ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA PEDAGOGICKÁ
KATEDRA MATEMATIKY, FYZIKY A TECHNICKÉ VÝCHOVY

NÁSOBNÉ KOŘENY ROVNIC A JEJICH SOUSTAV

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Lucie Hajšmanová
Přírodovědná studia, obor Matematická studia

Vedoucí práce: Mgr. Martina Kašparová, Ph.D. - KMT

Plzeň 2020

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

V Plzni, 29. června 2020

....

Lucie Hajšmanová

Ráda bych poděkovala vedoucí mé bakalářské práce paní Mgr. Martině Kašparové, Ph.D. za ochotu, poskytnutí užitečných rad a připomínek při zpracování této bakalářské práce.

ZDE SE NACHÁZÍ ORIGINÁL ZADÁNÍ KVALIFIKAČNÍ PRÁCE.

OBSAH

SEZNAM ZKRATEK

$(I, +, \cdot)$ – obor integrity

$(T, +, \cdot)$ – komutativní těleso

$a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ – koeficienty polynomu

$st[f(x)] = n$ – n je stupeň polynomu

$f(x)$ – polynom n -tého stupně o jedné proměnné x nad $(T, +, \cdot)$

$f(\alpha)$ – hodnota polynomu $f(x)$ v bodě α

$(Z_p; +, \cdot)$ – těleso zbytkové třídy modulo p

$(R; +, \cdot)$ – těleso reálných čísel

$(Q; +, \cdot)$ – těleso racionálních čísel

$(C; +, \cdot)$ – těleso komplexních čísel

R – množina reálných čísel

Q – množina racionálních čísel

C – množina komplexních čísel

$R(x)$ – zbytek při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$

$Q(x)$ – neúplný podíl

$g(x)| f(x)$ – polynom $g(x)$ dělí $f(x)$

$D[f(x), g(x)]$ – největší společný dělitel polynomu $f(x)$ a $g(x)$

$f(x) \sim g(x)$ – polynom $f(x)$ je asociován s polynomem $g(x)$

$f(\xi) = 0$ – algebraická rovnice s neznámou ξ

$(x - \alpha_i)$ – kořenový činitel polynomu $f(x)$

$(\xi - \alpha_i)$ – kořenový činitel rovnice $f(\xi)$

$f'(x)$ – první derivace polynomu $f(x)$

$f^{(n)}(x)$ – n-tá derivace polynomu $f(x)$

Úvod

Bakalářská práce se zabývá násobnými kořeny algebraických rovnic a jejich soustav. Práce se zabývá právě tímto tématem, protože dosud tato problematika nebyla shrnuta z tohoto pohledu. Hlavním cílem této práce je teoreticky seznámit čtenáře s problematikou násobných kořenů algebraických rovnic. Dalším, neméně důležitým cílem je pokusit se nalézt historické úlohy vedoucí na násobné kořeny rovnic či násobné řešení soustav.

Text práce je rozčleněn do čtyř kapitol. V první kapitole se definují základní pojmy, které jsou nezbytné pro dané téma. Konkrétně se definuje pojem polynomu, jeho rovnost, součet a součin. Důležitou částí této kapitoly je zavedení Hornerova schématu, které se v práci využívá k řešení nejrůznějších příkladů. Závěr první kapitoly je věnován největšímu společnému děliteli dvou polynomů, který se často využívá k zjištění řešení násobných kořenů. Uvedené pojmy jsou nezbytné pro téma násobných kořenů algebraických rovnic.

Druhá kapitola je věnována násobným kořenům algebraických rovnic o jedné neznámé. Tato kapitola je rozdělena do dvou podkapitol. V první z nich se zavádí pojem algebraická rovnice s jednou neznámou. Druhá část kapitoly nejprve seznamuje čtenáře se situací, kde se s násobnými kořeny lze setkat. Dále jsou pak zaváděny definice, věty a konkrétní příklady.

Ve třetí kapitole jsou řešeny konkrétní soustavy rovnic, které mají násobná řešení. V prvních dvou příkladech se pracuje se soustavou dvou rovnic o dvou neznámých. V závěru této kapitoly je uvedeno řešení soustavy tří rovnic o třech neznámých. Poslední kapitola popisuje dvě nalezené historické úlohy a jejich řešení. První z nalezených historických úkolů je čínská úloha z počátku 14. století. Druhá úloha poslední kapitoly je převzat z původní práce holandského matematika Johannese Huddeho.

1 POLYNOM, NULOVÝ BOD, DĚLENÍ POLYNOMU POLYNOMEM, HORNEROVO SCHÉMA

V první kapitole se budeme zabývat znalostmi, které jsou nezbytné pro následující kapitoly. Nejprve definujeme ústřední pojem polynom, připomeneme si co je to rovnost polynomů, jak lze polynomy sčítat a násobit. Dále se budeme věnovat dělení polynomu polynomem, na které bude navazovat věta Bézoutova. V první kapitole se budeme zabývat Hornerovo schématem, které nám pomůže v dalších kapitolách při řešení násobnosti kořenů algebraických rovnic. Na závěr kapitoly připomeneme pojem největší společný dělitel polynomů.

Po stručném seznámení s obsahem první kapitoly se můžeme zaměřit na definici pojmu polynom. Polynom lze definovat nad oborem integrity $(I;+,\cdot)$, ale v této práci postačí polynom definovat nad komutativním tělesem $(T;+,\cdot)$.

Polynom

Definice 1.1

Nechť T je alespoň dvouprvková množina. Algebraickou strukturu $(T;+,\cdot)$ nazýváme *komutativním tělesem* právě tehdy, když pro operace $+$ a $\cdot$, jsou splněny následující axiomy:

$(T1)(\forall a, b \in T) a + b = b + a$

$(T2)(\forall a, b, c \in T)(a + b) + c = a + (b + c)$

$(T3)(\exists 0 \in T)(\forall a \in T) a + 0 = a$

$(T4)(\forall a \in T)(\exists - a \in T) a + (-a) = 0$

$(T5)(\forall a, b \in T) a \cdot b = b \cdot a$

$(T6)(\forall a, b, c \in T)(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

$(T7)(\exists 1 \in T)(\forall a \in T) a \cdot 1 = a$

$(T8)(\forall a \in T - \{0\}) \left(\exists \frac{1}{a}\right) a \cdot \frac{1}{a} = 1$

$(T9)(\forall a, b, c \in T) a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 21)$.

Definice 1.2

Budiž $(T; +,\cdot)$ komutativní těleso a n přirozené číslo. Nechť $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ jsou prvky z tělesa $(T; +,\cdot)$ a x je libovolný prvek z tělesa $(T; +,\cdot)$. Funkci $f(x)$ definovanou předpisem

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \text{ kde } a_n \neq 0,$$

nazýváme *polynom n -tého stupně o jedné proměnné x nad tělesem* $(T; +,\cdot)$.

Opačným polynomem k polynomu $f(x)$ je polynom

$$-f(x) = -a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} - \cdots - a_2 x^2 - a_1 x - a_0.$$

Polynomy budeme značit jako funkce, tedy $f(x)$, $g(x)$. n je stupeň polynomu, lze ho zapisovat následovně $st[f(x)] = n$. Prvky $a_n, a_{n-1}, \dots, a_3, a_2, a_1, a_0$ z tělesa $(T; +,\cdot)$ se nazývají *koeficienty polynomu*.

Polynom $f(x) = a_0$, který přiřazuje každému prvku z $(T; +,\cdot)$ prvek a_0, nazýváme *konstanta*. Polynom konstanta, tedy $f(x) = a_0$, kde $a_0 \neq 0$, je stupně nulového (lze také označit jako absolutní člen). Polynom 0, který přiřazuje každému prvku z $(T; +,\cdot)$ nulu, se nazývá *polynom nulový*. Polynom nulový nemá žádný stupeň. Polynom prvního stupně, polynom, který má tvar $f(x) = a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$, se nazývá *lineární*. Polynom druhého stupně, tvaru $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$, nazýváme *kvadratický*. Polynom stupně třetího a tvaru $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_3 \neq 0$, označujeme, jako polynom *kubický*. *Bikvadratický polynom* tvaru $f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde $a_4 \neq 0$, je polynom čtvrtého stupně.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 4\ a\ [6], str. 144.)$

Definice 1.3

Budiž dán polynom $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, potom výraz $a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0$, budeme značit $f(\alpha)$, nazýváme hodnotou polynomu $f(x)$ v bodě α, kde x je proměnná. $(Převzato\ z\ [2], str. 26.)$

Definice 1.4

Předpokládejme, že $f(x)$ není nulový polynom, potom prvek α je nulovým bodem polynomu $f(x)$ právě tehdy, když $f(\alpha) = 0$. $(Upraveno\ podle\ [2], str. 26.)$

V následujících dvou definicích si připomeneme, co znamená rovnost polynomů a následně si tyto definice vyzkoušíme aplikovat na třech jednoduchých příkladech.

Rovnost polynomů

Definice 1.5

Polynomy $f(x)$ a $g(x)$ se sobě rovnají nad tělesem $(T;+,\cdot)$, zapisujeme $f(x) = g(x)$, právě tehdy, když $(\forall \alpha \in T) f(\alpha) = g(\alpha)$.

Tuto definici budeme nazývat funkční definicí rovnosti dvou polynomů nad tělesem $(T;+,\cdot)$.

$(Převzato\ z\ [2], str. 4.)$

Definice 1.6

V algebraickém smyslu se polynomy $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a $g(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ sobě rovnají nad tělesem $(T;+,\cdot)$, zapisujeme $f(x) = g(x)$, právě tehdy, když $a_i = b_i$ pro všechna $i = n, n-1, \dots, 2, 1, 0$.

Příklad 1.1

Zjistěte, zda jsou si rovny polynomy $f(x) = x^4 + x + 3$ a $g(x) = x^4 + x + 3$ nad tělesem $(T;+,\cdot) = (Z_5;+,\cdot)$.

Řešení:

V prvním kroku řešení příkladu si sestavíme tabulku pro sčítání a násobení zbytkové třídy modulo 5, protože polynomy jsou nad ní definovány.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**		**·**	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0	1	2	3	4		**0**	0	0	0	0	0
1	1	2	3	4	0		**1**	0	1	2	3	4
2	2	3	4	0	1		**2**	0	2	4	1	3
3	3	4	0	1	2		**3**	0	3	1	4	2
4	4	0	1	2	3		**4**	0	4	3	2	1

Tabulka 1: Sčítání a násobení zbytkové třídy modulo 5

Sestavíme tabulku funkčních hodnot polynomu $f(x) = x^4 + x + 3$ a $g(x) = x^4 + x + 3$ nad tělesem $(T; +,\cdot) = (Z_5; +,\cdot)$.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**		$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
$\boldsymbol{f(x)}$	3	0	1	2	3		$\boldsymbol{g(x)}$	3	0	1	2	3

Tabulka 2: Tabulka funkčních hodnot polynomu *f(x)* a *g(x)*

Tabulky funkčních hodnot polynomu $f(x)$ a $g(x)$ jsou stejné a z toho plyne dle definice 1.5, že polynomy $f(x)$ a $g(x)$ jsou si rovny, $f(x) = g(x)$. Ze zadání příkladu je zřejmé, že i podle definice 1.6 jsou si polynomy $f(x)$ a $g(x)$ rovny.

Příklad 1.2

Jsou dány polynomy $f(x) = x + 1$ a $g(x) = x^3 + 1$ nad tělesem $(T; +,\cdot) = (Z_3; +,\cdot)$. Zjistěte, zda si jsou polynomy rovny.

Řešení:

I v tomto příkladu si jako první sestavíme tabulku pro sčítání a násobení zbytkové třídy modulo 3.

+	**0**	**1**	**2**		**·**	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2		**0**	0	0	0
1	1	2	0		**1**	0	1	2
2	2	0	1		**2**	0	2	1

Tabulka 3: Sčítání a násobení zbytkové třídy modulo 3

Následně budeme polynomy srovnávat funkčně v tabulce 4.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**		$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{f(x)}$	1	2	0		$\boldsymbol{g(x)}$	1	2	0

Tabulka 4: Tabulka funkčních hodnot polynomu *f(x)* a *g(x)*

Podíváme-li se na tabulku funkčních hodnot polynomu $f(x)$ a $g(x)$, vidíme, že jsou stejné. Na základě toho zjištění můžeme říci, že dle definice 1.5 jsou si polynomy rovny. Pokud se ale podíváme na zadání, je jasné, že dle definice 1.6 se polynomy $f(x)$ a $g(x)$ nerovnají.

Příklad 1.3

Nad tělesem $(T;+,\cdot)=(Z_3;+,\cdot)$ jsou dány dva polynomy. Rozhodněte o rovnosti polynomů, jestliže $f(x)=x^2+2$ a $g(x)=x^3+x+1$.

Řešení:

V zadání si můžeme všimnout, že se pohybujeme nad tělesem zbytkové třídy modulo 3, pro kterou máme již tabulku pro sčítání a násobení v předchozím příkladu 1.2, proto již nebudeme uvádět. Pro polynomy $f(x)$ a $g(x)$ sestavíme tabulku funkčních hodnot.

$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**		$\boldsymbol{x}$	**0**	**1**	**2**
$\boldsymbol{f(x)}$	2	0	0		$\boldsymbol{g(x)}$	1	0	2

Tabulka 5: Tabulka funkčních hodnot polynomu *f(x)* a *g(x)*

Na základě definice 1.5 je patrné, že funkční hodnoty polynomů $f(x)$ a $g(x)$ nejsou stejné, proto se nerovnají ani polynomy $f(x)$ a $g(x)$. Z algebraického hlediska rovnosti podle definice 1.6 se polynomy $f(x)$ a $g(x)$ také nerovnají.

Na závěr těchto příkladů si můžeme všimnout, že pokud se polynomy rovnají algebraicky dle definice 1.6, potom se polynomy rovnají i z funkčního hlediska podle definice 1.5.

Nyní v krátkosti připomeneme definici součtu polynomů a vyzkoušíme ji na jednom příkladu. Definici pro odčítání polynomu uvádět nebudeme, protože odečíst polynom znamená přičíst polynom opačný.

Součet polynomů

Definice 1.7

Nad tělesem $(T;+,\cdot)$ budiž dány polynomy

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

$$g(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0,$$

nepředpokládáme $a_n\neq 0, b_n\neq 0$. Součtem těchto polynomů, zapisujeme $f(x)+g(x)$, budeme rozumět polynom

$$(a_n+b_n)x^n+(a_{n-1}+b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(a_2+b_2)x^2+(a_1+b_1)x+(a_0+b_0).$$

$(Převzato\ z\ [2], str. 4.)$

Příklad 1.4

Určete součet polynomu $f(x) = \frac{4}{3}x^4 + 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 + 5$ a $g(x) = \frac{7}{5}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 4x + 9$ nad tělesem $(R; +,\cdot)$.

Řešení:

$$f(x) + g(x) = \left(\frac{4}{3} + 0\right)x^4 + \left(2 + \frac{7}{5}\right)x^3 + \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{3}\right)x^2 + (0 + 4)x + (5 + 9)$$

$$f(x) + g(x) = \frac{4}{3}x^4 + \frac{17}{5}x^3 + \frac{13}{6}x^2 + 4x + 14$$

Součet polynomů $f(x)$ a $g(x)$, $f(x) + g(x)$, nad tělesem reálných čísel R se rovná $\frac{4}{3}x^4 + \frac{17}{5}x^3 + \frac{13}{6}x^2 + 4x + 14$.

Po stručném připomenutí sčítání polynomu si opět velice v krátkosti připomeneme součin polynomů. Uvedeme si definici a následně ji aplikujeme na příklad.

Součin polynomů

Definice 1.8

Nad tělesem $(T; +,\cdot)$ budiž dány polynomy

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0,\ a_n \neq 0,$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_2x^2 + b_1x + b_0,\ b_m \neq 0.$$

Součinem těchto polynomů, zapisujeme $f(x) \cdot g(x)$, budeme rozumět polynom

$$c_{n+m}x^{n+m} + \cdots + c_kx^k + \cdots + c_2x^2 + c_1x + c_0,$$

kde $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0 = \sum_{i=0}^{k} a_ib_{k-i}$.

$(Převzato\ z\ [2], str. 5.)$

Příklad 1.5

Nalezněte součin polynomů $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 5$ a $g(x) = 2x^2 + 7x + 9$ nad tělesem $(R; +,\cdot)$.

Řešení:

K výpočtu součinu využijeme definici 1.8, kde je předpis přímo pro výpočet koeficientů polynomu $f(x)$ a $g(x)$, i když při praktických výpočtech se většinou řídíme pravidlem vynásobení každého členu prvního polynomu každým členem druhého polynomu.

$$c_0 = \sum_{i=0}^{k=0} a_i b_{k-i} = a_0 b_0 = 5 \cdot 9 = 45$$

$$c_1 = \sum_{i=0}^{k=1} a_i b_{k-i} = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 5 \cdot 7 + 0 \cdot 9 = 35$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^{k=2} a_i b_{k-i} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 3 \cdot 9 = 37$$

$$c_3 = \sum_{i=0}^{k=3} a_i b_{k-i} = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 7 + 4 \cdot 9 = 57$$

$$c_4 = \sum_{i=0}^{k=4} a_i b_{k-i} = a_0 b_4 + a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1 + a_4 b_0 =$$

$$= 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 + 0 \cdot 9 = 34$$

$$c_5 = \sum_{i=0}^{k=5} a_i b_{k-i} = a_0 b_5 + a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1 + a_5 b_0 =$$

$$= 5 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 0 \cdot 7 + 0 \cdot 9 = 8$$

$$f(x) \cdot g(x) = 8x^5 + 34x^4 + 57x^3 + 37x^2 + 35x + 45$$

Součin polynomů $f(x)$ a $g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, nad tělesem reálných čísel R se rovná $8x^5 + 34x^4 + 57x^3 + 37x^2 + 35x + 45$.

Důležitou části první kapitoly je připomenutí dělení polynomu polynomem, kterému se nyní budeme věnovat. Nejprve vyslovíme větu, definici a následně si uvedeme tři příklady.

Dělení polynomu polynomem

Dělení polynomů nad tělesem$(T;+,\cdot)$ probíhá podobně jako v oboru integrity celých čísel. Následující větou a definicí se připomíná, že neúplný podíl i zbytek po dělení jsou určeny jednoznačně. Na příkladech připomeneme algoritmus dělení dvou polynomů.

Věta 1.1

Budiž dány polynomy $f(x) \neq 0, g(x)$ nad tělesem $(T,+,\cdot)$, kde $g(x)$ je alespoň lineární polynom, $st[g(x)] \geq 1$, potom existují polynomy $Q(x), R(x)$ takové, že platí

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x),$$

kde $R(x)$ je polynom nulový nebo polynom stupně menšího, než je stupeň polynomu $g(x)$, $[R(x) = 0] \vee \big[st[R(x)] < st[g(x)]\big]$. Polynomy $Q(x)$ a $R(x)$ jsou těmito podmínkami jednoznačně určeny.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 24.)$

Definice 1.9

Polynom $R(x)$ z věty 1.1 se nazývá zbytek při dělení polynomu $f(x)$ polynomem $g(x)$. Polynom $Q(x)$ se nazývá neúplný podíl. $(Upraveno\ podle\ [6], str. 24.)$

Příklad 1.6

Určete polynomy $Q(x)$a $R(x)$ nad tělesem $(R;+,\cdot)$, je-li

$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 4$, $g(x) = 3x^3 + x^2 - 5x - 2$.

Řešení:

$$(3x^5 - 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 4) : (3x^3 + x^2 - 5x - 2) = x^2 - 2x + 4$$

$$\underline{-(3x^5 + x^4 - 5x^3 - 2x^2)}$$

$$-6x^4 + 10x^3 + 3x^2 - 2x + 4$$

$$\underline{-(-6x^4 - 2x^3 + 10x^2 + 4x)}$$

$$12x^3 - 7x^2 - 6x + 4$$

$$\underline{-(12x^3 + 4x^2 - 20x - 8)}$$

$$-11x^2 + 14x + 12$$

Polynom $Q(x) = x^2 - 2x + 4$, $R(x) = -11x^2 + 14x + 12$.

Platí tedy $3x^5 - 5x^4 + 5x^3 + x^2 - 2x + 4 =$

$$= (x^2 - 2x + 4) \cdot (3x^3 + x^2 - 5x - 2) + (-11x^2 + 14x + 12).$$

Příklad 1.7

Určete polynomy $Q(x)$ a $R(x)$ nad tělesem $(Z_5[x], +, \cdot)$, je-li $f(x) = 4x^3 + 3x^2 + x + 1$, $g(x) = x^2 + x + 2$.

Řešení:

Při řešení budeme postupovat stejným způsobem, jako u předcházejícího příkladu 1.6. Rozdíl však bude v tom, že počítáme v Z_5.

$$(4x^3 + 3x^2 + x + 1) : (x^2 + x + 2) = 4x + 4$$

$$\underline{-(4x^3 + 4x^2 + 3x)}$$

$$0x^3 + 4x^2 + 3x + 1$$

$$\underline{-(4x^2 + 4x + 3)}$$

$$0x^2 + 4x + 3$$

Polynom $Q(x) = 4x + 4$, $R(x) = 4x + 3$.

Platí tedy $2x^3 + 2x^2 + 2x + 2 = (4x + 4) \cdot (x^2 + x + 2) + (4x + 3)$.

Poznámka

Stane-li se, že polynom $R(x) = 0$, potom platí $f(x) = Q(x) \cdot g(x)$ a říkáme, že polynom $g(x)$ dělí polynom $f(x)$. Budeme zapisovat $g(x) | f(x)$.

K poznámce uvedeme jeden příklad.

Příklad 1.8

Určete polynomy $Q(x), R(x)$ nad tělesem $(C, +, \cdot)$, je-li $f(x) = x^2 + 8x - 33$ a $g(x) = x - 3$.

Řešení:

$$
\begin{array}{l}
\quad (x^2 + 8x - 33) : (x - 3) = x + 11 \\
\underline{-(x^2 - 3x)\qquad\quad} \\
\qquad\quad 11x - 33 \\
\underline{\qquad -(11x - 33)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Polynom $Q(x) = x + 11$, $R(x) = 0$.

Platí tedy $x^2 + 8x - 33 = (x + 11) \cdot (x - 3)$.

Polynom $g(x) = x - 3$ dělí polynom $f(x) = x^2 + 8x - 33$.

Věta Bézoutova

V následující části připomeneme Bézoutovu větu, která je specifikací již vyslovené věty 1.1.

Ve větě 1.1 jsme uvedli vztah

$$f(x) = Q(x) \cdot g(x) + R(x).$$

Ve vztahu položíme $g(x) = x - \alpha$, potom bude platit

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + R(x),$$

a zbytek $R(x)$ je roven nule nebo $R(x)$ je polynom stupně nula, tedy je roven pouze číslům různým od nuly, tj. $R(x) = r$, kde $r \in T$. Tímto jsme dokázali rovnost

$$f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r.$$

Věta Bézoutova 1.2

Jestliže, pro polynom $f(x)$ platí $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$, potom hodnota tohoto polynomu v bodě α je $f(\alpha) = r$.

Poznámka

Bod α je nulovým bodem polynomu $f(x)$ právě tehdy, když $x - \alpha \mid f(x)$.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 26.)$

Příklad 1.9

Na příkladu 1.8 ukažte, že platí věta 1.2.

Řešení:

Připomeňme si zadání příkladu, kde $f(x) = x^2 + 8x - 33$ a $g(x) = x - 3$ jsou polynomy nad tělesem $(C, +, \cdot)$. Zjistili jsme, že platí: $x^2 + 8x - 33 = (x + 11) \cdot (x - 3)$.

Věta Bézoutova: $f(x) = Q(x) \cdot (x - \alpha) + r$, potom platí $f(\alpha) = r$.

Tento vztah můžeme psát ve tvaru $x^2 + 8x - 33 = (x + 11) \cdot (x - 3) + 0$, který se předpokládá ve větě 1.2. Nyní určíme $f(3)$.

$$f(3) = (3 + 11)(3 - 3) = 0$$

Funkční hodnota v bodě 3 je stejná, jako zbytek při dělení, což jsme měli ukázat.

Příklad 1.10

Ukažte, že číslo α je nulovým bodem polynomu $f(x)$ nad tělesem $(Q; +, \cdot)$, kde $\alpha = -\frac{1}{2}$, $f(x) = 10x^5 + 7x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 26x + 15$. Příklad nejprve řešte vypočítáním hodnoty polynomu $f(x)$ a následně pomocí Bézoutovy věty.

Řešení: Pokud je α nulovým bodem polynomu $f(x)$, po dosazení bude platit $f(\alpha) = 0$.

$$f(x) = 10x^5 + 7x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 26x + 15$$

$$f(\alpha) = 10\alpha^5 + 7\alpha^4 + 13\alpha^3 - 2\alpha^2 + 26\alpha + 15$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 10\left(-\frac{1}{2}\right)^5 + 7\left(-\frac{1}{2}\right)^4 + 13\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 26\left(-\frac{1}{2}\right) + 15 = 0$$

Vidíme, že hodnota polynomu $f(x)$ v bodě $\alpha = -\frac{1}{2}$ se rovná nule, proto číslo α je nulovým bodem polynomu $f(x)$.

Nyní budeme tento příklad řešit pomocí Bézouzovy věty. Chceme-li dokázat, že číslo α je nulovým bodem polynomu $f(x)$, musíme ukázat, že $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ dělí polynom $f(x)$.

$(10x^5 + 7x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 26x + 15) : \left(x + \frac{1}{2}\right) = 10x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 8x + 30$

$-(10x^5 + 5x^4)$

$2x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 26x + 15$

$-(2x^4 + x^3)$

$12x^3 - 2x^2 + 26x + 15$

$-(12x^3 + 6x^2)$

$-8x^2 + 26x + 15$

$-(8x^2 - 4x)$

$30x + 15$

$-(30x + 15)$

0

Při dělení polynomů vyšel zbytek 0, tedy $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ dělí polynom $f(x)$, a proto $\alpha = -\frac{1}{2}$ je nulovým bodem polynomu $f(x)$.

Nyní využijeme Bézoutovu větu k vyvození Hornerova schématu. Hornerovo schéma je tabulka, do které se doplní koeficienty polynomu $f(x)$, číslo α a následně z ní lze snadno získat neúplný podíl a zbytek po dělení polynomu $f(x)$ polynomem $x - \alpha$.

Hornerovo schéma

Předpokládejme, že máme polynom $f(x)$, následujícího tvaru

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

který dělíme polynomem $x - \alpha$. Je zřejmé, že neúplný podíl $Q(x)$ bude mít stupeň o jedna nižší než má polynom $f(x)$, tedy $n - 1$. Uvažujme, že $Q(x)$ má tvar

$$Q(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \cdots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0. \, (*)$$

Metodou neúplných koeficientů zjistíme koeficienty neúplného podílu $Q(x)$. Upravujme výraz $Q(x)(x - \alpha) + r$ pro $Q(x)$ ve tvaru $(*)$.

$$Q(x)(x-\alpha)+r=$$

$$=(b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0)\cdot(x-\alpha)+r=$$

$$= b_{n-1}x^{n-1}x-\alpha b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-2}x-\alpha b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^2x-\alpha b_2x^2+b_1xx \\ -\alpha b_1x+b_0x-\alpha b_0+r=$$

$$=b_{n-1}x^n-\alpha b_{n-1}x^{n-1}+b_{n-2}x^{n-1}-\alpha b_{n-2}x^{n-2}+\cdots+b_2x^3-\alpha b_2x^2+b_1x^2-\alpha b_1x \\ +b_0x-\alpha b_0+r=$$

$$=b_{n-1}x^n+(b_{n-2}-\alpha b_{n-1})x^{n-1}+\cdots+(b_1-\alpha b_2)x^2+(b_0-\alpha b_1)x+(r-\alpha b_0)$$

Porovnáním koeficientů tohoto polynomu s koeficienty polynomu $f(x)$ zjistíme následující:

$a_n=b_{n-1}$	$\Rightarrow$	$b_{n-1}=a_n$
$a_{n-1}=b_{n-2}-\alpha b_{n-1}$	$\Rightarrow$	$b_{n-2}=a_{n-1}+\alpha b_{n-1}$
$a_{n-2}=b_{n-3}-\alpha b_{n-2}$	$\Rightarrow$	$b_{n-3}=a_{n-2}+\alpha b_{n-2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_2=b_1-\alpha b_2$	$\Rightarrow$	$b_1=a_2+\alpha b_2$
$a_1=b_0-\alpha b_1$	$\Rightarrow$	$b_0=a_1+\alpha b_1$
$a_0=r-\alpha b_0$	$\Rightarrow$	$r=a_0+\alpha b_0$

Tabulka 6: Výpočet koeficientů polynomu *Q(x)* a neznámé konstanty *r*

Výpočet neznámých koeficientů a neznámé konstanty lze přehledně vyjádřit v grafickém schématu, které budeme nazývat Hornerovo schéma.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
		αb_{n-1}	αb_{n-2}	$\dots$	αb_2	αb_1	αb_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	r

Tabulka 7: Hornerovo schéma

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 26-28.)$

Příklad 1.11

Mějme zadaný stejný polynom $f(x) = 10x^5 + 7x^4 + 13x^3 - 2x^2 + 26x + 15$ a $\alpha = -\frac{1}{2}$, jako v příkladu 1.10, který je definován nad tělesem racionálních čísel. Pomocí Hornerova schématu zjistěte neúplný podíl $Q(x)$ a zbytek r, když polynom $f(x)$ dělíme polynomem $x - \alpha$.

Řešení:

Nejprve napíšeme do prvního řádku Hornerova schématu koeficienty polynomu $f(x)$. Hodnota α je známá ze zadání, doplníme ji do třetího řádku. Následně opíšeme do třetího řádku první koeficient z prvního řádku, v našem případě číslo 10. Opsané číslo 10 vynásobíme $-\frac{1}{2}$ (hodnota α). Výsledek napíšeme do druhého řádku pod druhý koeficient. Nyní sečteme číslo z prvního a druhého řádku $\big(7 + (-5)\big) = 2$, výsledek píšeme pod obě čísla do třetího řádku. Zjištěné číslo 2 opět vynásobíme číslem $-\frac{1}{2}$ (α). Výsledek napíšeme pod číslo 13 do druhého řádku. A opět následuje sčítání těchto dvou čísel. Princip se opakuje tak dlouho, dokud nejsme na konci tabulky. Pokud je na konci třetího řádku 0, znamená to, že $(x - \alpha)$ dělí $f(x)$ a tedy číslo $-\frac{1}{2}$ je nulovým bodem daného polynomu.

	10	7	13	-2	26	15
		-5	-1	-6	4	-15
$\alpha = -\dfrac{1}{2}$	10	2	12	-8	30	0

Tabulka 8: Hornerovo schéma postup řešení příklad 1.11

V posledním řádku Hornerova schématu vyšly koeficienty, ze kterých snadno určíme neúplný podílu, $Q(x) = 10x^4 + 2x^3 + 12x^2 - 8x + 30$. Dále v posledním řádku napravo vidíme, že zbytek r je roven 0. Lineární člen $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ tedy dělí polynom $f(x)$. Z toho plyne, že číslo $-\frac{1}{2}$ je nulovým bodem polynomu. Zadání obsahovalo stejný polynom $f(x)$ a číslo α, jako v předchozím příkladu 1.10 na straně 14. Vidíme, že jsme došli ke stejnému neúplnému podílu a zbytku. Pokud porovnám postupy řešení obou příkladu, myslím si, že řešení pomocí Hornerova schématu je časově výhodnější.

Příklad 1.12

Určete hodnotu polynomu $f(x)$ nad tělesem celých čísel v bodě $\alpha = 3$, jestliže $f(x) = 2x^6 - 4x^5 - 8x^3 + 5x^2 + 9x - 72$.

Řešení:

Příklad budeme řešit dvěma způsoby. První způsob řešení spočívá v dosazení $\alpha = 3$ do polynomu $f(x)$.

$$f(x) = 2x^6 - 4x^5 - 8x^3 + 5x^2 + 9x - 72$$

$$f(\alpha) = 2\alpha^6 - 4\alpha^5 - 8\alpha^3 + 5\alpha^2 + 9\alpha - 72$$

$$f(3) = 2(3)^6 - 4(3)^5 - 8(3)^3 + 5(3)^2 + 9(3) - 72$$

$$f(3) = 1458 - 972 - 216 + 45 + 27 - 72 = 270$$

Hodnota polynomu $f(x)$ v bodě 3 je rovna číslu 270.

Druhý způsob řešení příkladu je pomocí Hornerova schématu. Budeme postupovat obdobně, jako u předcházejícího příkladu.

	2	-4	0	-8	5	9	-72
		6	6	18	30	105	342
$\alpha = 3$	2	2	6	10	35	114	270

Tabulka 9: Hornerovo schéma postup řešení příklad 1.12

Pomocí Hornerova schématu jsme zjistili, že hodnota polynomu $f(x)$ v bodě 3 je rovna číslu 270, $f(3) = 270$. Jak je vidět, oba uvedené postupy vedou k zjištění stejného výsledku.

Poslední část první kapitoly budeme věnovat výpočtu největšího společného dělitele polynomů, pomocí něhož budeme v další kapitole provádět výpočet násobných nulových bodů.

Největší společný dělitel polynomů

Definice 1. 10

Předpokládejme, že $f(x)$ a $g(x)$ jsou polynomy nad tělesem $(T;+,\cdot)$. Polynom $D(x)$ nazveme největším společným dělitelem polynomů $f(x)$ a $g(x)$ právě tehdy, když platí:

1. $D(x) \mid f(x) \wedge D(x) \mid g(x)$,
2. $d(x) \mid f(x) \wedge d(x) \mid g(x) \Rightarrow d(x) \mid D(x)$.

Největšího společného dělitele polynomů $f(x)$ a $g(x)$ budeme značit $D[f(x), g(x)]$.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 30-31.)$

Definice 1.11

Říkáme, že polynom $f(x)$ je asociován s polynomem $g(x)$, budeme značit $f(x) \sim g(x)$, právě tehdy, když $f(x)$ dělí polynom $g(x)$ a současně $g(x)$ dělí polynom $f(x)$.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 30.)$

Pro výpočet největšího společného dělitele polynomů $f(x)$ a $g(x)$ můžeme použít Eukleidův algoritmus:

(1): $f(x) = g(x) \cdot Q(x) + R_1(x)$, kde $R_1(x) \neq 0 \wedge st[g(x)] > st[R_1(x)]$,

(2): $g(x) = R_1(x) \cdot Q_1(x) + R_2(x)$, kde $R_2(x) \neq 0 \wedge st[R_1(x)] > st[R_2(x)]$,

(3): $R_1(x) = R_2(x) \cdot Q_2(x) + R_3(x)$, kde $R_3(x) \neq 0 \wedge st[R_2(x)] > st[R_3(x)]$,

$$\dots$$

$(n-1)$: $R_{n-3}(x) = R_{n-2}(x) \cdot Q_{n-2}(x) + R_{n-1}(x)$,

kde $R_{n-1}(x) \neq 0 \wedge st[R_{n-2}(x)] > st[R_{n-1}(x)]$

(n): $R_{n-2}(x) = R_{n-1}(x) \cdot Q_{n-1}(x) + R_n(x)$, kde $R_n(x) = 0$.

Největší společný dělitel dvou polynomů $f(x)$ a $g(x)$ odpovídá zbytku R_{n-1}, zapisujeme $D[f(x), g(x)] = R_{n-1}$.

$(Upraveno\ podle\ [2], str. 32-33.)$

Příklad 1.13

Užitím Eukleidova algoritmu nalezněte největšího společného dělitele polynomů $f(x) = 2x^4 + 10x^3 - 9x^2 - 5x + 4$ a $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - x - 3$ nad tělesem $(Q, +, \cdot)$.

Řešení:

V prvním kroku budeme polynom $f(x)$ dělit polynomem $g(x)$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^4 + 10x^3 - 9x^2 - 5x + 4\ ) : (2x^3 + 6x^2 - x - 3) = x + 2 \\
\underline{-(2x^4 + 6x^3 - x^2 - 3x)\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad 4x^3 - 8x^2 - 2x + 4 \\
\underline{\qquad -(4x^3 + 12x^2 - 2x - 6)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -20x^2 + 10
\end{array}
$$

Dělením polynomů jsme zjistili, že neúplný podíl $Q(x) = x + 2$ a zbytek

$R_1(x) = -20x^2 + 10$, tj. první řádek Eukleidova algoritmu má obecný tvar:

$2x^4 + 10x^3 - 9x^2 - 5x + 4\ = (2x^3 + 6x^2 - x - 3) \cdot (x + 2) + (-20x^2 + 10)$,

kde $R_1 = -20x^2 + 10 \neq 0$ a $st[g(x)] = 3 > 2 = st[R_1(x)]$.

Budeme pokračovat v dělení polynomu $g(x)$ polynomem $R_1(x)$. Než se pustíme do samotného dělení polynomů, přejdeme od polynomu $-20x^2 + 10$ k asociovanému prvku $R_1{}'(x) = 2x^2 - 1$ a to tím, že polynom $-20x^2 + 10$ vynásobíme zlomkem $-\frac{1}{10}$.

$(\,-20x^2 + 10) \sim (2x^2 - 1)$

Následně polynom $g(x)$ dělíme výše zjištěným asociovaným prvkem $2x^2 - 1$.

$$
\begin{array}{l}
(2x^3 + 6x^2 - x - 3) : (\ 2x^2 - 1) = x + 3 \\
\underline{-(2x^3 - x)\qquad\quad} \\
\qquad\quad 6x^2 - 3 \\
\underline{\qquad -(6x^2 - 3)} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Při dělení polynomů jsme získali polynom $Q_1(x) = x + 3$ a zbytek dělení $R_2 = 0$. Platí:

$2x^3 + 6x^2 - x - 3 = (2x^2 - 1) \cdot (x + 3) + 0.$

Polynom $R_2(x)$ se rovná 0 a to znamená, že dále již algoritmus nepokračuje. Také jsme tím zjistili, že největším společným dělitelem polynomu $f(x)$ a $g(x)$ je polynom $R_1(x)$, tj.

$D[f(x), g(x)] = 2x^2 - 1.$

Definice 1.12

Dva polynomy $f(x)$ a $g(x)$ nad tělesem $(T, +, \cdot)$ nazveme nesoudělné prvky právě tehdy, když jejich největší společný dělitel $D(x)$ je asociován s jednotkou, tj. platí $D(x) \sim c$, kde c je nenulový prvek tělesa $(T, +, \cdot)$. Někdy tuto vlastnost lze zapsat ve tvaru $D(x) \sim 1$.

$(Převzato\ z\ [2], str. 31.)$

Příklad 1.14

Jsou dány polynomy $f(x) = 3x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 22x + 22$ a $g(x) = 3x^2 + 5x + 5$ nad tělesem $(Q, +, \cdot)$. Užitím Eukleidova algoritmu nalezněte největšího společného dělitele polynomů.

Řešení:

Příklad budeme řešit obdobným způsobem jako předcházející příklad 1.13, proto popis řešení bude stručnější. Nejprve polynom $f(x)$ vydělíme polynomem $g(x)$. Tím získáme neúplný podíl $Q(x) = x + 3$ a zbytek $R_1(x) = -30x^2 + 10$.

$$
\begin{array}{l}
\quad (3x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 22x + 22\ ) : (3x^2 + 5x + 5) = x^2 + 3 \\
\underline{-(3x^4 + 5x^3 + 5x^2) \qquad\qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\qquad 9x^2 + 22x + 22 \\
\underline{\qquad\qquad\quad -(9x^2 + 15x + 15)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 7x + 7
\end{array}
$$

Následně sestavíme první řádek Eukleidova algoritmu:

$3x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 22x + 22 = (3x^2 + 5x + 5) \cdot (x^2 + 3) + \ \ (7x + 7)$

Od prvku $7x + 7$ přejdeme k asociovanému prvku $R_1{}'(x) = x + 1$, který jsme získali vynásobením polynomu $7x + 7$ zlomkem $\frac{1}{7}$.

$(7x + 7) \sim (x + 1)$

Nyní můžeme pro zjištění neúplného podílu $Q_1(x)$ a zbytku $R_2(x)$ využít Hornerovo schéma. Z asociovaného prvku $R_1{}'(x) = x + 1$ vidíme, že $\alpha = -1$. Sestavíme tabulku Hornerova schématu.

	3	5	5
		-3	-2
$\alpha = -1$	3	2	3

Tabulka 10: Hornerovo schéma část postupu řešení příklad 1.14

Z Hornerova schématu jsme získali polynom $Q_1(x) = 3x + 2$ a zbytek $R_2(x) = 3$.

Druhý řádek Eukleidova algoritmu má tvar:

$3x^2 + 5x + 5 = (x + 1) \cdot (3x + 2) + 3.$

Od zbytku 3 přejdeme k asociovanému prvku $R_2{}'(x) = 1$ tím, že zbytek 3 vynásobíme $\frac{1}{3}$.

Provedeme dělení a sestavíme třetí řádek Eukleidova algoritmu.

$(x + 1) : (1) = x + 1$

$\underline{-(x)\qquad}$

1

$\underline{-(1)\qquad}$

0

$x + 1 = (1) \cdot (x) + 0$

Největší společný dělitel je roven číslu 1, a proto dle definice 1.12 jsou polynomy $f(x)$ a $g(x)$ nesoudělné.

2 NÁSOBNÉ KOŘENY ALGEBRAICKÝCH ROVNIC O JEDNÉ NEZNÁMÉ

Druhá kapitola je věnována násobným kořenům algebraických rovnic o jedné neznámé. Kapitola je rozdělena na dvě podkapitoly. První podkapitola je věnována základním poznatkům o algebraických rovnicích jedné neznámé. V této kapitole definujeme algebraickou rovnici, vysvětlíme rozdíl mezi proměnnou a neznámou a vyslovíme některé věty. Druhá podkapitola již bud věnována násobným kořenům algebraických rovnic o jedné neznámě.

2.1 ALGEBRAICKÁ ROVNICE, NEZNÁMÁ, KOŘEN

Jedním z hlavních úkolů algebry je pro nějaký polynom $f(x)$ nad tělesem $(T;+,\cdot)$ a nějaký prvkem a z tělesa $(T;+,\cdot)$, najít všechny prvky ξ z tělesa $(T;+,\cdot)$, takové že

$$f(\xi)=a.$$

Tuto úlohu lze zjednodušit, protože a můžeme považovat za polynom konstantu, který přiřazuje každému x z tělesa $(T;+,\cdot)$ funkční hodnotu a. Potom $g(x)=f(x)-a$ je opět polynom nad tělesem $(T;+,\cdot)$ a je zřejmé, že $f(\xi)=a$ platí právě pro ta ξ z $(T;+,\cdot)$ pro něž $g(\xi)=0$. Úplně tedy stačí vyšetřovat, pro která ξ z tělesa $(T;+,\cdot)$ daný polynom $f(x)$ nad tělesem $(T;+,\cdot)$ nabývá hodnot 0, tedy pro která ξ platí

$$f(\xi)=0.$$

Zápis $f(\xi)=0$ představuje úlohu, která se má řešit. Úloha se skládá ze dvou částí. V prvním kroku je nutné zjistit, zda vůbec takové prvky ξ existují a pokud existují, tak v druhém kroku je třeba je určit. Zápis $f(\xi)=0$ nazýváme *algebraické rovnice*[1] a prvek ξ *neznámá*. Mluvíme tedy pak o algebraických rovnicích o jedné neznámé. Zjistíme-li, že pro prvek a platí $f(a)=0$, říkáme, že a je *řešením* nebo *kořenem* nebo *nulovým bodem* rovnice. Rovnice se uvádí nejčastěji ve tvaru $f(\xi)=0$, kterému říkáme *anulovaný tvar rovnice*.

[1]Podle Schwarze [7] lze rovnice dělit do dvou skupin a to na *algebraické rovnice* a *rovnice transcendentní.* Rovnice je algebraická, pokud je neznámá spjata s konstantami pouze pomocí elementárních početných operací (sčítání, odčítání, násobení a dělení). V případě, že levá strana obsahuje neznámou ξ jako argument funkcí např. $cos\ \xi$ či $ln\,\xi$, nazýváme ji *rovnicí transcendentní*. Konkrétním příkladem takové rovnice je $\sin\xi+4^{\xi}+1=0.\ (Podle\ [7], str. 13.)$

Rovnice $f(\xi) = 0$ vznikne z polynomu $f(x)$ formálně tím, že v něm namísto proměnné x píšeme neznámou ξ, a proto se dá na rovnice ihned převést pojem stupeň polynomu. Proto mluvíme o *algebraické rovnici* n *-tého stupně*,

$$a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0,$$

o rovnici bikvadratické, $a_4\xi^4 + a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0,$

o rovnici kubické, $a_3\xi^3 + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0,$

o rovnici kvadratické, $a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0,$

o rovnici lineární, $a_1\xi + a_0 = 0.$

Podobně je tomu s pojmy *koeficient rovnice* a *člen k-tého stupně v rovnici.*

Je velice důležité rozlišovat pojmy polynom a rovnice, proměnnou a neznámou. Proto budeme v této kapitole označovat proměnnou x a neznámou ξ. Z předcházející kapitoly víme, že polynom má tvar

(2.1) $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0.$$

Za proměnou x polynomu $f(x)$ je možné dosadit libovolný prvek z daného tělesa. Rovnice má tvar

(2.2) $$a_n\xi^n + a_{n-1}\xi^{n-1} + \cdots + a_2\xi^2 + a_1\xi + a_0 = 0.$$

Rovnici ve tvaru (2.2) budeme nazývat rovnicí příslušnou polynomu (2.1) a naopak polynom (2.1) budeme označovat jako polynom příslušný rovnici (2.2).

Neznámou ξ rovnice (2.2) je prvek, který má splňovat jistý vztah rovnicí vyjádřený, který však dosud není určen a jehož existence se má teprve vyšetřit.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 146 - 147.)$

Kořínek ve své knize [6] ještě upozorňuje na rozdíl mezi rovností a rovnicí. Rovnost je vztah, který nám říká, že za určitých okolností dva výrazy jsou si rovny. Příkladem je rovnost $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$, která vyjadřuje rovnost levé a pravé strany rovnosti, která platí pro každé x. Rovnice je naproti tomu jistá úloha, která má vztah platný jen pro určité hodnoty ξ, jak již bylo výše uvedeno. Například $\xi^2 + 4\xi + 1 = 0$ je rovnice. V této práci se budeme výhradně zabývat algebraickými rovnicemi.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 147\ a\ [7], str. 13.)$

V následující části se seznámíme s důsledky, které plynou z rozkladu polynomu $f(x)$ v součin lineárních faktorů, jedná-li se o polynom $f(x)$ nad tělesem komplexních čísel $(C;+,\cdot)$.

Věta 2.1

Každý polynom tvaru (2.1)

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

stupně $n \geq 1$ nad tělesem komplexních čísel lze psát jako součin n lineárních faktorů

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n),$$

kde komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ jsou všechny kořeny rovnice $f(\xi) = 0$.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 351.)$

Poznámka

Jediné ireducibilní[2] polynomy jedné neurčité nad tělesem komplexních čísel jsou polynomy prvního stupně.

$(Převzato\ podle\ [6], str. 352.)$

Důkaz věty 2.1

Pro dokázání výše vyslovené věty, budeme postupovat metodou matematické indukce. Předpokládejme, že každý polynom $(n-1)$-ho stupně se dá rozložit na lineární faktory. Má-li polynom $f(x)$ n -tého stupně kořen α_1, takový že $f(\alpha_1) = 0$. Potom lze psát

$$f(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x),$$

kde $Q_1(x)$ je polynom stupně $(n-1)$-ho. Koeficient u x^{n-1} v $Q_1(x)$ je a_n, jak se lehce zjistí, pokud srovnáme koeficienty u x^n nalevo a napravo v rovnosti

$$f(x) = (x - \alpha_1)Q_1(x).$$

V případě, že polynom $Q_2(x)$ má nějaký kořen α_2 píšeme analogicky

$$Q_1(x) = (x - \alpha_2)Q_2(x).$$

[2] Ireducibilním polynomem $g(x)$nad tělesem $(T;+,\cdot)$ je polynom, který má pouze nevlastní dělitele (nenulové prvky tělesa T a polynomy asociované s $g(x)$).

Takovýmto způsobem bychom stále mohli pokračovat. Jestliže všechny polynomy $f(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots$ mají kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ pak lze psát

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n).$$

Nyní se podíváme na důkaz obráceně. Ze vztahu $f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$ plyne, že komplexní čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou kořeny rovnice $f(\xi) = 0$. Nechť β libovolné komplexní číslo takové, že $f(\beta) = 0$. Následně za x dosadíme β a dostaneme vztah

$$f(\beta) = a_n(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \dots (\beta - \alpha_n) = 0.$$

Z toho plyne, že $\beta = \alpha_i$ alespoň pro jeden index i, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Tím je věta 2.1 dokázána.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 352\ a\ [7], str. 2.)$

Příklad 2.1

Proveďte rozklad polynomu $f(x)$ na součin n lineárních faktorů, kde polynom

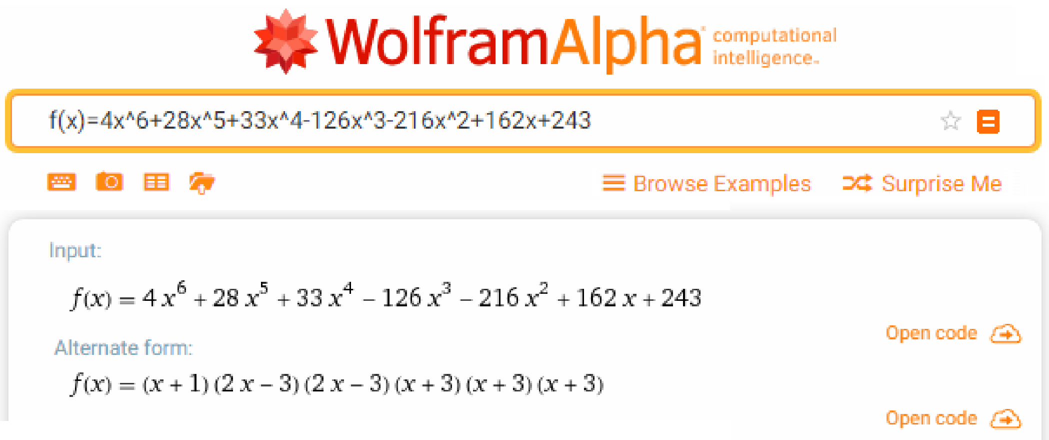
$f(x) = 4x^6 + 28x^5 + 33x^4 - 126x^3 - 216x^2 + 162x + 243$ je nad tělesem $(Q; +, \cdot)$.

Řešení:

Rozklad polynomu $f(x)$ zjistíme v některém z dostupných programů, v našem případě jsme použili program WolframAlpha.

Polynom $f(x)$ má následující rozklad

$$f(x) = (x + 1)(2x - 3)(2x - 3)(x + 3)(x + 3)(x + 3).$$



Obrázek 1: Postup řešení příkladu 2.1 v programu WolframAlpha

Na základě předcházející věty lze vyslovit definici.

Definice 2.1

Budiž $f(x)$ daný polynom n-tého stupně nad $(C;+,\cdot)$. Pro $f(x)$ platí rozklad

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n).$$

Jednotlivé lineární faktory $x-\alpha_i$ nazýváme *kořenovými činiteli polynomu* $f(x)$.

Podobně lze psát pro rovnici (2.2) rozklad

$$a_n(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)\dots(\xi-\alpha_n) = 0.$$

Lineární faktory tohoto rozkladu se nazývají *kořenoví činitelé rovnice* (2.2).

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 362.)$

2.2 NÁSOBNÝ KOŘENOVÝ ČINITEL, NÁSOBNOST KOŘENE

S pojmem násobnost jsme se v matematice setkali poprvé při řešení kvadratické rovnice. Připomeňme, že kvadratická rovnice je rovnice ve tvaru $a\xi^2 + b\xi + c = 0$, kde a, b, c jsou komplexní čísla. Kořeny rovnice se vypočítají pomocí vzorce

$$\xi_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Výraz pod odmocninou ve vzorci, $D = b^2 - 4ac$, nazýváme *diskriminant kvadratické rovnice*. V případě, že je diskriminant nulový, $D = 0$, tak kořeny ξ_1, ξ_2 se rovnají. Kořeny s touto vlastností označujeme jako *násobné.*

Uvedeme konkrétní příklad kvadratické rovnice s násobným kořenem:

$$\xi^2 + 6\xi + 9 = 0.$$

Nejprve zjistíme hodnotu diskriminantu, tedy

$$D = 6^2 - 4\cdot 1\cdot 9 = 36 - 36 = 0.$$

Diskriminant se rovná 0, proto kořeny ξ_1 a ξ_2 se budou rovnat. Platí pro ně:

$$\xi_{1,2} = \frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 1\cdot 9}}{2\cdot 1} = -3$$

Číslo -3 je násobným kořenem rovnice $\xi^2 + 6\xi + 9 = 0$.

Nyní pojem násobnosti zpřesníme, zavedeme pojem násobného kořenového činitele a násobného kořene.

Násobnost kořenových činitelů

Příklad 2.2

Všimněme si, že v rozkladu polynomu z příkladu 2.1 se někteří kořenoví činitelé opakovali. Zapište rozklad tohoto polynomu jako součin mocnin kořenových činitelů.

Řešení:

Rozklad polynomu z příkladu 2.1 je:

$$f(x) = (x+1)(2x-3)(2x-3)(x+3)(x+3)(x+3). \tag{2.3}$$

V rozkladu polynomu vidíme, že kořenový činitel $(2x-3)$ se opakuje dvakrát, proto nově budeme zapisovat $(2x-3)^2$. Kořenový činitel $(x+3)$ je v rozkladu obsažen třikrát, tedy píšeme $(x+3)^3$. V dalším textu budeme psát, že $(2x-3)$ je kořenový činitel dvojnásobný a $(x+3)$ trojnásobný. Podobně kořen $\frac{3}{2}$ odpovídající $(2x-3)$ bude dvojnásobný a kořen -3 trojnásobný. Další kořenoví činitelé se již v rozkladu polynomu neopakují. Rozklad polynomu jako součin mocnin kořenových činitelů zapisujeme následovně

$$f(x) = (x+1)(2x-3)^2(x+3)^3. \tag{2.4}$$

Rovnice $f(\xi) = 0$ příslušná polynomu (2.3) má méně než 6 různých kořenů, konkrétně má jen tři různé kořeny. Všimněme si, že sečteme-li exponenty v zápisu (2.4), dostaneme stupeň původního polynomu, zde $1+2+3=6$.

Definice 2.2

Nechť polynom $f(x)$ nad $(C; +,\cdot)$ má rozklad

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_i)\dots(x-\alpha_n),\ \ a_n \neq 0$$

v kořenové činitele. Prvky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ jsou právě všechny kořeny rovnice

$$f(\xi) = a_n(\xi-\alpha_1)(\xi-\alpha_2)\dots(\xi-\alpha_i)\dots(\xi-\alpha_n) = 0.$$

Jestliže jsou všechny prvky $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ od sebe navzájem různé, říkáme, že rovnice $f(\xi)$ má právě n kořenů. V opačném případě píšeme rozklad ve tvaru

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_i)^{k_i} \dots (x-\alpha_r)^{k_r},$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ jsou od sebe různá komplexní čísla a alespoň jeden z exponentů $k_1, k_2, \dots, k_r \in N$ je větší než jedna. Říkáme, že $(x-\alpha_i)$ je v $f(x)$ *kořenovým činitelem* k_i*-násobným.* Říkáme, že α_i je k_i*– násobným kořenem rovnice* $f(\xi) = 0$, nebo také k_i*– násobným nulovým bodem* $f(x)$. Pro exponenty $k_1, k_2, \dots, k_r$ platí, že

$$k_1 + k_2 + \dots + k_r = n.$$

(*Upraveno podle* [6], *str.* 362 – 363.)

Věta 2.2

Každá rovnice $f(\xi) = 0$ stupně $n \geq 1$ má v tělese $(C; +,\cdot)$ právě n kořenů, počítáme-li každý kořen tolikrát, kolik činí jeho násobnost.

(*Převzato z* [6], *str.* 363.)

V některé literatuře je pojem násobného kořene zaveden pomocí pojmu násobný nulový bod například ve zdroji ([2], *str.* 36) je nulový bod α polynomu $f(x)$ nazýván *k-násobným nulovým bodem polynomu* právě tehdy, když platí

$$(x-\alpha)^k \mid f(x) \wedge (x-\alpha)^{k+1} \nmid f(x).$$

Poznámka

Z rozkladu z definice 2.2

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_i)^{k_i} \dots (x-\alpha_r)^{k_r}$$

je zřejmé, že

$$(x-\alpha_i)^{k_i} \mid f(x) \wedge (x-\alpha_i)^{k_i+1} \nmid f(x).$$

Tuto poznámku doložíme na následujícím příkladu 2.3.

Příklad 2.3

Na polynomu z příkladu 2.1 ověřte, platnost věty 2.2.

Řešení: V první části ověření podmínky budeme dělit polynom

$$f(x) = 4x^6 + 28x^5 + 33x^4 - 126x^3 - 216x^2 + 162x + 243$$

kořenovým činitelem $(x+3)$ s násobností 3, tedy $(x+3)^3$.

$$(4x^6 + 28x^5 + 33x^4 - 126x^3 - 216x^2 + 162x + 243) : (x^3 + 9x^2 + 27x + 27) =$$

$$\underline{-(4x^6 + 36x^5 + 108x^4 + 108x^3)} \qquad = 4x^3 - 8x^2 - 3x + 9$$

$$-8x^5 - 75x^4 - 243x^3 - 216x^2 + 162x + 243$$

$$\underline{-(-8x^5 - 72x^4 - 216x^3 - 216x^2)}$$

$$-3x^4 - 18x^3 + 162x + 243$$

$$\underline{-(-3x^4 - 27x^3 - 81x^2 - 81x)}$$

$$9x^3 + 81x^2 + 243x + 243$$

$$\underline{-(9x^3 + 81x^2 + 243x + 243)}$$

$$0$$

Dělení polynomu $f(x)$ kořenovým činitelem $(x + 3)$ s násobností 3 vyšlo bez zbytku, tedy je splněna podmínka $(x - \alpha_i)^{k_i} \mid f(x)$. Nyní musíme ověřit, jestli je splněna i podmínka $(x - \alpha_i)^{k_i+1} \nmid f(x)$. Proto budeme polynom $f(x)$ dělit kořenovým činitelem $(x + 3)$ s násobností 4, tedy s násobností o jedna vyšší než je násobnost tohoto kořene.

$$(4x^6 + 28x^5 + 33x^4 - 126x^3 - 216x^2 + 162x + 243)$$

$$: (x^4 + 12x^3 + 54x^2 + 108x + 81) =$$

$$\underline{-(4x^6 + 48x^5 + 216x^4 + 432x^3 + 324x^2)} \qquad 4x^2 - 20x + 57$$

$$-20x^5 - 183x^4 - 558x^3 - 540x^2 + 162x + 243$$

$$\underline{-(-20x^5 - 240x^4 - 1080x^3 - 2160x^2 - 1620x)}$$

$$57x^4 + 522x^3 + 1620x^2 + 1782x + 243$$

$$\underline{-(57x^4 + 684x^3 + 3078x^2 + 6156x + 4617)}$$

$$216x^3 - 540x^2 + 162x + 243$$

$$\underline{-(216x^3 - 648x^2 + 486x)}$$

$$-162x^3 - 1458x^2 - 4374x - 4374$$

Dělení polynomu $f(x)$ a kořenového činitele $(x + 3)$ s násobností 4 vyšlo se zbytkem. To znamená, že kořenový činitel $(x + 3)^4$ polynom $f(x)$ nedělí a tím je splněna i druhá část podmínky tedy, $(x - \alpha_i)^{k_i+1} \nmid f(x)$.

Poznámka

Jestliže α je k-násobným kořenem rovnice $f(\xi) = 0$, pak pro polynom $f(x)$ n -tého stupně platí nad $(C; +,\cdot)$ rozklad

(2.5) $$f(x) = (x - \alpha)^k Q_k(x).$$

Činitel $Q_k(x)$ je polynom $(n - k)$-tého stupně nad tělesem $(C; +,\cdot)$, pro něhož platí, že $Q_k(\alpha) \neq 0$. Obráceně, tedy máme-li tento rozklad polynomu $f(x)$ nad $(C; +,\cdot)$ takový, že $Q_k(\alpha) \neq 0$, je α k-násobným kořenem rovnice $f(\xi) = 0$.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 363.)$

Příklad 2.4

Je dána rovnice $\xi^5 + 4\xi^4 - 23\xi^3 - 38\xi^2 + 220\xi - 200 = 0$, najděte, kolikanásobné jsou kořeny 2 a -5.

Řešení:

	1	4	-23	-38	220	-200
		2	12	-22	-120	200
2	1	6	-11	-60	100	**0**
		2	16	10	-100	
2	1	8	5	-50	**0**	
		2	20	50		
2	1	10	25	**0**		
		2	24			
2	1	12	49			

Tabulka 11: Hornerovo schéma postup řešení příklad 2.3 pro kořen 2

Příklad řešíme rozšířeným Hornerovým schématem. Nejprve budeme zjišťovat, zda je číslo 2 alespoň jednoduchým kořenem zadané rovnice. Ve třetím řádku naší tabulky je číslo 0, tím jsme prokázali, že číslo 2 je alespoň jednoduchým kořenem. Nyní budeme Hornerovo schéma realizovat pro nově vzniklou rovnici $\xi^4 + 6\xi^3 - 11\xi^2 - 60\xi + 100 = 0$. Na základě toho zjistíme, zda kořen 2 je právě jednoduchým či alespoň dvojnásobným kořenem. Na konci pátého řádku je 0. Kořen 2 je tedy alespoň dvojnásobným kořenem. Opět pokračujeme Hornerovým schématem pro rovnici $\xi^3 + 8\xi^2 + 5\xi - 50 = 0$, abychom zjistili, zda je kořen dvě právě dvojnásobným či alespoň trojnásobným kořenem. Po provedení tohoto kroku jsme zjistili, že kořen dvě je alespoň trojnásobným kořenem. Pro zjištění zda je kořen 2 právě trojnásobným kořenem či alespoň čtyřnásobným kořenem sestavíme další řádek Hornerova schématu pro rovnici $\xi^2 + 10\xi + 25 = 0$. V posledním řádku již nemáme číslo 0. To znamená, že kořen 2 je právě trojnásobným kořenem rovnice $\xi^5 + 4\xi^4 - 23\xi^3 - 38\xi^2 + 220\xi - 200 = 0$.

Nyní zjistíme kolikanásobný je kořen -5, opět využitím rozšířeného Hornerova schéma pro zadanou rovnici. Ve třetím řádku se objevilo číslo 0, z toho plyne, že číslo -5 je alespoň jednoduchým kořenem zadané rovnice. Realizujeme další řádek schématu pro zjištění, zda je -5 právě jednoduchým či alespoň dvojnásobným kořenem. Na konci pátého řádku vidíme číslo 0, tedy -5 je alespoň dvojnásobným kořenem. Pro zjištění je-li kořen -5 právě dvojnásobným či alespoň trojnásobným kořenem sestavíme další řádek Horneorva schématu. V posledním řádku je číslo -343. Můžeme říci, že číslo -5 je právě dvojnásobným kořenem zadané rovnice $\xi^5 + 4\xi^4 - 23\xi^3 - 38\xi^2 + 220\xi - 200 = 0$.

	1	4	-23	-38	220	-200
		-5	5	90	-260	200
-5	1	-1	-18	52	-40	**0**
		-5	30	-60	40	
-5	1	-6	12	-8	**0**	
		-5	55	-335		
-5	1	-11	67	-343		

Tabulka 12: Hornerovo schéma postup řešení příklad 2.3 pro kořen -5

Příklad 2.5

Určete, kolikanásobné jsou kořeny 2 a 3, máme-li zadanou následující rovnice $\xi^6 - 10\xi^5 + 31\xi^4 - 12\xi^3 - 81\xi^2 + 54\xi + 81 = 0$.

Řešení:

Příklad se řeší stejným postupem jako předchozí příklad 2.4, proto zde nebude uvádět komentář řešení příkladu.

	1	−10	31	−12	−81	54	81
		2	−16	30	36	−90	−72
2	1	−8	15	18	−45	−36	9

Tabulka 13: Hornerovo schéma postup řešení příklad 2.4 pro kořen 2

Číslo 2 není kořen rovnice $\xi^6 - 10\xi^5 + 31\xi^4 - 12\xi^3 - 81\xi^2 + 54\xi + 81 = 0$.

	1	−10	31	−12	−81	54	81
		3	−21	30	54	−81	−81
3	1	−7	10	18	−27	−27	**0**
		3	−12	−6	36	27	
3	1	−4	−2	12	9	**0**	
		3	−3	−15	−9		
3	1	−1	−5	−3	**0**		
		3	6	3			
3	1	2	1	**0**			
		3	15				
3	1	5	16				

Tabulka 14: Hornerovo schéma postup řešení příklad 2.4 pro kořen 3

Pomocí rozšířeného Hornerova schématu jsme zjistili, že číslo 3 je právě čtyřnásobným kořenem rovnice $\xi^6 - 10\xi^5 + 31\xi^4 - 12\xi^3 - 81\xi^2 + 54\xi + 81 = 0$.

Derivace

V následující části této podkapitoly budeme využívat derivaci pro zjištění násobných kořenů rovnice. Vícenásobnost kořene úzce souvisí s pojmem derivace známým z diferenciálního počtu. Derivaci definujeme nezávisle na diferenciálním počtu čistě formálně, ale takovým způsobem, aby obě definice ve skutečnosti souhlasily.

První derivací polynomu

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

budeme rozumět polynom

$$f'(x) = n a_n x^{n-1} + \cdots + 4a_4 x^3 + 3a_3 x^2 + 2a_2 x + a_1.$$

Druhou derivací polynomu $f(x)$ budeme rozumět derivaci první derivace polynomu $f'(x)$, tedy

$$f''(x) = n \cdot (n-1) a_n x^{n-2} + \cdots + 4 \cdot 3a_4 x^2 + 3 \cdot 2a_3 x + 2 \cdot 1a_2.$$

Obecně řečeno r-tou derivací daného polynomu budeme rozumět derivaci z $(r-1)$-ní derivace. Třetí derivace polynomu $f(x)$ je, tedy

$$f'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) a_n x^{n-3} + \cdots + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4 x + 3 \cdot 2 \cdot 1a_3.$$

Jestliže budeme chtít určit n-tou derivaci, tak dostaneme

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 2 \cdot 1a_n = n!\, a_n.$$

Všechny další derivace klademe rovny nule.

Připomeňme pravidla pro derivování součtu a součinu polynomů v algebře.

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x),$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$(Upraveno\ podle\ [7], str. 18-19.)$

Příklad 2.6

Určete prvních 10 derivací polynomu $f(x)$, kde $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$.

Řešení:

$f'(x) = 5x^4 - 45x^2 - 20x + 60$

$f''(x) = 20x^3 - 90x - 20$

$f'''(x) = 60x^2 - 90$

$f^{(4)}(x) = 120x$

$f^{(5)}(x) = 120$

$f^{(6)}(x) = f^{(7)}(x) = f^{(8)}(x) = f^{(9)}(x) = f^{(10)}(x) = 0$

Věta 2.3

Nechť $f(x)$ je polynom stupně $n \geq 1$ nad $(C; +,\cdot)$. A α je jeden kořen rovnice $f(\xi) = 0$. Potom α je kořen k-násobný tehdy a jen tehdy, platí-li

$$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0, \dots, f^{(k-1)}(\alpha) = 0, f^{(k)}(\alpha) \neq 0,$$

tj. je-li α zároveň kořenem prvních $k-1$ derivací polynomu $f(x)$, není však kořenem derivace k-té.[3]

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 363.)$

Poznámka

Větu lze také vyslovit následujícím způsobem. Má-li rovnice $f(\xi) = 0$ k-násobný kořen, mají polynomy $f(x), f'(x), \dots, f^{(k-1)}(x)$ společného dělitele.

$(Upraveno\ podle\ [7], str. 22.)$

Příklad 2.7

Máme zadaný polynom $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$. Číslo 3 a -2 jsou kořeny rovnice $f(\xi) = 0$. Užitím věty 2.3 zjistěte, o kolikanásobné kořeny se jedná.

Řešení:

$f(x)$ je polynom pátého stupně, čímž je splněno, že $n \geq 1$.

[3] Důkaz věty 2.3 viz [6] str. 363-364

Nejprve se podíváme na první kořen rovnice $f(\xi) = 0$, kterým je číslo 3. V předchozím příkladu 2.5 jsme určili prvních deset derivací zde zadaného polynomu, tyto derivace zde budeme následně využívat. Jako první provedeme dosazení kořene 3 do původní rovnice.

$$f(3) = (3)^5 - 15(3)^3 - 10(3)^2 + 60(3) + 72 = 0$$

Rovnice je rovna nule, a proto provádíme dosazení kořene 3 do první derivace polynomu.

$$f'(3) = 5(3)^4 - 45(3)^2 - 20(3) + 60 = 0$$

Po dosazení vyšla 0, to znamená, že kořen 3 je alespoň dvojnásobným kořenem. Kořen 3 dosadíme do druhé derivace polynomu.

$$f''(x) = 20(3)^3 - 90(3) - 20 = 205 \neq 0$$

Po dosazení vidíme, že se druhá derivace polynomu nule nerovná. Z toho plyne, že kořen 3 je právě dvojnásobným kořenem rovnice.

Následně budeme zjišťovat kolikanásobný je kořen -2. Budeme postupovat naprosto stejným způsobem, proto již zde nebude uvádět komentář řešení.

$$f(-2) = (-2)^5 - 15(-2)^3 - 10(-2)^2 + 60(-2) + 72 = 0$$

$$f'(-2) = 5(-2)^4 - 45(-2)^2 - 20(-2) + 60 = 0$$

$$f''(-2) = 20(-2)^3 - 90(-2) - 20 = 0$$

$$f'''(-2) = 60(-2)^2 - 90 = 150 \neq 0$$

Kořen -2 je právě trojnásobným kořenem rovnice.

Věta 2.4

Nechť je $f(x)$ polynom stupně $n \geq 1$ nad $(C; +,\cdot)$. Je-li α právě k-násobným kořenem rovnice $f(\xi) = 0$, potom je $(k-1)$-násobným kořenem rovnice $f'(\xi) = 0$, $(k-2)$-násobným kořenem rovnice $f''(\xi) = 0$, … a jednoduchým kořenem rovnice $f^{(k-1)}(\xi) = 0$.

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 364\ a\ [7], str. 22.)$

Příklad 2.8

Ověřte výše vyslovenou větu 2.4, pokud je zadaný stejný polynom $f(x)$ jako v předchozím příkladu 2.7.

Řešení:

V minulém příkladu byl zadaný polynom $f(x) = x^5 - 15x^3 - 10x^2 + 60x + 72$, u kterého jsme zajistili, že kořen 3 je dvojnásobným kořenem a kořen -2 je trojnásobným kořenem rovnice.

Nejprve budeme pracovat s kořenem 3:

Pro $f(\xi) = 0$ je kořen 3 dvojnásobným kořenem, $k = 2$.

Pro $f'(\xi) = 0$ je kořen 3 jednoduchým kořenem, což odpovídá větě 2.4, protože $k - 1$, kde $k = 2$, je rovno 1.

Nyní se podíváme na kořen -2:

Pro $f(\xi) = 0$ je kořen -2 trojnásobným kořenem, $k = 3$.

Pro $f'(\xi) = 0$ je kořen -2 dvojnásobným kořenem, což odpovídá větě 2.4, protože $k - 1$, kde $k = 3$, je rovno 2.

Pro $f''(\xi) = 0$ je kořen -2 jednoduchým kořenem, což odpovídá větě 2.4, protože $k - 2$, kde $k = 3$, je rovno 1.

Věta 2.5

Budiž $f(x)$ daný polynom stupně $n \geq 1$ nad nějakým číselným tělesem $(T; +,\cdot)$. Budiž $D(x)$ největším společným dělitelem $f(x)$ a $f'(x)$, $D[f(x), f'(x)]$. Je-li α k-násobným kořenem rovnice $f(\xi) = 0$, je $(k-1)$-násobným kořenem rovnice $D(\xi) = 0$ a tato rovnice nemá již jiných kořenů. Platí-li tedy pro polynom $f(x)$ rozklad

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \dots (x - \alpha_r)^{k_r},$$

$$\text{je } D(x) = b_n(x - \alpha_1)^{k_1 - 1}(x - \alpha_2)^{k_2 - 1} \dots (x - \alpha_r)^{k_r - 1}.$$

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 364.)$

Příklad 2.9

Máme zadaný rozklad polynomu $f(x) = (x - 2)^2(x + 2)^3$. Ověřte větu 2.5.

$(Polynom\ byl\ převzat\ z\ [7], str. 25)$

Řešení:

Nejprve zadaný polynom zapíšeme ve tvaru (2.1), jelikož pro následné derivování je tento tvar výhodnější.

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32$$

Určíme první derivaci polynomu $f(x)$.

$$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 32x + 16$$

V dalším kroku určíme největšího společného dělitele polynomu $f(x)$ a derivace $f'(x)$. Abychom při dělení dostávali celočíselné koeficienty, vynásobíme $f(x)$ číslem 5.

$$(5x^5 + 10x^4 - 40x^3 - 80x^2 + 80x + 160) : (5x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 32x + 16) = x$$

$$\underline{-(5x^5 + 8x^4 - 24x^3 - 32x^2 + 16x)}$$

$$2x^4 - 16x^3 - 48x^2 + 64x + 160$$

Polynom $2x^4 - 16x^3 - 48x^2 + 64x + 160$ vydělíme číslem 2.

$$(5x^4 + 8x^3 - 24x^2 - 32x + 16) : (x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 32x + 80) = 5$$

$$\underline{-(5x^4 - 40x^3 - 120x^2 + 160x + 400)}$$

$$48x^3 + 96x^2 - 192x - 384$$

Polynom $48x^3 + 96x^2 - 192x - 384$ vydělíme číslem 48.

$$(x^4 - 8x^3 - 24x^2 + 32x + 80) : (x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = x - 10$$

$$\underline{-(x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 8x)}$$

$$-10x^3 - 20x^2 + 40x + 80$$

$$\underline{-(-10x^3 - 20x^2 + 40x + 80)}$$

$$0$$

Dělení $f(x)$ a $f'(x)$ vyšlo beze zbytku. Největší společný dělitel těchto dvou polynomů je

$$D[f(x), f'(x)] = x^3 + 2x^2 - 4x - 8.$$

Nyní rozložíme největšího společného dělitele $f(x)$ a $f'(x)$ na kořenové činitele.

$$x^3 + 2x^2 - 4x - 8 = (x-2)(x+2)^2$$

Kořenoví činitelé největšího společného dělitele mají o jedna menší násobnost, než měli v původním polynomu. Nezapomeňme si všimnout, že polynom $D(x)$ nemá již dalších kořenů (nulových bodů).

Věta 2.6

Nechť je $f(x)$ ireducibilní polynom nad daným číselným tělesem $(C; +,\cdot)$. Pak $f(x)$ má jen jednoduchý kořen. $(Převzato\ z\ [6], str. 365.)$

Věta 2.7

Nechť $f(x)$ je polynom nad tělesem T, kde $(T; +,\cdot)$ je dané číselné těleso. Platí-li pro $f(x)$ rozklad

$$f(x) = a_n(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_r)^{k_r}$$

v kořenové činitele, pak i polynom

$$Q_k(x) = c_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \dots (x-\alpha_n)$$

je polynomem nad tělesem T a platí

$$Q_k(x) = f(x)/D(x).$$

$(Upraveno\ podle\ [6], str. 365.)$

Příklad 2.10

Na příkladu 2.9 ověřte větu 2.7.

Řešení:

Polynom $f(x)$ vydělíme největším společným dělitelem polynomu $f(x)$ a derivace $f'(x)$.

$$(x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32) : (x^3 + 2x^2 - 4x - 8) = x^2 - 4$$

$$\underline{-(x^5 + 2x^4 - 4x^3 - 8x^2)}$$

$$-4x^3 - 8x^2 + 16x + 32$$

$$\underline{-(-4x^3 - 8x^2 + 16x + 32)}$$

$$0$$

$$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$$

Polynom $x^2 - 4$ má stejné kořenové činitele jako polynom

$$f(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^3 - 16x^2 + 16x + 32,$$

ale pouze jednoduché.

Příklad 2.11

Je dána rovnice $f(\xi) = \xi^8 + 2\xi^6 - 2\xi^2 - 1 = 0$. Zjistěme, zda rovnice má vícenásobné kořeny. Pokud ano, stanovte rovnici, která má tytéž kořeny jako $f(\xi) = 0$, ale každý jen jednoduchý.

$(Zadání\, převzato\ z\ [7], str. 25.)$

Řešení:

Nejprve si vyjádříme první derivaci $f(\xi)$.

$f'(\xi) = 8\xi^7 + 12\xi^5 - 4\xi$

Následně hledáme největšího společného dělitele $f(\xi)$ a $f'(\xi)$. Abychom při dělení dostávali celočíselné koeficienty, vynásobíme $f(\xi)$ číslem 8.

$$(8\xi^8 + 16\xi^6 - 16\xi^2 - 8) : (8\xi^7 + 12\xi^5 - 4\xi) = \xi$$

$$\underline{-(8\xi^8 + 12\xi^6 - 4\xi^2)}$$

$$4\xi^6 - 12\xi^2 - 8$$

$$8\xi^8 + 16\xi^6 - 16\xi^2 - 8 = (8\xi^7 + 12\xi^5 - 4\xi) \cdot \xi + (4\xi^6 - 12\xi^2 - 8)$$

$$(8\xi^7 + 12\xi^5 - 4\xi) : (4\xi^6 - 12\xi^2 - 8) = 2\xi$$

$$\underline{-(8\xi^7 - 24\xi^3 - 16\xi)}$$

$$12\xi^5 + 24\xi^3 + 12\xi$$

$$8\xi^7 + 12\xi^5 - 4\xi = (4\xi^6 - 12\xi^2 - 8) \cdot 2\xi + (12\xi^5 + 24\xi^3 + 12\xi)$$

Rovnici $4\xi^6 - 12\xi^2 - 8 = 0$ vynásobíme číslem 3.

$$(12\xi^6 - 36\xi^2 - 24) : (12\xi^5 + 24\xi^3 + 12\xi) = \xi$$

$$\underline{-(12\xi^6 + 24\xi^4 + 12\xi^2)}$$

$$-24\xi^4 - 48\xi^2 - 24$$

$$12\xi^6 - 36\xi^2 - 24 = (12\xi^5 + 24\xi^3 + 12\xi) \cdot \xi + (-24\xi^4 - 48\xi^2 - 24)$$

Rovnici $12\xi^5 + 24\xi^3 + 12\xi = 0$ vynásobíme zlomkem $\frac{1}{12}$. Vynásobení provedeme i pro rovnici $-24\xi^4 - 48\xi^2 - 24 = 0$, kterou budeme násobit zlomkem $-\frac{1}{24}$.

$$(\xi^5 + 2\xi^3 + \xi) : (\xi^4 + 2\xi^2 + 1) = \xi$$

$$\underline{-(\xi^5 + 2\xi^3 + \xi)}$$

$$0$$

Dělení vyšlo beze zbytku, $f(\xi)$ a $f'(\xi)$ mají největšího společného dělitele, kterým je

$$\xi^4 + 2\xi^2 + 1.$$

Následně dělíme $f(x)$ největším společným dělitelem.

$$(\xi^8 + 2\xi^6 - 2\xi^2 - 1) : (\xi^4 + 2\xi^2 + 1) = \xi^4 - 1$$

$$\underline{-(\xi^8 + 2\xi^6 + \xi^4)}$$

$$-\xi^4 - 2\xi^2 - 1$$

$$\underline{-(-\xi^4 - 2\xi^2 - 1)}$$

$$0$$

Výsledek, který nám vyšel při dělení $f(\xi)$ a největšího společného dělitele, tedy $\xi^4 - 1 = 0$ je rovnice, která má tytéž nulové body jako $f(\xi) = 0$, ale každý je jednoduchý.

$$\xi^8 + 2\xi^6 - 2\xi^2 - 1 = (\xi^2 - 1) \cdot (\xi^2 + 1)^3$$

3 NÁSOBNÁ ŘEŠENÍ SOUSTAV ALGEBRAICKÝCH ROVNIC - PŘÍKLADY

V následující části se pokusíme ukázat na konkrétních příkladech, jak se násobnost projeví při řešení soustav algebraických rovnic. V této části nebudeme důsledně rozlišovat mezi polynomem ve více neurčitých a rovnicí s více neznámými.

Příklad 3.1

Máme zadanou soustavu dvou rovnic.

$$x^2 - 6x + 11 = y$$

$$2x + y - 7 = 0$$

Řešte soustavu rovnic a zjistěte, jestli soustava má násobné kořeny.

Řešení:

Máme zadané dvě rovnice o dvou neznámých.

$$x^2 - 6x + 11 = y \tag{3.1}$$

$$2x + y - 7 = 0 \tag{3.2}$$

Podíváme-li se na rovnice z geometrického pohledu, můžeme si všimnout, že rovnice (3.1) je rovnicí paraboly. Druhá rovnice (3.2) je přímka.

V prvním kroku si z rovnice (3.2) vyjádříme neznámou y.

$$y = -2x + 7 \tag{3.3}$$

Vyjádřené y dosadíme do rovnice číslo (3.1) a rovnici upravíme.

$$x^2 - 6x + 11 = -2x + 7$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \tag{3.4}$$

Po dosazení a úpravě se získá kvadratická rovnice o jedné neznámé, kterou budeme řešit pomocí diskriminantu.

$$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0$$

Diskriminant se rovná 0, z toho plyne, že rovnice má násobné kořeny. Nyní si vyjádříme kořeny pomocí vzorce.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2 \cdot 1}$$

$$x_{1,2} = 2$$

V případě, že bychom nechtěli použít pro zjištění x postup přes diskriminant, je v tomto případě možné určit x z rovnice (3.4), kterou rozložíme následovně.

$$0 = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \tag{3.5}$$

Oběma postupy jsme zjistili, že 2 je dvojnásobným kořenem rovnice (3.4).

Zbývá ještě vyčíslit hodnotu y. Dosadíme kořen 2 do rovnice (3.3).

$$y = (-2 \cdot 2) + 7$$

$$y = 3$$

Řešením soustavy rovnic jsou dvojice [2,3], [2,3]. Řekneme tedy, že daná soustava rovnic má jedno dvojnásobné řešení [2,3].

Příklad 3.2

Řešte soustavu

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x^2 + 4y^2 = 4$$

Zjistěte, zda má nějaká násobná řešení.

Řešení:

Máme zadané dvě rovnice o dvou neznámých.

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{3.6}$$

$$x^2 + 4y^2 = 4 \tag{3.7}$$

Pokud se nad rovnicemi zamyslíme z geometrického hlediska, tak první rovnice (3.6) představuje kružnici se středem v počátku, píšeme $S[0,0]$ a poloměrem $r = 1$. Zápis rovnice (3.7) popisuje elipsu opět se středem v počátku, tedy $S[0,0]$. Hlavní poloosa elipsy je rovna 2, $a = 2$, a vedlejší poloosa je rovna 1, $b = 1$.

Nejprve z rovnice (3.7) vyjádříme neznámou y^2.

$$y^2 = \frac{4-x^2}{4} \tag{3.8}$$

V dalším kroku vyjádřené y^2 dosadíme do rovnice číslo (3.6) a upravíme rovnici.

$$x^2 + \frac{4 - x^2}{4} = 1$$

$$4x^2 + 4 - x^2 = 4$$

$$4x^2 - x^2 = 0$$

$$x^2(4 - 1) = 0$$

$$x^2 = 0 \tag{3.9}$$

Úpravami jsme získali kořen 0, který je dvojnásobný.

Zbývá vyčíslit hodnotu y^2, proto dosadíme dvojnásobný kořen 0 do rovnice (3.6).

$$0 + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1$$

Po odmocnění

$$y = \pm 1$$

Nyní dosadíme dvojnásobný kořen 0 do rovnice (3.7).

$$0 + 4y^2 = 4$$

$$4y^2 = 4$$

$$y^2 = 1$$

$$y = \pm 1$$

Řešením soustavy rovnic jsou čtyři dvojice $[0,1]$, $[0,1]$, $[0,-1]$ a $[0,-1]$. Soustava rovnic má dvě dvojnásobná řešení $[0,1]$ a $[0,-1]$.

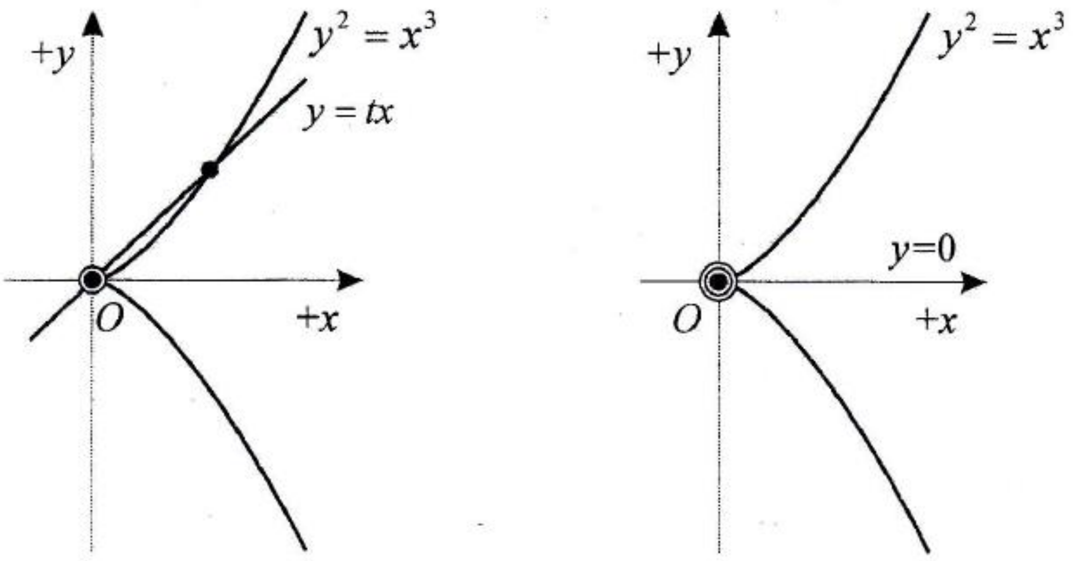
Následně uvedeme příklad, který Čižmár uvádí ve svém článku ($[1]\ str. 28 - 29$).

Příklad 3.3

Jsou zadané tyto rovnice:

$$y^2 = x^3$$

$$y = tx, t \in (T, +, \cdot)$$



Obrázek 2: Grafy k příkladu 3.3($Převzato\ z$ [1], $str.$ 28)

Řešení:

Máme zadané dvě rovnice o dvou neznámých s parametrem t.

(3.10) $$y^2 = x^3$$

(3.11) $$y = tx, t \in (T, +, \cdot)$$

Z geometrického pohledu je rovnice (3.10) rovnicí semikubické paraboly. Rovnice (3.11) je rovnicí přímky, procházející počátkem O soustavy souřadnic ($obr. 2\ vlevo$).

Společné body těchto křivek mají souřadnice x, které jsou kořenem rovnice, kterou zjistíme následovně. Nejprve rovnici (3.11) umocníme na druhou.

(3.12) $$y^2 = t^2x^2$$

V dalším kroku dosadíme do (3.12) za y^2 z rovnice (3.10).

(3.13) $$x^3 = t^2x^2$$

Rovnici (3.13) upravíme do anulovaného tvaru a vytkneme x.

$$x^3 - t^2x^2 = 0$$

(3.14) $$x^2(x - t^2) = 0$$

Kořeny rovnice (3.14) a jimi určené společné body (průsečíky) semikubické paraboly a přímky jsou následující:

Kořen $x = 0$ je dvojnásobným kořenem a určuje dvojnásobný společný bod (dvojnásobný průsečík) $O = [0,0]$ obou křivek.

Kořen $x = t^2$ je jednoduchým kořenem a určuje pro $t \neq 0$ jednoduchý společný bod (jednoduchý průsečík) $[t^2, t^3]$ obou křivek $(obr. 2\ v\ levo)$.

Pokud $t = 0$, má rovnice (3.14) tvar následující.

$$x^3 = 0$$

Z toho plyne, že rovnice má jediný trojnásobný kořen $x = 0$, kterým je určený trojnásobný společný bod (trojnásobný průsečík) $O = [0,0]$ semikubické paraboly a osy x. Osa x je tečnou semikubické paraboly v bodě O.

Čižmár píše, že se v příkladu ukazuje přirozené zavedení níže popsané teorie:

Násobnost průsečíku libovolné přímky procházející bodem O a různé od osy x se semikubickou parabolou v bodě O se rovná 2. Násobnost průsečíku osy x se semikubickou parabolou v bodě O se rovná 3.

Čižmár dále ve svém článku píše, že analýza příkladu naznačuje, že číslo 2 jako násobnost průsečíku nespeciální přímky se semikubickou parabolou v bodě O nezávisí na výběru přímky, je tedy jen vlastností bodu O na semikubické parabole. Číslo 3 jako násobnost průsečíku osy x se semikubickou parabolou v bodě O je důsledkem speciální polohy přímky x k semikubické parabole v bodě O.

Tyto úvahy vedou k historicky prvnímu rozlišení pojmů *r-násobnost bodu* (vlastní, vnitřní) na křivce a *s-násobnost bodu jako průsečíku* přímky a křivky – pojmenovaná jako *násobnost průsečíku* přímky s křivkou v tomto bodě.

Na závěr této kapitoly uvedeme příklad na soustavu tří rovnic o třech neznámých.

Příklad 3.4

Máme zadanou soustavu rovnic

$$x + y + z = 9$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

$$xy + xz + yz = 27$$

Zjistěte, zda soustava má nějaká násobná řešení.

$(Zadání\ převzato\ z\ [4], str. 49. cvičení\ 5.14)$

Řešení:

Příklad budeme řešit implikační metodou, proto budeme při řešení provádět zkoušku a nebudeme sledovat ekvivalentnost prováděných úprav. Máme zadané tři rovnice o třech neznámých.

$$x + y + z = 9$$

(3.15) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

(3.16) $$xy + xz + yz = 27$$

V prvním kroku vynásobíme rovnici (3.15) xyz.

(3.17) $$yz + xz + xy = xyz$$

Z rovnice (3.17) dosadíme do rovnice (3.16) za $xy + xz + yz$.

$$xyz = 27$$

Nově máme takto upravenou soustavu rovnic.

(3.18) $$x + y + z = 9$$

(3.19) $$xy + xz + yz = 27$$

(3.20) $$xyz = 27$$

Z rovnice (3.19) vyjádříme x.

$$xy + xz = 27 - yz$$

$$x(y + z) = 27 - yz$$

(3.21) $$x = \frac{27-yz}{y+z}$$

V dalším kroku dosadíme vyjádřené x z (3.21) do rovnice (3.18) a rovnici upravíme.

$$\frac{27-yz}{y+z} + y + z = 9$$

$$27 - yz + y(y+z) + z(y+z) = 9(y+z)$$

$$27 - yz + y^2 + yz + zy + z^2 = 9y + 9z$$

(A) $$y^2 + yz - 9y + z^2 - 9z + 27 = 0$$

Nyní dosadíme vyjádřené x z (3.21) do rovnice (3.20) a upravíme.

$$\frac{27-yz}{y+z} yz = 27$$

$$(27 - yz)yz = 27(y+z)$$

(B) $$-y^2z^2 + 27yz - 27y - 27z = 0$$

Rovnici (A) vynásobíme z^2 a následně sečteme s rovnicí (B).

$$y^2z^2 + yz^3 - 9yz^2 + z^4 - 9z^3 + 27z^2 = 0$$

$$\underline{-y^2z^2 + 27yz - 27y - 27z = 0}$$

(3.22) $$yz^3 - 9yz^2 + z^4 - 9z^3 + 27z^2 + 27yz - 27y - 27z = 0$$

V rovnici (3.22) provedeme vytknutí y a z následujícím způsobem.

(3.23) $$y(z^3 - 9z^2 + 27z - 27) + z(z^3 - 9z^2 + 27z - 27) = 0$$

Z rovnice (3.23) vytkneme $(z^3 - 9z^2 + 27z - 27)$.

(C) $$(y+z)(z^3 - 9z^2 + 27z - 27) = 0$$

Z rovnice (C) plyne, že

$$y = -z \text{ nebo } z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0.$$

Nejprve budeme pracovat s $y = -z$, které dosadíme do rovnice (A), upravíme a zjistíme hodnotu z.

$$(-z)^2 + (-z)z - 9(-z) + z^2 - 9z + 27 = 0$$

$$z^2 - z^2 + 9y + z^2 - 9z + 27 = 0$$

$$z^2 + 27 = 0$$

$$z^2 = -27$$

$$z = \pm 3\sqrt{3}i$$

Zdá se, že z by mohl být kořenem, zjistíme hodnotu y dosazením do $y = -z$.

$$z_1 = 3\sqrt{3}i \qquad z_2 = -3\sqrt{3}i$$

$$y_1 = -3\sqrt{3}i \qquad y_2 = 3\sqrt{3}i$$

Zjištěné z_1, y_1, z_2, y_2 dosadíme do rovnice (3.18), čímž získáme x_1, x_2.

$$x_1 - 3\sqrt{3}i + 3\sqrt{3}i = 9 \qquad x_2 + 3\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i = 9$$

$$x_1 = 9 \qquad x_2 = 9$$

Nyní zjistíme, zda $z_1, y_1, z_2, y_2, x_1, x_2$ jsou kořeny tím, že je dosadíme do rovnic (3.19) a (3.20).

$$-27\sqrt{3}i + 27\sqrt{3}i + 27 = 27 \qquad 27\sqrt{3}i - 27\sqrt{3}i + 27 = 27$$

$$9 \cdot 27 \neq 27 \qquad 9 \cdot 27 \neq 27$$

Vidíme, že $9 \cdot 27$ se nerovná 27, proto $z_1, y_1, z_2, y_2, x_1, x_2$ nejsou kořeny. Vraťme se nyní k (C) a pracujme s rovnicí $z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$ a určeme hodnotu z.

$$z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$$

$$(z - 27)^3 = 0$$

$$z = 3$$

Z řešení je patrné, že 3 je trojnásobným kořenem rovnice $z^3 - 9z^2 + 27z - 27 = 0$. Abychom si tento fakt zdůraznili, můžeme psát, že $z_1 = 3$, $z_2 = 3$, $z_3 = 3$. V dalším kroku se dosadí např. $z_1 = 3$ za z do rovnice (A).

$$y^2 + yz - 9y + z^2 - 9z + 27 = 0$$

$$y^2 + 3y - 9y + 3^2 - 27 + 27 = 0$$

$$y^2 - 6y + 9 = 0$$

$$(y - 3)^2 = 0$$

$$y = 3$$

Číslo 3 je dvojnásobným kořenem a pro $z_1 = 3$ dostáváme $y_{11} = 3$ a $y_{12} = 3$. Obdobně bychom pro $z_2 = 3$ respektive $z_3 = 3$ získali $y_{21} = 3$, $y_{22} = 3$, respektive $y_{31} = 3$, $y_{32} = 3$. V posledním kroku budeme do rovnice (3.18) dosazovat např. $z_1 = 3$, $y_{11} = 3$ a $y_{12} = 3$.

$$x + y + z - 9 = 0$$

$$x + 3 + 3 - 9 = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

Číslo 3 je jednoduchý kořen pro $z_1 = 3$, $y_{11} = 3$ a $y_{12} = 3$. Obdobně bychom zjistili i pro $z_2 = 3$, $y_{21} = 3$, $y_{22} = 3$ respektive $z_3 = 3$, $y_{31} = 3$, $y_{32} = 3$.

Počet řešení soustavy algebraických rovnic za určitých podmínek upřesňuje Bézoutova věta, která říká, že počet řešení odpovídá součinu stupňů rovnic v soustavě, zde $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Řešením soustavy rovnic jsou trojice $[3,3,3]$, $[3,3,3]$, $[3,3,3]$, $[3,3,3]$, $[3,3,3]$, $[3,3,3]$. Říkáme tedy, že daná soustava rovnic má jedno šestinásobné řešení $[3,3,3]$.

4 ROVNICE A SOUSTAVY ROVNIC S NÁSOBNÝM ŘEŠENÍM V DĚJINÁCH MATEMATIKY

S násobnými kořeny rovnic a jejich soustav se setkáváme nejprve v konkrétních úlohách. Uveďme některé z nich, které se podařilo najít studiem nejrůznějších historických textů, které se týkají algebry.

V této kapitole nyní uvedeme příklad čínské úlohy z počátku 14. století. Naznačíme, jak postupovali čínští matematikové. Dále uvedeme původní řešení z dnešního pohledu. Nakonec ukážeme řešení soustavy pomocí programu WolframAlpha.

Příklad 4.1

Jestliže gŭ-mù [čtverec výšky] *minus xián-jiào-jiào* [sien–t′iao–t′iao, přepona bez rozdílu výšky a základny] *je rovno výška krát základna a gōu–mù* [čtverec základny] *plus xián–jiào–hé* [sien– t′iao–che, přepona plus rozdíl výšky a základny] *je stejný jako gōu krát xián, najdi gŭ.*

I když to v zadání úlohy není explicitně uvedeno, týká se pravoúhlého trojúhelníku. Označme výšku (jednu z odvěsen) y, základnu (druhou odvěsnu) x a přeponu z. Zadání úlohy potom můžeme zapsat následující soustavou rovnic:

(4.1) $$y^2 - z - x + y = xy$$

(4.2) $$x^2 - x + y + z = xz$$

(4.3) $$\underline{x^2 + y^2 = z^2}$$

$$y = ?$$

Čínští matematikové ovšem úlohy neřešili jako soustavu tří rovnic o třech neznámých, ale jako soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. Postup, jak zvolit neznámé popsali takto:

Návrh řešení: *Nechť je gŭ* [výška] *tiānyuán yī* [nebeská neznámá] *a gōu–xián–hé* [kou–sien–che, součet základny a přepony] *dìyuán yī* [tijuna ji, zemská neznámá]. Řeš *v souladu nebe a země. Dostaneš výraz jīn shì* [t'in š', kdyby][4].

Výšku, jednu z odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, kterou jsme označili jako y, uvažovali jako tzv. nebeskou neznámou, dále značíme jako s, tj. $s = y$. Namísto neznámých x,

[4] *Jīn shì* je označení rovnice získané pomocí prvního předpokladu $y^2 - z - x + y = xy$.

z zvolili jako neznámou jejich součet, tj. $t = x + z$. V dalším popíšeme, jak lze získat ze soustavy rovnic (4.1), (4.2), (4.3) o třech neznámých x, y, z soustavu dvou rovnic o dvou neznámých s, t. Dosazením t za součet $z + x$ v rovnici (4.1) získáme rovnici:

$$s^2 - (t - s) = xs \tag{4.4}$$

Rovnici (4.3) vhodně upravíme, aby bylo možné dosadit za součet $x + z$:

$$y^2 = z^2 - x^2$$

$$y^2 = (z - x)(z + x)$$

$$(z - x) = \frac{y^2}{(z + x)}$$

$$(z - x) = \frac{s^2}{t} \tag{4.5}$$

Následně autor pracuje s rovnicemi $x + z = t$ a $z - x = \frac{s^2}{t}$. Sečtením, resp. odečtením těchto rovnic je dvojnásobek přepony, resp. dvojnásobek základny:

$$2z = t + \frac{s^2}{t} \qquad\qquad 2x = t - \frac{s^2}{t} \tag{4.6}$$

Zdvojnásobením rovnice (4.4) dostaneme na pravé straně výraz obsahující dvojnásobek přepony:

$$2s^2 - 2t + 2s = 2xs \tag{4.7}$$

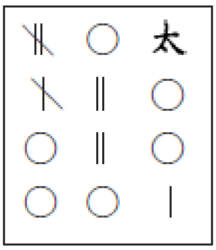
Nyní se do rovnice (4.7) dosazuje za $2x$ vztah (4.6).

$$2s^2 - 2t + 2s = s\left(t - \frac{s^2}{t}\right) \tag{4.8}$$

Po vynásobení rovnice (4.8) t je tvar následující.

$$s^3 + (2s^2 + 2s)t - (s + 2)t^2 = 0 \tag{A}$$

To je první rovnice soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, s níž čínští matematikové pracovali. Na početní desce by ji vyjádřili následovně:



-2	0	太
-1	2	0
0	2	0
0	0	1

Poznamenejme, že čínští matematikové umisťovali koeficienty rovnic podle následujícího schématu:

t^2	t	太
t^2s	ts	s
t^2s^2	ts^2	s^2
t^2s^3	ts^3	s^3

Rovnicí o dvou neznámých s, t je třeba zapsat ještě rovnici (4.2). Nejprve do rovnice (4.2) dosadíme s za y.

$$x^2 - x + s + z = xz \tag{4.9}$$

Rovnici (4.9) vhodně upravíme, aby bylo možné dosadit za rozdíl $z - x$:

$$x^2 - xz - x + z + s = 0$$

$$x(x - z) - (x - z) + s = 0$$

$$(x - z)(x - 1) + s = 0$$

$$-\frac{s^2}{t}(x - 1) + s = 0 \tag{4.10}$$

Rovnici (4.10) zdvojnásobíme:

$$-\frac{s^2}{t}(2x - 2) + 2s = 0 \tag{4.11}$$

Nyní do rovnice (4.11) dosadíme za $2x$ vztah (4.6).

$$-\frac{s^2}{t}\left(t - \frac{s^2}{t} - 2\right) + 2s = 0 \tag{4.12}$$

V následujícím kroku roznásobíme závorku rovnice (4.12) .

$$-s^2 + \frac{s^4}{t^2} + \frac{2s^2}{t} + 2s = 0 \tag{4.13}$$

Vynásobením rovnice (4.13) t^2je tvar následující:

$$-s^2t^2 + s^4 + 2s^2t + 2st^2 = 0 \tag{4.14}$$

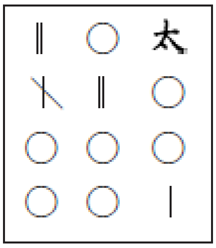
Rovnici (4.14) vydělíme s:

$$s^3 - st^2 + 2st + 2t^2 = 0 \tag{4.15}$$

Po úpravě rovnice (4.15) je tvar následující:

$$s^3 + 2st + (2 - s)t^2 = 0 \tag{B}$$

Toto je druhá rovnice soustavy dvou rovnic o dvou neznámých, se kterou čínští matematikové pracovali. Na početní desce by ji vyjádřili následovně:



$$\boxed{\begin{array}{ccc} 2 & 0 & \text{太} \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}$$

Z rovnic (A) a (B) je potřeba odstranit neznámou t, protože hledáme výšku pravoúhlého trojúhelníku $s = y$. To autor provedl metodou $h\grave{u}y\check{\imath}n\ t\bar{o}ngf\bar{e}n$ [chujin tchung fen] (odstranění jmenovatelů ze zlomků skrytých ve dvou rovnicích). Rovnice (A) a (B) jsou druhého stupně v eliminované neznámé t. V obou rovnicích je stejný absolutní člen s^3. Odečtením (A) od (B) a krácením výrazem $2t$ se získá jedna rovnice, který je lineární v t:

$$-s^2 + 2t = 0 \tag{C}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} 2 & \text{太} \\ & 0 \\ & -1 \end{array}}$$

Druhou rovnici lineární v t autor počítá jako rozdíl rovnice (A) a s-násobku rovnice (C). Po jednoduché úpravě má tvar:

$$(2s^2 + 4s) - (s + 2)t = 0 \tag{D}$$

$$\boxed{\begin{array}{cc} -2 & \text{太} \\ -1 & 4 \\ & 2 \end{array}}$$

Rozdíl součinu absolutních členů rovnice (C) a koeficientů lineárního členu rovnice (D), $-s^2 \cdot [-(s + 2)]$, a součinu koeficientu lineárního členu rovnice (C) a absolutního členu rovnice (D), $2 \cdot (2s^2 + 4s)$, je polynom pouze v proměnné s:

$$s^3 - 2s^2 - 8s.$$

Krácení neznámou s v příslušné rovnici získáme rovnici

$$s^2 - 2s - 8 = 0,$$

jejíž kladný kořen je 4, což je hledaná výška (v krocích).

$(Upraveno\ podle\ [3], str. 188 - 191.)$

Nyní se podívejme, jak by se tento příklad dal řešit v současnosti. Pro ukázku nám stačí najít jedno násobné řešení soustavy rovnic.

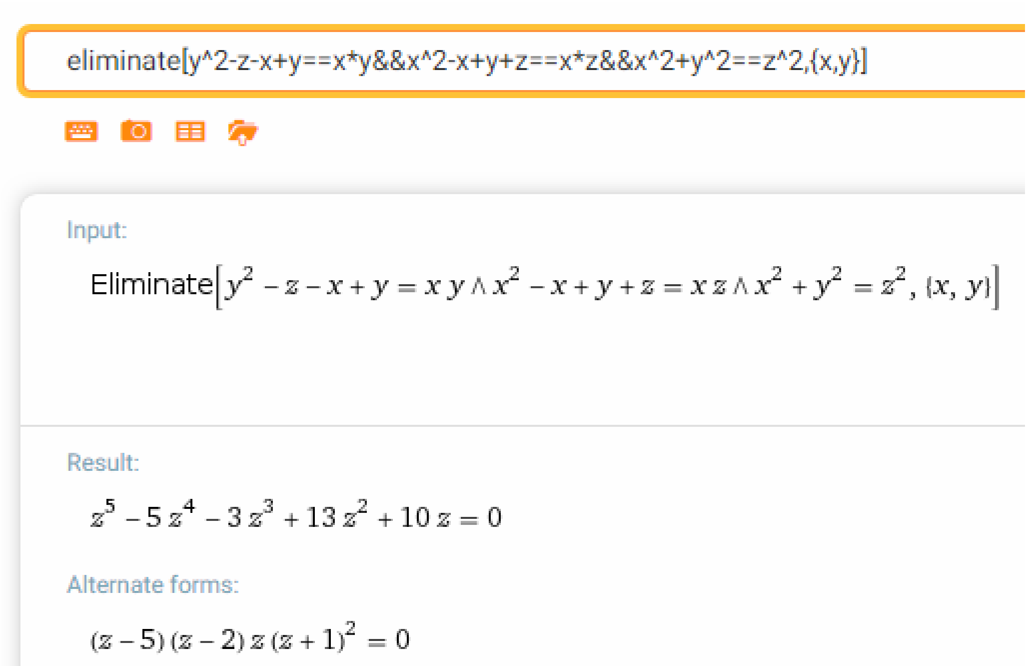
Řešení:

$$y^2 - z - x + y = xy$$

$$x^2 - x + y + z = xz$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Soustavu rovnic lze řešit například pomocí programu WolframuAlpha, prostřednictvím funkce ELIMINATE. Na obrázku můžeme vidět zadaný příkaz a konkrétní řešení.



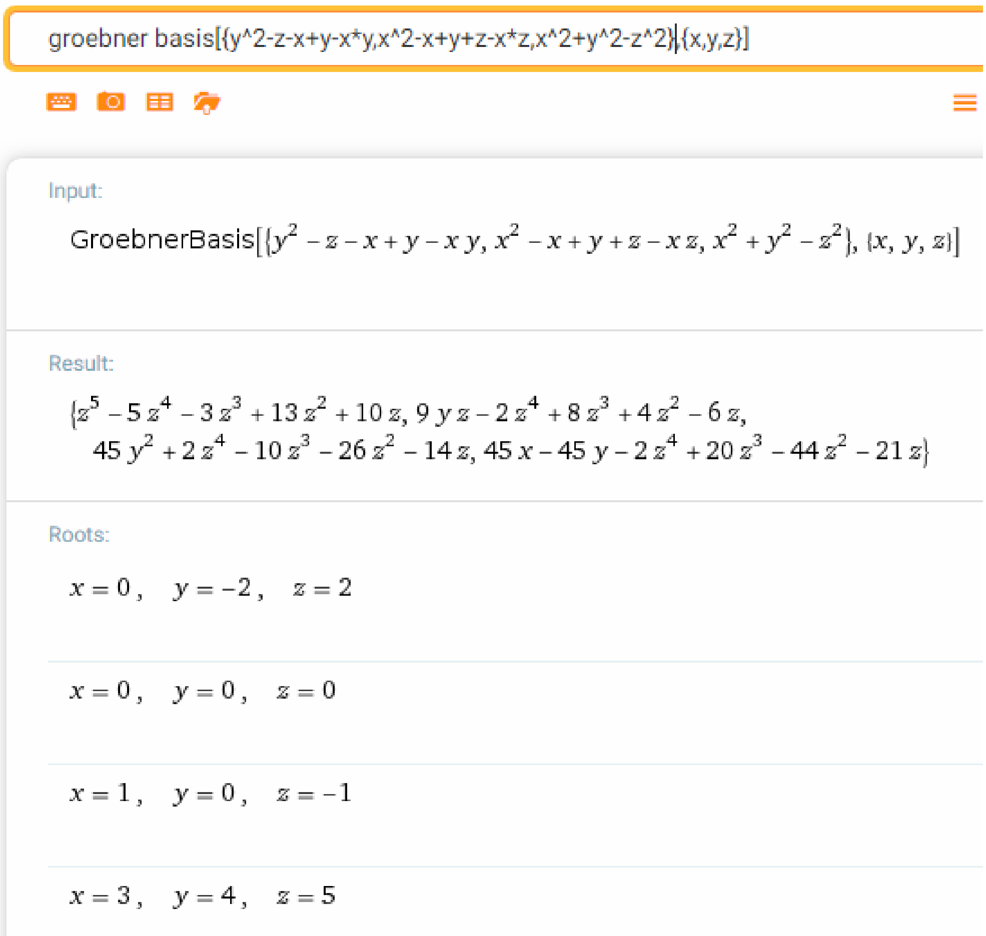
Obrázek 3: Řešení příkladu 4.2 pomocí programu WolframAlpha-eliminate

Program nám spočítal rovnici v z,

$$z^5 - 5z^4 - 3z^3 + 13z^2 + 10z = 0,$$

kterou, jak je vidět na obrázku 3, lze rozložit na $(z-5)(z-2)z(z+1)^2 = 0$. Z tohoto rozkladu lze určit kořeny rovnice, které jsou $z = 5$, $z = 2$, $z = 0$ a $z = -1$. Na první pohled je zřejmé, že kořen $z = -1$ je dvojnásobný.

Následné řešení by spočívalo ve zjištění jednotlivých kořenů x a y, k příslušným z, které by se dosadilo do zadané soustavy rovnic. Pro zjištění těchto kořenů opět využijeme program WolframAlpha a funkci GROEBNER BASIS[5].



Obrázek 4: Řešení příkladu 4.2 pomocí programu WolframAlpha-GrobnerBasis

Program spočítal požadované kořeny. Na začátku jsme chtěli najít alespoň jedno násobné řešení soustavy. Na základě výše zjištěných informací můžeme říct, že soustava rovnic má jedno dvojnásobné řešení $[1,0,-1]$, které však nemůže být řešením původní úlohy, která se týkala pravoúhlého trojúhelníku.

V dalším textu se zmíníme o prvních zásadních výsledcích, které se týkaly násobnosti kořene.

První zásadní výsledek týkající se počtu kořenů algebraické rovnice a jejich násobnosti zformuloval *Albert Girard* v publikaci *Nový objev algebry (Invention nouvelle l' algèbre,*

[5] Jedná se funkci, která najde Gröbnerovu bázi.

Amsterdam 1629). Albert Girard žil v letech 1595 – 1632. Vyslovil fundamentální princip, který zní:

Počet kořenů polynomu $f(x)$ jedné neznámé počítaných s jejich násobností se rovná stupni polynomu.

Sestavení polynomu s danými kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ a jejich předepsanými násobnostmi $r, \dots, s$:

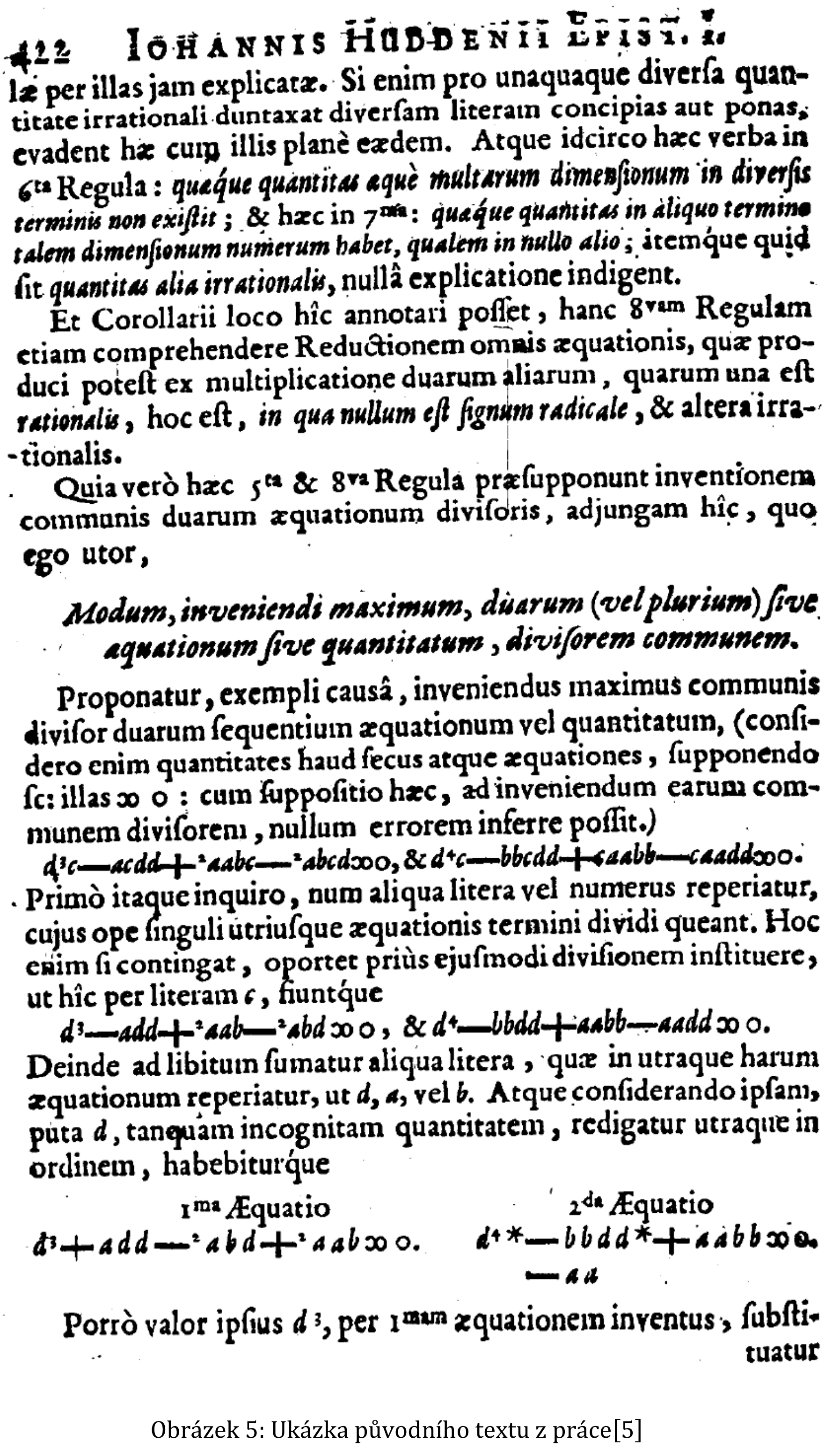
$$f(X) = a_0(X - \alpha_1)^r \dots (X - \alpha_k)^s, \text{ kde } r + \cdots + s \text{ je stupeň polynomu } f(x).$$

Hledání kořenů daného polynomu a jejich násobností je úlohou obrácenou, která je podstatně složitější. Řešení této úlohy zaměstnalo přední matematiky 17. a 18. století na dlouhou dobu. Správné odhady tohoto druhu, jako byl Girardův princip, a pokusy o důkaz dílčích či globálních tvrzení o kořenech algebraických rovnic a o jejich násobnostech nebyly ojedinělé a připravovaly prostor na fundamentální objev algebry v 19. století. Mezi první významné výsledky se řadí formulace a první důkaz *základní věty algebry*. Tuto větu formuloval Carl Friedrich Gauss, který žil v letech 1777 až 1855, v publikaci *Nový důkaz věty, že každou algebraickou funkci jedné proměnné je možné rozložit na reálné činitele prvního nebo druhého stupně (Demonstration nova theorematis omnem functionem algebraicam unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse,* Helmstedt 1799).

$(Přeloženo\ z\ [1], str. 29 - 30.)$

Pokud jde o soustavy rovnic, zabývali se matematikové od 17. století problémy jako jsou příklady 3.1 – 3.3 předchozí kapitoly, tj. zaměřili se na hledání společných bodů dvou rovinných algebraických křivek a případně i jejich násobností. Problém převáděli na předchozí situaci – řešení rovnice o jedné neznámé. Zásadní se tak stala otázka vyloučení (eliminace) neznámých z daných rovnic a také stupeň výsledné rovnice o jedné neznámé. Newton (1643-1727) v případě dvou rovnic o dvou neznámých dospěl k závěru, že tento stupeň je nejvýše roven součinu stupňů zadaných rovnic. Newtonův výsledek zpřesnil Maclaurin (1698-1746) a zobecnil Bézout (1730-1783) pro případ n rovnic o n neznámých.

V následujícím textu ukážeme, jak při eliminaci neznámých ze soustavy rovnic postupoval holandský matematik Johannes Hudde (1628-1704).


422 IOHANNIS HUDDENII EPIST. II.

læ per illas jam explicatæ. Si enim pro unaquaque diverſa quantitate irrationali duntaxat diverſam literam concipias aut ponas, evadent hæ cum illis planè eædem. Atque idcirco hæc verba in 6ta Regula: *quæque quantitas æquè multarum dimenſionum in diverſis terminis non exiſtit*; & hæc in 7ma: *quæque quantitas in aliquo termino talem dimenſionum numerum habet, qualem in nullo alio*; itemque quid ſit *quantitas alia irrationalis*, nullâ explicatione indigent.

Et Corollarii loco hîc annotari poſſet, hanc 8vam Regulam etiam comprehendere Reductionem omnis æquationis, quæ produci poteſt ex multiplicatione duarum aliarum, quarum una eſt *rationalis*, hoc eſt, *in qua nullum eſt ſignum radicale*, & altera irrationalis.

Quia verò hæc 5ta & 8va Regula præſupponunt inventionem communis duarum æquationum diviſoris, adjungam hîc, quo ego utor,

Modum, inveniendi maximum, duarum (vel plurium) ſive æquationum ſive quantitatum, diviſorem communem.

Proponatur, exempli causâ, inveniendus maximus communis diviſor duarum ſequentium æquationum vel quantitatum, (conſidero enim quantitates haud ſecus atque æquationes, ſupponendo ſc: illas ∞ o: cum ſuppoſitio hæc, ad inveniendum earum communem diviſorem, nullum errorem inferre poſſit.)

$d^3c - acdd + {}^2aabc - {}^2abcd \infty 0$, & $d^4c - bbcdd + caabb - caadd \infty 0$.

Primò itaque inquiro, num aliqua litera vel numerus reperiatur, cujus ope ſinguli utriuſque æquationis termini dividi queant. Hoc enim ſi contingat, oportet priùs ejuſmodi diviſionem inſtituere, ut hîc per literam *c*, fiuntque

$d^3 - add + {}^2aab - {}^2abd \infty 0$, & $d^4 - bbdd + aabb - aadd \infty 0$.

Deinde ad libitum ſumatur aliqua litera, quæ in utraque harum æquationum reperiatur, ut *d*, *a*, vel *b*. Atque conſiderando ipſam, puta *d*, tanquam incognitam quantitatem, redigatur utraque in ordinem, habebiturque

1ma Æquatio: $d^3 + add - {}^2abd + {}^2aab \infty 0.$

2da Æquatio: $d^4 * - bbdd * + aabb \infty 0.$ $- aa$

Porrò valor ipſius d^3, per 1mam æquationem inventus, ſubſtituatur

Obrázek 5: Ukázka původního textu z práce[5]

Na obrázku číslo 5 můžeme vidět původní text z práce [5] ze strany 422. V tomto původním textu je zapsané zadání soustavy dvou rovnic o čtyřech neznámých, které budeme řešit v příkladu 4.2.

Příklad 4.2

Máme dánu soustavu dvou rovnic o čtyřech neznámých a, b, c, d

(4.16) $$d^3c - acd^2 + a^2bc - abcd = 0$$

(4.17) $$d^4c - b^2cd^2 + a^2b^2c - a^2cd^2 = 0.$$

Určete největšího společného dělitele.

Řešení

Prvním krokem při postupné eliminaci bude, že rovnice (4.16) a (4.17) vydělíme neznámou c.

(4.18) $$d^3 - ad^2 + a^2b - abd = 0$$

(4.19) $$d^4 - b^2d^2 + a^2b^2 - a^2d^2 = 0$$

V dalším kroku autor hledá neznámou, která je obsažena v obou rovnicích (4.18) a (4.19), vidíme tedy, že to může být a, b či d. Autor volí neznámou d, vzhledem ke které zapisuje rovnice sestupně podle stupně (od nejvyššího stupně po nejnižší).

(4.20) $$d^3 - ad^2 - abd + a^2b = 0$$

(4.21) $$d^4 - b^2d^2 - a^2d^2 + a^2b^2 = 0$$

Z rovnice (4.20) vyjádříme d^3 a z rovnice (4.21) d^4.

(4.22) $$d^3 = ad^2 + abd - a^2b$$

(4.23) $$d^4 = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Rovnici (4.22) autor vynásobil neznámou d, rovnice (4.23) je pouze opsaná bez změny.

(4.24) $$d^4 = ad^3 + abd^2 - a^2bd$$

(4.23) $$d^4 = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Tyto dvě rovnice (4.24) a (4.23) je možné srovnat.

(4.25) $$ad^3 + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Do rovnosti (4.25) dosadíme za d^3, které je vyjádřené výše v rovnici (4.22).

(4.26) $$a(ad^2 + abd - a^2b) + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

Následuje úprava rovnosti (4.26).

$$a^2d^2 + a^2bd - a^3b + abd^2 - a^2bd = b^2d^2 + a^2d^2 - a^2b^2$$

(4.27) $$-a^3b + abd^2 + a^2b^2 - b^2d^2 = 0$$

Z rovnice (4.27) vyjádříme d^2.

$$abd^2 - b^2d^2 = a^3b - a^2b^2$$

$$d^2(ab - b^2) = a^3b - a^2b^2$$

$$d^2 = \frac{a^3b - a^2b^2}{ab - b^2}$$

Odtud autor soudí následující.

$$\frac{a^2(ab - b^2)}{ab - b^2} = a^2$$

Nyní se autor vrátil k rovnici (4.18), kde za d^2 dosadil a^2, platí $d^2 = a^2$, $(d^2 - a^2 = 0)$.

(4.28) $$a^2d - a^3 + a^2b - abd = 0$$

Nakonec do rovnice (4.28) za d dosazuje a, tedy $d = a$.

(4.29) $$a^3 - a^3 + a^2b - a^2b = 0$$

$$0 = 0$$

Na základě toho, že došlo k vyrušení členů rovnice na levé straně rovnice (4.29), lze říct, že obě rovnice jsou dělitelné $(d - a)$. Tento výraz $(d - a)$ platí však pouze pro rovnici, která je po vydělení neznámou c a tedy tuto neznámou neobsahuje. Největším společným dělitelem rovnic (4.16) a (4.17) je tedy $c \cdot (d - a)$.

$(Přeloženo\ z\ [5], str. 422 - 423.)$

ZÁVĚR

Ve své práci jsem se snažila seznámit čtenáře s problematikou násobných kořenů algebraických rovnic, což díky první a druhé kapitole bylo splněno. První kapitola připomíná základní pojmy, které se dále v této práci využívají. Druhá kapitola se především věnuje důkladnému zavedení odborných pojmů, které jsou pro srozumitelnost dokládány na konkrétních příkladech, čímž vedou k lepšímu pochopení. V druhé kapitole se často v příkladech užívalo Hornerovo schéma, pomocí kterého bylo zjišťováno, zda se jedná o kořen jednoduchý či několikanásobný.

Druhým cílem bakalářské páce bylo pokusit se najít konkrétní historické úlohy, které by vedly na řešení s násobnými kořeny. Tento cíl můžeme považovat za splněný vzhledem k nalezení úloh uvedených v kapitole čtyři. Původním záměrem bylo nalezení více úloh, ale při studiu historických textů bylo zjištěno, že nalezení takovýchto úloh je velice obtížné už jen z toho důvodu, že pojem násobnost kořene je poměrně nový termín, který byl zaveden až nedávno.

Všechny početní příklady byly uváděny s postupem řešení a výsledky. U většiny příkladů není uvedený zdroj, jelikož jsem autorkou těchto příkladů já sama. U převzatých příkladů je vždy uvedený zdroj. V prvních dvou kapitolách byly příklady zařazovány tak, aby čtenáři usnadnily pochopení teoretického výkladu. V kapitole tři a čtyři jsou již jen komplexní příklady vedoucí na řešení s násobnými kořeny.

RESUMÉ

The bachelor thesis deals with multiple roots of algebraic equations and their systems. The first chapter of the thesis is devoted to the definitions of basic terms. At first, the thesis defines a polynomial, polynomials equality, polynomials sum and product. An important part of the chapter is the introduction of polynomial division by polynomial, which is explained on specific examples. The thesis also defines the Horner scheme, which is important when solving the multiplicity of algebraic equations and which was often used for solving equations in the thesis. At the end of the first chapter it is explained how to find the greatest common divisor of polynomials using the Euclidean algorithm.

The second chapter is devoted to multiple roots of algebraic equations. First, an algebraic equation, unknown, and root are introduced. The chapter briefly describes where the multiple roots of an algebraic equation can be encountered. In the chapter, laws, definitions and notes that are verified on examples are presented.

In the third chapter, concrete examples of algebraic equations with multiple solutions are solved. The fourth chapter deals with the history of multiple roots of algebraic equations and their systems. In the beginning, concrete examples that were found by studying historical texts are mentioned. At the end of the chapter, it is stated who was the first who formulated the first significant results concerning the number of roots of algebraic equations and their multiplicity.

SEZNAM LITERATURY

[1] ČIŽMÁR, J. *Násobnosť v algebraickej geometrii. Slovenský časopis pre geometriu a grafiku,* roč. 1, 2004. ISSN 1336-524X.

[2] DRÁBEK, J., HORA, J. *Algebra. Polynomy a rovnice.*1.vyd. Plzeň: Západočeská univerzita v Plzni, 2001. ISBN 80-7082-787-4.

[3] ERNESTOVÁ, M. *Soustavy algebraických rovnic a jejich řešení ve starověku a středověku*. Praha, 2005. Disertační práce. Univerzita Karlova, Matematicko-fyzikální fakulta.

[4]HERMAN, J., KUČERA, R. a ŠIMŠA, J. *Metody řešení matematických úloh*. Vyd. 2. přeprac. Brno: Masarykova univerzita, 1996. ISBN 80-210-1202-1.

[5] HUDDE, J. *De reductione aequationum.* In Descartes, R., Géométrie. 4. vyd. [online]. 1695, str. 401-516,[cit. 2018-06-27]. Dostupné z: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k57489c.r=De%20reductione%20aequationum

[6] KOŘÍNEK, Vl. *Základy algebry*. Praha: Československá akademie věd, 1956.

[7] SCHWARZ, Š. *O rovnicích. Cesta k vědění svazek 1.* Praha: Jednota českých matematiků a fyziků v Praze, 1940.

SEZNAM OBRÁZKŮ, TABULEK, GRAFŮ A DIAGRAMŮ

PŘÍLOHY