:

Pokud byste počítali převrácenou hodnotu Φ, tedy $\frac{1}{\Phi}$, tak byste dostali jako výsledek stejná desetinná místa jako u Φ, ale na místě jednotek by nebyla 1, ale 0.

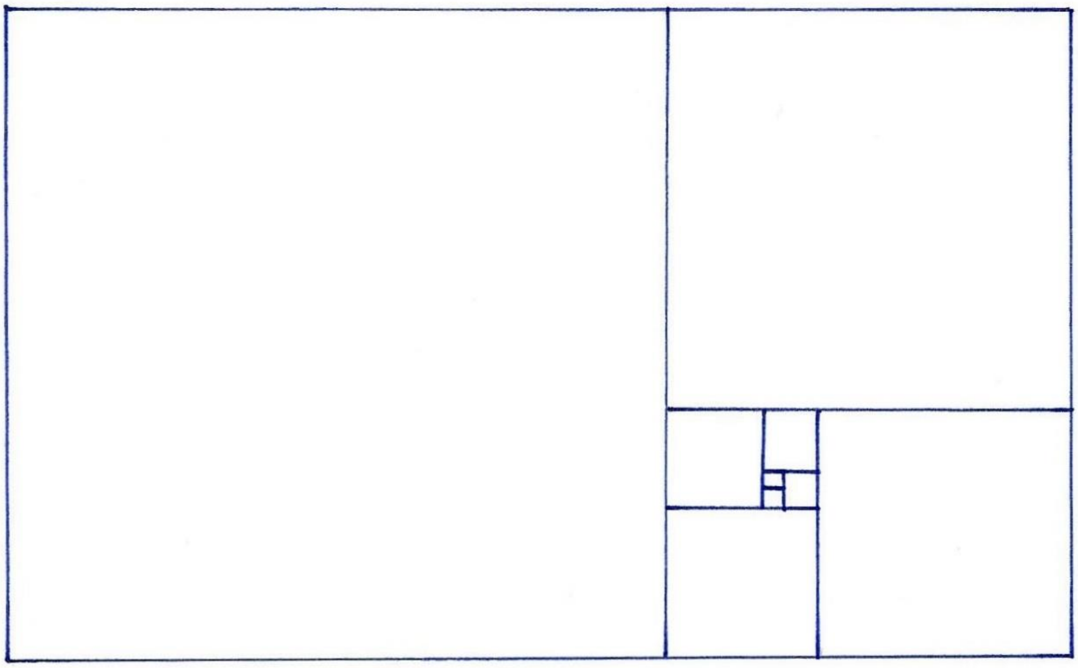
Existuje i jiná (moderní) definice zlatého čísla?

Zlaté číslo bychom mohli zadefinovat i takto:

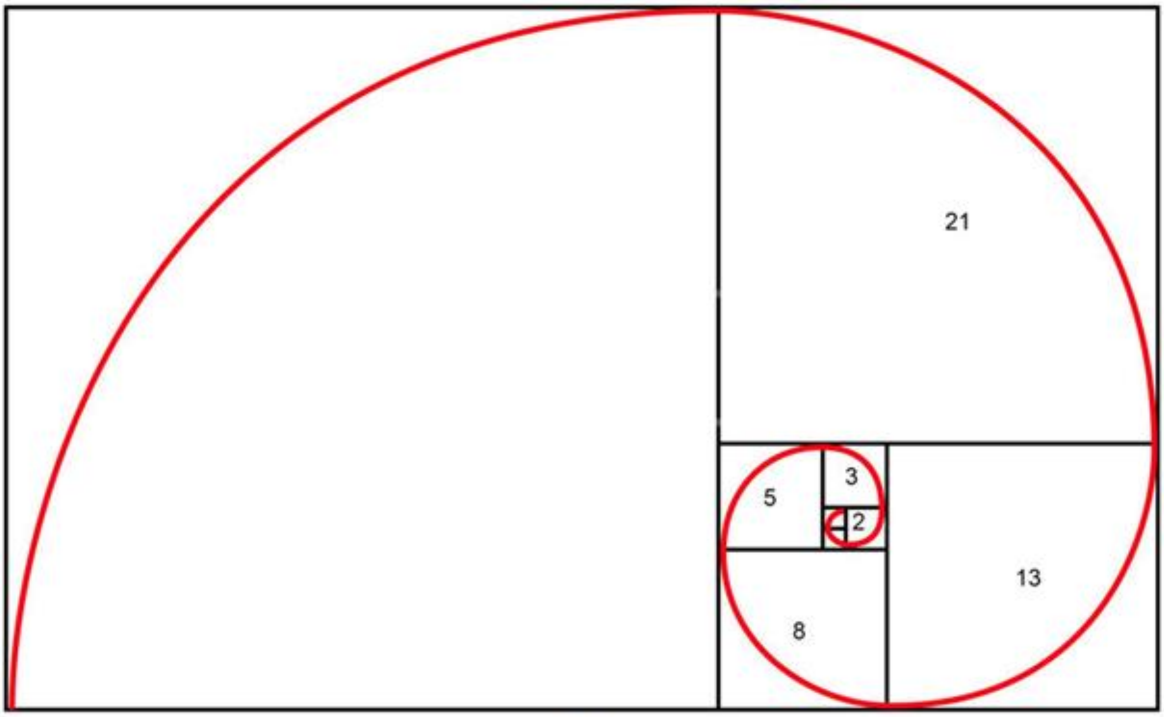
$$\Phi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Geometrický pohled:

Zlatý obdélník je takový obdélník, jehož delší strana je Φ násobkem strany kratší. Vezmeme zlatý obdélník a rozdělíme ho na dvě části, z nichž jedna bude čtverec o straně kratší strany zlatého obdélníku. Dostaneme tak nový a menší zlatý obdélník. Tento postup několikrát zopakujeme. Výsledek vypadá takto:

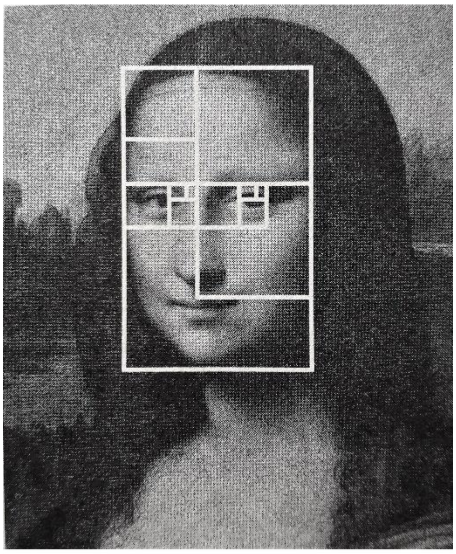


Pokud narýsujeme oblouky o poloměru strany čtverce do každého čtverce, vznikne křivka, které se říká **logaritmická spirála**.



Zdroj obrázku: Nikonblog.cz

Se zlatým řezem se možná nevědomky setkáváme také téměř každý den. Říká se, že



Zdroj obrázku: Svět matematiky - Zlatý řez

geniální Leonardo da Vinci užil zlatého řezu i při malbě světoznámého díla Mony Lisy. Zda je to pravda či ne se už nedozvíme, nicméně propojení zlatých proporcí a umění je časté i u jiných děl.

Královnou v užívání zlatého řezu je však sama příroda. Překrásné ulity některých měkkýšů jsou naprosto dokonale rozděleny zlatým řezem. Na obrázku si domyslíme i logaritmickou spirálu a nedá nám to moc práce:

Zdroj obrázku: growjob.com

Dále se se zlatým řezem v přírodě setkáme u rozložení okvětních lístků některých rostlin (např. růže) nebo třeba u semen slunečnice, šišky stromů, ale nejen tam…

Zdroj obrázku: geocaching.com

Zdroj: Aukro

Podíl členů Fibonacciho posloupnosti se limitně blíží právě ke zlatému číslu. Sepišme prvních 20 podílů dvou po sobě jdoucích členů posloupnosti do tabulky:

n	a_n	a_n/a_{n-1}	Rozdíl od Φ
1	1		
2	1	1,00000000	-0,61803398
3	2	2,00000000	0,38196602
4	3	1,50000000	-0,11803398
5	5	1,66666667	0,04863269
6	8	1,60000000	-0,01803398
7	13	1,62500000	0,00696602
8	21	1,61538462	-0,00264936
9	34	1,61904762	0,00101364
10	55	1,61764706	-0,00038692
11	89	1,61818182	0,00014784
12	144	1,61797753	-0,00005645
13	233	1,61805556	0,00002158
14	377	1,61802575	-0,00000823
15	610	1,61803714	0,00000316
16	987	1,61803279	-0,00000119
17	1 597	1,61803445	0,00000047
18	2 584	1,61803381	-0,00000017
19	4 181	1,61803406	0,00000008
20	6 765	1,61803396	-0,00000002

Z tabulky vyčteme, že při dvacátém členu je rozdíl od zlatého čísla pouhé dvě stomiliontiny. Což je zanedbatelný rozdíl.

Zlatý řez souvisí dále také např. i s Pythagorejskými trojicemi a s mnohým dalším.

Nyní už zpět k Fibonacciho posloupnosti:

PŘEDPIS FIBONACCIHO POSLOUPNOSTI

Je daný rekurentně:

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[(-1)^{n+1}\Phi^n + \frac{1}{\Phi^n}\right]}$$

FIBONACCIHO POSLOUPNOST A PRVOČÍSLA

Prvočísla jsou už jako taková velmi zajímavou skupinou čísel. Objevují se i ve Fibonacciho posloupnosti.

Věta: Prvočísla ve Fibonacciho posloupnosti

Pokud $a_n = p, kde\ p\ je\ prvočíslo \Rightarrow n = p$.

Ale pozor! Ve větě je implikace, tzn., že naopak neplatí.

Kapitola pátá: Shrnutí

V první kapitole jsem se věnovala základním pojmům týkajících se posloupností. Kapitola je hodně teoretická, ale je doplněna o ukázkové příklady. První důležitou informací je definice posloupnosti, která stručně řečeno říká, že posloupnost je zobrazení, nebo-li funkce, která na svém definičním oboru nabývá hodnot přirozených čísel ℕ a na oboru hodnot nabývá hodnot podmnožiny reálných čísel ℝ.

Posloupnosti se mohou značit pomocí kulatých závorek, např.(a_n), ale v některé literatuře se můžete setkat i se značením pomocí složených závorek, např. $\{a_n\}$,. Může to částečně i záležet na tom, z jaké země daná literatura pochází, nebo jestli je to literatura modernější či starší.

Dále jsem udala způsoby zadávání posloupnosti – pro n-tý člen (explicitně), rekurentně, výčtem prvků a nechybí ani převody mezi jednotlivými zadáními i s ukázkou na příkladech.

Zavedla jsem i definice pro vlastnosti posloupností – pro omezenost (shora omezená, zdola omezená, omezená, neomezená) posloupnosti, pro monotónnost (ostře rostoucí, ostře klesající, rostoucí, klesající) posloupnosti a také extrémy posloupnosti (minimum, maximum, infimum a supremum).

Další podkapitolu jsem věnovala limitám posloupností, protože její výpočet dobře poslouží při vyšetřování výše zmíněných vlastností posloupností. Výpočty limit jsem předvedla jak pro konvergentní posloupnosti, tak i pro divergentní posloupnosti. Zmínila jsem se i o oscilujících posloupnostech, jejichž limita neexistuje.
Výpočty limit jsem předvedla i pro limity s tzv. „neurčitými" výrazy a pro limity jdoucí k „*e*".
Co se týče konvergentních posloupností uvedla jsem jejich důležité tři vlastnosti:

1. posloupnost má nejvýše 1 limitu
2. K ⇒ O
3. O + M ⇒ K

a tyto vlastnosti jsem dokázala.

Ve druhé kapitole jsem uvedla tři nejběžnější posloupnosti, se kterými se člověk setkává už na střední škole. Konkrétně posloupnost aritmetickou, geometrickou a pravidelný přírůstek/úbytek.

V každé podkapitole jsem uvedla vzorce pro danou posloupnost a poté řadu řešených příkladů.

Třetí kapitolu jsem věnovala řešeným příkladům na vyšetřování vlastností posloupnosti (monotónnost, omezenost, extrémy) a vykreslení grafu dané posloupnosti. Další příklady byly na určení vzorce pro analytické a rekurentní vyjádření posloupnosti, která je daná výčtem první. Samozřejmě v této kapitole nechybí ani převody mezi rekurentním a analytickým vyjádřením nekonečné posloupnosti.

A konečně, **čtvrtá kapitola** byla věnována Fibonacciho posloupnosti. V níž jsem uvedla krátce něco o jeho životě – např. to, že se ve skutečnosti jmenoval Leonardo Pisánský a Fibonacci se mu říkalo po jeho otci, ten se jmenoval Bonacci a předpona „Fi" představuje syna.

Uvedla jsem některé vlastnosti této posloupnosti – např. tu, že součet libovolných bezprostředně po sobě jdoucích deseti členů Fibonacciho posloupnosti je násobkem 11.

Postupně jsem se propracovala i ke zlatému řezu a zadefinovala jsem zlaté číslo → $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$. Ukázala jsem i odvození této hodnoty.

Velice zajímavé je, že se zlatý řez objevuje téměř všude okolo nás, aniž by si to lidé uvědomovali. Zlatý řez najdeme v přírodě – okvětní lístky růže a jiných květin, semena slunečnic, zdřevnatělé šupiny šišek, ulity některých měkkýšů atd. Zlatý řez najdeme třeba i v umění – mnohá díla geniálního Leonarda DaVinciho jsou „zlatého řezu plná".

A proč jsem vlastně do kapitoly o Fibonacciho posloupnosti zařadila zlatý řez? Proto, že spolu velmi úzce souvisí. Např. tím, že podíl $\frac{a_n}{a_{n-1}}$ členů Fibonacciho posloupnosti, se s rostoucí hodnotou *n*, rychle blíží hodnotě zlatého čísla. Už u *n = 20* je rozdíl oproti Φ téměř zanedbatelný.

Na závěr tohoto shrnutí si dovolím ještě jednou citoval původní Fibonacciho úlohu: *„Kolik králičích párů budeme mít na konci roku, pokud začneme s jedním párem, který každý měsíc zplodí jeden nový pár, který se bude moci rozmnožovat za dva měsíce?"*
Z tabulky, kterou jsem uvedla ve čtvrté kapitole víme, že těchto párů bude 144.

Závěr

Prvním z cílů mé diplomové práce na téma „Posloupnosti reálných čísel a řešené příklady" bylo seznámit čtenáře s pojmem posloupnost, vymezit její vlastnosti, typy a formy zadání, a to vše předvést na příkladech.

Dalším z mých cílů bylo připomenout čtenářům (některé i nově seznámit) s těmi nejzákladnějšími typy posloupností. Těmito posloupnostmi myslím aritmetickou, geometrickou posloupnost a přirozený přírůstek a úbytek. Všechny tyto typy posloupností jsem zadefinovala, sepsala přehled potřebných vzorců pro jejich výpočet a uvedla jsem na každý typ těchto posloupností mnoho příkladů i s řešením, ve kterém jsem se snažila vše vysvětlit.

Jako poslední cíl této diplomové práce jsem si stanovila seznámit čtenáře s méně známými posloupnostmi. Při psaní kapitoly o Fibonacciho posloupnosti jsem se věnovala i zlatému řezu/zlatému číslu, které s Fibonacciho posloupností úzce souvisí. I přes to, že jsou tuto podkapitolu původně neplánovala, jsem velice ráda, že jsem se mohla tomuto tématu věnovat, protože považuji ho za velice zajímavé už delší dobu.

Původně jsem plánovala se věnovat kromě Fibonacciho posloupnosti i jiným, méně známým posloupnostem, jako jsou např. „Böhmerovy nepravidelné posloupnosti" skládající se jen z nul a jedniček. To jsem v průběhu psaní této práce zavrhla, kvůli nedostatku kvalitních materiálů, a to dokonce ani v anglicky psané literatuře.

Shrnu-li tedy mé cíle, osobně si myslím, že jsem je i přes tuto poslední překážku splnila. Hlavně jsem vše chtěla vysvětlit na příkladech, co bylo už z názvu práce stěžejní, což jsem provedla. Nakonec jsem se místo jiných posloupností, kromě Fibonacciho, věnovala pro mě atraktivnějším tématem – zlatému řezu, který jsem původně neplánovala.

Resumé

Resumé [CZ]

Práce se zabývá posloupnostmi, jejich vlastnostmi, formou zadání a řešenými příklady. Poskytuje stručný přehled vzorců a typových příkladů pro základní posloupnosti – aritmetická posloupnost, geometrická posloupnost a pravidelný přírůstek a úbytek. Dále poskytuje přehled řešených úloh na vyšetřování vlastností posloupností. Ukazuje možnosti převodů mezi jednotlivými typy zadání posloupnosti. Na samém konci se zabývá Fibonacciho posloupností a zlatým řezem.

Resumé [EN]

This thesis deals with sequences, their properties, formo f assignment and solved examples. This thesis provides a brief overview of formulas and types of examples for basic sequences – arithmetic sequence, geometric sequence, and regular increment and regular loss. It also provides an overview of solved examples in properties of sequences. It shows the possibilities of conversions between different types of sequences assignments. At the end this thesis deals with the Fibonacci sequence and the golden ratio.

Zdroje a použitá literatura

Použitá literatura: citace vytvořená na webových stránkách www.citace.com

- DRÁBEK, Pavel a Stanislav MÍKA. *Matematická analýza I: pro 1. semestr fakulty aplikovaných věd*. Plzeň: Vysoká škola strojní a elektrotechnická, 1991. ISBN 80-7082-038-1
- POLÁK, Josef. *Matematická analýza*. Plzeň: Západočeská univerzita, 1992. ISBN 80-7082-066-7
- ČERMÁK, Pavel a Petra ČERVINKOVÁ. *Odmaturuj! z matematiky 1*. Vyd. 4. Brno: Didaktis, c2007. Odmaturuj!. ISBN 978-80-7358-102-2

Citace periodika:

- Zlatý řez, Svět matematiky, Praha; Vydavatelství: HACHETTE FASCICOLI SRL, 2016. ISSN: 2498-9851

Další zdroje:

- vlastní poznámky z předmětu „Matematická analýza“ na FAV ZČU
- vlastní poznámky z předmětu „Metody řešení matematických úloh 1“ na FPE ZČU

Zdroje grafů:

Všechny grafy byly vygenerovány programem „Mathematica8“, či programem „Graph“, nebo se jedná o vlastní tvorbu.

Zdroje obrázků:

Zdroj vždy uveden pod konkrétním obrázkem. Není-li zdroj u obrázku, jedná se o vlastní tvorbu.