ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

DIRICHLETŮV PRINCIP

Diplomová práce

Bc. Barbora Ulrychová

Učitelství pro základní školy, Učitelství matematiky pro základní školy

Vedoucí práce: PhDr. Lukáš Honzík, Ph.D.

Plzeň 2019

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni 30. června 2019

....

vlastnoruční podpis

Děkuji vedoucímu mé diplomové práce, panu PhDr. Lukáši Honzíkovi, Ph.D., za trpělivost a vstřícný přístup.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

ÚVOD 2
1 POJEM DIRICHLETŮV PRINCIP 3
1.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE 3
1.2 OBECNÁ DEFINICE 5
2 PO KOM DOSTAL PRINCIP SVŮJ NÁZEV? 8
3 PŘÍKLADY 11
3.1 PŘÍKLADY Z BĚŽNÉHO ŽIVOTA 11
3.2 ARITMETIKA 20
3.3 ALGEBRA 27
3.4 GEOMETRIE 38
ZÁVĚR 50
RESUMÉ 51
SEZNAM LITERATURY 52
SEZNAM OBRÁZKŮ 53

Úvod

Tato diplomová práce se věnuje tzv. Dirichletovu principu nebo také někdy nazývanému holubníkovému či zásuvkovému principu. Na nadcházejících stránkách si nejprve řekneme definici Dirichletova principu jak v základní, tak v obecné verzi. Obě definice budou doplněny jednoduchými příklady z reálného života tak, aby z nich byl postup Dirichletova principu zcela jasný.

V následující kapitole se podíváme do 19. století za mužem, po němž byl princip nazván, tedy za *Johannem Peterem Gustavem Lejeune Dirichletem.* Velmi nadaným matematikem, který, ačkoliv zajisté nebyl prvním, kdo použil myšlenku holubníkového principu, plně si zaslouží, aby po něm byl princip pojmenován.

Další kapitoly pak budou věnovány příkladům, které k získání řešení či k dokázání určitého tvrzení využívají Dirichletův princip. Všechny příklady budou doplněny o postup řešení a k některým geometrickým úlohám bude připojeno i grafické řešení.

V první podkapitole řešených příkladů se podíváme na úlohy z reálného života. Tyto úlohy budou odrážet různé reálné situace a k jejich vyřešení bude zapotřebí využívat postupy z různých matematických oborů. Následující příklady budou již rozděleny do podkapitol podle svého matematického zaměření – aritmetika, algebra a geometrie.

V podkapitole aritmetika budeme řešit příklady založené na vlastnostech přirozených čísel. Dokazování zadaných tezí se pak bude opírat především o pravidla dělitelnosti. V podkapitole algebra budeme řešit především úlohy s výrazy v nerovnicí. V podkapitole geometrie pak při řešení úloh budeme využívat vlastností a vztahů různých geometrických útvarů.

Cílem této diplomové práce je představit možnosti využití Dirichletova principu a vytvořit soubor řešených úloh napříč různými tématy a matematickými obory.

1 POJEM DIRICHLETŮV PRINCIP

1.1 ZÁKLADNÍ DEFINICE

Dirichletův princip, někdy nazývaný přihrádkový, zásuvkový nebo také holubníkový princip, je zdánlivě triviální tvrzení, které však lze využít k řešení některých velmi složitých matematických úloh.

Podívejme se tedy na jeho základní znění:

Věta 1.1

Máme-li n přihrádek, do kterých vložíme n+1 předmětů, tak vždy najdeme přihrádku, ve které budou alespoň dva předměty.

Důkaz věty 1.1.

Budeme předpokládat, že v každé přihrádce máme nejvýše jeden předmět. Potom ve všech přihrádkách máme nejvýše n předmětů. To je ale spor s původním zadáním, kde máme n+1 předmětů.
Tím je tvrzení dokázáno.

(1)(4)

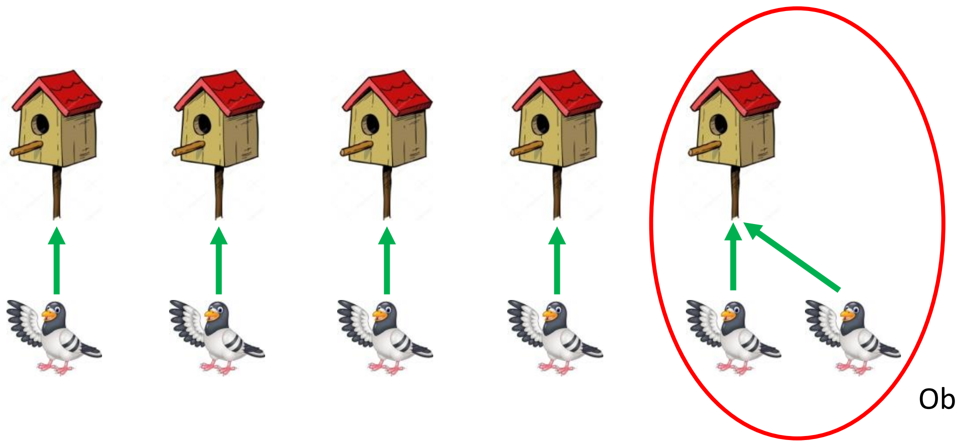
Tvrzení si nyní vyzkoušíme na jednoduchém příkladu v duchu „holubníkového“ principu:

Příklad 1.1.1

Máme 5 holubníků a 6 (tedy 5+1) holubů. Naším úkolem je umístit všechny holuby do našich pěti holubníků.

5 holubníků

6 holubů



Obr. č. 1.1.1

Řešení: Po obsazení všech holubníků jedním holubem, nám zbyl jeden holub. Nemáme jinou možnost než umístit tohoto holuba do již obsazeného holubníku. Tvrzení je tím pádem prokázáno, protože v jednom holubníku máme aspoň dva holuby.

Pro odlehčení můžeme ještě zmínit českou verzi tohoto tvrzení:

Dirichletův princip – česká verze

Uložíme-li večer do n zásuvek n+1 nebo více předmětů a ráno tam nemáme nic, pak nám někdo ukradl alespoň z jedné zásuvky alespoň dva předměty. (Emil Calda)

(4)

Využití v praxi

Asi nejznámějším příkladem, na kterém lze ukázat využití Dirichletova principu v praxi je „problém nespárovaných ponožek“:

Příklad 1.1.2.: Ponožkový problém

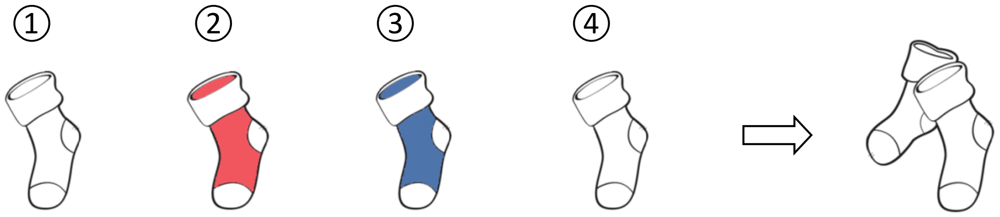
V šuplíku je nepřehledně rozházeno několik ponožek tří barev: bílé, červené a modré. Kolik ponožek nám bude stačit z šuplíku vytáhnout, abychom měli jistotu, že budeme mít alespoň jeden pár stejných ponožek?

K řešení využijeme Dirichletův princip:

Nejprve musíme určit, co nám bude reprezentovat „přihrádky“ a co objekty, které do nich budeme vkládat.

Máme tři druhy barevných ponožek, ty nám budou představovat naše přihrádky. (Bílá, červená a modrá přihrádka.) Objekty, které do nich budeme vkládat, jsou jednotlivé vytažené ponožky.

Nejhorší možná varianta, kdy z ponožek neutvoříme stejný pár, nám nastane ve chvíli, kdy vytáhneme od každé barvy jednu ponožku. V našem případě to budou tři různé ponožky. Jakmile ale vytáhneme čtvrtou ponožku, jedno jaké barvy, máme jistotu, že mezi těmito čtyřmi ponožkami najdeme pár.



Obr. č. 1.1.2

Matematicky vyjádřeno:

n = 3 (druhy ponožek) -> dle Dirichletova principu je námi hledané řešení **n+1, tedy 4**.

(4)

1.2 OBECNÁ DEFINICE

Existuje také obecnější verze tohoto tvrzení:

Věta 1.2

Máme-li n přihrádek, do kterých vložíme kn+1 (nebo více) předmětů, tak vždy najdeme přihrádku, ve které bude alespoň k+1 předmětů.

Počet přihrádek n zde bereme z přirozených čísel, budeme mít tedy alespoň jednu přihrádku.

Důkaz věty 1.2

Předpokládejme, že toto tvrzení neplatí. Vezmeme-li počet m_i předmětů v i-té skupině, pak platí $0 \leq m_i \leq k$, a to pro každé i = 1, ..., n. Sečtením n pravých nerovností dostaneme

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n \leq \underbrace{k + k + \cdots + k}_{n} = nk$$

neboli počet $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ všech rozdělených předmětů je nejvýše nk.

To je spor a tím je tvrzení dokázané.

Toto tvrzení nám vlastně říká logický fakt, že v žádném konečném souboru určitých kvantifikovatelných položek nemohou byt všechny hodnoty podprůměrné (nebo všechny nadprůměrné).

(1)(4)

Využití v praxi

I obecná verze Dirichletova principu má své široké využití i v praxi. Pomůže nám pochopit nebo dokázat některé velmi složité problémy, ale můžeme jej využít i k ukojení vlastní zvědavosti. Jako třeba například jestli může na světě existovat člověk, který se narodil ve stejné minutě jako já.

Příklad 1.2.: Mohli bychom na světě najít dva na minutu stejně staré lidi?

Dejme dohromady fakta. Na Zemi žije přibližně 7,7 miliardy obyvatel (rok 2019). Oficiálně nejstarším člověkem na Zemi byla Francouzka Jeanne Louise Calmentová, která se dožila 122 let. Dále pak budeme potřebovat vědět, kolik minut má jeden rok. Aby nevznikly pochybnosti ohledně výpočtů, počítejme s rokem, který má nejvíce dní, tedy 366.

Počet minut v přestupném roce: $366 \cdot 24 \cdot 60 = 527\,040$ minut

Počet minut za 122 let: $527\,040 \cdot 122 = 64\,298\,880$ minut

Víme, že v intervalu od 0 do 64 298 880 minut se narodilo přibližně 7 700 000 000 lidí. Využijme Dirichletův princip:

Jako přihrádky nám budou sloužit jednotlivé minuty, tedy $n = 64\,298\,880$. Do těchto přihrádek budeme přiřazovat lidi, kteří se narodili v tomto 122letém období, tedy $kn + p = 7\,700\,000\,000$.

Výpočet podle obecné definice: $n = 64\,298\,880,\qquad kn + p = 7\,700\,000\,000$

p je zbytek po celočíselném dělení číslem n, $1 \leq p < n$

$$k + \frac{p}{64\,298\,880} = \frac{7\,700\,000\,000}{64\,298\,880} \doteq 119{,}75$$

$$k + 1 = \lfloor 119{,}75 \rfloor + 1 = 120$$

Pozn.: k+1 = 120 je pouze přibližná hodnota. I počet obyvatel 7,7 mld, se kterým jsme počítali, je pouze přibližný.

Závěrem můžeme říci, že pomocí Dirichletova principu jsme dokázali, že na světě musí existovat alespoň 2 lidé, kteří se narodili ve stejné minutě. Ba co víc, my nyní víme, že jich bude existovat mnohem víc, viz přibližné k+1=120.

(7)

2 PO KOM DOSTAL PRINCIP SVŮJ NÁZEV?

Nedá se s jistotou říct, kdo přesně na tento princip přišel. Už jen proto, že jeho základní myšlenka je tak jednoduchá, že si ji skoro každý může odvodit sám. V jednoduchosti se však skrývá síla, a právě této síly dokázal využít německý matematik *Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet.* Ten jako první použil přihrádkový princip při důkazu diofantických aproximací (tento důkaz si ukážeme později).

Dirichlet se narodil 13. února 1805 v Dürenu, dnes německém městečku ležícím přibližně padesát kilometrů jihozápadně od Kolína nad Rýnem. V devatenáctém století se o oblast západně od Rýna přetahovala Francie a tehdejší Prusko, a tak byl v ranném dětství Dirichlet nejprve francouzským občanem a po porážce Napoleona u Waterloo se stal občanem Pruska.

Své nezvyklé příjmení zdědil Dirichlet po svých předcích, kteří do Dürenu přišli z Belgie od řeky Richlette. Odtud vznikla část příjmení Dirichlete, zkomolením de Richlette (od řeky Richlette). Druhá část příjmení Lejeune vychází z francouzského slova mladík. Kdy obyvatelé městečka Düren potřebovali rozlišit nově příchozí obyvatele na staršího pana Dirichtela a jeho syna „mladíka“ Dirichleta. Peter Gustav byl tedy potomkem „mladíka od řeky Richlette“.

Dirichlet byl již v mládí velmi nadaným chlapcem a jeho sklon k matematice se projevil velmi brzo. Ve dvanácti letech si ze svého kapesného koupil první knihu o matematice. Když zjistil, že danému matematickému tématu nerozumí, rozhodl se ji číst znovu a znovu, dokud téma zcela nepochopil.

Dirichletovi rodiče se snažili dát svému synovi to nejlepší vzdělání, které si mohli dovolit. A tak ho ve 12 letech poslali na gymnázium v Bonnu. Po dvou letech pak přestoupil na jezuitské gymnázium v Kolíně, kde se učil matematiku od samotného George Simona Ohma. V 16 letech pak na této škole získal závěrečný certifikát. Zajímavostí je, že Dirichlet nikdy nesplnil podmínky maturitní zkoušky. Součástí maturity totiž v té době byla i zkouška z latiny. Ta nikdy nebyla Dirichletovým oblíbeným předmětem a zkoušku z ní nesplnil. I přes to se ale mohl dál vzdělávat, a tak na přání rodičů začal studovat právo. Na matematiku však nezanevřel a sám ji studoval po večerech. Po nějaké době rodiče sami uznali, že má jejich syn větší nadání pro matematiku nežli pro právo, a tak mu povolili studium matematiky.

V době, kdy Dirichlet konečně mohl naplno studovat svou milovanou matematiku, nebyla v Německu žádná škola, která by splňovala matematickou úroveň takovou, jakou si Dirichlet představoval. Na univerzitě v Göttingenu sice učil velmi uznávaný matematik a fyzik Carl Friedrich Gauss. Ten se ale v té době zabýval převážně astronomií. Navíc o něm bylo známo, že semináře, které vedl, neučil příliš s láskou, protože látka, která se na nich probírala, byla hluboko pod jeho úrovní. A tak se Dirichlet rozhodl svá matematická studia zahájit ve Francii, kde působily takové matematické kapacity, jako například P.-S. Laplace, A.-M. Legendre, J. Fourier, S.-D. Poisson nebo A.-L. Cauchy.

Studium ve Francii neslo ovoce, jedním z významných témat, kterým se Dirichlet zabýval, byla Fermatova věta z roku 1637. Která zní: „Krychli nelze rozdělit na dvě krychle, ani čtvrtou mocninu na dvě čtvrté mocniny, a obecně žádnou vyšší mocninu na dvě mocniny téhož stupně“. (Fermat, 1637) Jinak řečeno: Jestliže je přirozené číslo $n \geq 3$, pak neexistují celá čísla $a, b, c \neq 0$ taková, že $a^n + b^n = c^n$. K této větě Fermat připsal poznámku: „Objevil jsem úžasný důkaz, na který není na tomto okraji dosti místa.“. S důkazem této věty se trápili matematici celá staletí. Fermatův obecný důkaz pro celou větu se však nikdy nenašel. Dochoval se pouze jeho důkaz pro $n = 4$. Dlouhá léta nebyl podán žádný další důkaz k této větě. Až věhlasný švýcarský matematik Leonhard Euler dokázal toto tvrzení i pro $n = 3$. O více než padesát let později předložil teprve dvacetiletý Dirichlet francouzské Akademii věd důkaz Fermatovy věty pro $n = 5$. I přes jeho mládí, přes to, že nikdy předtím nepublikoval žádné své vlastní dílo, dokonce i přes to, že neměl žádný akademický titul, bylo mu povoleno přednést tento důkaz členům francouzské Akademie věd. Po prozkoumání jeho důkazu se matematičtí odborníci shodli na tom, že jeho teze je správná, a Dirichlet si tak získal velké uznání široké matematické obce. O sedm let později pak Dirichlet dokázal i tvrzení Fermatovy věty pro $n = 14$.

Ve svých jednadvaceti letech se Dirichlet vrací zpět do Pruska, kde mu bylo povoleno habilitovat se na univerzitě v Breslau (dnešní Wrocław, Polsko) s podmínkou, že zde dokončí své doktorské studium. Nastal však stejný problém jako při splnění, respektive nesplnění, maturitní zkoušky. Dirichlet nepublikoval svůj důkaz Fermatovy věty pro $n = 5$

v latině, ale hlavně jej nebyl schopen v latině plynně obhájit. Po dlouhotrvajícím dohadování pruských akademiků mu ale byl nakonec udělen čestný doktorát.

Dalším jeho působištěm se stala Univerzita v Berlíně, kde měl zprvu povoleno přednášet jen některé semináře. V roce 1831 byl ale již jako stálý pedagog zařazen pod filozofickou fakultu. V témže roce byl zvolen do Královské akademie věd v Berlíně a v roce 1832 do ní byl samotným králem uveden jako její dosavadní nejmladší člen. V té době mu bylo pouhých 27 let.

Současně s výukou na berlínské univerzitě působil i na berlínské vojenské škole. Tam strávil celých 27 let. Po Gaussově smrti v roce 1858 mu bylo nabídnuto zaujmout jeho místo na univerzitě v Göttingenu. Tuto nabídku přijal, avšak necelý rok poté sám umírá na srdeční příhodu.

Dirichlet byl bezpochyby velkým a všestranným matematikem. Jeho stopy najdeme napříč různými matematickými obory, jako například v teorii čísel, geometrii, matematické analýze či v oboru pravděpodobnosti a statistiky. Mezi jeho nejpřínosnější počiny patří již zmíněný důkaz Fermatovy věty pro n = 5 a n = 14; dále pak Dirichletova věta o aproximaci, ve které použil holubníkový princip; Dirichletova funkce, první uznaná „netradiční“ funkce či Dirichletova věta o prvočíslech v aritmetických posloupnostech.

(2)

3 PŘÍKLADY

Tato kapitola obsahuje sbírku řešených příkladů, které k získání výsledku nebo důkazu nějakého tvrzení využívají Dirichletův princip.

Kapitola je rozdělena do tematických podkapitol. První podkapitola obsahuje příklady z běžného života. Následující podkapitoly pak sdružují příklady stejného matematického zaměření, tedy aritmetiky, algebry a geometrie.

3.1 PŘÍKLADY Z BĚŽNÉHO ŽIVOTA

Zadání těchto úloh jsou koncipována tak, aby odrážela situace z reálného života. Z matematického hlediska se jedná o průřez různými matematickými obory.

Příklad 3.1.1

Ve firmě pracuje 129 zaměstnanců. Ředitel, který má nejvyšší plat ze všech zaměstnanců, dostává měsíční mzdu 150 tisíc Kč. Dokažte, že jsou ve firmě alespoň dva zaměstnanci, kteří mají v řádech tisíců stejný plat. Předpokládejme, že žádný zaměstnanec nepobírá nižší než minimální mzdu (v roce 2019: 13 350,- Kč).

Řešení:

Platy zaměstnanců se pohybují v rozmezí 13 350 Kč až 150 000 Kč. V řádech tisíců je můžeme rozdělit do skupin od 13 do 150. Vznikne nám tedy 128 platových tříd. Do těchto tříd budeme přiřazovat jednotlivé zaměstnance. Protože je ve firmě více zaměstnanců, než je platových tříd, máme jistotu, že budou existovat alespoň dva zaměstnanci, kteří budou mít v řádech tisíců stejný plat.

$n = 128$ (platových tříd) $n + 1 = 129$ (zaměstnanců)

Příklad 3.1.2

Mistrovství Evropy v jachtingu se zúčastnilo 50 posádek z 16 zemí. Dokažte, že na mistrovství byly alespoň 4 posádky ze stejné země.

Řešení:

Posádky rozdělíme do 16 skupin podle zemí, ze kterých pocházejí. Máme-li 16 skupin a více než $3 \cdot 16 = 48$ posádek, musí existovat alespoň 4 posádky pocházející ze stejné země.

Příklad 3.1.3

Na mezinárodním summitu se sešlo 105 vyslanců, kteří hovoří 13 různými jazyky. Stejným jazykem hovoří nejvýše 19 vyslanců. Organizační výbor rozhodl, že oficiálním jazykem bude takový jazyk, kterým hovoří nejméně 7 vyslanců. Dokažte, že na summitu byly alespoň 3 oficiální jazyky.

Řešení:

Zkusme najít první oficiální jazyk. 105 vyslanců rozdělme do 13 jazykových skupin. Máme-li 13 skupin a více než $8 \cdot 13 = 104$ vyslanců, pak podle Dirichletova principu musí existovat alespoň 9 vyslanců, kteří hovoří jedním jazykem. Nazvěme tento jazyk například písmenem A. Tento jazyk splňuje podmínku oficiálního jazyka summitu. Jazykem A může hovořit nejvýše 19 vyslanců. Zbývající vyslanci, tedy $105 - 19 = 86$, hovoří jinými jazyky.

Mezi těmito jazyky zkusme najít jazyk B, který také bude splňovat podmínku oficiálního jazyka. Jazyk B je jedním z 12 jazyků, kterými hovoří 86 vyslanců. Utvořme 12 jazykových skupin, kterým budeme přiřazovat 86 vyslanců. Protože těchto vyslanců je více než $7 \cdot 12 = 84$, máme jistotu, že existuje alespoň 8 vyslanců, kteří hovoří stejným jazykem. Tento jazyk splňuje podmínku oficiálního jazyka, nazvěme jej tedy jazykem B. Jazykem B může opět hovořit pouze 19 vyslanců. Zbyde nám tedy $86 - 19 = 67$ vyslanců hovořících jinými jazyky, než je jazyk A a B.

Třetí oficiální jazyk budeme hledat mezi 67 vyslanci mluvícími 11 jazyky. Opět rozdělíme vyslance do jazykových skupin. Máme-li 11 skupin a více než $11 \cdot 6 = 66$ vyslanců, pak zcela jistě existuje 7 vyslanců, hovořících stejným jazykem. Tento jazyk splňuje podmínku oficiálního jazyka a nazvěme jej například jazykem C.

Našli jsme tři jazyky A, B a C, u kterých víme, že jimi hovoří alespoň 7 vyslanců. Splňují tedy náležitost oficiálního jazyka summitu a tvrzení je tím dokázáno.

Pozn.: Důkaz pro čtvrtý oficiální jazyk už bychom nenalezli. Jsme schopni dokázat pouze to, že mezi zbývajícími 48 vyslanci hovořícími 10 jazyky je 5 vyslanců, kteří hovoří jedním jazykem ($10 \cdot 4 = 40 < 48$). Oficiálním jazykem však musí hovořit alespoň 7 vyslanců.

(1)

Příklad 3.1.4

Ve školním poháru, kterého se účastní 6 družstev, se vždy najde trojice družstev, která spolu hrála každé s každým, nebo trojice, ve které žádné se žádným družstvem ještě nehrálo. Dokažte, že tomu tak doopravdy je.

Řešení

Označme daná družstva písmeny A, B, C, D, E a F. Rozdělme družstva B až F do dvou skupin podle toho, jestli s družstvem A hrála nebo nehrála. Podle Dirichletova principu existuje alespoň jedna skupina, ve které jsou nejméně 3 družstva. Zvolme těmito družstvy například B, C a D.

Řekněme, že je to například skupina, která již s družstvem A hrála. Pokud spolu žádné z družstev B, C a D nehrálo, pak jsme nalezli trojici družstev, kde nikdo s nikým nehrál. Pokud jedno z těchto družstev hrálo s druhým z této skupiny, pak spolu s družstvem A tvoří trojici, kde každé družstvo hrálo s každým.

Obdobně bychom postupovali, kdybychom družstva B, C a D zařadili do skupiny, kde žádné z nich nehrálo s družstvem A. Dobrali bychom se tím ke stejnému závěru.

(1)

Příklad 3.1.5

Na šachovnici s 8x8 poli stojí 25 věží. Dokažte, že mezi nimi existují alespoň 4, které se vzájemně neohrožují. (Pojmem „dvě věže se neohrožují“ rozumějme to, že tyto věže nestojí ve stejném řádku ani ve stejném sloupci.)

Řešení:

Rozdělme pole šachovnice do 8 skupin po 8 polích tak, aby pole v jednotlivých skupinách ve stejném řádku ani sloupci. Toho docílíme tak, že pole stejné skupiny se budou nacházet na diagonálách, viz rozdělní níže:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Obr. č. 3.1.5

Máme tedy skupiny polí, o kterých víme, že se na nich věže vzájemně neohrožují. Zbývá jen dokázat, že alespoň v jedné této skupině, budeme moci nalézt 4 vzájemně se neohrožující věže.

Celkem máme na šachovnici 25 věží. Tyto věže spadají do námi zvolených 8 skupin. Protože $25 > 3 \cdot 8 = 24$, pak podle Dirichletova principu víme, že existuje alespoň jedna skupina vzájemně se neohrožujících věží, která obsahuje 4 věže.

(5)

Příklad 3.1.6

Herní deska hry „Člověče nezlob se" je tvořena 36 políčky, které tvoří uzavřený řetězec. Jaký je nejmenší počet figurek, které potřebujeme k tomu, abychom při jejich libovolném rozmístění a libovolném hodu kostkou mohli nějakou figurku jinou figurkou „vyhodit"?

Řešení:

Zkusme nejprve rozmístit figurky vždy ob jedno pole. Budou se nám tedy střídat prázdná a obsazená políčka. Na takovéto rozmístění potřebujeme 18 figurek. Padne-li nám na kostce liché číslo (jednička, trojka nebo pětka), pak posuneme figurky pouze na prázdná políčka a žádnou jinou figurku nevyhodíme. Takže 18 figurek nám stačit nebude.

Zkusme to nyní s 19 figurkami. Libovolně je rozestavme v poli a předpokládejme, že při hodu kostkou nám padlo číslo k. Uvažujme, že i těchto 19 figurek je rozmístěno tak, že žádná nemůže vyhodit jinou figurku. Pokusíme se dojít ke sporu a tím dokázat, že 19 figurek nám stačit bude.

Posuňme všechny figurky o k políček. Protože máme na herní desce 36 polí a můžeme se posunout nejvýše o 6 míst, nemůže se nám stát, že by se jakákoliv figurka přesunula opět na své původní místo. Předpokládáme-li, že žádná figurka nevyhodí jinou, pak políčka, na která jsme figurky přesunuli, musí být prázdná. Máme tedy 19 původních pozic a 19 nových pozic, dohromady tedy 38 různých polí. Tady ale narážíme na spor, herní deska má pouze 36 polí!

Dokázali jsme tedy, že při libovolném rozmístění 19 figurek a libovolném hodu kostkou budeme schopni vyhodit alespoň jednou figurkou jinou figurku.

(5)

Příklad 3.1.7

Karel se učí na zkoušku z matematiky. Do zkoušky mu zbývá 57 dní, každý den chce spočítat alespoň jeden příklad ze sbírky 98 příkladů. Dokažte, že v nějakých po sobě jdoucích dnech vypočítal přesně 20 příkladů.

Řešení:

Pro pořádek nejprve označme s_i jako počet příkladů, které Karel vypočítal do i-tého dne (včetně): $s_0 = 0, s_1 =$ počet vyřešených příkladů za první den, $s_2 =$ počet vyřešených příkladů do druhého dne, …, $s_{57} \leq$ celkový počet příkladů, tedy 94.

Protože víme, že Karel každý den spočítal alespoň jeden příklad, můžeme zapsat tvrzení:

$$s_0 < s_1 < s_2 \ldots < s_{57} \leq 94$$

Nyní potřebujeme nalézt taková i a j, že bude platit vztah $s_i + 20 = s_j$. Tedy že ve dnech $s_i + 1, s_i + 2, \ldots, j$ spočítal Karel přesně 20 příkladů. Zkusme tedy mezi čísly:

$$s_0, s_1, \dots, s_{57}, s_0 + 20, s_1 + 20, \dots, s_{57} + 20$$

najít dvě taková, která si budou rovna. Těchto čísel je $58 \cdot 2 = 116$ a hodnoty, kterých nabývají, jsou 0 až $94 + 20 = 114$, tedy 115 různých hodnot. Podle Dirichletova principu pak existují alespoň 2 z těchto čísel, která mají stejnou hodnotu. Protože čísla s_i a tedy i $s_i + 20$ tvoří rostoucí posloupnost, je jedno z těchto čísel číslo s_j a druhé $s_i + 20$. Tím je dokázáno, že v nějakých po sobě jdoucích dnech spočítal Karel právě 20 příkladů.

(5)

Příklad 3.1.8

Dokažte, že na červnovém koncertu v lochotínském amfiteátru byli ten den alespoň dva lidé, kteří měli mezi posluchači stejný počet známých. (S jistotou víme, že na koncertu byli více než dva posluchači.)

Řešení:

Na koncert dorazil určitý počet n posluchačů. Víme, že každý z těchto posluchačů může mít na koncertu $0 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee (n-1)$ známých. Zároveň víme, že zde současně nemůže být člověk, který nezná žádného z posluchačů, a člověk, který zná naopak všechny přítomné. Tím pádem se nám počet možností snižuje na $n - 1$. Bude-li na koncertu člověk, který nezná nikoho, pak posluchači mohou mít na koncertu $0 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee (n-2)$ známých. Bude-li na koncertu člověk, který zná všechny přítomné, pak mohou mít posluchači na koncertu $1 \vee 1 \vee 2 \vee \dots \vee (n-1)$ známých. Máme tedy n posluchačů, kterým budeme přiřazovat $n - 1$ možností. Dle Dirichletova principu pak zcela jistě existují alespoň dva posluchači, kteří mají na koncertu stejný počet známých.

(7)

Příklad 3.1.9

Ve čtvercovém parku o rozměrech 100x100 metrů je rozmístěno několik stromů. Jejich koruny mají z pohledu z výšky tvar kruhu. Tyto koruny se možná někde vzájemně překrývají, žádná z nich však nepřesahuje hranice parku. Celkový obvod korun stromů v parku činí 1300 metrů. Město chce skrz park vybudovat přímou pěšinu, kterou by, byť třeba jen částečně, překrývalo alespoň pět korun stromů (šíři pěšiny zanedbejme). Dokažte, že takovouto pěšinu lze v parku vybudovat.

Pozn.: Pro úplnost dodejme, že žádné dva kmeny stromů nerostou ve stejné řadě ani sloupci.

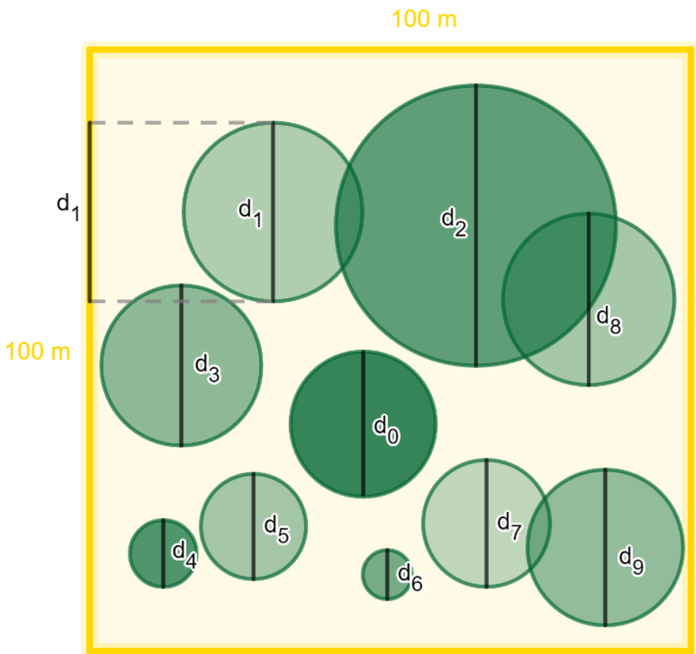
Řešení:

Z celkového obvodu korun můžeme zjistit celkový součet průměrů všech korun:

$$d = 1300/\pi$$

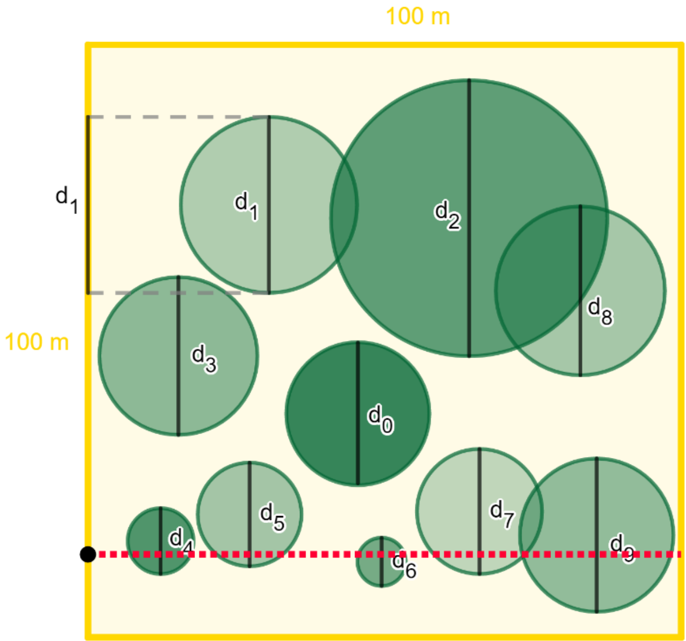
$$d \doteq 414\ m$$

Zvolme jednu stranu parku a všechny koruny stromů na ni kolmo promítněme. Koruna o průměru d_i se na stranu promítne jako úsečka o délce d_i.



Obr. č. 3.1.9a

Protože strana parku měří 100 metrů a délka všech průměrů korun stromů je 414 m, musí se dle Dirichletova principu na zvolené straně v určitém bodě překrývat alespoň pět kolmých průmětů korun stromů (úseček). Povedeme-li z takovéhoto bodu kolmici ke straně parku, pak tato přímka bude prcházet alespoň pěti korunami stromů. Dokázali jsme tedy, že možné vést parkem požadovanou pěšinu.



Obr. č. 3.1.9b

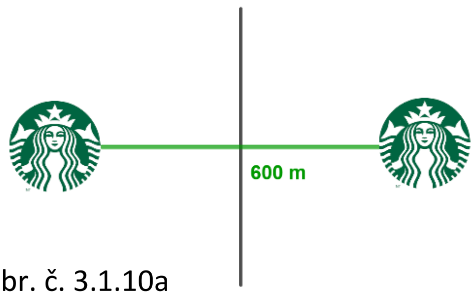
(5)

Příklad 3.1.10

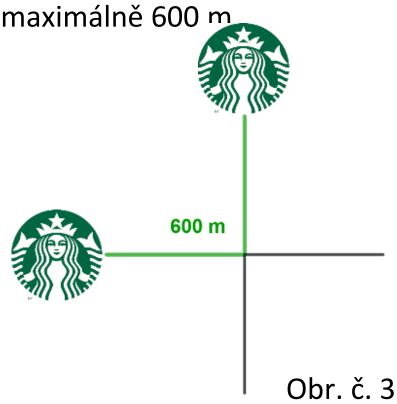
Městská část Manhattan se skládá z 65 severojižních a 65 západovýchodních ulic, které tvoří pravidelnou čtvercovou síť. Délka každé ulice od křižovatky ke křižovatce je 300 m. Na Manhattanu se nachází 2 200 kaváren Starbucks. Dokažme, že existují alespoň 2 z těchto kaváren, které jsou od sebe vzdáleny nejvýše 600 m chůze po ulici.

Řešení:

Vezměme si křižovatku, ze které vychází 4 ulice. Umístíme-li na ní dvě kavárny Starbucks, pak víme, že jejich pěší vzdálenost bude maximálně 600 m.



Obr. č. 3.1.10a



Obr. č. 3.1.10b

Nyní musíme zvolit šikovný způsob, jak touto „křižovatkou“ (křižovatka a 4 přilehlé ulice) pokrýt celý Manhattan. Na první severojižní ulici umístěme centrum „křižovatky“ do místa, kde se ulice protíná s druhou, čtvrtou,… až šedesátou čtvrtou západovýchodní ulicí.

Takto to udělejme se všemi lichými severojižními ulicemi. Na druhou severojižní ulici umístěme centrum „křižovatky“ do místa, kde se ulice protíná s první, třetí,… až šedesátou pátou západovýchodní ulicí. Takto to udělejme se všemi sudými severojižními ulicemi. Tím máme pokrytou celou oblast Manhattanu. Nyní už jen spočítejme, kolik „křižovatek“ jsme vlastně použili.

$$32 \cdot 33 + 33 \cdot 32 = 2\,112$$

Manhattan jsme tedy pokryli 2 112 „křižovatkami“. Protože kaváren Starbucks je zde 2 200, víme z Dirichletova principu, že musí existovat alespoň dvě kavárny, které jsou od sebe chůzí vzdáleny maximálně 600 m.

(5)

3.2 ARITMETIKA

Tato podkapitola obsahuje příklady zabývajícími se vlastnostmi přirozených čísel. Dokazování zadaných tezí se bude opírat vesměs o pravidla dělitelnosti.

Příklad 3.2.1

Je dáno $n+1$ různých celých čísel. Dokažte, že mezi těmito čísly lze najít dvě taková, jejichž rozdíl bude dělitelný číslem n.

Řešení:

Budeme-li dělit různých $n+1$ čísel číslem n, pak nám po tomto dělení vždy zůstane jeden ze zbytků: $0, 1, 2, \dots, n-1$ (dohromady n zbytků). Z Dirichletova principu vyplývá, že mezi $n+1$ různými celými čísly lze najít alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek po dělení číslem n. Nazvěme tato čísla například písmeny a a b a společný zbytek po dělení číslem n nazvěme z:

$$a = n \cdot k_1 + z$$

kde $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$

$$b = n \cdot k_2 + z$$

Pak rozdíl čísel a a b můžeme zapsat takto:

$$a - b = n(k_1 - k_2) \quad \Rightarrow \quad n|(a-b)$$

Po odečtení zbytků nám zůstanou jen čísla dělitelná číslem n, jejich rozdíl je pak také dělitelný číslem n.

(3)

Příklad 3.2.2

Dokažte, že mezi 125 různými přirozenými čísly je možné nalézt několik takových, že jejich součet je dělitelný 125.

Řešení:

Označme jednotlivá čísla následovně: $a_1, a_2, \dots, a_{125}$. Z těchto čísel utvořme součty: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, …, $s_{125} = a_1 + a_2, \dots, a_{125}$. Těchto součtů je 125. Budeme-li je dělit číslem 125, zbyde nám po dělení vždy jeden z následujících zbytků: $0, 1, 2, \dots, 124$.

Má-li některý ze součtů s_1 až s_{125} zbytek po tomto dělení 0, pak jsme nalezli hledaný součet.

Mají-li všechny součty zbytek po dělení různý od 0, pak dle Dirichletova principu existují alespoň dva součty, které mají stejný zbytek po dělení 125. Z příkladu 3.2.1 víme, že rozdíl takovýchto dvou čísel je dělitelný číslem 125. Musí tedy existovat součet některých čísel z a_1 až a_{125}, který je dělitelný číslem 125.

(7)

Příklad 3.2.3

Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n lze najít takové číslo, které je složené pouze z číslic 3 a 0 a je dělitelné číslem n.

Řešení:

Zkusme zapsat n čísel tvořených číslicemi 3 a 0, kde 3 a 0 se budou pravidelně střídat:

$$\underbrace{30, 3030, 303030, \dots, 30 \dots 30 \dots 30}_{n \text{ čísel}}$$

Budeme-li dělit těchto n čísel číslem n, pak jejich zbytky budou nabývat některé z hodnot $0, 1, \dots, n-1$. Nalezneme-li mezi těmito čísly číslo se zbytkem 0, pak má, co jsme hledali.

Nebude-li mezi těmito čísly číslo se zbytkem 0, pak máme $n-1$ zbytků pro n čísel. Dle Dirichletova principu tedy existují dvě čísla se stejným zbytkem po dělení číslem n. Z příkladu 3.2.1 víme, že rozdíl takovýchto dvou čísel je dělitelný číslem n.

Nyní jen zbývá dokázat, že rozdíl dvou takovýchto čísel je opět číslo tvořené číslicemi 0 a 3. Nazvěme tato čísla a_i a a_j, kde ia j značí počet dvojic 3, 0 a $j < i$, a zapišme jejich rozdíl:

$$a_i - a_j = 3\underbrace{0303030\ldots30}_{i} - 3\underbrace{030\ldots30}_{j} = \underbrace{3030}_{i-j}\,\underbrace{0000\ldots00}_{j}$$

Rozdílem čísel a_i a a_j vznikne opět číslo tvořené číslicemi 3 a 0 a tvrzení je tím pádem dokázáno.

(7)

Příklad 3.2.4

Dokažte, že ke každému přirozenému číslu n lze najít přirozená čísla a a b taková, že rozdíl čísel 5^a a 5^b je dělitelný číslem n.

Řešení:

Řekněme, že máme $n+1$ mocnin čísla 5: $5, 5^2, 5^3, \ldots, 5^n, 5^{n+1}$. Budeme-li nyní tato čísla dělit číslem n, získáme maximálně n různých zbytků: $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Dle Dirichletova principu mezi těmito mocninami existují dvě takové, které mají stejný zbytek po dělení číslem n.

Z příkladu 3.2.1 již víme, že rozdíl takovýchto dvou čísel je dělitelný číslem n. Tvrzení je tedy dokázáno.

(7)

Příklad 3.2.5

Dokažte, že z každých 12 dvouciferných čísel lze vždy vybrat dvě taková, že jejich rozdíl se dá napsat jako dvouciferné číslo se stejnými ciframi.

Řešení:

Zapišme všechna dvouciferná čísla se stejnými ciframi: $11, 22, \ldots, 99$. Všechna tato čísla mají stejného dělitele – číslo 11.

Po celočíselném dělení číslem 11 nám vždy zůstane jeden z 11 zbytků: $0, 1, \ldots, 10$. Protože těmto zbytkům přiřazujeme 12 čísel, pak dle Dirichletova principu existují alespoň dvě čísla, která mají stejný zbytek po dělení číslem 11.

Na základě důkazu z příkladu 3.2.1 víme, že rozdíl těchto čísel je dělitelný číslem 11. Tedy je jedním z čísel $11, 22, \dots, 99$ a důkaz je hotov.

(1)

Příklad 3.2.6

Je dáno 501 různých přirozených čísel. Dokažte, že mezi nimi existuje alespoň 6 čísel, která mají stejné dvě poslední číslice dekadického zápisu.

Řešení:

Zapišme všechny možnosti rozmístění dvou posledních čísel dekadického zápisu:

$$00, 01, \dots, 52, 53, \dots 98, 99 \quad \Longrightarrow \quad 100 \text{ možností}$$

Jednotlivým dvojicím dekadického zápisu budeme přiřazovat 501 zadaných čísel. Dle Dirichletova principu pak zcela jistě existuje alespoň 6 čísel, která mají na posledních dvou místech dekadického zápisu stejná čísla.

(3)

Příklad 3.2.7

Je dáno 7 libovolných přirozených čísel. Dokažte, že z nich lze vybrat 4 taková, že jejich součet je dělitelný číslem 4.

Řešení:

Nejprve si uvědomme, že podle Dirichletova principu lze z libovolné trojice čísel vybrat dvě taková čísla, že budou obě stejné parity – tedy buď obě sudá, anebo obě lichá. Součet takovýchto čísel je pak vždy sudý.

Z našich 7 zadaných přirozených čísel lze tedy vybrat dvojici (a, b), která má stejnou paritu a její součet je tím pádem sudý. Z ostatních 5 čísel lze opět vybrat dvojici (c, d) se sudým součtem a ze zbylých 3 čísel také můžeme vybrat dvojici (e, f), která má sudý součet.

Budeme-li dělit tyto sudé součty číslem 4, pak po dělení zůstane buď zbytek 0, nebo 2. Protože máme 3 tyto součty, můžeme podle Dirichletova principu s jistotou říct, že alespoň dva mají stejný zbytek po dělení číslem 4. Pokud je oním stejným zbytkem 0, pak je důkaz ukončen.

Pokud mají tyto dva součty zbytek po dělení 2, pak jejich součet je dělitelný 4 (součet zbytků 2 a 2 je dělitelný 4). Dokázali jsme tedy, že mezi 7 libovolnými přirozenými čísly lze vždy vybrat čtyři, jejichž součet je dělitelný číslem 4.

(3)

Příklad 3.2.8

Mějme množinu A, která obsahuje 9 libovolných různých přirozených čísel. Žádné z těchto čísel není větší než 50. Dokažte, že lze vybrat dvě podmnožiny množiny A takové, že součet jejich prvků bude stejný.

Řešení:

Z 9 prvků množiny A může vzniknout celkem $2^9 - 1 = 511$ různých neprázdných podmnožin.

Nyní si uvědomme, jakých hodnot mohou nabývat součty prvků libovolné podmnožiny množiny A. Libovolný takový součet nazvěme S:

$$S \leq 42 + 43 + \cdots + 49 + 50 < 9 \cdot 50 = 450$$

Nejvyšší součet, kterého libovolná podmnožina množiny A může nabývat, má zcela jistě nižší hodnotu než 450. Vezmeme-li 450 jednotlivých hodnot a budeme jim přiřazovat 511 různých podmnožin, pak dle Dirichletova principu existují alespoň dvě podmnožiny, jejichž součet prvků je stejný.

(3)

Příklad 3.2.9

Je dána rostoucí posloupnost přirozených čísel $a_1 < a_2 < a_3 \ldots$, pro kterou platí $a_1 = 1$ a $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \leq 2n$. Dokažte, že každému přirozenému číslu n lze nalézt dva členy a_i a a_j dané posloupnosti takové, že $a_i - a_j = n$.

Řešení:

Ze zadání víme, že prvky dané posloupnosti jsou menší než $2n$, tuto množinu nazvěme množinou A:

$$A = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1} < 2n$$

Vezměme množinu B všech $2n$ přirozených čísel a rozdělme ji do n dvojic následujícím způsobem:

$$B = \{[1; n+1], [2; n+2], \dots, [n; 2n]\}$$

Tyto dvojice tvoří čísla, jejichž rozdíl je vždy číslo n.

Zaměřme se nyní na počet prvků v daných množinách. Množina A obsahuje $n+1$ prvků, množina B jich obsahuje jen n. Budeme-li přiřazovat jednotlivé prvky z množiny A množině B, pak dle Dirichletova principu bude existovat alespoň jedna dvojice čísel z množiny B, které jsou přiřazeny dva prvky z množiny A.

Existují tedy dva členy a_i a a_j posloupnosti A takové, že jejich rozdíl se rovná číslu n, a důkaz je hotov.

(3)

Příklad 3.2.10

Je dáno přirozené číslo n. Vyberme $n+1$ libovolných čísel množiny $\{1, 2, \dots, 2n\}$. Dokažte, že mezi vybranými čísly lze najít dvě různá čísla taková, že jedno z nich dělí druhé.

Řešení:

Každé přirozené číslo můžeme zapsat ve tvaru $2^k \cdot l$, kde k a l jsou přirozená čísla a l je číslo liché.

Zapišme tedy každé z vybraných $n+1$ čísel ve tvaru $2^{k_i} \cdot l_i$, kde $i \in \{1, \dots, n+1\}$. Čísla l_i mohou nabývat hodnot $1, 3, 5, \dots, 2n-1$, celkem tedy n hodnot. Z Dirichletova principu vyplývá, že mezi vybranými $n+1$ čísly budou existovat alespoň dvě taková čísla, která mají stejné liché číslo l, tedy pro nějaká $a \neq b$ platí $l_a = l_b$. Bez újmy na obecnost předpokládejme, že $b < a$, pak:

$$\frac{2^{k_a} \cdot l_a}{2^{k_b} \cdot l_b} = \frac{2^{k_a} \cdot l_a}{2^{k_b} \cdot l_a} = 2^{k_a - k_b}$$

Dělením těchto dvou čísel vznikne přirozené číslo, tím pádem jsme mezi vybranými $n + 1$ čísly nalezli dvě, z nichž jedno dělí to druhé beze zbytku.

(5)

3.3 ALGEBRA

Tato podkapitola se bude zabývat úlohami s výrazy v nerovnicí, k jejichž řešení bude využívat Dirichletův princip.

Příklad 3.3.1

Na uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$ je n reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$, kde $n \geq 2$. Dokažte, že lze vždy najít indexy $i \neq j$ takové, že platí

$$\left|x_i - x_j\right| \leq \frac{(b-a)}{(n-1)}$$

Řešení:

Interval $\langle a; b\rangle$ rozdělme na $n-1$ stejných intervalů o délce $\frac{(b-a)}{(n-1)}$. Dle Dirichletova principu se v jednom z těchto intervalů nachází alespoň dvě z čísel $x_1, x_2, \dots, x_n$. Předpokládejme, že jsou to čísla x_i a x_j, kde $i \neq j$ a $i, j = \{1, 2, \dots, n\}$. Pak platí:

$$\left|x_i - x_j\right| \leq \frac{(b-a)}{(n-1)}$$

a tvrzení je dokázáno.

Toto tvrzení nám pomůže při řešení následujících příkladů.

(3)

Příklad 3.3.2

Je dána množina $A = \{1, 2, 3, \dots, 243\}$. Dokažte, že ze tří libovolných prvků množiny A lze vždy vybrat dva prvky x, y, tak aby platilo $0 < \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y} \leq 1$.

Řešení:

Nechť a_1, a_2, a_3 jsou prvky z množiny A. Zvolme $z_i = \sqrt[5]{a_i}$, kde $i = 1, 2, 3$. Protože $\sqrt[5]{1} = 1$ a $\sqrt[5]{243} = 3$, může číslo z_i nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle 1; 3\rangle$.

Rozdělme nyní tento interval na dva intervaly $\langle 1; 2\rangle$ a $\langle 2; 3\rangle$. Z Dirichletova principu víme, že budeme-li dvěma intervalům přiřazovat tři čísla z_1, z_2, z_3, pak alespoň dvě z nich budou náležet stejnému intervalu.

Z toho vyplývá, že $0 < z_i - z_j \leq 1$, tedy $0 < \sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{y} \leq 1$.

(3)

Příklad 3.3.3

Dokažte, že lze nalézt celá čísla a, b, c taková, že absolutní hodnota každého je menší nebo rovna 10^5, alespoň jedno z těchto čísel je nenulové a všechna vyhovují nerovnici:

$$\left|a + b\sqrt{3} + c\sqrt{5}\right| < 10^{-9}$$

Řešení:

Řekněme, že M je množina 10^{15} reálných čísel ve tvaru $p + q\sqrt{3} + r\sqrt{5}$, kde $p, q, r \in \{0, 1, 2, \dots, 10^5 - 1\}$. Uvažujme reálné číslo u, které je zapsané ve tvaru $p + q\sqrt{3} + r\sqrt{5}$, kde $p, q, r = 10^5$:

$$u = (1 + \sqrt{3} + \sqrt{5}) \cdot 10^5$$

Pak platí:

$$x \in M \;\Rightarrow\; 0 \leq x < s$$

Vezměme interval $\langle 0; u)$ a rozdělme jej na $10^{15} - 1$ shodných intervalů o velikosti $t = \frac{u}{10^{15}-1}$. Dle Dirichletova principu se v jednom takovémto intervalu nachází alespoň dvě z 10^{15} čísel množiny M. Předpokládejme, že jsou to například čísla x_i a x_j.

Potom platí:

$$\left|x_i - x_j\right| = \left|(p_i - p_j) + (q_i - q_j)\sqrt{3} + (r_i - r_j)\sqrt{5}\right| \leq \frac{u}{10^{15} - 1} < \frac{10^6}{10^{15}} = 10^{-9}$$

A tím je celé tvrzení dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.4

Je dáno 12 různých reálných čísel z intervalu $\langle 1; 1331\rangle$. Dokažte, že lze vybrat vždy dvě čísla a a b taková, že $a \neq b$ a platí pro ně:

$$0 < a - b < 1 + 3\sqrt[3]{ab}.$$

Řešení:

Řekněme, že $a_i \in \langle 1; 1331\rangle$, kde $i = 1,2, \dots, 12$. Uvažujme reálné číslo $d_i = \sqrt[3]{a_i}$, toto číslo může nabývat hodnot $\langle 1; 11\rangle$. Vezměme interval $\langle 1; 11\rangle$ a rozdělme ho na 10 intervalů $\langle 1; 2\rangle, \langle 2; 3\rangle, \dots, \langle 10; 11\rangle$. Podle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $d_1, d_2, \dots, d_{12}$ jednomu z 10 uvedených intervalů. Z toho vyplývá, že $0 < d_i - d_j < 1$.

Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla $d_i = \sqrt[3]{a},\ d_j = \sqrt[3]{b}$ a $a > b$. Dosazením získáme nerovnici

$$0 < \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < 1$$

Umocníme-li nerovnici na třetí, pak budou nerovnosti stále platit

$$0 < \left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right)^3 = a - b - 3\sqrt[3]{a^2 b} + 3\sqrt[3]{ab^2} < 1$$

Přeskupením nerovnice získáme

$$0 < a - b < 3\sqrt[3]{a^2 b} - 3\sqrt[3]{ab^2} + 1$$

$$0 < a - b < 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) + 1$$

Protože výraz $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} < 1$ můžeme zapsat ve tvaru

$$0 < a - b < 3\sqrt[3]{ab}\left(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}\right) + 1 < 3\sqrt[3]{ab} + 1$$

Tím jsme tedy dokázali, že

$$0 < a - b < 1 + 3\sqrt[3]{ab}.$$

(3)

Příklad 3.3.5

Nechť x_1, x_2, x_3, x_4 a x_5 jsou libovolná reálná čísla. Dokažte, že mezi nimi lze vždy vybrat dvě čísla a, b taková, že platí

$$0 \leq \frac{a-b}{1+ab} \leq \sqrt{3}.$$

Řešení:

Zkusme využít vztahu

$$tg(x-y) = \frac{tg(x) - tg(y)}{1 + tg(x)\, tg(y)}$$

Zvolme číslo $a_i = tg\alpha_i$, kde $i = 1, \dots, 5$ a $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme tento interval na čtyři stejné intervaly o velikosti $\frac{\pi}{3}$. Dle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ jednomu ze čtyř uvedených intervalů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla α_i a α_j, kde $i > j$, potom platí

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{3}$$

Protože je funkce tangens na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, můžeme zapsat

$$0 \leq tg\left(\alpha_i - \alpha_j\right) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i \cdot tg\alpha_j} \leq tg\frac{\pi}{3},$$

pak

$$0 < \frac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} \leq \sqrt{3}$$

a tvrzení je tím dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.6

Dokažte, že mezi 11 libovolnými reálnými čísly lze vždy najít dvě čísla x, y, pro která platí

$$0 \leq \frac{x-y}{1+x+y+2xy} \leq tg\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Řešení:

Jsou dána čísla $x_1, x_2, \dots, x_{11}$. Řekněme, že $y_1 = tg\alpha_i = 1 + \frac{1}{x_i}$, kde $i = 1,2, \dots, 11$ a $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme interval na deset stejných intervalů o velikosti $\frac{\pi}{10}$. Dle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_{11}$ jednomu z deseti uvedených intervalů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla α_i a α_j, kde $i > j$ a $i, j = 1,2, \dots, 11$, potom platí

$$0 \le \alpha_i - \alpha_j \le \frac{\pi}{10}$$

Protože funkce tangens je na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \le tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i \cdot tg\alpha_j} \le tg\frac{\pi}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \le tg\frac{\pi}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \frac{1 + \frac{1}{x_i} - 1 - \frac{1}{x_j}}{1 + \left(1 + \frac{1}{x_i}\right)\left(1 + \frac{1}{x_j}\right)} \le tg\frac{\pi}{10}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le \frac{x_i - x_j}{1 + x_i + x_j + 2x_i x_j} \le tg\frac{\pi}{10}$$

a tvrzení je tím dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.7

Nechť $x_1, x_2, \dots, x_{13}$ jsou libovolná kladná reálná čísla, Dokažte, že mezi nimi lze vždy nalézt dvě čísla x, y taková, že

$$0 < \frac{x - y + 3\sqrt{3}x + 3\sqrt{3}y + 10\sqrt{3}xy + \sqrt{3}}{3x + 10xy + 3y + 1} \le 2$$

Řešení:

Je dáno 13 kladných reálných čísel $x_1, x_2, \dots, x_9$. Řekněme, že $y_i = tg\alpha_i = 3 + \frac{1}{x_i}$, kde $i = 1, 2, \dots, 13$ a $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme interval na 12 stejných intervalů o velikosti a $\frac{\pi}{12}$. Podle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$ jednomu z dvanácti uvedených intervalů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla α_i a α_j, kde $i > j$ a $i, j = 1,2, \dots, 12$, potom platí

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{12}$$

Protože funkce tangens je na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \leq tg(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{tg\alpha_i - tg\alpha_j}{1 + tg\alpha_i \cdot tg\alpha_j} = \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq tg\,\frac{\pi}{12}$$

Jelikož $tg\,\frac{\pi}{12}$ je kladné číslo, můžeme využit vzorec $\left|tg\,\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{1+cos\alpha}}$:

$$\left|tg\,\frac{\pi}{12}\right| = \sqrt{\frac{1 - cos\,\frac{\pi}{6}}{1 + cos\,\frac{\pi}{6}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{1 - \frac{3}{4}}} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = 2 - \sqrt{3}$$

Dosaďme nyní $y_i = 3 + \frac{1}{x_i}$

$$0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} = \frac{3 + \frac{1}{x_i} - 3\,\frac{1}{x_j}}{1 + \left(3 + \frac{1}{x_i}\right)\left(3 + \frac{1}{x_j}\right)} \leq 2 - \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{\frac{x_j - x_i}{x_i x_j}}{\frac{10x_i x_j + 3x_j + 3x_i + 1}{x_i x_j}} = \frac{x_j - x_i}{10x_i x_j + 3x_j + 3x_i + 1} \leq 2 - \sqrt{3}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{x_j - x_i}{10x_i x_j + 3x_j + 3x_i + 1} + \sqrt{3} \leq 2$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \frac{x_j - x_i + 3\sqrt{3}x_j + 3\sqrt{3}x_i + 10\sqrt{3}x_i x_j + \sqrt{3}}{3x_j + 10x_i x_j + 3x_i + 1} \leq 2$$

a tvrzení je tím dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.8

Dokažte, že lze nalézt vždy dvě ze 7 libovolných reálných čísel v intervalu $(-1; 1)$ taková, že budou splňovat nerovnici

$$0 \leq 2\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \leq \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Řešení:

Mějme daných 7 čísel $x_1, x_2, \dots, x_7$. Řekněme, že $x_i = sin\alpha_i$, kde $i = 1,2, \dots, 7$ a $\alpha_i \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme interval na 6 stejných intervalů o velikosti a $\frac{\pi}{6}$. Podle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_7$ jednomu ze šesti uvedených intervalů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla α_i a α_j, kde $i > j$ a $i, j = 1,2, \dots, 7$, potom platí

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{6}$$

Protože funkce sinus je na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ rostoucí, platí

$$0 \leq sin(\alpha_i - \alpha_j) \leq sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq sin\alpha_i cos\alpha_j - cos\alpha_i sin\alpha_j = sin\alpha_i\sqrt{1 - sin\alpha_j{}^2} - sin\alpha_j\sqrt{1 - sin\alpha_i{}^2} \leq sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq x_i\sqrt{1 - x_j{}^2} - x_j\sqrt{1 - x_i{}^2} \leq sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Protože $sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ je kladné číslo, můžeme jej zapsat ve tvaru

$$\left|sin\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}} \Longrightarrow \left|sin\frac{\pi}{6}\right| = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{3}}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{\frac{1-cos\frac{\pi}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

Potom

$$0 \leq x_i\sqrt{1-x_j{}^2} - x_j\sqrt{1-x_i{}^2} \leq \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq 2\left(x_i\sqrt{1-x_j{}^2} - x_j\sqrt{1-x_i{}^2}\right) \leq \sqrt{2-\sqrt{3}}$$

a tvrzení je tím dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.9

Dokažte, že existují vždy dvě z 5 libovolných kladných reálných čísel, která jsou větší než 1 a splňují následující nerovnici

$$\frac{2\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}+2}{xy} \geq \sqrt{2+\sqrt{2}}$$

Řešení:

Využijme toho, že každé reálné číslo větší než 1 lze zapsat ve tvaru $r = \frac{1}{cos\alpha}$, pro $\alpha \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Nechť tedy $x_1, \dots, x_5$ jsou libovolná kladná reálná čísla větší než 1. Řekněme, že $cos\alpha_i = \frac{1}{x_i}$, kde $i = 1, \dots, 5$ a $\alpha_i \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Rozdělme interval na 4 stejné intervaly o velikosti a $\frac{\pi}{8}$. Podle Dirichletova principu náleží alespoň dvě z čísel $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ jednomu ze čtyř uvedených intervalů. Bez újmy na obecnosti řekněme, že jsou to čísla α_i a α_j, kde $i > j$ a $i, j = 1, \dots, 5$, potom platí

$$0 \leq \alpha_i - \alpha_j \leq \frac{\pi}{8}$$

Protože funkce kosinus je na intervalu $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ klesající, platí

$$cos\left(\alpha_i - \alpha_j\right) \geq cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \cos\alpha_i cos\alpha_j + sin\alpha_i sin\alpha_j = cos\alpha_i cos\alpha_j + \sqrt{(1 - cos\alpha_i{}^2)\left(1 - cos\alpha_j{}^2\right)} \leq cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{x_i x_j} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x_i{}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_j{}^2}\right)} \leq cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

Protože $cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ je kladné číslo, můžeme jej zapsat ve tvaru

$$\left|cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + cos\alpha}{2}} \Rightarrow \left|cos\frac{\pi}{8}\right| = \sqrt{\frac{1 + cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$\Downarrow$$

$$cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

Potom

$$\frac{1}{x_i x_j} + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{x_i{}^2}\right)\left(1 - \frac{1}{x_j{}^2}\right)} \leq \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2\sqrt{(x_i{}^2 - 1)\left(x_j{}^2 - 1\right)} + 2}{x_i x_j} \leq \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

a tvrzení je tím dokázáno.

(3)

Příklad 3.3.10

Na závěr této podkapitoly si ukážeme důkaz, ve kterém Dirichlet použil holubníkový princip. Právě díky tomuto důkazu je princip pojmenován po Dirichletovi.

Racionální aproximace reálných čísel – důkaz pomocí Dirichletova principu

Věta: *Nechť $\alpha \in R$ je libovolné reálné číslo a $n \in N$ přirozené číslo větší než 1.*

Potom existují $p \in Z$ a $q \in N$, $q < n$ taková, že $|\alpha - p\, q| \leq \frac{1}{qn}$.

Důkaz:

Interval [0,1] rozdělme na n intervalů: $\left[0, \frac{1}{n}\right), \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$.

Vezměme $n+1$ čísel $0, 1, \langle\alpha\rangle, \langle 2\alpha\rangle, \dots, \langle(n-1)\alpha\rangle$, kde $\langle\alpha\rangle$ značí necelou část čísla α. (Pozn. necelou část reálného čísla získáme rozdílem daného čísla a jeho celé části, tedy $\alpha - [\alpha] = \langle\alpha\rangle$).

Každé z těchto čísel lze zapsat ve tvaru:

$$0 = 0 \cdot \alpha + 0$$

$$1 = 0 \cdot \alpha + 1$$

$$\langle\alpha\rangle = 1 \cdot \alpha + k_1$$

$$\vdots$$

$$\langle(n-1)\alpha\rangle = (n-1) \cdot \alpha + k_{n-1}$$

Pro vhodně zvolená $k_1, k_2, \dots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$.

Pro všechna tato čísla platí, že náleží do jednoho z předchozích n intervalů. Těchto čísel je však $n+1$, a proto podle Dirichletova principu musí existovat interval, do nějž spadají alespoň dvě z našich čísel. Zajisté však v témže intervalu nejsou čísla 0 a 1.

Absolutní hodnota rozdílu dvou čísel ze stejného intervalu je nejvýše $\frac{1}{n}$. Tímto rozdílem zjišťujeme, že existuje číslo $q \in \mathbb{N}$, $q < n$ a číslo $k \in \mathbb{Z}$ takové, že platí

$$|q \cdot \alpha + k| \leq \frac{1}{n}.$$

Protože q je přirozené číslo, můžeme si dovolit takto upravit danou nerovnici

$$\left|\alpha + \frac{k}{q}\right| \leq \frac{1}{qn}.$$

Nyní již jen zvolme $p = -k,\ p \in \mathbb{Z}$ a tím je celý důkaz hotov

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{qn} \tag{8}$$

3.4 GEOMETRIE

V této podkapitole budeme s pomocí Dirichletova principu řešit úlohy, které k získání výsledku využívají vlastností a vztahů různých geometrických útvarů.

Tvrzení 3.4.1:

Jsou-li $U, U_1, U_2, \dots, U_n$ rovinné útvary takové, že

$$U_i \subseteq U, \text{ kde } i \in \{1, \dots, n\} \text{ a } |U| < |U_1| + |U_2| + \cdots + |U_n|,$$

kde$|U|$ je obsah rovinného útvaru U, $|U_i|$ obsah rovinného útvaru U_i. Potom existují aspoň dva rovinné útvary U_i, U_j $(1 \leq i \leq j \leq n)$ takové, že U_i a U_j mají aspoň jeden společný vnitřní bod. Říkáme, že S je vnitřním bodem množiny $U_i \cap U_j$ v též rovině, pokud existuje kruh K se středem S a poloměrem $\varepsilon \geq 0$ takový, že$K(S; \varepsilon) \subseteq U_i \cap U_j$.

Z tohoto tvrzení můžeme odvodit i Dirichletův princip pro délku úseček nebo pro délku oblouků.

Demonstrujme nyní tvrzení v praxi:

- Mějme rovinný útvar o obsahu 1 jednotka. Položme na něj několik útvarů o obsahu menším než 1 jednotka, jejichž celkový obsah je větší než 1 jednotka. Pak zcela jistě existují nejméně dva z těchto útvarů, které mají alespoň jeden společný bod.
- Mějme úsečku o délce 1 jednotka. Položme na ni několik úseček o délce menší než 1 jednotka, jejichž celková délka je větší než 1 jednotka. Pak zcela jistě existují nejméně dvě z námi pokládaných úseček, které mají alespoň jeden společný bod.
- Mějme kružnici o poloměru 1 jednotka. Položme na ni několik oblouků o délce menší než 2π jednotek, jejichž celková délka je větší než 2π jednotek. Pak zcela jistě existují nejméně dva z námi pokládaných oblouků, které mají alespoň jeden společný bod.

(3)

Příklad 3.4.1

V kruhu o obsahu S je dáno 201 libovolně rozmístěných bodů, z nichž žádné 3 neleží na téže přímce. Naším úkolem je dokázat, že z daných bodů lze vždy vybrat alespoň 3, které jsou vrcholem nějakého trojúhelníku s obsahem menším než $\frac{S}{100}$.

Řešení:

Rozdělme daný kruh na 100 stejných kruhových výsečí. V těchto výsečí máme umístěno 201 bodů. Z Dirichletova principu vyplývá, že alespoň v jedné kruhové výseči musí být umístěny nejméně 3 body. Protože jedna taková výseč má obsah $\frac{S}{100}$ a víme, že všechny body uvnitř kruhu jsou nekolineární, můžeme s jistotou tvrdit, že tyto body tvoří vrcholy trojúhelníku s obsahem menším než $\frac{S}{100}$.

(3)

Příklad 3.4.2

Předchozí příklad můžeme zobecnit: V kruhu o obsahu S je dáno $2n+1$ libovolně rozmístěných bodů, z nichž žádné 3 neleží na téže přímce. Naším úkolem je dokázat, že z daných bodů lze vždy vybrat alespoň 3, které jsou vrcholem určitého trojúhelníka s obsahem menším než $\frac{S}{n}$.

Řešení:

Rozdělme daný kruh na n stejných kruhových výsečí. V těchto výsečích máme umístěno $2n+1$ bodů. Podle Dirichletova principu víme, že existuje alespoň jedna kruhová výseč obsahující $\left\lfloor\frac{2n+1}{n}\right\rfloor + 1 = 3$ body. Protože jedna taková výseč má obsah $\frac{S}{n}$ a víme, že všechny body uvnitř kruhu jsou nekolineární, můžeme s jistotou tvrdit, že tyto body tvoří vrcholy trojúhelníka s obsahem menším než $\frac{S}{n}$.

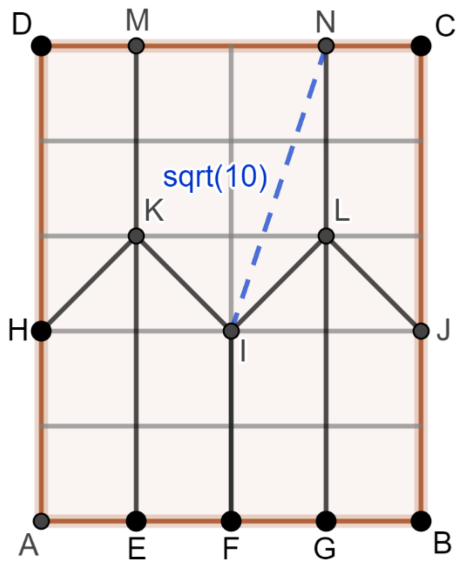
(3)

Příklad 3.4.3

Dokažme, že mezi 8 libovolnými body obdélníka ABCD o stranách $a = 4$ a $b = 5$ můžeme vždy najít dva body, jejichž vzdálenost je menší nebo rovna $\sqrt{10}$.

Řešení:

Rozdělme obdélník na 7 libovolných rovinných útvarů. Útvary musíme volit tak, aby v každém z nich byla vzdálenost dvou bodů nejvýše $\sqrt{10}$. Můžeme je rozdělit následovně: AEKH, EFIK, FGLI, GBJL, HKMD, KILNM a LJCN (viz obrázek č.)



Obr. č. 3.4.3

Z Dirichletova principu vyplývá, že alespoň jeden z výše uvedených útvarů obsahuje 2 z 8 libovolně umístěných bodů. Protože vzdálenost jakýchkoliv 2 bodů v každém útvaru je maximálně $\sqrt{10}$, máme jistotu, že v obdélníku ABCD najdeme 2 body, jejichž vzdálenost bude menší než $\sqrt{10}$.

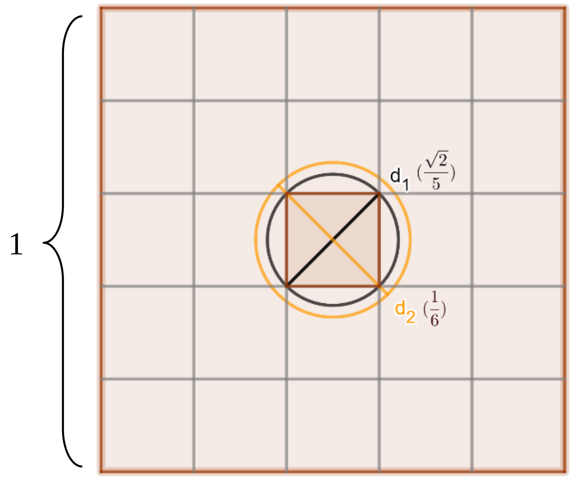
(3)

Příklad 3.4.4

Uvnitř jednotkového čtverce je vepsáno 151 bodů. Dokažme, že existuje alespoň jeden kruh o poloměru $\frac{1}{6}$, který obsahuje alespoň 7 z uvedených bodů.

Řešení:

Daný čtverec rozdělme na 25 stejných čtverečků. Z Dirichletova principu vyplývá, že alespoň jeden z výše uvedených čtverečků obsahuje 7 ze 151 libovolně umístěných bodů. Opišme nyní tomuto čtverečku kružnici. Tato kružnice má průměr stejné délky, jako délka úhlopříčky daného čtverečku. Tedy $d = \frac{\sqrt{2}}{5}$, průměr pak je $r = \frac{\sqrt{2}}{10}$.



Obr. č. 3.4.4

Protože $\frac{1}{6} > \frac{\sqrt{2}}{10}$, pak zcela jistě existuje alespoň jeden kruh o poloměru $\frac{1}{6}$, ve kterém leží alespoň 7 z libovolně zvolených bodů.

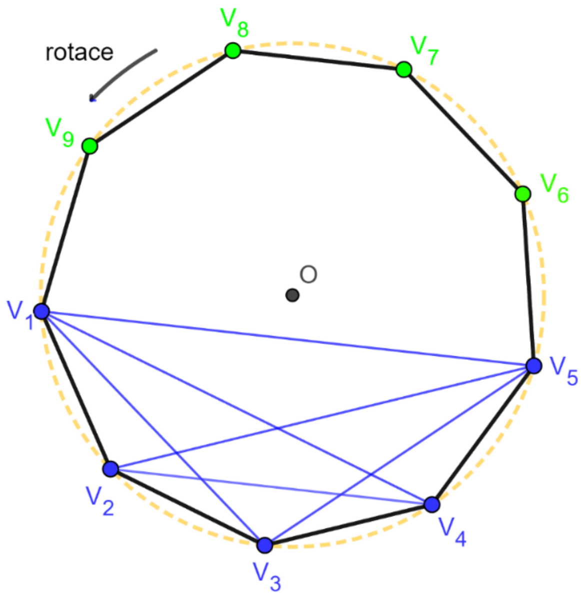
(3)

Příklad 3.4.5

Je dán pravidelný devítiúhelník. Každý jeho vrchol je obarven modrou nebo zelenou barvou. Naším úkolem je dokázat, že existují dva trojúhelníku stejného obsahu a stejné barvy vrcholů.

Řešení:

Máme 9 vrcholů $V_1, V_2, \dots, V_9$, které mají buď modrou, a nebo zelenou barvu. Z Dirichletova principu vyplývá, že alespoň 5 bodů má stejnou barvu. Bez újmy na obecnosti řekněme, že těchto pět bodů má například modrou barvu. Z pěti bodů můžeme sestrojit $\binom{5}{3} = 10$ modrých trojúhelníků.



Obr. č. 3.4.5

Nechť V je množina všech vrcholů daného devítiúhelníku, tj. $V = \{V_1, V_2, \dots, V_9\}$ a O je jeho středem. Rotujme nyní kolem středu O o $40°, 80°, 120°, 160°, 200°, 240°, 280°,\ 320°$ a $360°$. S každou touto rotací se mění postavení jednotlivých bodů, avšak obrazec se vždy zobrazí sám na sebe. Po devíti rotacích se vrcholy devítiúhelníku opět zobrazí samy na sebe. Těmito rotacemi vznikne 90 modrých trojúhelníků, jejichž vrcholy náleží množině V. Počet různých trojúhelníků s vrcholy v množině V je $\binom{9}{3} = 84$.

Protože $84 < 90$, vyplývá nám z Dirichletova principu, že existují 2, v našem případě modré, trojúhelníky, jejichž obsah i tvar je totožný. Stejný obsah i rozmístění vrcholů nám zajišťuje rotace, jejímiž vlastnostmi jsou zachování tvaru a obsahu rotovaných útvarů. Důkaz je tedy hotov.

(3)

Příklad 3.4.6

Máme daný konvexní třináctistěn se 7 vrcholy. Naším úkolem je dokázat, že na tomto mnohostěnu existuje vrchol, ze kterého vychází alespoň 6 hran.

Řešení:

Nejprve musíme zjistit, kolik hran má náš třináctistěn. Využijeme k tomu tzv. Eulerův vztah, který určuje vztah mezi počtem stěn (s), počtem vrcholů (v) a počtem hran (h):

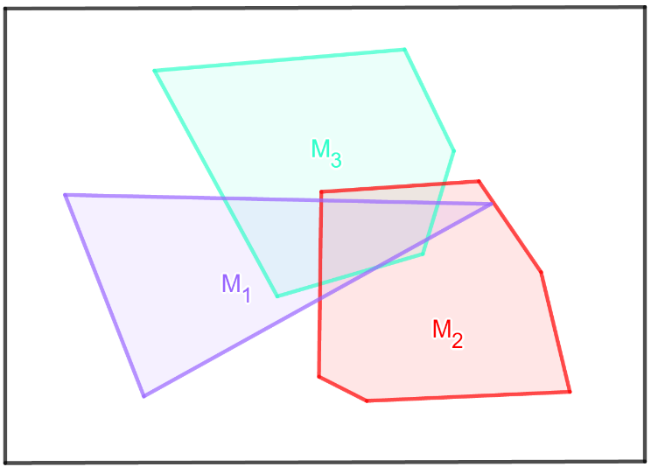
$$s + v = h + 2$$

Tedy v našem případě $13 + 7 - 2 = 18$ hran. Každou hranu rozdělíme na dvě poloviny, takže nám vznikne 36 polohran. Tyto polohrany rozdělíme do 7 skupin (každá skupina náleží jednomu vrcholu). Podle Dirichletova principu je alespoň v jedné skupině více než 5 polohran. Z toho vyplývá, že alespoň z jednoho vrcholu vychází nejméně 6 hran.

$$(1)$$

Příklad 3.4.7

Do obdélníku o obsahu 12 cm^2 položme 3 libovolné mnohoúhelníky, z nichž každý má obsah 5 cm^2. Naším úkolem je dokázat, že lze vždy najít dva mnohoúhelníky, které mají společnou plochu větší nebo rovnou 1 cm^2.



Ilustrativní obr. č. 3.4.7

Řešení:

Nechť M_1, M_2, M_3 jsou naše tři mnohoúhelníky a $|M_i|, i = \{1, 2, 3\}$ obsah mnohoúhelníku M_i. Pak

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 = |M_1| + |M_2| + |M_3| - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$

Protože $|M_1| = |M_2| = |M_3| = 5\ cm^2$ a $M_1 \cup M_2 \cup M_3$ leží v obdélníku o obsahu $12\ cm^2$, vyplývá z předchozí rovnice vztah:

$$12 \geq 15 - (|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3|) + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$

Úpravou získáme tento tvar nerovnice:

$$|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3| \geq 3 + |M_1 \cap M_2 \cap M_3|$$

Víme, že plocha průniku mnohoúhelníků M_1, M_2, M_3 nemůže být záporná, tj $|\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2 \cap \mathrm{M}_3| \geq 0$. Součet průniků jednotlivých mnohoúhelníků tedy bude vždy větší nebo roven 3. Uvažujme tedy krajní případ, kdy $|M_1 \cap M_2 \cap M_3| = 0$:

$$|M_1 \cap M_2| + |M_1 \cap M_3| + |M_2 \cap M_3| \geq 3$$

Podle Dirichletova principu existuje alespoň jedna z hodnot $|M_1 \cap M_2|, |M_1 \cap M_3|$ a $|M_2 \cap M_3|$, které je větší nebo rovno 1. (Tak, jak jsme řekli v úvodní kapitole: Všechny hodnoty nemohou být podprůměrné nebo všechny nadprůměrné.)

Bez újmy na obecnosti předpokládejme že třeba právě $|M_1 \cap M_2| \geq 1$. Tím je tvrzení dokázáno.

(3)

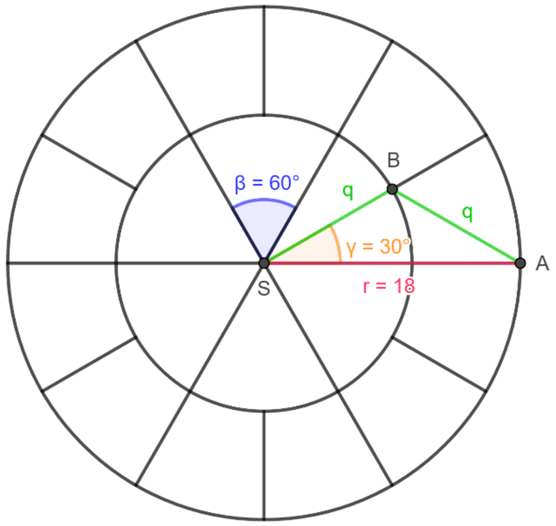
Příklad 3.4.8

Kruhový terč o poloměru 18 cm zasáhlo 19 střel. Naším úkolem je dokázat, že vzdálenost některých 2 zásahů je menší než 11 cm.

Řešení:

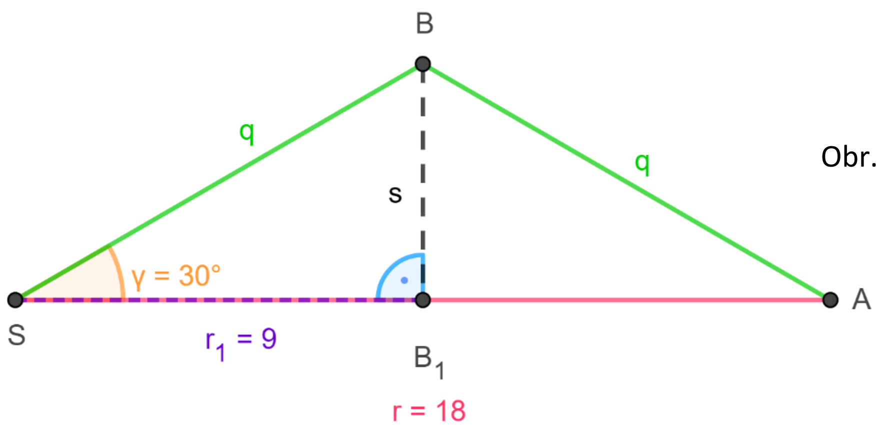
Nejprve musíme rozdělit kruhový terč na 18 částí. Tyto části musí splňovat tu podmínku, že maximální vzdálenost 2 bodů ležících v jednotlivých částech musí být stejná. Kruh rozčleníme na 18 částí tak, že jej nejprve rozdělíme soustředným mezikružím o poloměru q. Prvními šesti částmi budou shodné výseče od středu S o středovém úhlu 60°

a poloměru q. Zbylých 12 částí vznikne rozdělením mezikruží na „mezivýseče“ o středovém úhlu 30°. Tyto „mezivýseče“ mají úhlopříčky o délce q, viz obrázek níže.



Obr. č. 3.4.8a

Nyní musíme zjistit, jakou délku má q. Víme, že q je jedním z ramen rovnoramenného trojúhelníku SBA. Kolmým průměrem bodu B na úsečku SA nám vznikne bod B_1, který dělí úsečku SA na dvě poloviny, a pravoúhlý trojúhelník SBB_1. Z tohoto trojúhelníku budeme schopni vypočítat délku q.



Obr. č. 3.4.8b

$$\cos 30° = \frac{9}{q}$$

$$q = 9 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 6\sqrt{3}$$

Dva body v každé námi vytvořené části kruhového terče jsou od sebe vzdáleny maximálně $6\sqrt{3}\ cm$. Máme-li terč rozdělen na 18 částí a do těchto částí umístíme 19 střel, pak dle Dirichletova principu platí, že existuje alespoň jedna z těchto částí, do které spadají minimálně dvě střely. Protože $6\sqrt{3} < 11,$ máme jistotu, že alespoň dvě střely jsou od sebe vzdáleny méně než $11\ cm$.

(6)

Příklad 3.4.9

V rovině je dáno 17 bodů, z nichž žádné tři nejsou kolineární. Tyto body jsou spojeny úsečkami červené, modré a zelené barvy. Naším úkolem je dokázat, že z těchto úseček vznikne alespoň jeden trojúhelník, který má všechny strany stejné barvy.

Řešení:

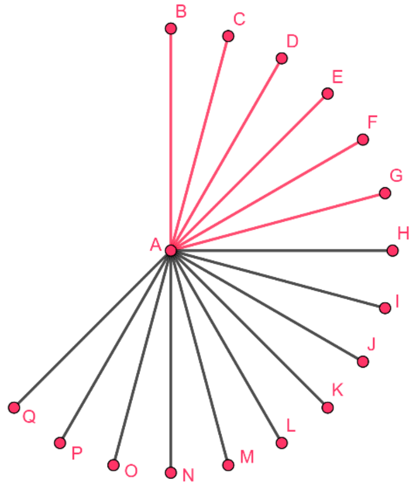
Bez újmy na obecnosti zvolme jako výchzí bod pro všechny úsečky bod A. Spojením zbylých bodů s bodem A vznikne 16 úseček. Těmto úsečkám můžeme přiřadit buď červenou, modrou, anebo zelenou barvu. Barvy nám tedy budou představovat přihrádky, do kterých budeme vkládat jednotlivé úsečky.

$n = 3$ (barvy) $kn + 1 = 16$ (všechny úsečky)

$$k + 1 = \frac{16}{3} \doteq 5{,}3$$

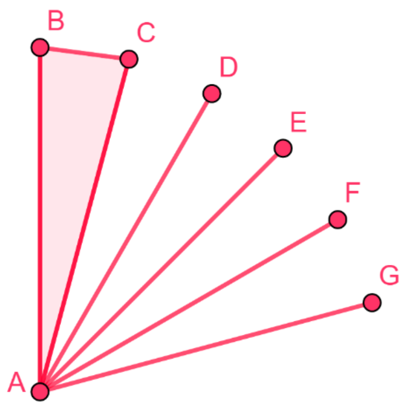
$$k + 1 = \lfloor 5{,}3 \rfloor + 1 = 6$$

Z Dirichletova principu tedy vyplývá, že alespoň jeden bod je spojen s šesti ostatními body jednou barvou. Bez újmy na obecnosti zvolme těmito body body B, C, D, E, F a G a barvu, kterou jsou spojeny například červenou.



Obr. č. 3.4.9a

Jsou-li alespoň dva z bodů B, C, D, E, F a G spojeny také červenou úsečkou, vznikne stejnobarevný trojúhelník a důkaz je ukončen.



Obr. č. 3.4.9b

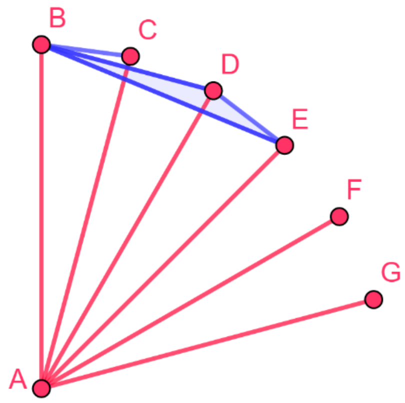
Nebude-li tomu tak, pak jsou tyto body spojeny úsečkami modré a zelené barvy. Zvolme například bod B, který spojíme úsečkami s body C až G. Barvy nám opět znázorňují přihrádky, kterým budeme přiřazovat 5 nově vzniklých úseček.

$n = 2$ (barvy) $\qquad\qquad$ $kn + 1 = 5$ (úsečky)

$$k + 1 = \frac{5}{2} = 2{,}5$$

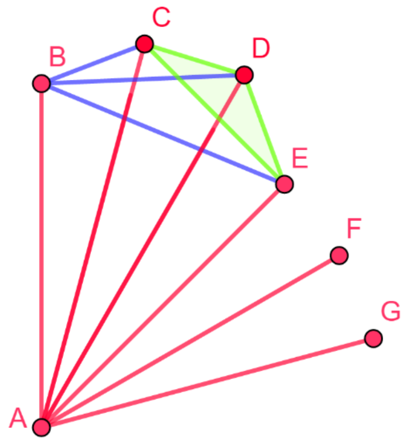
$$k + 1 = \lfloor 2{,}5 \rfloor + 1 = 3$$

Z Dirichletova principu vyplývá, že bod B je spojen alespoň třemi úsečkami stejné barvy. Bez újmy na obecnosti zvolme touto barvou barvu modrou a body například C, D, E. Jsou-li některé z bodů C, D, E spojeny také modrou úsečkou, vznikne stejnobarevný trojúhelník a důkaz je ukončen.



Obr. č. 3.4.9c

Nebude-li tomu tak, pak jsou tyto tři body spojeny úsečkami zelené barvy a tím je dokázáno, že existuje jednobarevný zelený trojúhelník.



Obr. č. 3.4.9d

Celý důkaz je tedy ukončen, protože všechny úvahy vedou k vytvoření jednobarevného trojúhelníka.

(3)

Příklad 3.4.10

V prostoru je libovolně rozmístěno 9 bodů s celočíselnými souřadnicemi. Dokažte, že existují alespoň dva z těchto bodů, které určují úsečku, jejíž střed má také celočíselné souřadnice.

Řešení:

Nejprve si připomeňme vzorec pro výpočet souřadnic středu libovolné úsečky AB:

$$A = [a_1, a_2, a_3], \qquad B = [b_1, b_2, b_3]$$

$$S_{AB} = \left[\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right]$$

Máme-li celočíselné souřadnice bodů A a B, pak celočíselné souřadnice bodu S_{AB} získáme pouze tehdy, je-li součet souřadnic $a_i + b_i, i \in \{1, 2, 3\}$ sudý. K sudému součtu můžeme dojít jen v případě, že a_i a b_i jsou obě sudé nebo obě liché souřadnice.

Sepišme si nyní všechny možnosti, jak lze z pohledu sudosti a lichosti poskládat souřadnice jednoho bodu:

1. $[l, l, l]$
2. $[l, l, s]$
3. $[l, s, l]$
4. $[l, s, s]$
5. $[s, s, s]$
6. $[s, s, l]$
7. $[s, l, s]$
8. $[s, l, l]$

Máme tedy 8 možností rozmístění sudých a lichých souřadnic. Zadaných bodů s celočíselnými souřadnicemi však máme 9. Dle Dirichletova principu pak existují alespoň 2 body, které mají stejné rozložení sudých a lichých souřadnic, součet těchto souřadnic je sudý a tím pádem souřadnice středu úsečky určené těmito body jsou také celočíselné.

(7)

ZÁVĚR

Ve své diplomové práci jsem se věnovala využití Dirichletova principu při řešení různých matematických úloh, při dokazování matematických tezí a v neposlední řadě při řešení zajímavých úloh z reálného světa.

V teoretické části jsem se snažila co nejsrozumitelněji popsat jak princip základní definice, tak princip obecné definice. Teoretická část není příliš obsáhlá, protože samotný princip má poměrně jednoduché znění. Síla Dirichletova principu je však v jeho aplikaci, kdy takto zdánlivě banální tvrzení dokáže vyřešit i poměrně složité úlohy.

Toho si byl vědom i Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, významný matematik 19. století, po kterém byl tento princip nazván. Věnovala jsem mu proto jednu kapitolu, ve které jsem popsala jeho matematickou dráhu od studií na gymnáziu až po završení jeho kariéry na univerzitě v Göttingenu. Zmínila jsem zde i jeho přínos pro matematiku, především pak jeho důkaz Fermatovy věty pro n = 5 a n = 14.

V následujících kapitolách jsem se pak věnovala příkladům, které k nalezení řešení využívají právě Dirichletův princip. Úlohy jsem rozdělila do čtyř tematických okruhů. Do prvního okruhu jsem zahrnula úlohy, které odrážejí situace z reálného života, a při jejich řešení je potřeba zabrousit do různých oblastí matematiky. Další kapitoly jsou pak rozděleny podle matematického zaměření – aritmetika, algebra a geometrie.

Na tomto principu mě nepřestává fascinovat to, jak jednoduché tvrzení v sobě skrývá, a přitom dokáže řešit a dokazovat i velice složité úlohy a teze. Zároveň však někdy nejtěžším úkolem je odhalit vůbec jen to, že s jeho pomocí lze některé příklad řešit.

Kromě významu pro matematiku má Dirichletův princip význam i v běžném životě. Dokáže odpovědět na různé praktické nebo jen zajímavé otázky a určitě tedy stojí za to ho znát a umět s ním pracovat.

RESUMÉ

In my diploma thesis I focused on using Dirichlet's principle in solving various mathematical problems, proving mathematical theses and last but not least in solving interesting tasks from the real world.

In the theoretical part, I tried to describe as clearly as possible the principle of the basic definition and the principle of general definition. The theoretical part is not very comprehensive, because the principle itself has a relatively simple wording. However, the power of the Dirichlet principle lies in its application.

The following chapter is dedicated to Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, an eminent mathematician of the 19th century, after him this principle was named. Here I described his mathematical career from grammar school studies to the completion of his career at the University of Göttingen. I also mentioned his contribution to mathematics, especially his proof of Fermat's theorem for n = 5 and n = 14.

In the following chapters I focused on examples that use Dirichlet's principle to find a solution. I divided the tasks into four thematic areas. In the first part, I included tasks that reflect real-life situations and need to go into different areas of mathematics to solve them. Next parts are divided according to mathematical focus - arithmetic, algebra and geometry.

SEZNAM LITERATURY

1. **Lev Bukovský; Igor Kluvánek.** *Dirichletov princíp.* Praha: Mladá fronta,1970. str. 60. ISBN 23-027-70

2. **Jürgen Elstrodt.** *The Life and Work of Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859).* [online] 2018.[cit. 2018-08-18] Dostupné z: https://www.uni-math.gwdg.de/tschinkel/gauss-dirichlet/elstrodt-new.pdf

3. **Hoang Anh Nguyen.** *STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST: Dirichletův princip.* [online] 2019. [cit. 2019-2-18] Dostupné z*:* *https://socv2.nidv.cz/archiv37/getWork/hash/520b8ab8-def4-11e4-98b3faa932cbcfda*

4. **Luboš Pick.** *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 61 (2016), No. 2, 106–118. Dirichletovy šuplíčky.* [online] 2018.[cit. 2018-6-28] Dostupné z: *https://dml.cz/bitstream/handle/10338.dmlcz/145762/PokrokyMFA_61-2016-2_2.pdf*

5. **Univerzita Karlova. Matematicko-fyzikální fakulta. Matematický korespondenční seminář.** 20. ročník. Rok 2000/2001. [online] 2018. [cit. 2018-12-07] Dostupné z: http://mks.mff.cuni.cz/archive/20/3.pdf

6. **Jan Vaňhara.** *Dirichletův princip neboli princip holubníku, invarianty a obarvení. Rok 2011.* [online] 2019. [cit. 2019-02-13] Dostupné z: *http://www.talnet.cz/documents/18/408e53bd-d27c-4e63-8b62-65ecc4a6e2b9*

7. **Doc. PhDr. Marta Volfová, CSc.**, *ÚLOHY VYUŽÍVAJÍCÍ DIRICHLETŮV PRINCIP.* [online] 2019. [cit. 2019-3-04] Dostupné z: *black-hole.cz/cental/wp-content/uploads/2010/04/Úlohy-využívající-Dirich-princip.pdf*

8. **Kada Williams.** *Dirichlet's Approximation Theorem.* [online] 2019. [cit. 2019-04-19] Dostupné z: https://www.expii.com/t/dirichlets-approximation-theorem-2468

SEZNAM OBRÁZKŮ

- Obrázek č. 1: Obr. č. 1.1.1 Zdroj: http://carlitoz.com/cloths/,[online] 2019
- Obrázek č. 2: Obr. č. 1.1.2 Zdroj:https://www.vectorstock.com/,[online] 2019
- Obrázek č. 3: Obr. č. 3.1.5.
- Obrázek č. 4: Obr. č. 3.1.9a
- Obrázek č. 5: Obr. č. 3.1.9b
- Obrázek č. 6: Obr. č. 3.1.10a
- Obrázek č. 7: Obr. č. 3.1.10b
- Obrázek č. 8: Obr. č. 3.4.3
- Obrázek č. 9: Obr. č. 3.4.4
- Obrázek č. 10: Obr. č. 3.4.5
- Obrázek č. 11: Obr. č. 3.4.7
- Obrázek č. 12: Obr. č. 3.4.8a
- Obrázek č. 13: Obr. č. 3.4.8b
- Obrázek č. 14: Obr. č. 3.4.9a
- Obrázek č. 15: Obr. č. 3.4.9b
- Obrázek č. 16: Obr. č. 3.4.9c
- Obrázek č. 17: Obr. č. 3.4.9d

Obrázky č. 3-17 jsou mým výtvorem, vytvořeny byly v programu GeoGebra.