

**ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
FAKULTA ELEKTROTECHNICKÁ**

Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Inerciální stabilizace sférického kyvadla

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta elektrotechnická

Akademický rok: 2019/2020

ZADÁNÍ DIPLOMOVÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Bc. Jan PEROUTKA**
Osobní číslo: **E18N0030P**
Studijní program: **N2612 Elektrotechnika a informatika**
Studijní obor: **Elektronika a aplikovaná informatika**
Téma práce: **Inerciální stabilizace sférického kyvadla**
Zadávací katedra: **Katedra aplikované elektroniky a telekomunikací**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s metodami inerciální stabilizace rovinného a prostorového inverzního kyvadla.
2. Odvodte matematický model rovinného a prostorového inerciálního inverzního kyvadla a proveďte jeho linearizaci.
3. Navrhněte stabilizační regulátor pro rovinný a prostorový případ. Metodou simulace ověřte jeho funkční vlastnosti.
4. Navrhněte a realizujte reálný model inerciálního inverzního kyvadla a v případě možnosti ověřte navržený regulátor na reálném modelu.

Rozsah diplomové práce: **40 – 60 stran**
Rozsah grafických prací: **podle doporučení vedoucího**
Forma zpracování diplomové práce: **tištěná/elektronická**

Seznam doporučené literatury:

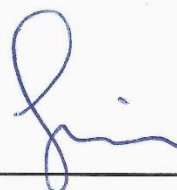
1. Mark W. Spong; Peter Corke; Rogelio Lozano: (2001) Nonlinear control of the Reaction Wheel Pendulum. Automatica, pp. 37(11)
2. Mukhtar Fatihu Hamza, Hwa Jen Yap, Imtiaz Ahmed Choudhury, Abdulbasid Ismail Isa, Aminu Yahaya Zimit, Tufan Kumbasar: Current development on using Rotary Inverted Pendulum as a benchmark for testing linear and nonlinear control algorithms Mechanical Systems and Signal Processing, Volume 116, 2019, pp. 347-369
3. R. Olfati-Saber: Nonlinear Control of Underactuated Mechanical Systems with Application to Robotics and Aerospace Vehicles. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering and Computer Science, February 2001.
4. Manuel Olivares, Pedro Albertos: Linear control of the flywheel inverted pendulum ISA Transactions, Volume 53, Issue 5, 2014, pp. 1396-1403
5. C. A. Merlo-Zapata et al.: Modeling and Construction of an Inertia Wheel Pendulum Test-Bed, 2014 International Conference on Mechatronics, Electronics and Automotive Engineering, Cuernavaca, 2014, pp. 116-121, doi: 10.1109/ICMEAE.2014.24

Vedoucí diplomové práce: **Prof. Ing. Miloš Schlegel, CSc.**
Katedra kybernetiky

Datum zadání diplomové práce: **4. října 2019**
Termín odevzdání diplomové práce: **28. května 2020**



Prof. Ing. Zdeněk Peroutka, Ph.D.
děkan



Doc. Dr. Ing. Vjačeslav Georgiev
vedoucí katedry

Abstrakt

Předkládaná diplomová práce se zabývá inerciální stabilizací modelu inverzního kyvadla. Cíle práce jsou popsat matematické modely rovinného a prostorového inerciálně stabilizovaného kyvadla, navrhnout vhodné řízení a vytvořit reálný model kyvadla pro demonstrační a výukové účely. Nelineární modely jsou odvozeny pomocí Euler-Lagrangeovy metody a následně jsou linearizací převedeny na stavový popis. Stabilizace je realizována stavovou zpětnou vazbou navrženou pomocí metody LQR. Poslední část práce se zabývá popisem technického řešení reálného modelu kyvadla, následně jeho identifikací, a nakonec ověřením stabilizace v horní poloze a metodou výšvihu.

Klíčová slova

Matematický model, inverzní kyvadlo, setrvačnick, stabilizace, stavová zpětná vazba, LQR, Remygen, STM32, BLDC motor

Abstract

This master thesis deals with the inertial stabilisation of an inverted pendulum. The goals of the thesis are to describe mathematical models of planar and spherical inertially stabilised pendulum, to design a suitable controller and to create a real life model of pendulum for demonstrational and educational purposes. The nonlinear models are derived using Euler – Lagrange method and then the state space model is introduced by linearization. The stabilisation is implemented by state feedback calculated using LQR method. The final part of thesis is coping with description of technical solution of real life model, then its identification and lastly with actual stabilisation of pendulum in upwards position and the swing-up method.

Key words

Mathematical model, inverted pendulum, reaction wheel, stabilization, state feedback, LQR, Rxygen, STM32, BLDC motor

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, s použitím odborné literatury a pramenů uvedených v seznamu, který je součástí této diplomové práce.

Dále prohlašuji, že veškerý software, použitý při řešení této diplomové práce, je legální.

.....

podpis

V Plzni dne 19.6.2020

Jan Peroutka

Poděkování

Na tomto místě bych chtěl poděkovat zejména vedoucímu diplomové práce Prof. Ing. Miloši Schlegelovi CSc. za kvalitní vedení práce a velmi vstřícný přístup. Dále bych chtěl poděkovat Ing. Petru Weissarovi za rady ohledně programu mikrokontroléru a Ing. Vlastimilu Šetkovi za konfiguraci počítače AIC.

Obsah

SEZNAM SYMBOLŮ A ZKRATEK	1
1 ÚVOD	2
2 ODVOZENÍ MATEMATICKÉHO MODELU INERCIÁLNÍHO INVERZNÍHO KYVADLA	4
2.1 EULER–LAGRANGEOVA METODA	4
2.2 ROVINNÉ INERCIÁLNÍ KYVADLO	4
2.3 SFÉRICKÉ INERCIÁLNÍ KYVADLO	9
3 NÁVRH INERCIÁLNÍ STABILIZACE ROVINNÉHO KYVADLA.....	14
3.1 STAVOVÝ POPIS ZJEDNODUŠENÉHO SYSTÉMU.....	15
3.2 OVĚŘENÍ ŘIDITELNOSTI SYSTÉMU	17
3.3 NÁVRH STABILIZACE KYVADLA STAVOVOU ZPĚTNOU VAZBOU	18
3.3.1 LQR	19
3.3.2 Ověření řízení v simulaci	19
4 KONSTRUKCE REÁLNÉHO MODELU	22
4.1 MECHANICKÁ ČÁST	23
4.2 ELEKTRONICKÁ ČÁST.....	26
4.2.1 Řídicí deska motoru	26
4.2.2 Senzory	31
4.2.3 Řídicí počítač AIC.....	33
4.3 POPIS PROGRAMOVÉHO ŘEŠENÍ	33
4.3.1 Komunikace AIC s řídicí deskou motoru.....	33
4.3.2 Výpočet úhlové rychlosti motoru	34
4.3.3 Komutace motoru.....	36
4.3.4 PI regulace úhlové rychlosti motoru	36
4.4 IDENTIFIKACE MODELU.....	38
4.4.1 Ověření správnosti identifikace	40
5 STABILIZACE A VYHOUPÁNÍ SKUTEČNÉHO KYVADLA.....	41
6 ZÁVĚR	45
SEZNAM LITERATURY A INFORMAČNÍCH ZDROJŮ.....	46
PŘÍLOHY.....	48

Seznam symbolů a zkratek

AIC	Advanced Industrial Computer, průmyslový počítač firmy REX Controls s.r.o.
BLDC	Brushless DC, bezkomutátorový stejnosměrný motor
DPS	Deska plošných spojů
IRC	Inkrementální rotační enkodér
LQR	Lineárně kvadratický regulátor
CRC	Cyclic redundancy check, cyklický redundantní součet
θ	Úhel
ω	Úhlová rychlost
α	Úhlové zrychlení
λ	Vlastní číslo matice
τ	Časová konstanta filtru
A	Matice dynamiky lineárního systému
\hat{A}	Matice dynamiky lineárního systému s uzavřenou zpětnou vazbou
B	Matice řízení lineárního systému
C	Výstupní matice lineárního systému
D	Matice vazeb vstup-výstup lineárního systému
f	Frekvence
g	Tíhové zrychlení
J	Moment setrvačnosti
l	Délka
L	Lagrangián
m	Hmotnost
M	Moment síly
V	Kinetická energie
M_c	Matice říditelnosti
q, Q	Zobecněná souřadnice, zobecněná síla
T	Potenciální energie
u	Vstup systému
V	Kinetická energie
\vec{x}	Stav systému

1 Úvod

Cílem této práce je odvodit matematický model rovinného a sférického kyvadla stabilizovaného jedním, respektive dvěma setrvačníky a dále navrhnout a realizovat příslušný reálný model s řídicím systémem. Touto problematikou se zabývá řada odborné literatury, například [2] či [12].

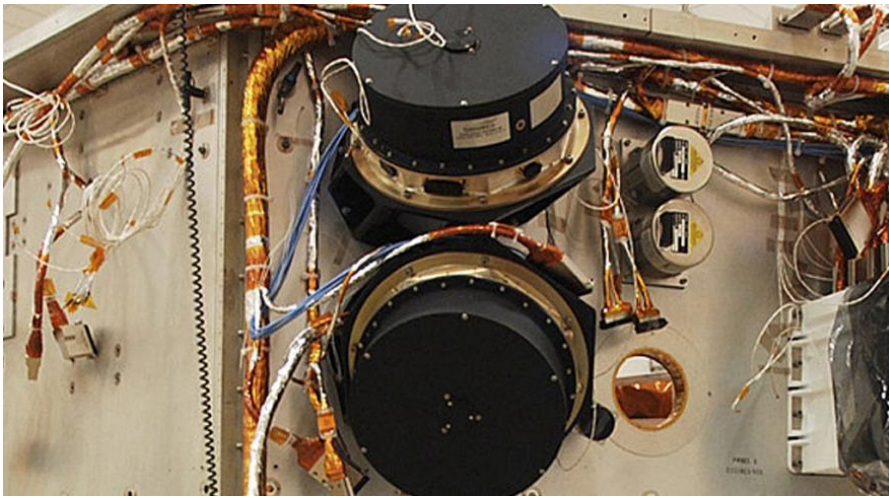
Na inverzním kyvadle se setrvačníkem lze postavit mnoho úloh z teorie řízení. Jako příklad lze uvést sestavení lineárního modelu v horní či dolní rovnovážné poloze, řízení linearizovaného systému, nelineární řízení vyhoupání kyvadla a podobně. Systém je jednoduchý, takže je vhodný pro výukové účely, avšak přesto je do jisté míry nový a „neokoukaný“, což zvyšuje jeho atraktivitu.

Kyvadlo se setrvačníkem je podaktuovaný systém, jelikož je dimenze jeho vstupu menší než řád systému. Mezi další představitele této třídy systémů patří různá podobná zařízení jako například jednoduché i vícenásobné inverzní kyvadlo na vozíku, rotační inverzní kyvadlo (Furuta pendulum), míč balancovaný na pohyblivém hrotu a podobně. Podaktuovanost však nevykazují pouze zmiňované uměle vytvořené systémy. V systémech používaných v praxi se tato vlastnost vyskytuje z důvodů [11]:

- Vlastní dynamiky systému – např. v letectví
- Redukce počtu vstupů systému kvůli snížení ceny nebo jiným praktickým důvodům
- Selhání aktuátoru v systému

Princip stabilizace reakčním setrvačníkem také není pouze teoretickým konceptem. Důležité uplatnění nachází v kosmonautice, kde se používá pro stabilizaci mnoha vesmírných sond. Za příklad může být uveden známý Hubbleův kosmický dalekohled, satelity Cubesat, či v současné době již neaktivní kosmický dalekohled Kepler [3]. Výhodou tohoto typu aktuátoru oproti stabilizaci tryskami je velmi vysoká účinnost a preciznost řízení. Energie setrvačníku může dokonce být rekuperována. Dva z reakčních setrvačníků ze sondy Kepler jsou ukázány na obrázku 1.1.

Podstatná část této práce bude zaměřena na konstrukci modelu kyvadla s jistým technickým vylepšením oproti modelům ve zmiňované literatuře. Hlavním vylepšením má být odstranění kabelů spojujících rotující kyvadlo s nepohyblivým řídicím systémem. Díky tomu bude možné otáčet kyvadlem o libovolný úhel. Také tím bude eliminován mechanický vliv kabelů na systém. V práci bude též využit odlišný přístup k řízení kyvadla oproti zmíněné literatuře, kdy bude využito dvou regulačních smyček, jedné pro řízení úhlové rychlosti motoru a druhé pro stabilizaci kyvadla.



Obrázek 1.1: Reakční setrvačníky sondy Kepler [9]

2 Odvození matematického modelu inerciálního inverzního kyvadla

Pro návrh strategie řízení je vhodné nejprve odvodit matematický model řízeného systému. Jako první bude odvozen jednodušší, rovinný případ a následně o něco složitější, sférický. Pro odvození pohybových rovnic bude v obou případech s výhodou použita Euler–Lagrangeova metoda. V matematických modelech nebude pro jednoduchost uvažováno tření, což však pro řízení reálného modelu nepředstavuje problém, poněvadž tření je v tomto případě silně podkritické. Nakonec budou v této kapitole oba modely porovnány, a to zejména z hlediska řízení.

2.1 Euler–Lagrangeova metoda

Lagrangián je definován jako

$$L = T - V, \quad (2.1)$$

kde T a V jsou kinetická, respektive potenciální energie, vyjádřené pomocí zobecněných souřadnic. Lagrangeovy rovnice jsou ve tvaru

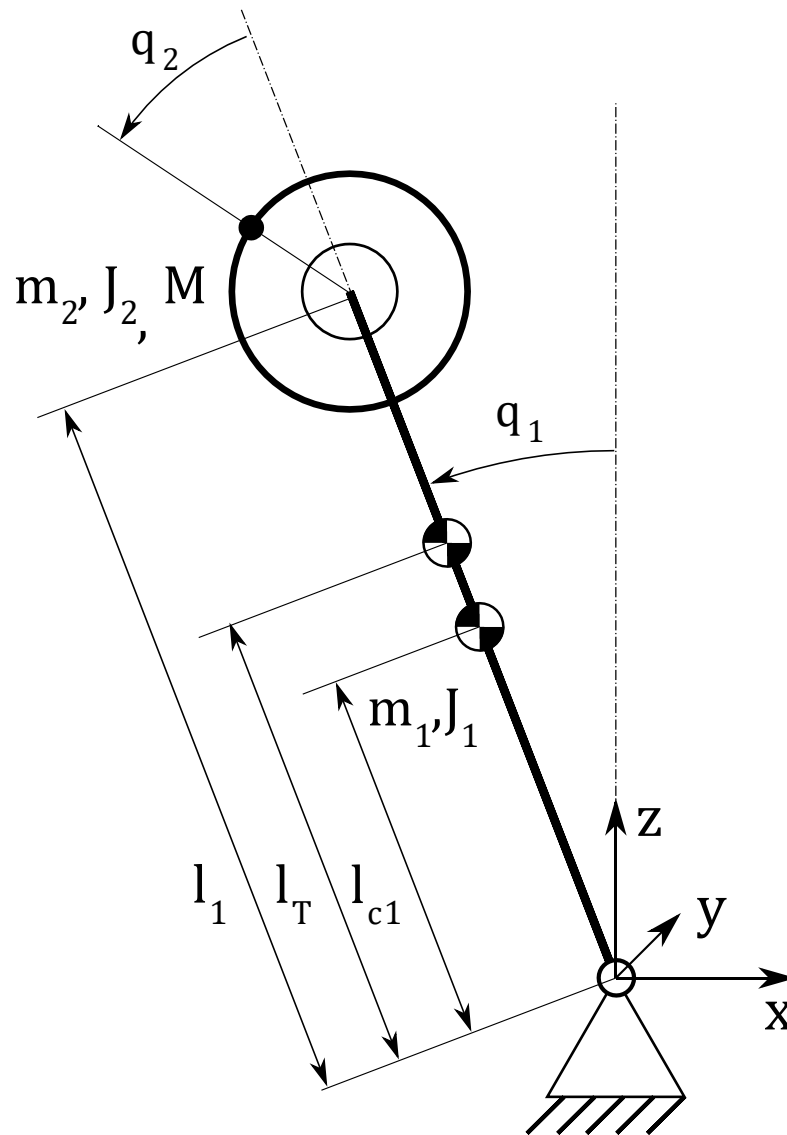
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.2)$$

Kde q_i jsou zobecněné souřadnice a Q_i zobecněné síly působící na systém. Řešením Lagrangeových rovnic pro n zobecněných souřadnic a jejich derivací získáme n diferenciálních rovnic popisujících daný systém.

2.2 Rovinné inerciální kyvadlo

Pro odvození matematického modelu kyvadla nejprve zavedeme veličiny systému dle obrázku 2.1. Kyvadlo je na spodním konci kloubem připojeno k zemi, na druhém konci je umístěn motor se setrvačnickem o celkovém momentu setrvačnosti J_2 . Hmotnost setrvačnicku kyvadla je uvažována pouze v jeho těžišti, které leží v koncovém bodě kyvadla. Kloub kyvadla umožňuje otáčení o libovolný úhel q_1 kolem osy y . Délka l_{c1} představuje vzdálenost od osy otáčení kyvadla k těžišti samotného kyvadla bez setrvačnicku, moment setrvačnosti

samotného kyvadla je J_1 . Délka l_T je vzdáleností osy otáčení kyvadla od společného těžiště kyvadla a motoru se setrvačником. Kartézská soustava souřadnic umístěná dle obrázku je zavedena pouze pro slovní popis systému.



Obrázek 2.1: Inverzní kyvadlo se setrvačником

Nyní určíme kinetickou a potenciální energii kyvadla a následně Lagrangián podle vztahu (2.1). V případě rovinného kyvadla jsou zobecněnými souřadnicemi úhly q_1 a q_2 a zobecněnou silou je vstupní moment M . Podle vztahů pro výpočty energie pohybujícího se hmotného bodu a rotujícího tuhého tělesa je kinetická energie dána vztahem

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} (J_2 (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2). \quad (2.3)$$

Funkce potenciální energie je zvolena tak, že je rovna nule pro kyvadlo visící dolů. Pomocí l_T ji lze vyjádřit jako

$$V = l_T - l_T g (m_1 + m_2) \cos(q_1 - \pi) \quad (2.4)$$

Ze vztahu pro výpočet těžiště soustavy hmotných bodů plyne

$$l_T = \frac{l_1 m_2 + l_{c1} m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.5)$$

Po dosazení (2.5) do (2.4) a jednoduché úpravě je kinetická energie

$$V = g (l_1 m_2 + l_{c1} m_1) (\cos(\theta_1) + 1) \quad (2.6)$$

a konečně odečtením (2.6) od (2.3) obdržíme Lagrangián

$$L = -g (l_1 m_2 + l_{c1} m_1) (\cos(q_1) + 1) + \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2) + J_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} (J_2 \dot{q}_2^2). \quad (2.7)$$

Derivováním Lagrangiánu (2.7) podle předpisu (2.2) se obdrží soustava dvou diferenciálních rovnic 2. řádu.

$$(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2) \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 - g (l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \sin(q_1) = 0 \quad (2.8a)$$

$$J_2 \ddot{q}_1 + J_2 \ddot{q}_2 = M \quad (2.8b)$$

Nyní bude zaveden lineární stavový popis systému ve tvaru

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + B\vec{u}, \quad (2.9a)$$

$$\vec{y} = C\vec{x} + D\vec{u}, \quad (2.9b)$$

kde $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ je stavový vektor, $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ je vektor vstupu a $\vec{y} \in \mathbb{R}^p$ je výstupní vektor. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je matice dynamiky systému, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ je matice řízení, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ je výstupní matice systému a konečně $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ je matice vazeb vstupu na výstup.

Matice A a B jsou dány vztahy

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

kde f_i jsou příslušné stavové funkce. Stavový vektor \vec{x} lze zvolit

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Z této volby přímo vyplývají stavové funkce

$$f_1: \quad \dot{x}_1 = x_3, \quad (2.12a)$$

$$f_2: \quad \dot{x}_2 = x_4. \quad (2.12b)$$

Pro zbylé dvě stavové funkce je potřeba ze soustavy diferenciálních rovnic (2.8) vyjádřit \ddot{q}_1 a \ddot{q}_2 . Výsledkem jsou funkce

$$f_3: \quad \dot{x}_3 = \ddot{q}_1 = \frac{-\sin(x_1)gl_1m_2 - \sin(x_1)gl_{c1}m_1 + u}{m_2l_1^2 + m_1l_{c1}^2 + J_1}, \quad (2.12c)$$

$$f_4: \quad \dot{x}_4 = \ddot{q}_2 = \frac{-\sin(x_1)gl_1m_2J_2 - \sin(x_1)gl_{c1}m_1J_2 + ul_1^2m_2 + ul_{c1}^2m_1 + J_1u + J_2u}{(m_2l_1^2 + m_1l_{c1}^2 + J_1)J_2}. \quad (2.12d)$$

Jelikož je vstup systému jednorozměrný, B je v případě rovinného kyvadla vektor. Linearizace bude provedena v horní (nestabilní) rovnovážné poloze, tedy pro počáteční podmínku.

$$x_{0u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Parciálním derivováním stavových rovnic (2.10) v bodě x_{0u} podle předpisů (2.8) získáme matici dynamiky a vektor řízení systému linearizovaného v horní poloze.

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_2} \\ \frac{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1}{(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1) J_2} \end{bmatrix} \quad (2.14b)$$

Za výstup je považován pouze úhel kyvadla, tedy stav x_1 , proto je C řádkový vektor

$$C = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (2.14c)$$

Přímý vliv vstupu na výstup je nulový, proto

$$D = [0] \quad (2.14d)$$

Nyní bude ještě diskutována linearizace v dolní (stabilní) rovnovážné poloze. Té odpovídá stavový vektor

$$x_{0l} = \begin{bmatrix} \pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

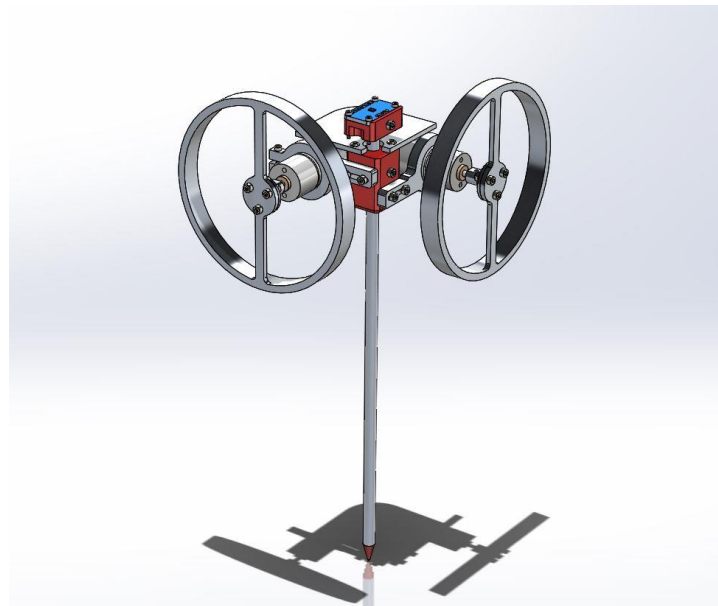
V tomto případě se výše popsaným postupem dostane matice dynamiky

$$A_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.16)$$

Která se od A_u liší pouze znaménky koeficientů a_{31} a a_{41} . Ostatní matice jsou pro oba systémy stejné.

2.3 Sférické inerciální kyvadlo

Sférické kyvadlo se od rovinného kyvadla na obrázku 2.1 liší tím, že kloub dole umožňuje i pohyb kyvadla kolem osy x , tj. dopředu a dozadu. Na konci kyvadla je navíc ve stejné výšce umístěn druhý motor se setrvačником otočený oproti prvnímu o 90° okolo podélné osy kyvadla. Rotace kyvadla okolo této osy není uvažována, protože v horní stabilizované poloze nemůže být takto umístěnými setrvačnýmiky ovlivněna. Možná podoba kyvadla je předvedena na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Inverzní kyvadlo se dvěma setrvačnýmiky [10]

Pro model se opět předpokládá jisté zjednodušení, kdy je hmotnost obou motorů se setrvačnýmiky reprezentována hmotným bodem umístěným v koncovém bodě kyvadla. Toho

by v reálném modelu šlo dosáhnout vyvážením soustavy. Tření je i v tomto případě zanedbáno.

Pro popis sférického kyvadla je třeba zavést další veličiny, pro přehlednost jsou zde všechny uvedeny.

- m_1 hmotnost ramene kyvadla
- m_2 hmotnost motorů a setrvačnicků
- l_1 délka ramena kyvadla
- l_{c1} vzdálenost těžiště ramena od osy rotace kyvadla
- l_T vzdálenost celkového těžiště kyvadla a motorů + setrvačnicků od pívotu
- J_1 moment setrvačnosti ramena kyvadla kolem jeho těžiště
- J_3 moment setrvačnosti setrvačnicku rotujícího ve směru osy x
- J_4 moment setrvačnosti setrvačnicku rotujícího ve směru osy y
- q_1 úhel kyvadla kolem osy x
- q_2 úhel kyvadla kolem osy y
- q_3 úhel setrvačnicku rotujícího ve směru osy x
- q_4 úhel setrvačnicku rotujícího ve směru osy y
- M_3 hnací moment setrvačnicku rotujícího ve směru osy x
- M_4 hnací moment setrvačnicku rotujícího ve směru osy y

Stejně jako v případě rovinného kyvadla je třeba odvodit Lagrangián systému. Pro kinetickou energii lze dostat podobný vztah jako u rovinného kyvadla

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} (J_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2) + \frac{1}{2} (J_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2). \quad (2.17)$$

a pro potenciální energii

$$V = g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \sqrt{\frac{l_T^2}{(\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1}} \quad (2.18)$$

Jejich odečtením se získá Lagrangián

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_2^2 \\
 & + \frac{1}{2} (J_3 (\dot{q}_1 + \dot{q}_3)^2) + \frac{1}{2} (J_4 (\dot{q}_2 + \dot{q}_4)^2) \\
 & - g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \sqrt{\frac{l_T^2}{(\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1}}. \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

Derivováním 2.15 podle vztahu 2.2 se obdrží soustava čtyř pohybových rovnic

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_1 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \ddot{q}_1 m_2 l_1^2 + J_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_3) \\
 & - \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \tan(q_1) (1 + (\tan(q_1))^2)}{\sqrt{\frac{1}{(\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1}} ((\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1)^2} = 0, \tag{2.20a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ddot{q}_2 (J_1 + m_1 l_{c1}^2) + \ddot{q}_2 m_2 l_1^2 + J_4 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4) \\
 & - \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \tan(q_2) (1 + (\tan(q_2))^2)}{\sqrt{\frac{1}{(\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1}} ((\tan(q_1))^2 + (\tan(q_2))^2 + 1)^2} = 0, \tag{2.20b}
 \end{aligned}$$

$$J_3 (\ddot{q}_1 + \ddot{q}_3) = M_3, \tag{2.20c}$$

$$J_4 (\ddot{q}_2 + \ddot{q}_4) = M_4. \tag{2.20d}$$

Nyní bude opět odvozen linearizovaný stavový model. Stavový vektor \vec{x} bude zvolen

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \\ \dot{q}_4 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

Jelikož při vyjadřování nejvyšších derivací q ze soustavy rovnic (2.20) vycházely velmi složité algebraické výrazy, nebude zde tento krok předveden. Výsledný systém linearizovaný v horní rovnovážné poloze je odvozen obdobně jako v případě rovinného kyvadla a je popsán maticemi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22a)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -\frac{1}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1} \\ \frac{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_3}{(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1) J_3} & 0 \\ 0 & \frac{m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1 + J_4}{(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1) J_4} \end{bmatrix}, \quad (2.22b)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.22c)$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.22d)$$

Nyní bude vypočtena matice přenosu stavového modelu dosazením stavového modelu (2.22) do vztahu

$$P(s) = C \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)B + D. \quad (2.23)$$

Výsledná matice přenosu je

$$P(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1)s^2 - g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(m_2 l_1^2 + m_1 l_{c1}^2 + J_1)s^2 - g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)} \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Z matice přenosu je zřejmé, že přenos linearizovaného modelu sférického kyvadla je pouze z prvního vstupu na první výstup a ze druhého vstupu na druhý výstup. To znamená, že hnací moment prvního setrvačnicku M_3 má vliv pouze na úhel q_1 a obdobně M_4 pouze na q_2 . Model sférického inerciálního kyvadla linearizovaný v horní rovnovážné poloze je tedy ekvivalentní dvěma nezávislým modelům rovinného kyvadla, které byly odvozeny dříve.

Tento poznatek je z hlediska řízení sférického kyvadla velmi důležitý, protože díky němu je zřejmé, že sférické kyvadlo lze v horní poloze stabilizovat stejným způsobem jako dvě nezávislá rovinná kyvadla. Dále se proto tato práce bude bez újmy na obecnosti věnovat pouze modelu rovinného kyvadla.

Je ovšem důležité ještě jednou připomenout, že zmíněná nezávislost na sebe kolmých pohybů platí pouze v blízkém okolí horní (a též dolní) rovnovážné polohy. Při aplikaci nelineárního řízení by tedy toto zjednodušení již nebylo možné.

3 Návrh inerciální stabilizace rovinného kyvadla

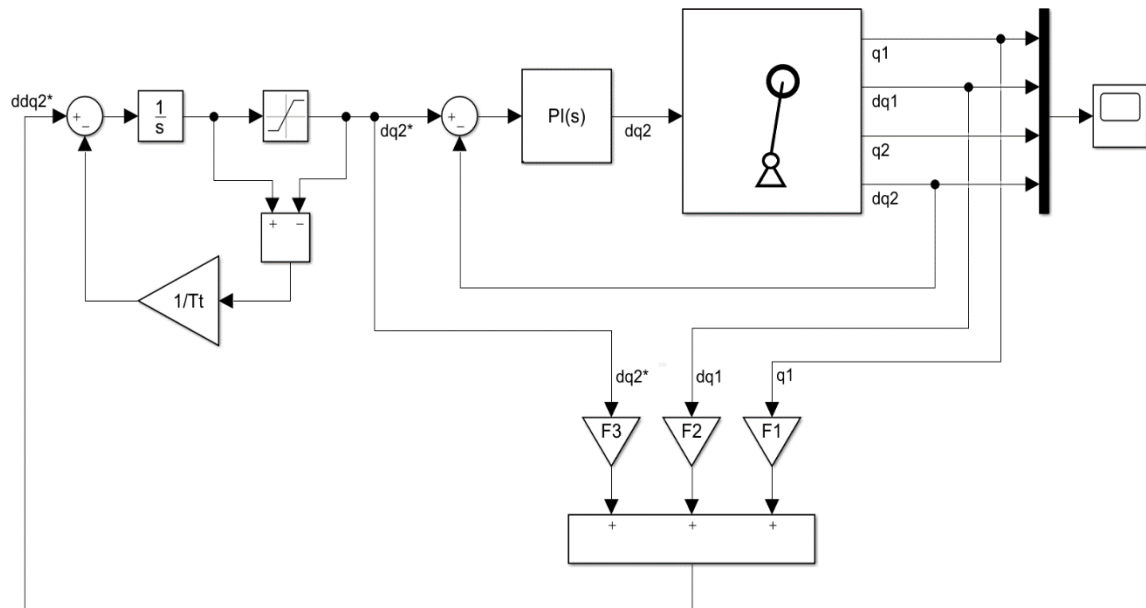
Jedna z možností stabilizace inverzního setrvačnickového kyvadla je s použitím modelu (2.14), kde je vstupem systému hnací moment setrvačnicku. Při použití stejnosměrného motoru je moment uvažován jako přímo úměrný proudu motorem, který je elektronicky regulován. Tento způsob stabilizace je použit například v knize *The reaction wheel pendulum* [2]. Nevýhodou tohoto přístupu však je, že skutečný moment způsobující otáčení setrvačnicku je ve skutečnosti snížen o část, která pokrývá tření v ložiskách motoru, tření rotujících částí o vzduch a další ztráty. Tyto ztráty navíc mají nelineární průběh – jako příklad nelinearity lze uvést suché tření v nepohyblivém ložisku, které po roztočení přestává působit. Autoři zmíněné knihy navrhli tření modelovat a kompenzovat, což je však poměrně obtížné vzhledem k jeho nesnadné identifikaci.

Proto bylo v této práci zvoleno odlišné řízení, které uvažuje, že lze pomocí další regulační smyčky dostatečně přesně regulovat zrychlení setrvačnicku $\ddot{\theta}_2$. Výhodou je, že regulátor zrychlení působí proti zmíněnému tření, čímž ho kompenzuje. Navíc se tímto způsobem model systému popsany rovnicemi (2.8) zredukuje o dynamiku setrvačnicku a systém pak popisuje pouze jedna nelineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$(m_2 l_1^2 + m_2 l_{c1}^2 + J_1 + J_2) \ddot{q}_1 - g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1) \sin(q_1) = -J_2 u, \quad (3.1)$$

kde je zrychlení \ddot{q}_2 označeno jako vstup u .

Místo přímé regulace úhlového zrychlení \ddot{q}_2 však bude použita regulace úhlové rychlosti \dot{q}_2 . Požadavek na zrychlení u bude v řídicím systému integrován, čímž se získá požadavek na úhlovou rychlost, který bude posílán do regulátoru rychlosti. Za předpokladu ideální regulace úhlové rychlosti bude i reálné úhlové zrychlení setrvačnicku u odpovídat požadavku u^* před integrací. Regulační schéma je znázorněno na obrázku 3.1. Ve schématu je také vyřešen anti-windup integrátoru požadovaného zrychlení. Vstup u (ve schématu označen jako $ddq2$) je vypočten stavovou zpětnou vazbou, jak bude popsáno dále.



Obrázek 3.1: Navržená regulační smyčka kyvadla se setrvačnickem

Důvodem pro použití regulátoru rychlosti místo regulátoru zrychlení je velmi obtížné měření úhlového zrychlení pomocí inkrementálního snímače. Ten měří ze své podstaty úhel, který je pro výpočet úhlového zrychlení potřeba dvakrát derivovat. Jelikož je měření úhlu zatíženo šumem, výpočet druhé derivace je velmi obtížný. Výpočet druhé derivace pomocí jednoduché metody konečných diferencí v tomto případě zcela selhává a bylo by třeba užít pokročilejších metod, například Kalmanova filtru. Takové řešení by však bylo výrazně složitější, proto je v této práci použito řešení uvedené výše. Výpočet úhlové rychlosti sice také přináší zašumění signálu, oproti výpočtu úhlového zrychlení je však šum řádově menší a lze ho částečně potlačit filtrací, jak bude popsáno dále v práci.

3.1 Stavový popis zjednodušeného systému

Nyní bude zaveden stavový popis zjednodušeného systému popsaného rovnicí (3.1). Vektor stavu se zvolí

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \int_0^t u(t) dt \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Důvodem rozšíření stavového popisu o třetí stav odpovídající úhlové rychlosti setrvačnicku je nutnost udržování otáček setrvačnicku v rozumných mezích. Kdyby rychlost nebyla regulována, dostala by se po krátké době do saturace kvůli technickým možnostem motoru. Jelikož při identifikaci systému nebudou identifikovány konkrétní fyzikální parametry, je pro přehlednost vhodné zavést konstanty

$$k_1 = -\frac{(m_2 l_1^2 + m_2 l_{c1}^2 + J_1 + J_2)}{J_2}, \quad (3.3a)$$

$$k_2 = \frac{g(l_1 m_2 + l_{c1} m_1)}{J_2}, \quad (3.3b)$$

pro které platí $k_1 > 0$ a $k_2 < 0$. S těmito konstantami se rovnice (3.1) přepíše na

$$k_1 \ddot{q}_1 + k_2 \sin(q_1) = u. \quad (3.4)$$

Je na první pohled vidět, že rovnice (3.4) odpovídá rovnici netlumeného matematického kyvadla. Nyní budou opět sestaveny stavové funkce.

$$f_1 = \dot{x}_1 = x_2, \quad (3.5a)$$

$$f_2 = \dot{x}_2 = \dot{q}_1 = -\frac{k_2}{k_1} \sin(x_1) + \frac{u}{k_1}, \quad (3.5b)$$

$$f_3 = \dot{x}_3 = u. \quad (3.5c)$$

Funkce f_2 je získána vyjádřením \dot{q}_1 z rovnice (3.1). Derivováním funkcí (3.5) podle vztahu (2.10) v bodě $x_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$, tedy v horní rovnovážné poloze, se obdrží matice dynamiky

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6a)$$

a vektor řízení

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{k_1} \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.6b)$$

Jelikož za výstup je opět považován pouze úhel kyvadla a přenos vstupu na výstup je nulový, platí

$$C = [1 \quad 0 \quad 0], \quad (3.6c)$$

$$D = [0]. \quad (3.6d)$$

3.2 Ověření říditelnosti systému

Nyní bude ověřena říditelnost systému popsaného maticemi (3.6). Pro simulaci nebyly známé parametry systému, proto musely být použity následující odhadnuté parametry

$$m_1 = 0.1 \text{ kg}$$

$$m_2 = 0.4 \text{ kg}$$

$$l_1 = 0.2 \text{ m}$$

$$l_{c1} = 0.1 \text{ m}$$

$$J_2 = 0.0002 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

Moment setrvačnosti samotného kyvadla J_1 byl dopočítán podle vztahu pro výpočet momentu setrvačnosti tenké tyče otáčející se okolo osy kolmo procházející jejím středem

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \doteq 0.00033 \text{ kg} \cdot \text{m}^2. \quad (3.7)$$

Po dosazení těchto parametrů do vztahů (3.3) se dostanou konstanty

$$k_1 \doteq -103, \quad (3.8a)$$

$$k_2 \doteq 4410. \quad (3.8b)$$

A dále dosazením těchto konstant do stavového modelu (3.6) se obdrží

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 43 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0097 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Nyní bude ověřena stabilita systému. Vlastní čísla matice A jsou

$$\lambda_1 = 6.5573, \quad (3.10a)$$

$$\lambda_2 = -6.5573, \quad (3.10b)$$

$$\lambda_3 = 0. \quad (3.10c)$$

Jelikož má jedno z vlastních čísel kladnou reálnou část, je v souladu s očekáváním systém linearizovaný v horní poloze nestabilní. Nutnou podmínkou pro stabilizaci nestabilního systému je říditelnost všech nestabilních vlastních čísel. Proto bude ověřena říditelnost systému.

Aby byl systém tvořený maticemi A a B říditelný, musí mít matice říditelnosti systému plnou řádkovou hodnotu. Matice říditelnosti je definována jako

$$M_C = [B, AB, \dots, A^{n-1}B]. \quad (3.11)$$

V programu Matlab bylo ověřeno, že hodnota matice říditelnosti pro systém (3.9) je 3, což se rovná jejímu počtu řádků. Systém je tedy plně říditelný včetně nestabilních vlastních čísel a stabilizace je možná.

3.3 Návrh stabilizace kyvadla stavovou zpětnou vazbou

Nyní je již dokázáno, že navržený systém je říditelný a lze tudíž přistoupit k samotnému návrhu regulátoru. Stavová zpětná vazba je způsob řízení systému, pro který je třeba znát celý stav systému. To v případě reálného modelu setrvačnickového kyvadla není problém, protože všechny stavové veličiny lze měřit nebo vypočítat. Stavová zpětná vazba je definována jako

$$\vec{u}(t) = F\vec{x}(t), \quad (3.12)$$

kde $F \in \mathbb{R}^{m \times n}$ je matice stavové zpětné vazby. Dosazením vstupu (3.12) do stavového modelu systému se získá nový stavový model

$$\dot{\vec{x}}(t) = (A + BF)\vec{x}(t) = \hat{A}\vec{x}(t), \quad (3.13)$$

s maticí dynamiky uzavřeného systému \hat{A} . Tím vzniká úloha o nalezení vhodné zpětnovazební matice F takové, aby dynamika systému s uzavřenou zpětnou vazbou byla stabilní a splňovala další zadané požadavky.

3.3.1 LQR

Jednou z více metod pro nalezení vhodné matice stavové zpětné vazby je metoda lineárního kvadratického regulátoru. Pro tuto práci bude použita jeho spojitá varianta s nekonečným horizontem. Metoda LQR funguje na principu minimalizace kvadratického kritéria

$$I = \int_0^{\infty} (\vec{x}^T Q \vec{x} + \vec{u}^T R \vec{u}) dt, \quad (3.14)$$

kde Q a R jsou matice návrhových parametrů.

- $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, pozitivně semidefinitní matice penalizující stav
- $R \in \mathbb{R}^{m \times m}$, pozitivně definitní matice penalizující řízení

Výsledná matice zpětné vazby minimalizující kritérium (3.14) je ve tvaru

$$F = -R^{-1} B^T P, \quad (3.15)$$

kde P je řešením Riccatiovy rovnice

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0. \quad (3.16)$$

LQ regulátor tedy převádí úlohu o nalezení matice stavové zpětné vazby na úlohu o vhodném zvolení parametrů Q a R . Při nastavování těchto parametrů je již však umožněn jistý „vhled“ do chování systému, což jejich volbu usnadňuje.

3.3.2 Ověření řízení v simulaci

Metoda LQR je implementována v programu Matlab příkazem `lqr(...)`, který pro zadaný stavový popis systému a matice Q a R spočítá matici stavové zpětné vazby F . Pro systém (3.9) byly nejprve vyzkoušeny matice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1]. \quad (3.17)$$

Pro tuto nejjednodušší volbu parametrů vyšel vektor stavové zpětné vazby

$$F = [10200 \quad 1550 \quad 1] \quad (3.18)$$

a vlastní čísla matice dynamiky uzavřeného systému \hat{A}

$$\lambda_1 = -6.5622, \quad (3.19a)$$

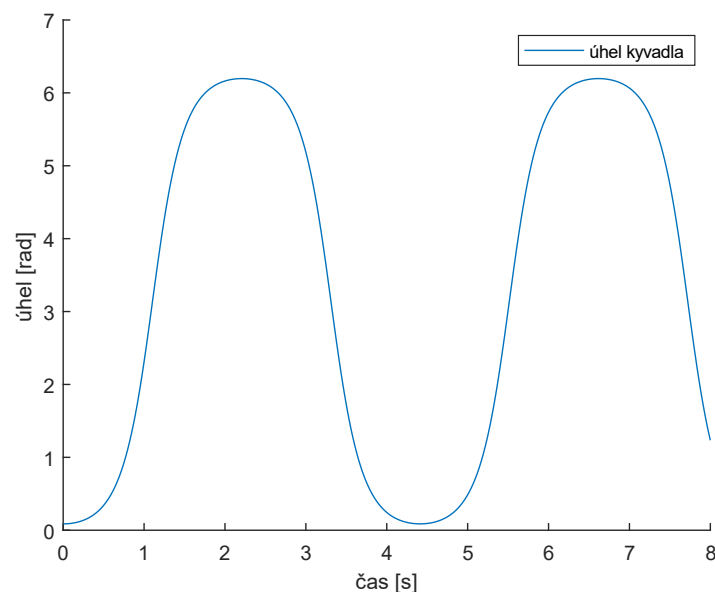
$$\lambda_2 = -6.5524, \quad (3.19b)$$

$$\lambda_3 = -1. \quad (3.19c)$$

Tyto vlastní čísla již odpovídají stabilnímu systému, proto lze očekávat, že stabilizace s těmito parametry bude fungovat správně.

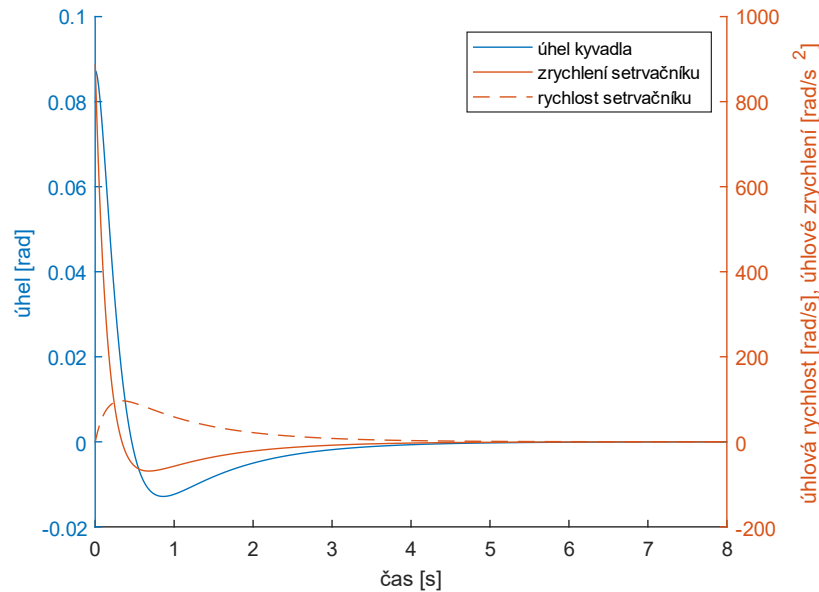
Nyní bude řízení demonstrováno na modelu sestaveném v programu Simulink. Kyvadlo je modelováno dle nelineární rovnice (3.1) a je doplněno o stavovou zpětnou vazbu (3.18). Nejprve bude ověřeno chování kyvadla bez řízení. Kyvadlo bude v počátku simulace vychýleno o úhel 5° od horní rovnovážné polohy a bude mít nulovou počáteční úhlovou rychlost.

Z obrázku 3.2 můžeme vidět, že se kyvadlo chová dle očekávání, tj. houpe se okolo dolní rovnovážné polohy (v grafu je rovna π rad). Jelikož model neuvažuje tlumení, houpání je periodické.



Obrázek 3.2: Úhel kyvadla spuštěného z blízkosti horní polohy

Při zapnutí stavové zpětné vazby ze stejných počátečních podmínek je na obrázku 3.3 vidět, že regulátor s výše uvedenými parametry dokáže stabilizovat kyvadlo v horní poloze a zároveň po několika sekundách zastavit otáčení setrvačníku.



Obrázek 3.3: Stabilizace kyvadla 1

Dále bude vyzkoušeno řízení s jiným nastavením LQR. Penalizace vstupu systému bude nyní oproti předchozímu případu snížena a penalizace úhlové rychlosti setrvačnicku zvýšena. Matice Q a R budou zvoleny

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = [0.01] \quad (3.20)$$

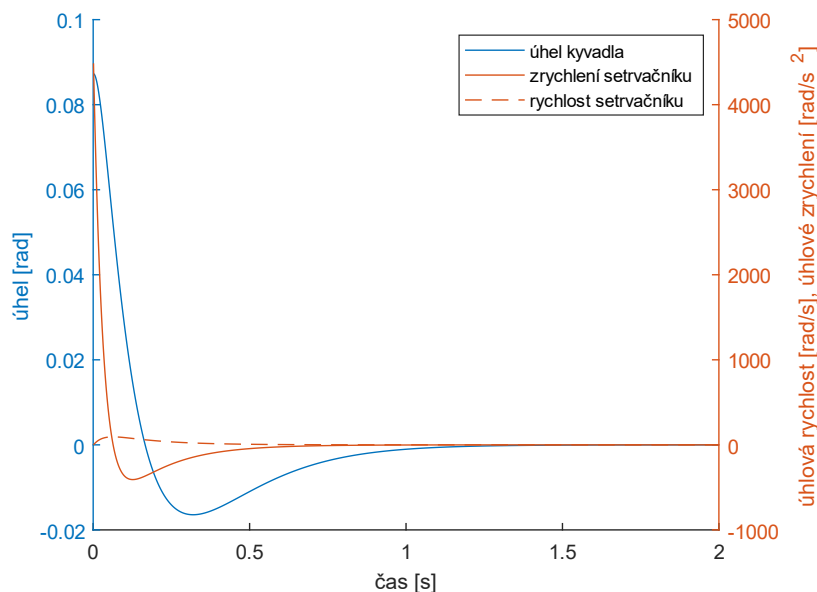
Vlastní čísla matice dynamiky uzavřeného systému jsou nyní

$$\lambda_1 = -6.5573 + 0.01i \quad (3.21a)$$

$$\lambda_2 = -6.5573 - 0.01i \quad (3.21b)$$

$$\lambda_3 = -31.6229 \quad (3.21c)$$

Řízení se stavovou zpětnou vazbou vypočtenou pro tyto parametry LQR se stejnými počátečními podmínkami jako v předchozím případě je znázorněno na obrázku 3.4. Z porovnání grafů je zřejmé, že ve druhém případě je stabilizace kyvadla mnohem rychlejší. Maximální požadované zrychlení u je sice ve druhém případě přibližně 5x vyšší, avšak maximální úhlová rychlost setrvačnicku je v obou případech srovnatelná, jelikož se ve druhém případě vysoká hodnota zrychlení integruje po mnohem kratší dobu. Z toho vyplývá, že i agresivnější nastavení regulátoru podobné volbě parametrů (3.20) bude pravděpodobně možné využít i pro skutečný model.



Obrázek 3.4: Stabilizace kyvadla 2

4 Konstrukce reálného modelu

V této kapitole bude popsán vytvořený model kyvadla z elektronického a mechanického hlediska. Oproti matematickému modelu má skutečný model mnohá omezení, která je nutno brát v potaz. Otáčky motoru jsou omezeny hodnotou maximálního napájecího napětí, moment, a tedy i jemu úměrné úhlové zrychlení je zase omezeno maximálním proudem motoru. Výstupy senzorů jsou zatíženy šumem. V systému také vystupuje oproti modelu tření. Všechny tyto vlivy způsobují problémy, které je pro vytvoření funkčního modelu třeba řešit.

Stavba modelu procházela vývojem, kdy byla nejprve pro řízení motoru použita vývojová deska STM32 Nucleo, ke které byl připojen modul pro řízení bezkartáčového motoru a prototypová deska s integrovaným budičem sběrnice RS-485. Z důvodu kompaktnosti zařízení však byla později navržena vlastní řídicí deska, která zde bude popsána.

Co se týče konstrukce modelu, nejprve bylo experimentováno se stabilizací pouze za pomoci momentu setrvačnosti motoru. Později však byl na hřídel motoru doplněn setrvačnick a

ukázalo se, že vlastnosti systému se tím podstatně zlepší. Důvodem bylo zejména to, že při nízkém momentu setrvačnosti mohl motor působit konstantním momentem jen krátkou dobu, než se jeho otáčky dostaly do saturace, a při saturovaných otáčkách již nebylo možné systém řídit. Zvýšením momentu setrvačnosti bylo dosaženo toho, že motor může působit stejným konstantním momentem po mnohem delší dobu. Tím se podstatně zvýšil rozsah stabilizace v horní poloze.

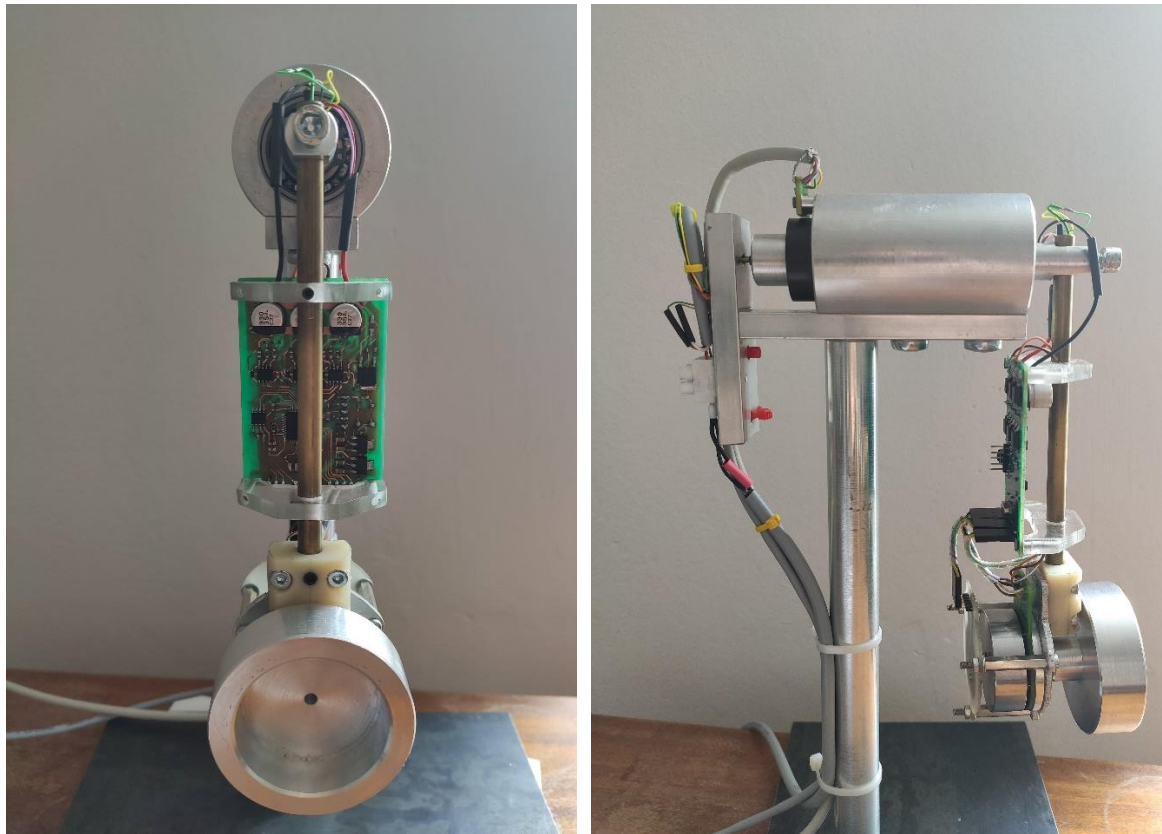
Kyvadlo je řízeno tak, jak bylo popsáno ve schématu na obrázku 3.1. PI regulátor a řízení motoru jsou umístěny přímo na kyvadle, stavový regulátor je implementován na průmyslovém počítači AIC, který je umístěn mimo kyvadlo. Komunikace obou částí a napájení elektroniky na kyvadle jsou řešeny kluzným kontaktem, přes který jsou přivedeny napájecí a signální vodiče z nepohyblivé části do kyvadla.

Využití AIC pro řízení má výhodu především v propojení se systémem Rexygen, ve kterém je možné vytvořit řídicí algoritmus v grafickém rozhraní podobném programu Simulink. V systému Rexygen lze také zobrazovat data ze systému v reálném čase, ukládat je a exportovat ve formátu csv. Dále také Rexygen nabízí možnost tvorby uživatelsky definovaných bloků v jazyce podobném C.

4.1 Mechanická část

Celkový pohled na model kyvadla je na obrázku 4.1. Kyvadlo je připevněno k duté hřídeli s podélným otvorem o průměru 8 mm, kterým prochází komunikační a napájecí vodiče do kyvadla. Na jejím druhém konci je nasazen radiální magnetický kroužek senzoru úhlu. Průměr hřídele je 15 mm, na straně magnetického kroužku je rozšířena na 20 mm. V rozšířené části hřídele je podélný otvor rozšířen na 12 mm, v rozšíření je zasazen miniaturní kluzný kontakt. Detail kluzného kontaktu a senzoru úhlu je na obrázku 4.2.

Hřídel je uložena v hliníkovém válci, který je kvůli připevnění ke stojanu ze spodní strany ofrézován do plochy. V obou koncích válce jsou uložena kuličková ložiska o vnějším průměru 32 mm. Pro minimalizaci třecích ztrát kyvadla jsou použita ložiska bez těsnění. Hřídel je u ložiska na straně kyvadla axiálně zajištěna pojistným kroužkem.



Obrázek 4.1: Pohled na zhotovené kyvadlo zepředu a z boku



Obrázek 4.2: Detail senzoru úhlu kyvadla a kluzného kontaktu

K přivedení signálů a napájení do DPS na kyvadle je použit miniaturní kluzný kontakt o vnějším průměru 12 mm. Vodiče z kluzného kontaktu na jedné straně prochází skrz dutý hřídel do kyvadla, na druhé straně jsou zafixovány a jsou k nim připojeny kabely s napájením a se signály. Kluzný kontakt má 6 vodičů, pro každý z nich je udáván maximální proud 2 A. Pro napájení jsou z důvodu spolehlivosti použity pro každý pól 2 vodiče a pro komunikační vedení po RS-485 jsou využity zbývající 2.

Samotné kyvadlo je tvořeno mosaznou trubkou o průměru 8 mm. Trubka je zajištěna v hřídeli šroubem M6. Trubkou jsou vedeny vodiče k motoru. Délka kyvadla měřená od osy kyvadla k ose motoru je 172 mm. Ke kyvadlu je plastovými díly připevněna deska řízení motoru a na jeho konci je umístěn motor se setrvačnickem.

Jako pohon byl zvolen bezkartáčový (BLDC) motor se snímáním polohy Hallovými sondami typu „EC 45 flat“ od firmy Maxon. Výhodou BLDC motoru je oproti kartáčovým DC motorům vyšší účinnost, tišší chod bez jiskření a bezúdržbovost. Tyto výhody jsou však vykoupěny obtížnějším řízením, kdy je nutné provádět komutaci elektronicky. Jedná se o motor typu „outrunner“, tedy s vnějším rotorem. Tato konstrukce motoru je pro pohon setrvačnicku výhodná, protože má oproti typu „inrunner“ (s vnitřním rotorem) srovnatelných rozměrů vyšší výstupní moment. Díky tomu lze použít setrvačnick o vyšším momentu setrvačnosti, což má kladný dopad na vlastnosti systému. Zvolený motor má tyto parametry [13]:

- Jmenovité napětí: 24 V
- Otáčky naprázdno: 6720 rpm
- Jmenovité otáčky: 5250 rpm
- Jmenovitý moment: 82,7 mNm
- Maximální moment: 741 mNm
- Jmenovitý proud: 2,32 A
- Špičkový rozběhový proud: 23,3 A
- Maximální moment: 741 mNm
- Vnější průměr rotoru: 42,8 mm
- Moment setrvačnosti rotoru: 135 g.cm²
- Počet pólových dvojic: 8

Ke hřídeli motoru je připevněn setrvačnick vysoustružený z hliníku o vnějším průměru 64 mm. K rotoru motoru je přilepen válcový magnet, z jehož orientace měří IRC polohu motoru.

4.2 Elektronická část

4.2.1 Řídicí deska motoru

Požadavky na desku motoru byly následující:

- Vytvoření stabilizovaných napájecích napětí + 12 V pro spínání MOSFET tranzistorů, +5 V pro Hallovy sondy motoru a + 3.3 V pro senzor úhlu rotoru
- Řízení komutace BLDC motoru s využitím Hallových sond
- Výkonové řízení motoru s napájením + 24 V
- Komunikace s AIC přes rozhraní RS-485
- Měření úhlové rychlosti motoru
- PI regulace rychlosti motoru

Pro vytvoření stabilizovaných napětí na desce jsou použity kaskádně zapojené lineární stabilizátory.

- LF120 – 12 V
- ZLDO1117-50 – 5 V
- ZLDO1117-50 – 3.3 V

Stabilizátory jsou zapojeny podle doporučení v katalogových listech. Jistou nevýhodou je tepelná ztráta převážně na regulátoru 12 V, která při odběru elektroniky cca 80 mA dosahuje 0,96 W a způsobuje ohřev stabilizátoru. Teplota stabilizátoru sice zůstává v požadovaných mezích, přesto by bylo vhodnějším řešením použít integrovaný step-down měnič.

Nejdůležitějším prvkem řídicí desky je 32-bitový mikrokontrolér STM32F411RE využívající jádro Cortex-M4. Byla zvolena jeho varianta v pouzdře LQFP64. Mikrokontrolér má následující parametry [4]:

- Napájecí napětí 3,3 V
- Taktovací frekvence až 100 MHz
- 512 KB flash
- 128 KB SRAM
- 6 16-bitových čítačů/časovačů, z nichž jeden má speciální funkce pro PWM

- 2 32-bitové čítače/časovače
- 16 streamů DMA
- Debugovací rozhraní SWD

Mikrokontrolér je taktován krystalem o frekvenci 8 MHz. Tato frekvence se uvnitř mikrokontroléru pomocí fázového závěsu a děliček upraví na požadovaných 100 MHz. Důvodem volby tohoto mikrokontroléru byly pro účely modelu kyvadla vyhovující parametry a také autorova zkušenost s řadou STM32F4 z výuky na FEL ZČU.

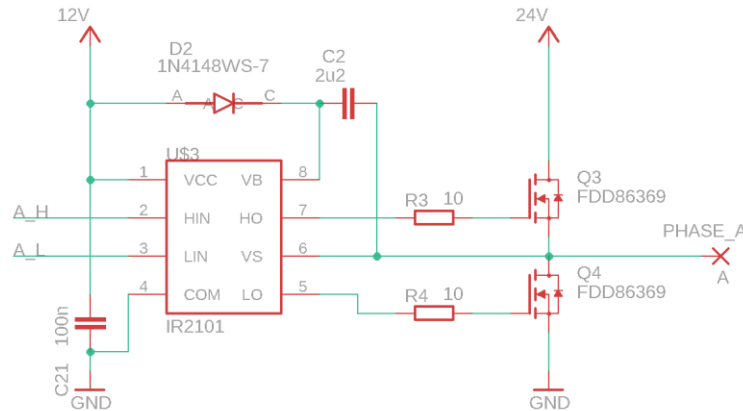
Pro elektronickou komutaci BLDC motoru je nutná znalost polohy rotoru. Pro šestikrokovou komutaci, která bude v tomto případě použita, se standardně používají dva způsoby, jak informaci o poloze získat:

- Bezsenzorový
- Senzorový

Při bezsenzorovém řízení motoru se poloha rotoru obvykle odhaduje z průchodu indukovaného napětí jednotlivých fází motoru nulou. Při otáčkách blízkých nule je však hodnota indukovaného napětí velmi malá a tato metoda selhává. Proto se při bezsenzorovém řízení obvykle využívá asynchronní rozběh, kdy se vinutí spínají po definovaných časových úsecích s postupně zmenšující se periodou nezávisle na poloze rotoru. Pro přesné řízení motoru v blízkosti nulových otáček je však tato metoda nedostatečná.

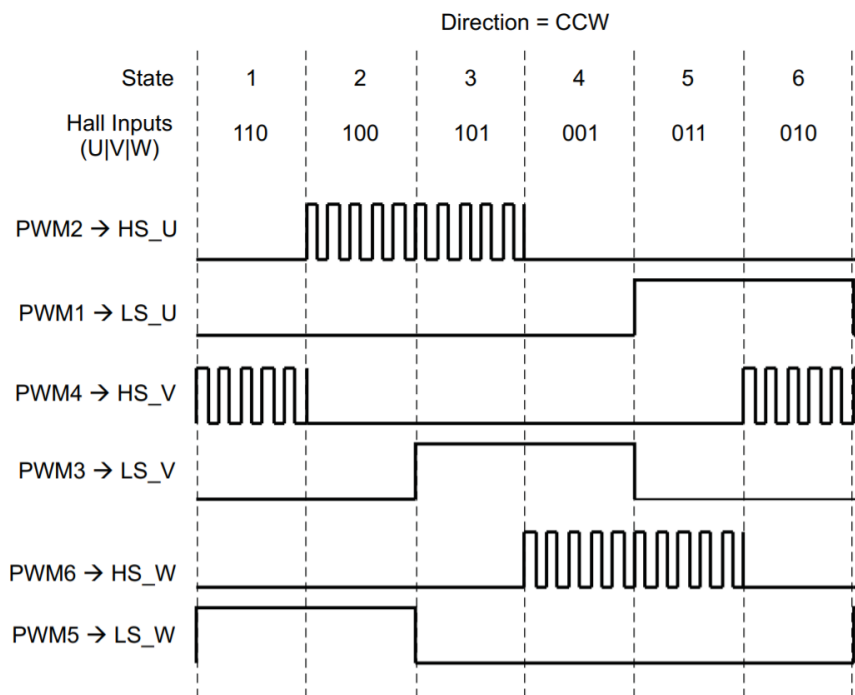
Naproti tomu při využití motoru s Hallovými sondami je poloha rotoru známá i při nulových otáčkách a výše zmíněný problém odpadá. Jelikož zvolený motor obsahuje Hallovy sondy, bylo použito senzorové řízení využívající informaci ze sond.

Výkonové spínání vinutí motoru je prováděno třífázovým můstkem (střídačem) složeným z šesti N-MOSFET tranzistorů. Jednotlivé větve můstku jsou řízeny budiči IR2101, které upravují napětí 3,3 V z mikrokontroléru na 12 V a pro horní skupinu tranzistorů vytváří na principu nábojové pumpy plovoucí budičí napětí. Jedna ze tří větví můstku je zobrazena na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Jedna větev 3f můstku

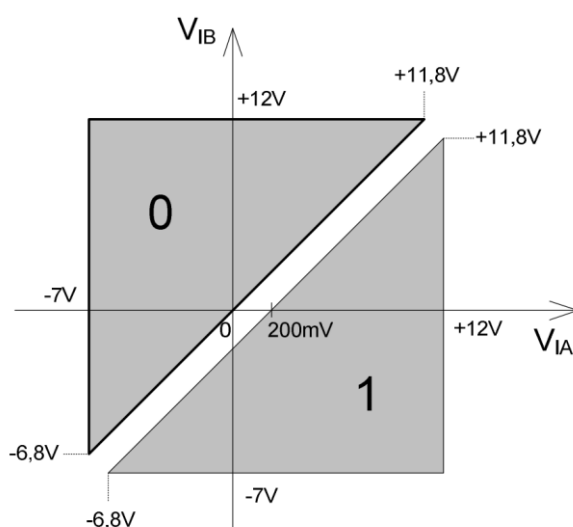
Regulace motoru je prováděna prostřednictvím pulzně-šířkové modulace pulzů horní skupiny tranzistorů (na obrázku 4.4 jsou označeny HS). Pro omezení nežádoucích zvuků motoru byla zvolena frekvence PWM zhruba 65 kHz.



Obrázek 4.4: Komutační diagram motoru [5]

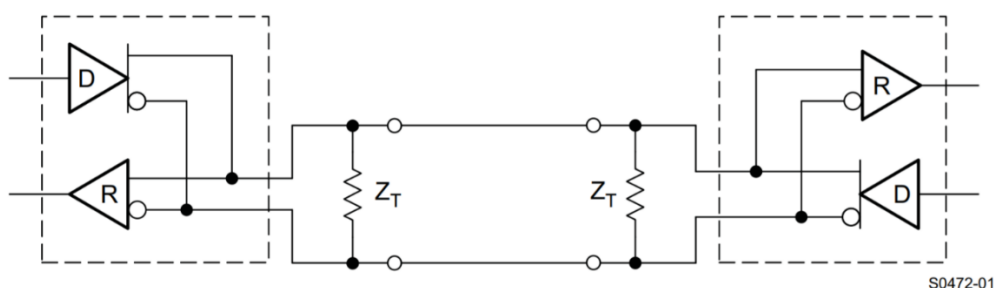
Pro komunikaci řídicí desky motoru s AIC je použito rozhraní RS-485 v nejjednodušší topologii: point-to-point. Ve srovnání se starším rozhraním RS-232 je standart RS-485 výhodnější díky vyšším možným komunikačním rychlostem a možnosti použít

podstatně delší vedení (až do 1200 m). Lepších vlastností je dosaženo využitím diferenciálního dvou vodičového vedení. Jeho vodiče se standartně nazývají A a B. Výhodou diferenciálního vedení je potlačení souhlasného rušení, jelikož se nevyhodnocuje napětí vůči referenční hodnotě, ale rozdíl napětí. Vyhodnocování výstupu v závislosti na úrovních napětí vodičů sběrnice A a B je ukázáno na obrázku 4.5. Vedení je díky tomu také tolerantní proti posunu zemní úrovně (do určité udávané hodnoty). Pro poloduplexní přenos stačí pouze dva signální a jeden zemní vodič, lze použít například kabel typu stíněná kroucená dvojlinka.



Obrázek 4.5: Vyhodnocování výstupu budiče RS-485 podle úrovní vedení [7]

Na obou koncích vedení je nutné použít budiče sběrnice. Tyto integrované obvody převádějí CMOS logické úrovně výstupů mikrokontroléru na diferenciální signál a naopak. Na koncích vedení, co nejbližší budičům, se umísťují terminační rezistory, které slouží k omezení odrazů na sběrnici.



Obrázek 4.6: Diferenciální vedení s budiči v topologii point-to-point [6]

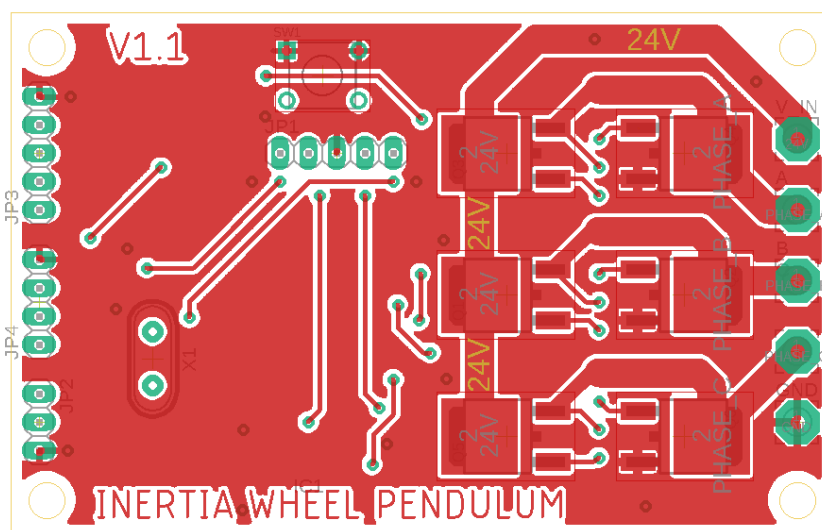
Převod sériového rozhraní USART mikrokontroléru na rozhraní RS-485 je konkrétně realizován integrovaným obvodem SN65HVD75 ve standardním zapojení dle dokumentace. Použitý terminační rezistor má hodnotu 100 Ω . Komunikační rychlost byla zvolena 1 Mb/s.

Konečné rozměry DPS jsou 73,5 mm x 47 mm. Pro připevnění ke kyvadlu má deska v rozích otvory pro šrouby M3. Na vrchní straně je rozlita zemnicí plocha. Horní a spodní strana desky je ukázána na obrázcích 4.7 a 4.8.

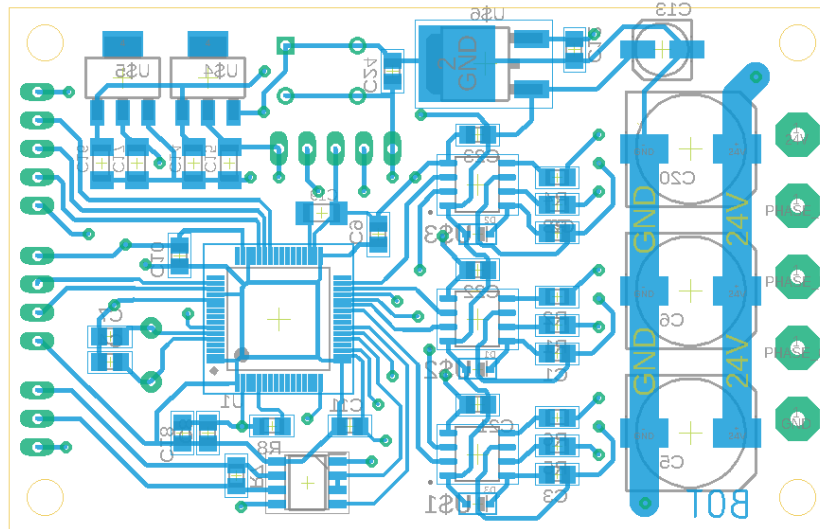
Deska obsahuje 4 konektory typu pin header:

- 3-pinový konektor pro připojení komunikace s AIC po RS-485
- 4-pinový konektor pro připojení IRC motoru
- 5-pinový konektor pro připojení Hallových sond motoru
- 5-pinový konektor pro SWD komunikaci s debuggerem ST-link

Motor a napájení jsou připojeny k pájecím ploškám, na obrázcích umístěným vlevo. Na desce je též umístěno tlačítko sloužící k resetování mikrokontroléru.



Obrázek 4.7: Horní strana desky plošného spoje



Obrázek 4.8: Spodní strana desky plošného spoje

4.2.2 Senzory

V modelu inerciálního kyvadla jsou použity dva senzory: jeden pro měření úhlu natočení kyvadla q_1 a druhý pro úhel natočení motoru q_2 . Jelikož je pro řízení potřeba znát i obě úhlové rychlosti, jsou tyto vypočítávány z úhlů, jak bude popsáno dále.

Oba použité senzory jsou takzvané inkrementální rotační snímače, pro které se také používá označení IRC (Incremental Rotary enCoder). Výstupem inkrementálního snímače jsou kvadrurní signály, což jsou obdélníkové signály navzájem posunuté o 90° . Směr otáčení lze vyčíst z jejich fázového sledu. Dále může mít IRC výstup zvaný index, který vytvoří krátký pulz vždy jednou za otáčku. Výstupy IRC mohou být buď typu open collector, push pull, nebo diferenciální. Diferenciální výstupy mají výhodu z hlediska vysoké odolnosti vůči rušení a jsou obzvlášť vhodné v případech, kdy je senzor umístěn daleko od elektroniky, která výstupy zpracovává.

Senzor úhlu kyvadla

Měření úhlu kyvadla je realizováno pomocí IRC od firmy RLS pracujícím na magnetickém principu. Konkrétně se jedná o typ RLC2ICA08BC00A00. Senzor je modulárního typu na miniaturní DPS. Senzor je dle specifikovaných rozměrů umístěn těsně u radiálního magnetického kroužku nasazeném na hřídeli kyvadla. Vnější průměr kroužku činí 31 mm. Magnetický kroužek má po obvodu 50 pólů, rozlišení senzoru je 8 b/pól. Celkové rozlišení

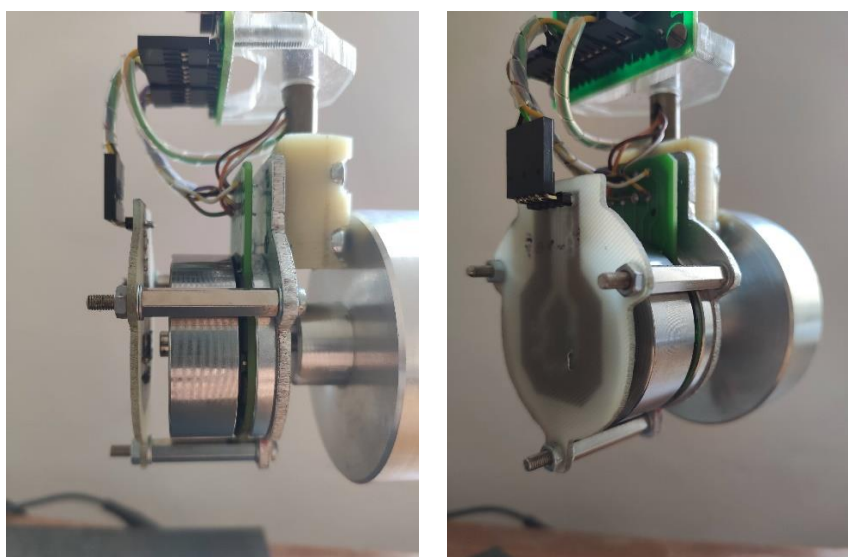
senzoru je tedy $50 * 2^8 = 12800$ bitů/otáčku. Senzor má kvadrurní výstupy A a B a referenční výstup Z. Všechny výstupy jsou diferenciálního typu standartu RS-422, ke každému je připojen jeden kroucený pár vodičů kabelu vedoucího do AIC. Další dva vodiče kabelu přivádí do senzoru z AIC napájecí napětí +5 V.

Senzor úhlu motoru

K měření natočení motoru je použit inkrementální enkodér AS5147 od firmy AMS pracující také na magnetickém principu. Na rozdíl od IRC kyvadla se však nejedná o modul, ale o samostatný integrovaný obvod, takže pro jeho umístění musela být vytvořena zvláštní DPS, která je pomocí distančních sloupků umístěna za motorem. Na desce je kromě senzoru také LED dioda signalizující napájení, rezistory připojené k nezapojeným pinům senzoru dle katalogového listu a blokovací kondenzátor. Umístění senzoru je zachyceno na obrázku 4.6. Na levé části obrázku je též vidět válcový magnet přilepený k rotoru.

Magnet a integrovaný obvod musí být umístěny souose s udávaným maximálním vyosením 0.5 mm. Magnet má předepsané rozměry 8 mm průměr a 3 mm výšku a je magnetován diametrálně. Vnitřní rozlišení AS5147 je 14 bitů/otáčku a výstupní rozlišení 11 bitů/otáčku. Maximální rychlost otáčení, kterou je senzor schopen změřit, je 14500 otáček/min.

Nevýhodou tohoto senzoru je, že výstupní signály nejsou diferenciální. Délky signálních vodičů jsou nicméně navrženy krátké a chyba v důsledku rušení nebyla při měření osciloskopem pozorována. Napájecí napětí senzoru je +3.3 V, senzor je napájen z řídicí desky motoru.



Obrázek 4.9: Detail umístění senzoru u motoru

4.2.3 Řídicí počítač AIC

AIC (Advanced Industrial Computer) je průmyslový počítač od firmy REX Controls s.r.o. Jeho jádro tvoří čip Altera Cyclone V SE SoC/FPGA, který v sobě integruje 2 jádra Cortex-A9 (800/925 MHz) a FPGA. Počítač je modulární s různými možnostmi I/O karet. Se dvěma I/O kartami se počítač vejde do krabičky o rozměrech 105×105×65 mm.

Na AIC běží real-time softwarové jádro REX Control, umožňující řízení úloh v reálném čase.[8]

Pro účely kyvadla je využita karta s rozhraními RS-422/485, přičemž jedno rozhraní je využito pro komunikaci s řídicí deskou motoru a další dvě jsou použity pro zpracování signálů ze senzoru natočení kyvadla.

4.3 Popis programového řešení

Regulační smyčka v počítači AIC běží s periodou 1 ms. Během každé periody vzniká požadavek rychlosti motoru, který je odeslán do desky motoru. Takt programu desky motoru je synchronizován s taktem v AIC, takže PI regulace otáček pracuje také s periodou 1 ms. Schéma programu AIC navrženého v systému REXygen je ukázáno v příloze B. Kromě řízení, které odpovídá navrženému schématu z obr. 3.1., obsahuje navíc bloky starající se o komunikaci a zpracování signálů z IRC kyvadla. Dále bude v této kapitole popisován program v řídicí desce motoru na kyvadle.

4.3.1 Komunikace AIC s řídicí deskou motoru

Komunikace využívá rozhraní RS-485 a je řízena AIC, jak bylo zmíněno výše. Je zabezpečena 16 bit CRC s generačním polynomem 0xFB22.

Poté, co se v AIC provede výpočet jednoho kroku regulace, je výsledný požadavek rychlosti převeden na datový typ int16. K němu je dopočítáno dalších 16 bit CRC a výsledek se ve 4 bytech postupně odešle.

V mikrokontroléru na desce motoru se načte hodnota z AIC a provede ověření CRC. V případě, že CRC nesouhlasí, je přijatý požadavek rychlosti ignorován a požadovaná

hodnota rychlosti zůstane z minulého cyklu. Poté, co mikrokontrolér provede výpočet rychlosti setrvačnicku a PI regulace, sestaví pole o délce 4B z aktuální hodnoty rychlosti (int16) a aktuální hodnoty výstupu PI regulátoru (int16). Pro toto pole následně spočítá 16 bit CRC, které k němu připojí. Výsledek se v 6 bytech postupně odešle.

V AIC je následně opět zkontrolováno CRC. V případě, že kontrolní součet souhlasí, se přijaté veličiny uloží a poté program čeká na spuštění dalšího kroku.

4.3.2 Výpočet úhlové rychlosti motoru

Výstupy z IRC motoru jsou připojeny na čítač TIM2 v mikrokontroléru nastavený do režimu encoder interface mode. Čítač v tomto režimu automaticky při každé hraně na kterémkoliv signálu inkrementuje/dekrementuje svůj obsah v závislosti na vstupech A a B. Závislost je popsána v tabulce 4.1.

Úroveň signálu opačného vstupu (A pro B, B pro A)	Hrana signálu A		Hrana signálu B	
	náběžná	sestupná	náběžná	sestupná
vysoká	-1	+1	+1	-1
nízká	+1	-1	-1	+1

Tabulka 4.1: Dekódování kvadraturních signálů

Úhlová rychlost motoru je vypočítávána tak, že se měří počet pulzů za konstantní čas, tj periodu programu. Bylo však zjištěno, že perioda programu v mikrokontroléru odvozená od periody v AIC má jitter s odchylkami až $\pm 4 \mu\text{s}$, což přinášelo do měřené rychlosti šum.

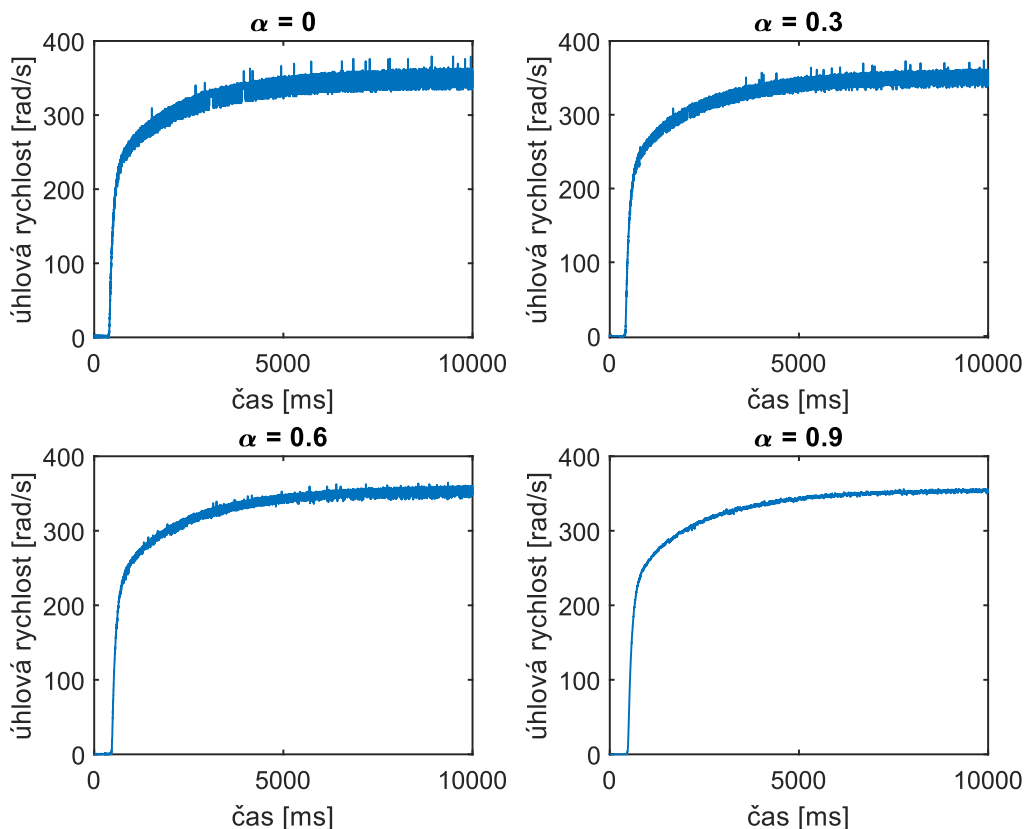
Tento problém byl vyřešen pomocí korekce, kdy v mikrokontroléru běží nezávislý čítač taktovaný frekvencí 16 MHz odvozenou od krystalu. Korekce probíhá tak, že při každém vyčítání hodnoty z čítače IRC se zároveň vyčte hodnota tohoto korekčního čítače, ze které se vypočítá přesný čas. Tento získaný čas, který v sobě zahrnuje periodu i jitter se pak použije pro výpočet rychlosti.

I přes toto vylepšení však měřená rychlost obsahovala poměrně vysoké množství šumu, způsobeného krátkou vzorkovací periodou a také nepřesností senzoru. Proto je výsledná rychlost dále filtrována dolní propustí prvního řádu. Vztah pro diskrétní filtr je

$$y_i = \alpha y_{i-1} + (1 - \alpha)x_i \quad (4.1)$$

kde x je vstup filtru, y výstup filtru a α je parametr filtru, který je volen v intervalu $0 < \alpha < 1$. Čím je parametr α vyšší, tím je vyhlazení kvalitnější, ovšem za cenu pomalejší odezvy filtrovaného signálu na změny vstupu. Je tedy třeba nalézt takový parametr α , pro který bude vyhlazení dostatečně kvalitní a zároveň odezva filtrované rychlosti dostatečně rychlá.

V grafech na obrázku 4.7 je porovnána naměřená rychlost bez filtrace ($\alpha = 0$) a se třemi různými hodnotami parametru filtru α . Porovnání je provedeno při stejných podmínkách, kdy kyvadlo je pokaždé zafixováno a motor se rozbíhá z nulových otáček při konstantní hodnotě střídavy pulzně šířkové modulace 50 %. Díky zachování stejných podmínek lze očekávat, že skutečný průběh otáček motoru bude ve všech případech stejný.



Obrázek 4.10: Grafy naměřených rychlostí pro různé stupně filtrace

U diskrétní dolní propusti prvního řádu může být pro dané α a periodu filtrace T vypočítána ekvivalentní časová konstanta τ odpovídající časové konstantě spojitého filtru

$$\tau = T \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right). \quad (4.2)$$

Pro použitou periodu filtrace $T = 1 \text{ ms}$ a hodnoty α ukázané v grafech na obrázku 4.7 jsou vypočítané hodnoty τ ukázány v tabulce 4.2.

α [-]	τ [ms]
0.3	0.43
0.6	1.5
0.9	9

Tabulka 4.2: Vypočítané ekvivalentní časové konstanty

Jako nejlepší kompromis mezi rychlostí odezvy a kvalitou filtrace se ukázala hodnota $\alpha = 0.6$, tedy ekvivalent analogové dolní propusti prvního řádu o časové konstantě $\tau = 1.5 \text{ ms}$. Tato hodnota α je ve finální verzi programu použita.

4.3.3 Komutace motoru

Komutace motoru pracuje tak, jak bylo popsáno v kapitole 4.2.1. Realizace v mikrokontroléru je taková, že výstupy Hallových sond motoru jsou připojeny na piny mikrokontroléru konfigurované jako zdroje vnějšího přerušení. Při jakékoliv změně úrovně na jakékoliv sondě je vygenerováno přerušení a podle stavů ostatních sond se určí, jaká je aktuální poloha rotoru. Podle toho a podle požadovaného směru otáčení se v přerušení nastaví příslušné výstupy L a H vedoucí do budičů výstupních MOSFET tranzistorů. Výstupy H jsou zároveň připojeny na čítač/časovač TIM3, který na nich generuje v aktivním stavu PWM. Tím se reguluje vstupní napětí do motoru.

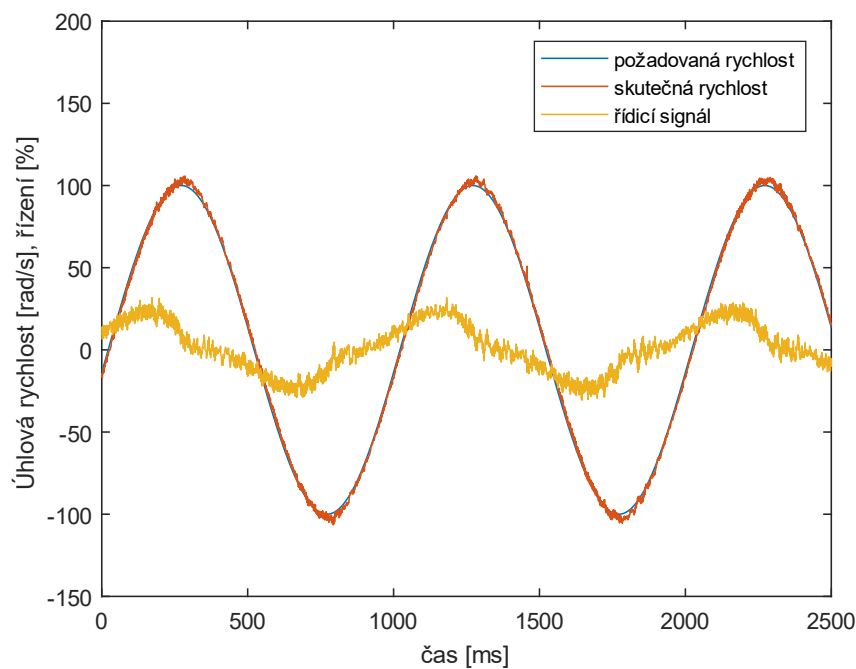
4.3.4 PI regulace úhlové rychlosti motoru

Důležitou součástí programu mikrokontroléru je PI regulátor rychlosti motoru. Jelikož mikrokontrolér neměří proud motorem, nemůže být použita kaskádní regulace otáček s vnitřní regulací proudu. Výstupem regulátoru je tedy přímo hodnota střídavé PWM pulzů do motoru, což odpovídá vstupnímu napětí.

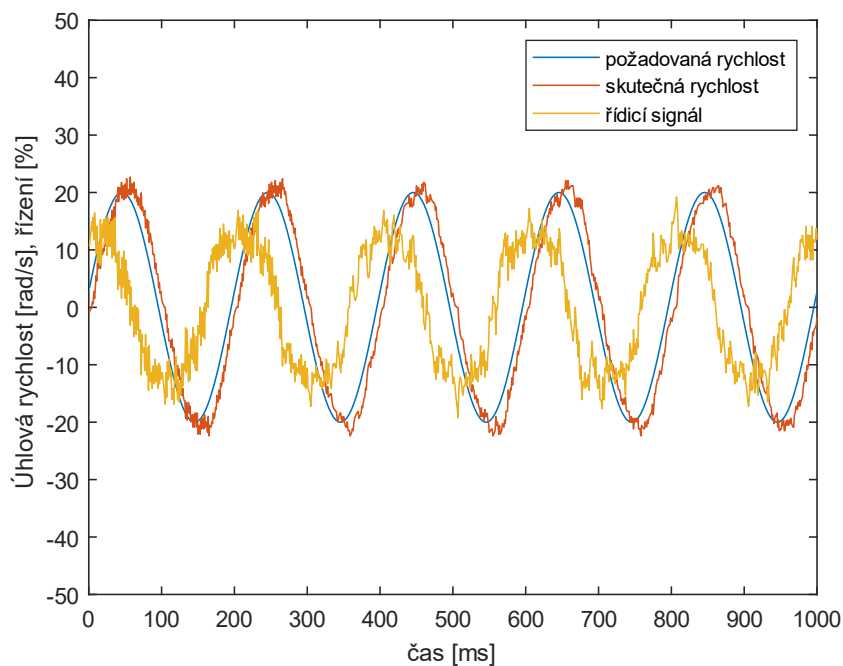
Implementaci regulátoru lze vidět ve zdrojovém kódu v příloze A. Mimo regulaci je v programu také řešen anti-windup integrační složky. Regulátor pracuje s floatovými

proměnnými, které však neodpovídají úhlové rychlosti v rad/s, přepočten je proveden až v AIC. Výstup regulátoru je převeden na celé číslo rozsahu -255 až 255.

Funkčnost regulace otáček motoru se setrvačником je ukázána v grafech na obrázcích 4.11 a 4.12. V prvním případě, tedy požadované rychlosti měnící se s frekvencí 1 Hz je regulace rychlosti téměř dokonalá. Ve druhém případě při frekvenci 5 Hz je již viditelné jisté zpoždění, které je však oproti periodě signálu stále velmi malé.



Obrázek 4.11: Graf sledování sinusové rychlosti $f = 1$ Hz



Obrázek 4.12: Graf sledování sinusové rychlosti $f = 5$ Hz

4.4 Identifikace modelu

V této části bude provedena identifikace parametrů k_1 a k_2 definovaných vztahy (3.3). K identifikaci bude použita rovnice kyvadla (3.4), která je zde pro snazší orientaci znovu uvedena.

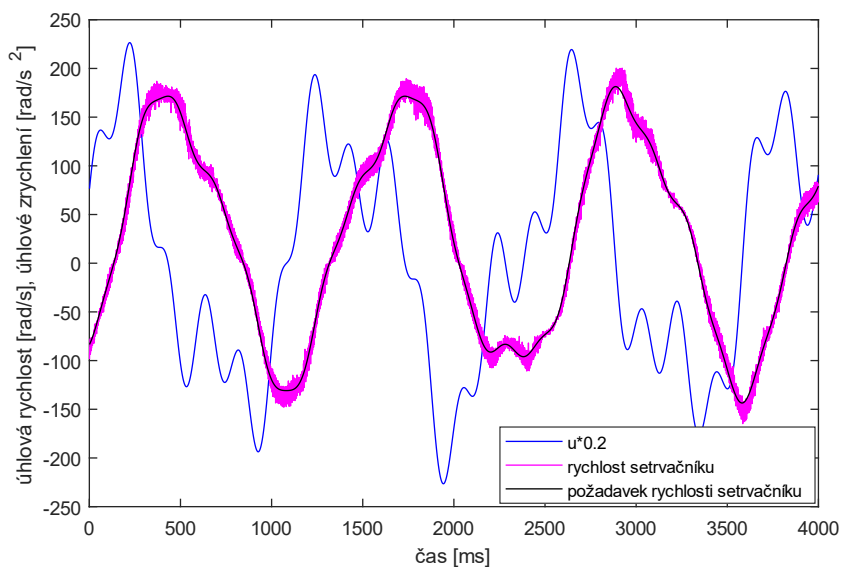
$$k_1 \ddot{q}_1 + k_2 \sin(q_1) = u. \quad (3.4)$$

Pro identifikaci parametrů k_1 a k_2 je třeba posílat do systému definované zrychlení u a zaznamenávat vstup, úhel q_1 a úhlové zrychlení \ddot{q}_1 každou periodu systému (1 ms) po dostatečně dlouhý čas.

Jako vstup systému u je použito několik superponovaných sinusových signálů, které jsou uvedeny v tabulce 4.3. V grafu na obrázku 4.10 je vidět, že regulátor rychlosti setrvačnicku dokáže sledovat požadovanou rychlost získanou integrací požadovaného zrychlení u .

index	frekvence [Hz]	amplituda [rad/s ²]
1	0.8	700
2	2.0	300
3	5.0	200

Tabulka 4.3: Volba signálů pro identifikaci



Obrázek 4.13: Zrychlení a rychlost setrvačnicku při identifikaci

Identifikace byla prováděna po dobu přibližně jedné minuty a bylo tak získáno zhruba 60000 hodnot u a q_1 , které byly uloženy jako sloupcové vektory \vec{u} a \vec{q}_1 . Jelikož inkrementální senzor měřil pouze úhel q_1 , bylo třeba hodnoty \ddot{q}_1 dopočítat. Tuto operaci nebylo nutné provádět v reálném čase, proto bylo pro výpočet možné s výhodou použít nekauzální filtr.

Nejprve byl proveden pokus s výpočtem úhlového zrychlení \ddot{q}_1 pomocí devítibodové centrální diference. Tato metoda však zesílila šum obsažený ve vektoru \vec{q}_1 natolik, že výsledek nebyl použitelný. Z tohoto důvodu bylo nutné použít vyhlazovací filtr implementovaný podle článku *Noise-robust smoothing filter* [1], který již přinesl použitelný výsledek. Použitá délka filtru byla $N = 801$.

Dále byla z vektorů $\vec{\ddot{q}}_1$ a \vec{q}_1 sestavena matice

$$G = [\vec{\ddot{q}}_1, \sin(\vec{q}_1)] \quad (4.3)$$

a z neznámých koeficientů k_1 a k_2 vektor

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4)$$

Opakovaným dosazením získaných q_1 a \ddot{q}_1 do rovnice (3.4) vznikla soustava zhruba 60000 rovnic o dvou neznámých, kterou bylo možno zapsat v maticovém tvaru jako

$$G\vec{k} = \vec{u}. \quad (4.5)$$

Tato soustava rovnic je přeurčená a nemá přesné řešení. Bylo tedy třeba nalézt řešení s co nejmenší sumou kvadratických odchylek. Tato metoda se nazývá metodou nejmenších čtverců a v programu Matlab ji lze vypočítat stejným příkazem, jako řešení soustavy rovnic s regulární maticí, tedy pro rovnici (4.4) příkazem $k = G \setminus u$. Tím se získaly koeficienty

$$k_1 \doteq -99.7, \quad (4.6a)$$

$$k_2 \doteq 6080, \quad (4.6b)$$

jejichž dosazením do vztahů (3.6) se získaly matice systému linearizovaného v horní poloze

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 63.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0108 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (4.7)$$

Pro tento systém vyšly vlastní čísla matice dynamiky

$$\lambda_1 = 7.8092 \quad (4.8a)$$

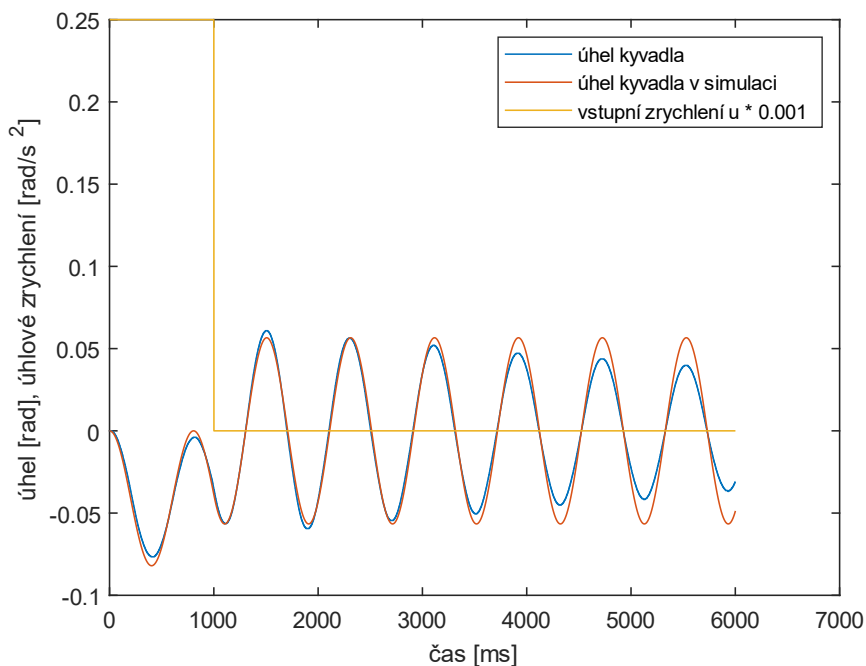
$$\lambda_2 = -7.8092 \quad (4.8b)$$

$$\lambda_3 = 0 \quad (4.8c)$$

Z nichž je jedno opět nestabilní a jedno na mezi stability.

4.4.1 Ověření správnosti identifikace

Nyní je možné ověřit správnost provedené identifikace konstant k_1 a k_2 . K tomu účelu lze využít již dříve sestaveného modelu v programu Simulink z kapitoly 3.3. Do tohoto modelu se dosadí parametry (4.5) získané identifikací a poté se otestuje, zda systém v simulaci i skutečný systém reagují na zvolený vstup stejně. Za vstup byl zvolen obdélníkový pulz o délce 1 s a velikosti 250 rad/s^2 .



Obrázek 4.14: Zrychlení a rychlost setrvačnicku při identifikaci

Z grafu je vidět, že odezva matematického modelu i skutečného systému jsou zpočátku velmi podobné. Po skončení vstupního pulzu se kyvadlo modelované v počítači kýve s neměnicí se amplitudou, zatímco pohyb reálného kyvadla je tlumen. To je zcela v souladu s očekáváním, jelikož v matematickém modelu bylo tření zanedbáno. Pro stabilizaci kyvadla je ale především nutné, aby se reálný a matematický model shodovaly v počáteční části křivky, což je pro provedenou identifikaci s dostatečnou přesností splněno.

5 Stabilizace a vyhoupaní skutečného kyvadla

Systém reálného kyvadla je již funkční včetně regulace otáček setrvačnicku a identifikace je ověřena. Lze již tedy na něj aplikovat navržené řízení stavovou zpětnou vazbou. Identifikovaný model má podobné parametry jako model pro simulaci z kapitoly 3.3. Jelikož pro stabilizaci matematického modelu fungovala volba parametrů Q a R

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = [1], \quad (5.1)$$

lze očekávat, že tato volba bude funkční i pro reálný model. Vektor stavové zpětné vazby v tomto případě vyšel

$$F = [13700 \quad 1760 \quad 1]. \quad (5.2)$$

A vlastní čísla matice dynamiky s uzavřenou zpětnou vazbou

$$\lambda_1 = -7.8142, \quad (5.3a)$$

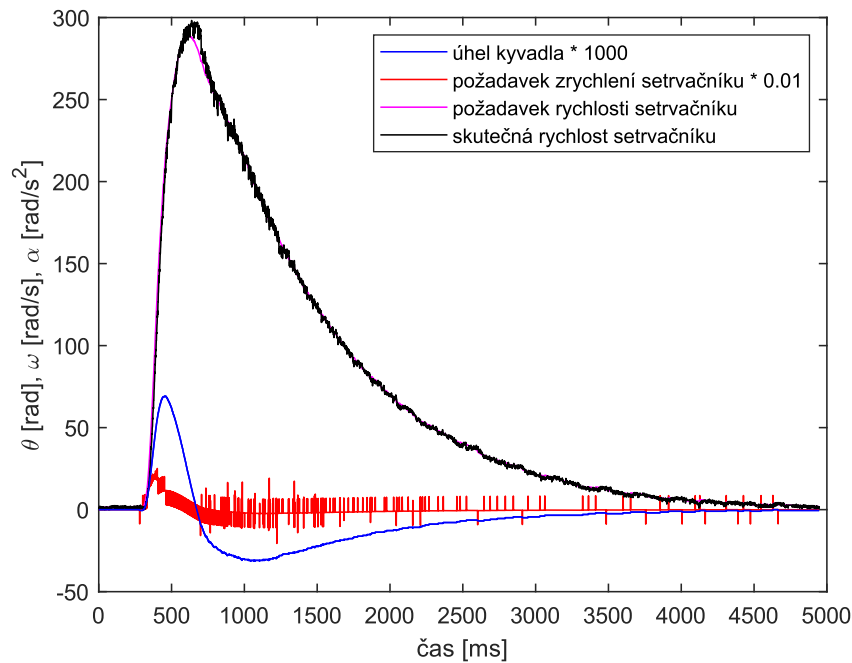
$$\lambda_2 = -7.8041, \quad (5.3b)$$

$$\lambda_3 = -1. \quad (5.3c)$$

Lze si povšimnout, že první dvě vlastní čísla jsou téměř shodná a přibližně odpovídají stabilnímu vlastnímu číslu matice dynamiky systému bez zpětné vazby (4.8b).

Stabilizace pro tuto volbu parametrů funguje dobře. To znamená, že kyvadlo je schopné se udržet nahoře a po odeznění počátečního přechodového děje klesnou otáčky setrvačnicku na nulu. Na obrázku 5.1 je vidět reakce systému stabilizovaného v horní poloze touto stavovou

zpětnou vazbou na „šťouchnutí“ do kyvadla. Okamžik vychýlení je v čase zhruba 300 ms a otáčky setrvačnicku se dostanou zpět do nuly zhruba po pěti sekundách.



Obrázek 5.1: Odezva stabilizace 1

Následně byly otestovány „agresivnější“ parametry

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = [0.1], \quad (5.4)$$

pro které vyšel vektor stavové zpětné vazby

$$F = [27700 \quad 3550 \quad 10]. \quad (5.5)$$

První dvě vlastní čísla vyšla v tomto případě opět velmi podobná a třetí vlastní číslo se zdesetinásobilo.

$$\lambda_1 = -7.8090 + 0.0197i \quad (5.6a)$$

$$\lambda_2 = -7.8090 - 0.0197i \quad (5.6b)$$

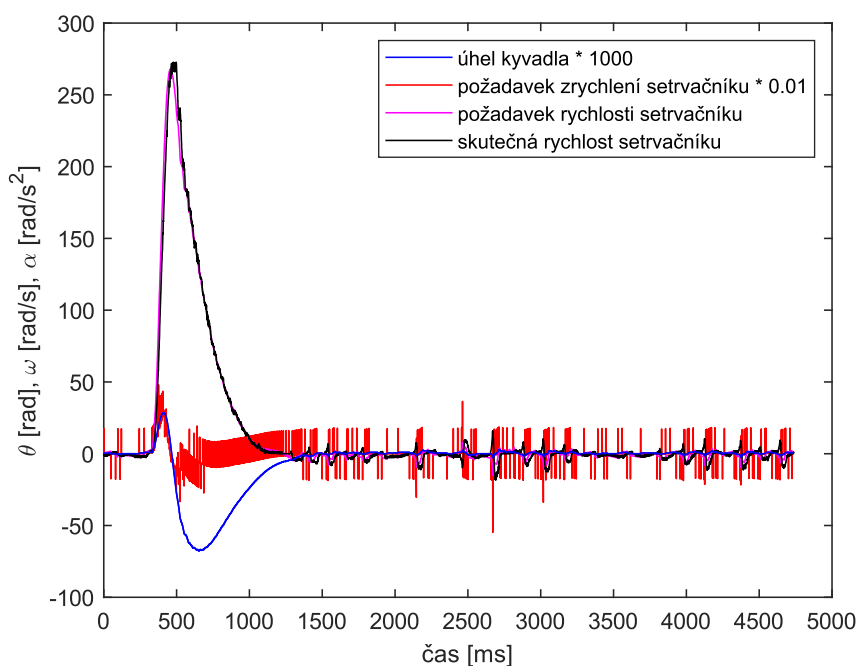
$$\lambda_3 = -10 \quad (5.6c)$$

Reakce na „šťouchnutí“ podobné intenzity a stejného směru jako v prvním případě je nyní jiná (obrázek 5.2). Kyvadlo se „snaží“ působit proti vnější síle intenzivněji, v důsledku čehož

po odeznění vnějšího působení překmitne na druhou stranu mnohem více než v prvním případě. Otáčky setrvačnicku také klesnou k nule mnohem rychleji.

Při tomto nastavení Q a R je také mnohem více znatelné cukání setrvačnicku v ustáleném stavu. Do jisté míry lze tento problém řešit tím, že v horní poloze nejsou požadovány nulové otáčky, ale určitá malá konstantní hodnota. Tím se eliminuje problém s nepřesným měřením otáček okolo nuly a také vliv suchého tření motoru, které způsobuje, že motor pro roztočení z nulových otáček potřebuje vyšší proud.

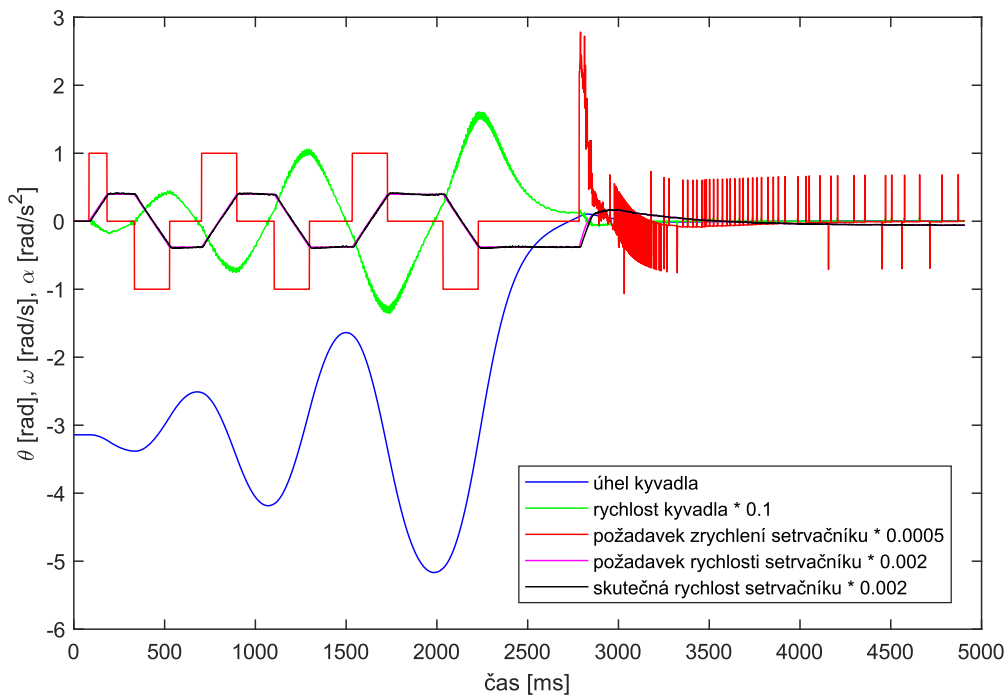
Z obou grafů lze také vyčíst, že regulace otáček motoru funguje správně. Dochází pouze k drobnému zpoždění skutečných otáček za požadovanými těsně za jejich maximem (na obrázku 5.2 v čase zhruba 500 ms).



Obrázek 5.2: Odezva stabilizace 2

Vyhoupání kyvadla do horní polohy bylo provedeno podobným způsobem, jako v článku *Swinging up a pendulum by energy control* [14], kde je popsáno vyhoupání pro kyvadlo s vozíkem metodou pumpování energie. V tomto případě je však energie do kyvadla pumpována skrze zrychlení setrvačnicku. Pumpování energie (obrázek 5.3) je realizováno tak, že vždy když úhlová rychlost kyvadla prochází nulou, je vytvořen pulz požadovaného zrychlení motoru. Tyto pulzy pokaždé mění polaritu. Trvání prvního pulzu je poloviční z důvodu, aby střední hodnota otáček setrvačnicku zůstala nulová. Nastavení velikosti, délky

a načasování pulzů proběhlo zatím pouze manuálně, jedná se tedy o řízení v otevřené smyčce.



Obrázek 5.3: Časový průběh veličin kyvadla při vyhoupaní

Klíčovým pro úspěšné vyhoupaní je, aby stav kyvadla v okamžiku zapnutí zpětnovazební stabilizace byl co nejbližší rovnovážnému stavu. Je tedy nejen nutno dosáhnout úhlu horní rovnovážné polohy, ale i co nejnižší rychlosti v tomto úhlu. Na obrázku 5.3 je okamžik zapnutí stabilizace vidět v čase zhruba 2800 ms, kdy dojde ke skokovému nárůstu požadavku zrychlení setrvačnicku. A konečně celá sestava při stabilizaci je vidět na obrázku 5.4.



Obrázek 5.4: Kyvadlo stabilizované v horní poloze

6 Závěr

V práci byl nejprve odvozen matematický model jednoduchého a následně sférického kyvadla. Bylo ověřeno, že model sférického kyvadla linearizovaného v horní poloze je ekvivalentní dvěma nezávislým modelům rovinného kyvada. Z toho vyplynul poznatek, že k inerciální stabilizaci sférického inverzního kyvadla lze použít pro každý ze dvou setrvačníků jeden nezávislý regulátor rovinného kyvadla. Dále byl tedy proveden návrh stabilizace pro rovinné kyvadlo. Následně se práce zabývala popisem konstrukce modelu inerciálně stabilizovaného rovinného kyvadla, použitou elektronikou a programovým řešením. Kyvadlo bylo poté identifikováno a byly na něm ověřeny navržené metody stabilizace. Nakonec bylo vyzkoušeno a popsáno i vyhoupání kyvadla do horní polohy.

Pro reálný model kyvadla byl kompletně navržen hardware a software. Řízení je rozděleno na dvě části: na desce motoru připevněné ke kyvadlu běží PI regulátor otáček motoru a v průmyslovém počítači AIC mimo kyvadlo je počítána stavová zpětná vazba. Obě části jsou propojeny komunikační linkou RS-485 vedoucí do pohyblivého kyvadla přes kluzné kontakty. Kyvadlo se díky tomuto řešení může otáčet o libovolný úhel.

Zhotovený model kyvadla je plně funkční. Lze na něm demonstrovat stabilizaci kyvadla v horní i dolní poloze a vlivy různých nastavení parametrů LQR (případně volby přiřazené Jordanovy formy) na chování stabilizace. Dále je možné demonstrovat vyhoupání kyvadla do horní polohy, kde se následně kyvadlo přepne do stabilizace. Je možné vymyslet i další úlohy, například otáčení kyvadla dokola konstantní úhlovou rychlostí. Dále se pro model kyvadla nabízí možnost ověření optimálního algoritmu vyhoupání, kdy by otáčky setrvačnicku sledovaly předem vypočítanou optimální trajektorii pro minimalizaci času. Na modelu kyvadla by také mohla být otestována nelineární stabilizace.

Model kyvadla poskytuje příležitosti pro případná technická vylepšení. Pro menší šum vypočtených otáček motoru by bylo vhodné použít IRC s vyšším rozlišením. Dále by bylo vhodné měřit proud motoru mikrokontrolérem, díky čemuž by ho bylo možné regulovat a motor by se řídil proudem, nikoliv napětím. Otáčky motoru by pak bylo možné odhadovat o něco přesněji pomocí stavového rekonstruktoru motoru. Je však nutno poznamenat, že i bez měření proudu funguje regulace otáček motoru pro zhotovený model naprosto dostatečně.

Seznam literatury a informačních zdrojů

- [1] HOLOBORODKO, Pavel, *Noise-robust smoothing filter* [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <http://www.holoborodko.com/pavel/numerical-methods/noise-robust-smoothing-filter/>
- [2] ÅSTRÖM, Karl J., BLOCK, Daniel J., SPONG, Mark W., *The Reaction Wheel Pendulum*. San Rafael, Calif: Morgan & Claypool Publishers, 2007.
- [3] *Spacecraft gyroscopes and Reaction wheels. You can never have enough*, [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://www.universetoday.com/143152/spacecraft-gyroscopes-and-reaction-wheels-you-can-never-have-enough/>
- [4] ST, *STM32F411xC/E advanced Arm®-based 32-bit MCUs*, reference manual [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://www.st.com/en/microcontrollers-microprocessors/stm32f411.html#resource>
- [5] TORRES, Daniel, NISARGA, Bhargavi, *Sensored 3-Phase BLDC Motor Control Using MSP430* [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: http://www.ti.com/lit/an/slaa503/slaa503.pdf?ts=1591644047936&ref_url=https://www.google.com/
- [6] SOLTERO, Manny, ZHANG, Jing, COCKRIL, Chris, *RS-422 and RS-485 Standards Overview and System Configurations*, application report [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://www.ti.com/lit/an/slla070d/slla070d.pdf>
- [7] Přednášky k předmětu Řídící a informační sběrnice (KAE/RIS), 2019 [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://courseware.zcu.cz/portal/studium/courseware/kae/ris>
- [8] ŠVEJDA, Martin, *AIC (Advanced Industrial Computer) – Gen1 Technical Overview* [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: http://home.zcu.cz/~msvejda/materials/AIC_Technical_Overview_Gen1_r3nr.pdf
- [9] FOUST, Jeff, *Kepler Space Telescope Reaction Wheel Remains a Concern* [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://spacenews.com/34692kepler-space-telescope-reaction-wheel-remains-a-concern/>
- [10] RYAN, Dalton, *INVERTED PENDULUM* [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z: <https://daltonryandesigns.com/#/inverted-pendulum/>
- [11] OLFATI-SABER, Reza, *Nonlinear control of underactuated mechanical systems with applications to robotics*. PHD thesis, Massachusetts institute of technology, department of electrical engineering and computer science, February 2001.

- [12] OLIVARES, Manuel, ALBERTO, Pedros, Linear control of the flywheel inverted pendulum. *ISA Transactions*, Volume 53, Issue 5, 2014, pp 1396-1403.
- [13] MAXON MOTOR, *EC 45 flat Ø42.8 mm, brushless, 50 Watt, with Hall sensors*, datasheet [online], [cit. 1.6.2020]. Dostupné z:
https://www.maxongroup.us/maxon/view/product/motor/ecmotor/ecflat/ecflat45/251601?etcc_cu=onsite&etcc_med=Header%20Suche&etcc_cmp=mit%20Ergebnis&etcc_ctv=Layer&query=251601
- [14] ÅSTRÖM, Karl J., FURUTA, Katsuhisa, *Swinging up a pendulum by energy control*. *Automatica*, Volume 36, 2000, pp 287-295.

Přílohy

Příloha A – Úryvek zdrojového kódu – hlavní funkce programu

```

int main(void)
{
    SystemCoreClockUpdate();
    SysTick_Config(GetBusClock(busClockAHB) / 1000); //systick 1 ms setup

    Usart2Init(115200);

    APB1_clock = GetBusClock(busClockAPB1);

    config_pins();
    config_USART1(); // communication over RS422
    config_TIM2(); // timer for motor IRC
    config_TIM3(); // timer for PWM
    config_TIM4(); // timer for speed measurement
    config_ext_int(); //interrupts from hall sensors
    config_DMA2_stream5();
    config_DMA2_stream7();

    NVIC_EnableIRQ(EXTI9_5_IRQn);

    //initialize PWM
    TIM3->CCR1 = PWMval;
    TIM3->CCR2 = PWMval;
    TIM3->CCR3 = PWMval;

    while(1)
    {
        if(DMA2->HISR & DMA_HISR_TCIF5) //-----received anything?-----
        {
            USART1->CR3 &= ~USART_CR3_DMAR;
            DMA2_Stream5->CR &= ~DMA_SxCR_EN; //turn off dma5 and clear flags
            DMA2->HIFCR = DMA_HIFCR_CTCIF5 | DMA_HIFCR_CHTIF5 | DMA_HIFCR_CTEIF5 |
DMA_HIFCR_CDMEIF5 | DMA_HIFCR_CFEIF5;

            cycle_count++;

            for (uint32_t i = 0; i < 100; i++); // short delay loop

            //-----VERIFY CRC-----
            if(dm_crc16_ccitt((uint8_t *)receive_array, 2) == (uint16_t)
receive_array[1]) //is CRC matching?
            {
                if(((uint16_t) receive_array[0]) == 0x7000) //shutdown on
                    shutdown = 1;
                else if(((uint16_t) receive_array[0]) == 0x7001) //shutdown off
                    shutdown = 0;
                else
                    setpoint = receive_array[0];
            }
            else
                errors++;

            /*
            if(setpoint > 200)
                setpoint = 200;

```



```

else if(setpoint < -200)
    setpoint= -200;
*/

//-----READ VELOCITY FROM TIM2_CNT-----
time_elapsed = TIM4->CNT;
TIM4->CNT = 0;

vel_uncorrected = TIM2->CNT*(-10);
vel_corrected = (float)vel_uncorrected * (16000.0/(float)time_elapsed);
TIM2->CNT = 0;

//-----VELOCITY FILTERING-----
vel_filtered = alpha*vel_filtered_last + (1.0 - alpha)*vel_corrected;

//-----SPEED PI REGULATION-----
//error = (setpoint - vel_corrected);
error = ((float)setpoint - vel_filtered);

if(i_enable)
    i_term+= (k_i * error);

if(i_term > 255)
    i_term = 255;
else if(i_term < -255)
    i_term= -255;

output = (int16_t) (k_p*error + i_term);

// limit output value
if(output> 255)
{
    output = 255;
    i_enable = 0;
}
else if(output < -255)
{
    output = -255;
    i_enable = 0;
}
else
{
    i_enable = 1;
}

// limit output difference
if((output - output_last) >= 20)
    output = output_last + 20;
else if((output - output_last) <= -20)
    output = output_last - 20;

// remember speed
vel_filtered_last = vel_filtered;
output_last = output;

if(!shutdown)
    update_PWM(output);

```

```

    //update_PWM(127);
else
    update_PWM(0);

//-----CALCULATE crc16-----
transmit_array[0] = (int)vel_filtered;
transmit_array[1] = output;
transmit_array[2] = dm_crc16_ccitt((uint8_t*) transmit_array, 4);

//-----SEND BACK-----

GPIOWrite(GPIOA, 11, 1); // drive enable
DMA2_Stream7->CR &= ~DMA_SxCR_EN;
DMA2->HIFCR = DMA_HIFCR_CTCIF7 | DMA_HIFCR_CHTIF7 | DMA_HIFCR_CTEIF7 |
DMA_HIFCR_CDMEIF7 | DMA_HIFCR_CFEIF7;
USART1->CR3 |= USART_CR3_DMAT;

DMA2_Stream7->CR |= DMA_SxCR_EN;

// wait until send complete
if(USART1->SR & USART_SR_RXNE)
{
    x = USART1->DR;
}
while(!(USART1->SR & USART_SR_TC));

USART1->CR3 &= ~USART_CR3_DMAT;
DMA2_Stream7->CR &= ~DMA_SxCR_EN;

// get ready for next receive
if(USART1->SR & USART_SR_RXNE)
{
    x = USART1->DR;
}

DMA2->HIFCR = DMA_HIFCR_CTCIF5 | DMA_HIFCR_CHTIF5 | DMA_HIFCR_CTEIF5 |
DMA_HIFCR_CDMEIF5 | DMA_HIFCR_CFEIF5;

USART1->CR3 |= USART_CR3_DMAT;
DMA2_Stream5->CR |= DMA_SxCR_EN; //turn on DMA stream for RX
GPIOWrite(GPIOA, 11, 0);

if (cycle_count >= 99) // debug print once every 100 ms
{
    cycle_count = 0;
    //output++;
    //printf ("%X\t%X\r\n", transmit_array[0], (uint16_t)
transmit_array[1]);
}
}
}
}
}

```

Příloha B – Schéma řízení v systému Rexygen

