

# OPONENTSKÝ POSUDEK BP

## *Multi-Parametric Nonlinear Boundary Value Problems*

Martin Kudláč

Martin Kudláč vypracoval bakalářskou práci pod vedením doc. Ing. Gabriely Holubové, Ph.D., na Katedře matematiky Fakulty aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni ve studijním oboru Matematika a její aplikace.

V bakalářské práci se student věnuje dvouparametrickým okrajovým úlohám pro ODR druhého řádu. Zaměřuje se na lineární a nelineární úlohy Steklovova typu,

$$\begin{cases} -u'' = \lambda g(u), & x \in [0, 1], \\ u(0) = 0, \\ u'(1) = \mu u(1), \end{cases}$$

kde parametr  $\lambda$  je přítomen v dané diferenciální rovnici a parametr  $\mu$  v jedné z okrajových podmínek. Pozornost je v případě lineární úlohy s  $g(u) = u$  věnována nejdříve odvození nutných podmínek pro existenci netriviálního řešení a následně plné charakterizaci dvouparametrického spektra. V případě nelineární úlohy autor za předem jasně definovaných předpokladů na funkci  $g(u)$  odvozuje nejdříve vlastnosti, které musí netriviální řešení nutně splňovat. Na tomto základě pak odvozuje nutné podmínky pro jeho existenci (a to pomocí převodu dané okrajové úlohy na operátorovou rovnici pomocí Greenovy funkce). V tomto duchu je také práce členěna do jednotlivých kapitol.

Na úvod je třeba říci, že práce je na výborné úrovni a zcela jistě splňuje požadavky pro bakalářskou práci. Text je napsán v angličtině, téměř bez věcných i formálních chyb. Martin Kudláč prokázal, že se dokáže orientovat v problematice, která jde i nad rámec bakalářského studia, je velice technicky zdatný a dokáže jemně používat pokročilé matematické postupy a nástroje. Podle mého názoru se mu také otevírá široké pole otázek a otevřených problémů, ve kterých může směle pokračovat se přibývajícimi znalostmi a dovednostmi pokročilejších partií matematiky.

Chci zejména ocenit následující autorovy schopnosti. Ukázal, že má velký smysl pro detail, dokáže uvážit studovaný problém do nejmenších podrobností. Tato schopnost spolu s jeho skvělou technickou vybaveností mu dává možnost zpracovat obtížná témata do velké hloubky. Dále si vážím zajímavých myšlenek a neotřelých nápadů, které vedou k důkazům požadovaných tvrzení. A mohu říci, že i díky tomuto se mi práce velice dobře četla.

Také oceňuji, že i přesto, že se jedná teprve o práci bakalářskou, pustil se autor do rozmanitého, ale obtížného světa nelineárních úloh s obecnou nelineární funkcí  $g(u)$ , což mu znemožňuje explicitně úlohu vyřešit. Martin Kudláč se díky tomu seznámil i s nástroji abstraktní existenční teorie, což můžeme ilustrovat jeho detailní prací s Greenovou funkcí, která přísluší studovanému problému.

Mám samozřejmě i některé připomínky. Tou pro mě nejpodstatnější je z mého pohledu jistá absence šířky a nadhledu. To se zejména ukazuje v předmluvě, kde je celý problém představen. Bohužel se toto představení redukuje na technický popis dané úlohy a na stanovení otázek a cílů. Zcela chybí motivace, proč je takováto speciální úloha důležitá a zajímavá, příklady aplikací a oblastí, kde se získané výsledky dají využít, či popis historie, odkud daná úloha vzešla. Dále také viz bod 5. v seznamu níže.

Druhou záležitostí, kterou ještě chci zmínit, je nevyužití nabízejících se ilustrací. Na spoustě míst autor přehlíží zcela evidentní možnost daná tvrzení ilustrovat obrázkem a pomoci tak čtenáři v ucelení celkového pohledu (viz bod 6. v seznamu níže).

Nicméně obojí může být dáno tím, že se jedná o práci bakalářskou, ale také zejména tím, že každý můžeme i na matematiku mít svůj jiný osobní pohled.

Připojuji některé konkrétní vybrané poznámky a dotazy. Ve většině se nejedná o upozornění na chyby, ale spíše na zajímavá místa, která by mohla být více okomentována. Během obhajoby prosím o diskusi. Postačí, pokud autor vzhledem k času vybere jen některé.

1. Můžete popsat, odkud vzešla daná okrajová úloha Steklovova typu a ve kterých disciplínách se využívá?
2. V závěru předmluvy se hovoří o „několika“ možných rozšířeních s jediným konkrétním příkladem – studiem úlohy se skákající nelinearitou, což lze využít např. v teorii visutých mostů. Mám dva dotazy: Jaký reálný

význam u visutého mostu by mělo uvážení studovaných speciálních okrajových podmínek Steklovova typu?  
Jaká jsou ona další možná rozšíření?

3. Odkud víme (např. v důkazu Thm. 1.1), že netriviální řešení splňuje  $u'(0) \neq 0$ ?
4. V důkazu Lem. 1.3 v úvodní nerovnosti se předpokládá znalost

$$\sup_{x \in [0,1]} (|u(x)|^2) = \left( \sup_{x \in [0,1]} |u(x)| \right)^2.$$

Proč toto platí?

5. Celá úvodní pasáž Kap. 1 (před Kap. 1.1) se ve světle Thm. 1.6 zdá poněkud nadbytečná. Nicméně použité myšlenky se mi jeví zajímavé a myslím, že by šly použít pro odvození nutných podmínek i pro nelineární úlohu (kterou již nelze explicitně vyřešit, a tudíž nelze snadno odvodit obdobu Thm. 1.6). Zamyslel jste se, zda by vaše postupy z této úvodní části šly použít také pro nelineární úlohu s nelinearitou  $g(u)$  splňující jisté předpoklady?
6. V důkazu Prop. 1.11 se píše, že nerovnost (1.46) již dává požadované tvrzení. Nerovnost (1.46) však porovnává hodnoty  $f_1(x)$  a  $f_2(x)$  (tj. v obecném, ale stejném  $x \in [0, 1]$ ), kdežto pro použití monotonie funkce  $g$  potřebujete porovnat  $g(x_1) = f_1(x_1)$  a  $g(x_2) = f_2(x_2)$  (tj. hodnoty funkcí  $f_1$  a  $f_2$  v různých  $x_1$  a  $x_2$ ). Jak tento argument tedy používáte?
7. V Not. 2.2 se tvrdí, že množina  $X^p$  je nejvýše spočetná. Proč tomu tak musí být?
8. Proč v Def. 2.23 (Greenova funkce) požadujeme vlastnost 2. (srovn. s důkazem stěžejního Lem. 2.25)?

### Závěr

Uzavírám, že bakalářská práce Martina Kudláče nepochybně splňuje požadavky kladené na bakalářské práce a rád ji doporučuji k obhajobě. Navrhuji komisi hodnotit ji stupněm

**v ý b o r n ě.**

V Plzni 7. června 2021

.....  
RNDr. Jonáš Volek, Ph.D.  
Katedra matematiky  
FAV ZČU v Plzni

## Posudek oponenta bakalářské práce

Autor/Autorka

Název práce

Studijní obor

Oponent práce

### Splnění cílů práce:

nadstandardně     velmi dobře     splněny     s výhradami     nebyly splněny

### Odborný přínos práce:

nové výsledky     netradiční postupy     zpracování výsledků z různých zdrojů     shrnutí výsledků z různých zdrojů     bez přínosu

### Matematická (odborná) úroveň:

vynikající     velmi dobrá     průměrná     podprůměrná     nevyhovující

### Věcné chyby:

téměř žádné     vzhledem k rozsahu přiměřený počet     méně podstatné, větší množství     podstatnější, větší množství     závažné

### Grafická, jazyková a formální úroveň:

vynikající     velmi dobrá     průměrná     podprůměrná     nevyhovující

### Slovní hodnocení a dotazy:

Práci doporučuji – ~~nedoporučuji~~ uznat jako kvalifikační (*nehodící se škrtněte*).

### Navrhuji hodnocení známkou:

### Datum, jméno a podpis:

7. 6. 2021

.....  
RNDr. Jonáš Volek, Ph.D.  
KMA FAV ZČU

