Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Diplomová práce

Nerovnosti ve středoškolské matematice

Plzeň 2021 Jitka Fürbacherová

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracovala samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů.

V Plzni dne 7. května 2021

Jitka Fürbacherová

Abstract

The thesis provides a comprehensive overview of the most famous mathematical inequalities and their application in the secondary education. The text includes an analysis of relevant curriculum documents, an overview of the most well-known types of inequalities with their proofs and concrete examples of mathematical problems, which students may encounter. There is also an overlap with college mathematics. Elementary types of inequalities are mentioned, such as the nonnegativity of the square of a real number, the sum of a number and its reciprocal, the triangle inequality, the Jensen inequality, Cauchy-Schwarz inequality and inequalities between averages. The thesis also presents a summary of inclusion of these topics in secondary education and a discussion of its adequacy.

Abstrakt

Práce poskytuje ucelený přehled nejznámějších matematických nerovností a jejich využití na střední škole. Text obsahuje rozbor příslušných kurikulárních dokumentů, přehled nejznámějších typů nerovností i s jejich důkazy a konkrétní příklady, se kterými se studenti středních škol mohou setkat. Součástí práce je také přesah do vysokoškolské matematiky. V textu jsou zmíněny jednoduché typy nerovností jako je nezápornost druhé mocniny reálného čísla a součet čísla a jeho převrácené hodnoty, trojúhelníková nerovnost, Jensenova a Cauchyova-Schwarzova nerovnost i nerovnosti mezi průměry. Součástí práce je také shrnutí současné situace a diskuze nad vhodností začlenění tohoto tématu do středoškolské matematiky.

Poděkování

Ráda bych poděkovala vedoucí práce doc. Ing. Gabriele Holubové, Ph.D. za cenné rady, věcné připomínky, odborný dohled nad mou prací a ochotu vždy pomoci s jakýmikoliv problémy.

Obsah

1 Úvod

Tato práce se zabývá vybranými nerovnostmi, se kterými se mohou setkat středoškolští studenti. Součástí je rovněž analýza současné situace. Proto bylo nejdříve potřeba nastudovat příslušné kurikulární dokumenty a následně se ponořit do učebnic matematiky a pátrat po konkrétních příkladech. Obdobným způsobem bylo pátráno v zadaní olympiád a korespondenčních seminářů. Jelikož se jedná o hraniční téma, obsahuje práce také přesah do vysokoškolské matematiky.

V textu bude nejdříve představen systém kurikulárních dokumentů, podle kterých se v současné době řídí vzdělávání v České republice. Popsán bude konkrétní výskyt tématu „Nerovnosti“ v těchto dokumentech a také vysvětlen rozdíl mezi nerovností a nerovnicí.

Následně budou uvedeny vybrané nerovnosti i s jejich důkazy. Nejdříve budou představeny jednoduché nerovnosti, které se často užívají při řešení složitějších problémů. Poté bude popsána trojúhelníková nerovnost, které bude pro její popularitu věnován větší prostor. Kromě středoškolského výkladu včetně ukázky konkrétních úloh, kde se s ní mohou setkat studenti středních odborných škol i gymnázií, bude prostor věnován také vysokoškolskému pohledu na toto téma. Dalšími nerovnostmi, které budou v této práci představeny, jsou Jensenova a Cauchyova-Schwarzova nerovnost. Ty se sice při běžných hodinách matematiky příliš nevyskytují, ale studenti je mohou využít při řešení úloh z různých matematických olympiád a korespondenčních seminářů. Také u Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti bude uveden přesah do vysokoškolské matematiky. Posledními typy nerovností, které budou v práci představeny jsou nerovnosti mezi průměry. Nejvíce pozornosti je věnováno nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem.

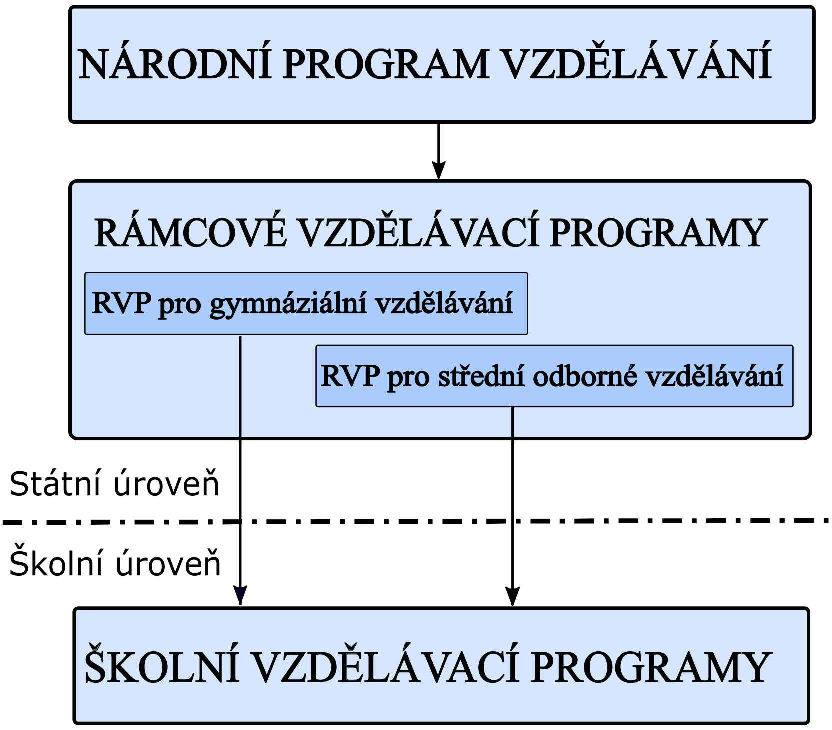
Na závěr je provedeno shrnutí aktuální situace z pohledu výskytu matematických nerovností na střední škole a nastíněn možný směr, kterým by se současný stav měl dle autorky dále rozvíjet.

2 Výskyt tématu ve středoškolské matematice

Obsah a forma výuky jsou v České republice řízeny prostřednictvím systému kurikulárních dokumentů a to v souladu se zákonem č. 561/2004 Sb., o předškolním, základním, středním, vyšším odborném a jiném vzdělávání, ve znění pozdějších předpisů (školský zákon).

2.1 Kurikulární dokumenty

Kurikulární dokumenty obsahují dvě úrovně - státní a školní. Na státní úrovni se nachází Národní program rozvoje vzdělávání v ČR (tzv. Bílá kniha) a rámcové vzdělávací programy (RVP). Školní úroveň obsahuje školní vzdělávací programy (ŠVP). Pro větší názornost návaznosti kurikulárních dokumentů je na obrázku 2.1 uvedeno zjednodušené schéma středoškolského stupně vzdělávání.



Obrázek 2.1: Kurikulární dokumenty

Zatímco Bílá kniha je jen jedna a obsahuje obecnou strategii v podobě myšlenkových východisek, rámcové vzdělávací programy jsou tvořeny pro každý obor samostatně. RVP vymezují závazné rámce vzdělávání.

Školní vzdělávací program se vztahuje vždy ke konkrétní škole. Ta si jej tvoří sama a následně podle nich uskutečňuje vzdělávání. Pokud se na dané škole vyskytuje více oborů či vzdělávacích směrů, je ŠVP vytvořeno samostatně pro každý z nich.

Všechny tyto dokumenty jsou ze zákona veřejné a měly by být přístupné pro pedagogickou i nepedagogickou společnost. Dokumenty ze státní úrovně jsou dostupné na Metodickém portálu *RVP.cz* a na stránkách Ministerstva školství, tělovýchovy a mládeže. O formě zveřejnění ŠVP si rozhoduje každá škola sama. Často lze dokumenty pohodlně najít na stránkách školy, někdy je ale nutné navštívit školu osobně a dokument si vyžádat.

2.2 Výskyt tématu v kurikulárních dokumentech

Jelikož se v rámcových a školních vzdělávacích programech zpravidla přímo nehovoří o nerovnostech, ale spíše o řešení nerovnic, je potřeba ujasnit si rozdíl mezi těmito pojmy.

Jedním ze základních rozdílů mezi nerovností a nerovnicí je to, že zatímco nerovnice se řeší, nerovnost se dokazuje.

Při řešení **nerovnice** je cílem určit množinu prvků, pro které je daná nerovnice splněna. Matematická úloha na nerovnice bývá zadána ve stylu: „Určete, pro která x platí, že $\frac{1}{x} < x$." Cílem je pak určit všechna x, pro která je zadána nerovnice pravdivá.

Na **nerovnost** lze pohlížet jako na výrokovou formu, kterou je třeba dokázat či vyvrátit. Úloha bývá zadána ve stylu: „Dokažte, že pro $\forall x > 1$ platí, že $\frac{1}{x} < x$." Cílem je prokázat či vyvrátit platnost tohoto tvrzení jako celku, tedy že zadaný vztah ($\frac{1}{x} < x$) platí/neplatí pro všechna $x > 1$.

2.3 Gymnázia

Výše zmíněné řešení nerovnic se v RVP G (rámcovém vzdělávacím programu pro gymnázia) vyskytuje v okruhu *ČÍSLO A PROMĚNNÁ*. Samotné téma nerovností si lze pak představit jako součást tématického okruhu *ARGUMENTACE A OVĚŘOVÁNÍ* a to zejména při řešení důkazových úloh. Výskyt příkladů vyžadujících řešení nerovnic a nerovností lze zajisté očekávat i během probírání okruhu *GEOMETRIE*.

2.4 Střední školy

Rámcové vzdělávací plány středních škol s maturitní zkouškou obsahují okruh *Funkce a její průběh. Řešení rovnic a nerovnic*. Téma nerovnic je zúženo na lineární a kvadratické. V okruhu *PLANIMETRIE* bývá pří realizaci výuky probírána *Trojúhelníková nerovnost*.

2.5 Učiliště

Učební obory zpravidla poskytují nejmenší počet hodin matematiky a od toho se samozřejmě také odvíjí požadovaný rozsah výuky. V nematuritním středoškolském vzdělávání bývá zpravidla vyžadováno řešení jen lineárních nerovnic a to z oboru reálných čísel. V okruhu *PLANIMETRIE* bývá během výuky zmíněna *Trojúhelníková nerovnost*.

2.6 Dodatek

Veškeré výše zmíněné vymezení je však velice obecné a konkrétní obsah výuky závisí především na učiteli či učitelích dané školy a jejich uvážení. Kromě základních hodin matematiky se žáci setkávají s nerovnostmi a jejich dokazováním také ve volitelných matematických seminářích a při řešení různých korespondenčních seminářů či olympiád. K nerovnostem rozebíraným v této práci budou uvedeny příklady, se kterými se středoškolák může setkat ať už v rámci hodiny matematiky, při řešení korespondenčního semináře nebo při účasti na matematických olympiádách.

3 Jednoduché nerovnosti

3.1 Druhá mocnina

Jednou z nejjednodušších nerovností, kterou se učí žáci již na druhém stupni základní školy, je vztah mezi nulou a druhou mocninou libovolného reálného čísla:

$$x^2 \geq 0. \tag{3.1}$$

Rovnost nastává v případě, že $x = 0$. Ve všech ostatních případech je výraz x^2 kladný.

Navzdory (a možná také díky) své jednoduchosti je tato nerovnost hojně vyžívána v řadě důkazů složitějších vztahů. Příkladem může být následující tvrzení.

Věta 3.1.1. *Nechť a a b jsou libovolná reálná čísla. Pak platí:*

$$a^2 + b^2 \geq 2ab. \tag{3.2}$$

Důkaz s využitím nezápornosti druhé mocniny (3.3.1). Jak je uvedeno v [4], nerovnost (3.2) lze odvodit třemi jednoduchými kroky:

1. Díky nezápornosti druhé mocniny libovolného reálného čísla víme, že $(a-b)^2 \geq 0$. Také víme, že rovnost nastává právě tehdy, když je výraz pod mocninou roven nule, tedy $a = b$.

2. Po úpravě levé strany nerovnosti podle vzorce:

   $$(A \pm B)^2 = A^2 \pm 2AB + B^2 \tag{3.3}$$

   získáváme tvar:

   $$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0. \tag{3.4}$$

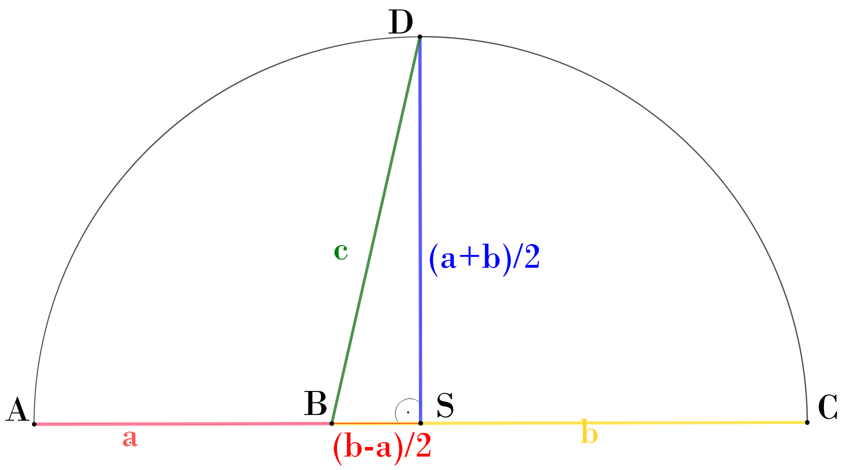
3. Nyní již stačí přičíst k oběma stranám nerovnosti výraz $2ab$ a získáváme požadovanou nerovnost: $a^2 + b^2 \geq 2ab$. V prvním kroku tohoto důkazu byla zároveň uvedena podmínka pro případ rovnosti.

□

Důkaz věty 3.1.1 lze provést také bez použití vzorce (3.3.1). Příkladem může být následující důkaz.

Grafický důkaz. Hlavní myšlenka tohoto důkazu je převzata z [23].

1. Předpokládejme, že $a \neq b$. Nakresleme úsečku AC, jejíž velikost je rovna součtu $a + b$. Na této úsečce vyznačme bod B tak, že platí $|AB| = a$ (na obrázku 3.1 růžově) a $|BC| = b$ (na obrázku 3.1 žlutě).



Obrázek 3.1: Trojúhelník

2. Střed strany AC označme S, pak $|AS| = \frac{a+b}{2}$. Vzdálenost $|BS|$ (na obrázku 3.1 červeně) můžeme vyjádřit jako $|AS| - a$ neboli $|BS| = \frac{b-a}{2}$.

3. Dále sestrojme Thaletovu kružnici nad úsečkou AC. Z bodu S sestrojme kolmici na přímku AC. Průsečík Thaletovy kružnice a kolmice označme D.

4. Úsečka SD je poloměrem Thaletovy kružnice, proto $|SD| = \frac{a+b}{2}$ (na obrázku 3.1 modře).

5. Jelikož je $\triangle BSD$ pravoúhlý, můžeme s využitím Pythagorovy věty vyjádřit stranu c (na obrázku 3.1 zeleně):

$$c^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \tag{3.5}$$

6. Po užití vztahu (3.3) a následné úpravě získáváme tvar:

$$c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

a po odmocnění

$$c = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

7. Nyní můžeme využít vlastnosti, že přepona je v pravoúhlém trojúhelníku nejdelší. Proto

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \geq \frac{a + b}{2}.$$

   Po umocnění na druhou a vynásobení 4 vychází vztah:

$$2a^2 + 2b^2 \geq a^2 + 2ab + b^2.$$

   Následně stačí odečíst od obou stran předchozí nerovnosti a^2 a b^2 a věta 3.1.1 je pro případ $a \neq b$ dokázána.

8. Na závěr se zaměřme na případ, kdy $a = b$ (tedy $B = S$). Pro tento případ platí věta 3.1.1 triviálně a ve vztahu (3.2) nastává rovnost.

□

3.2 Součet čísla a jeho převrácené hodnoty

Následující věta s důkazem je převzata z [23].

Věta 3.2.1. *Pro libovolné kladné reálné číslo c platí:*

$$c + \frac{1}{c} \geq 2. \tag{3.6}$$

Důkaz. Postačí dva jednoduché kroky:

1. Číslo c můžeme vyjádřit jako $\frac{a}{b}$, kde a,b jsou kladná reálná čísla. Tedy samozřejmě také platí: $\frac{1}{c} = \frac{b}{a}$.

2. Nerovnost (3.2) vynásobíme kladným výrazem $\frac{1}{ab}$ a získáme: $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.

3. Nyní do předchozí rovnice dosadíme proměnnou c a získáme dokazovaný tvar: $c + \frac{1}{c} \geq 2$.

□

3.3 Jednoduché nerovnosti na střední škole

S výše uvedenými nerovnostmi se lze na střední škole setkat ve více tématických celcích. Rozsah jejich užití je však velice závislý na typu školy. Vzhledem k tomu, že ve vzdělávacích plánech pro učiliště se vůbec nevyskytují kvadratické rovnice, nepřekvapí, že žáci učilišť během svého studia pravděpodobně nevyužijí nezápornost druhé mocniny ani větu 3.1.1.

3.3.1 Střední odborné školy

Na středních odborných školách se s jednoduchými nerovnostmi žáci setkávají. I když záleží na typu školy a konkrétním učilišti a nejspíše i konkrétním žákovi, nakolik si to uvědomí. Příklady bývají totiž zadány stylem „Vyřešte nerovnici …“ a žák během tohoto řešení často aplikuje první zmíněnou nerovnost této práce. Středoškoláci totiž vědí, že je každá druhá mocnina reálného čísla nezáporná. Tuto znalost využijí například v následující úloze.

Úloha 1 (z [22]). Najděte všechna řešení nerovnice:

$$\frac{x}{x^2+1} \geq \frac{3x-4}{x^2+1}$$

Řešení. Při řešení této úlohy mají středoškoláci na výběr ze dvou možností postupu:

1. Buď nejprve převedou nerovnici na podílový tvar:

   $$0 \geq \frac{3x-4}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{2(x-2)}{x^2+1}.$$

   Dále si pak uvědomí, že výraz na pravé straně nerovnosti je kladný právě tehdy, když je čitatel i jmenovatel kladný nebo pokud je čitatel i jmenovatel záporný. Získají tedy dvě možnosti řešení:

   (a) Buď $2(x-2) \geq 0 \wedge x^2+1 \geq 0$ (Po vyřešení této jednoduché soustavy nerovností vychází, že $x \leq 2$.),

   (b) nebo $2(x-2) \leq 0 \wedge x^2+1 \leq 0$ (Řešením této soustavy nerovností je prázdná množina, neboť druhá nerovnost není splněna pro žádné reálné číslo x.)

2. Nebo se ihned na počátku řešení zaměří na jmenovatele nerovnosti. Uvědomí si, že výraz x^2 je vždy nezáporný a když k němu navíc přičítáme ještě jedničku, je zřejmé, že výraz ve jmenovateli je kladný. Proto

mohou tímto výrazem obě strany nerovnosti vynásobit:

$$x \geq 3x - 4.$$

Výsledkem operace je lineární nerovnice, což celkový výpočet značně zjednoduší.

V obou případech pochopitelně středoškoláci dojdou ke stejnému závěru: $x \leq 2$. Druhý postup je však elegantnější.

3.3.2 Gymnázia

Na gymnáziu se již vyskytuje více příkladů na užití těchto jednoduchých nerovností. Podobně jako v předchozí úloze využívali středoškoláci nezápornost druhé mocniny reálných čísel, gymnazisté ji aplikují v následujícím mírně komplexnějším příkladu.

Úloha 2 (z [5]). V $\mathbb{R}$ řešte nerovnici: $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$.

Řešení. Kvadratický trojčlen $4x^2 + 4x + 1$ snadno upravíme na čtverec:

$$4x^2 + 4x + 1 = 4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 0.$$

Nyní přichází na řadu využití vztahu (3.1). Jelikož je druhá mocnina jakéhokoliv reálného čísla nezáporná, bude levá strana nerovnice určitě nezáporná. Nulová bude právě tehdy, když bude umocňovaný výraz nulový. Zbývá nám tedy dořešit už jen jednoduchou rovnici: $x + \frac{1}{2} = 0$ a následně dostáváme řešení $x = -\frac{1}{2}$.

Gymnazisté mohou v rámci běžných hodin narazit také na jistou formu aplikace věty 3.2.1:

Úloha 3 (z [5]). Pro která kladná čísla x platí: $x + \frac{1}{x} \leq 2$.

Řešení. Při řešení této úlohy lze zvolit dva základní postupy:

- Využít toho, že x je kladné číslo a vynásobit jím obě strany rovnice: $x^2 + 1 \leq 2x$, což snadno upravíme na čtverec: $(x-1)^2 \leq 0$. Nyní stačí podobně jako v předchozích případech využít vlastnost druhé mocniny reálného čísla. Aby byl zadaný vztah platný, musí se $x - 1$ rovnat 0. Neboli $x = 1$.

- Druhou možností, jak k příkladu přistupovat, je využít vztahu (3.6) pro součet čísla a jeho převrácené hodnoty. Se znalostí tohoto vztahu můžeme ihned uzavřít, že $x = 1$.

Při řešení matematických olympiád můžeme narazit také na aplikaci věty 3.1.1. Následující úloha je (včetně řešení) převzata z domácího kola 43. ročníku matematické olympiády kategorie A.

Úloha 4. Najděte nejmenší reálné číslo p, při kterém nerovnost

$$a + b - p \cdot \sqrt{ab} \leq \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{3.7}$$

platí pro libovolnou dvojici kladných celých čísel a, b.

Řešení. Postup rozdělíme do následujících kroků:

1. Nejprve dosadíme do nerovnosti nejmenší možné a, b ($a = b = 1$):

   $$1 + 1 - p \cdot \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + 1},$$

   získáme tak podmínku pro hledané p: $p \geq 2 - \sqrt{2}$. Číslo p je tedy kladné.

2. Zadanou nerovnost (3.7) upravíme do podoby:

   $$a + b \leq p \cdot \sqrt{ab} + \sqrt{a^2 + b^2},$$

   obě strany tohoto vztahu jsou kladné, proto je možné ekvivalentně umocnit na druhou:

   $$a^2 + 2ab + b^2 \leq p^2 ab + 2p\sqrt{ab}\sqrt{a^2 + b^2} + a^2 + b^2.$$

   Následně provedeme několik úprav:

   $$a^2 + 2ab + b^2 - p^2 ab - a^2 - b^2 \leq 2p\sqrt{ab}\sqrt{a^2 + b^2},$$

   $$2ab - p^2 ab \leq 2p\sqrt{ab}\sqrt{a^2 + b^2}.$$

   Nyní již zbývá jen na levé straně vytknout výraz ab:

   $$(2 - p^2)ab \leq 2p\sqrt{ab(a^2 + b^2)}.$$

3. Jelikož máme najít nejmenší p, pro která je nerovnost 3.7 splněna, zkusíme do předchozího vztahu dosadit nejmenší možné p (tedy $p = 2 - \sqrt{2}$). Získáme tím nerovnost:

$$(2 - (2 - \sqrt{2})^2)ab \leq 2(2 - \sqrt{2})\sqrt{ab(a^2 + b^2)}.$$

Nyní provedeme následující úpravy:

$$\begin{aligned}
(2 - (4 - 4\sqrt{2} + 2))ab &\leq (4 - 2\sqrt{2})\sqrt{ab(a^2 + b^2)} \\
(-4 + 4\sqrt{2})ab &\leq 2(2 - \sqrt{2})\sqrt{ab(a^2 + b^2)} \\
4(-1 + \sqrt{2})ab &\leq 2\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1)\sqrt{ab(a^2 + b^2)} \\
\sqrt{2}ab &\leq \sqrt{ab(a^2 + b^2)} \\
2a^2b^2 &\leq ab(a^2 + b^2) \\
2ab &\leq (a^2 + b^2)
\end{aligned}$$

4. Na závěr přichází užití očekávané nerovnosti (3.2). Neboť předchozí nerovnost je s ní ekvivalentní a tedy platná pro libovolná přirozená a, b. Hledaným nejmenším číslem p je tedy $p = 2 - \sqrt{2}$.

4 Trojúhelníková nerovnost

Jedním z účinných nástrojů pro řešení nejen geometrických úloh je trojúhelníková nerovnost. Ve své základní verzi se zaměřuje na velikost stran trojúhelníka v Eukleidovské geometrii. Aplikovat lze však i obecněji.

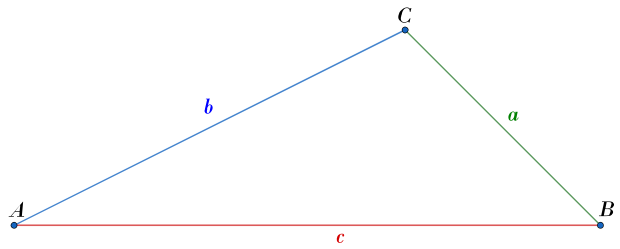
4.1 Eukleidovský prostor

V Eukleidovském prostoru lze trojúhelníkovou nerovnost dle [4] vyslovit takto:

Věta 4.1.1. *Nechť A, B a C jsou libovolné (různé) body v rovině, pak platí:*

$$|AC| + |CB| \geq |AB|. \tag{4.1}$$

Situace v rovině pro případ, kdy body A, B, C neleží na přímce, je znázorněna na obrázku 4.1. Obrázek 4.4 demonstruje variantu, kdy $C \in AB$.



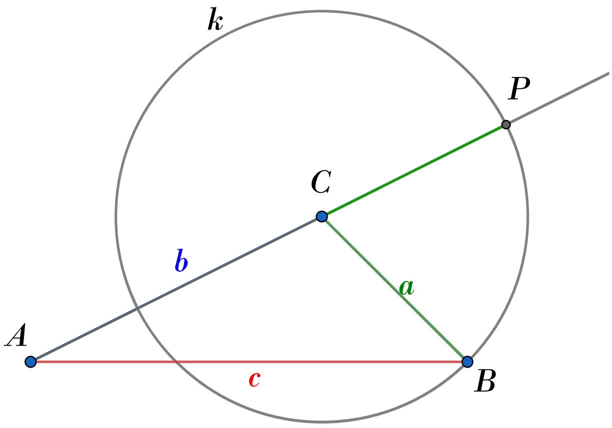
Obrázek 4.1: Trojúhelník

Důkaz (viz [6]). Dle kolinearity bodů můžeme důkaz rozdělit následovně:

1. Body A, B, C neleží na přímce.
   Jelikož ve vztahu (4.1) nesmí záležet na pořadí vrcholů $\triangle ABC$, můžeme si je libovolně přeznačit. Lze tedy předpokládat následující:

   Předpoklad 1. $|AB| > \max\{|AC|, |BC|\}$.

   Rovněž lze také sestrojit bod P jako průsečík kružnice $k(C, a)$ a polopřímky AC. Z obrázku 4.2 je patrné, že takto můžeme získat dva body. Jako P označíme ten bod, který nenáleží úsečce AC. Spojením bodů P a B pak získáváme $\triangle ABP$ (viz obrázek 4.3). Z konstrukce bodu P je patrné, že $|CP| = |CB|$.



Obrázek 4.2: Sestrojení bodu P

Vlastní důkaz věty 4.1.1 lze rozdělit na dvě části. Nejprve je potřeba odvodit, že $|\angle ABP| > |\angle APB|$ a následně prokázat vztah mezi stranami trojúhelníka. Z obrázku 4.3 je patrné, že

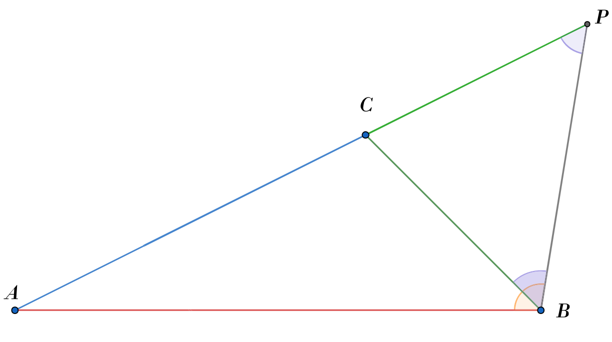
$$|\angle ABP| > |\angle CBP|. \tag{4.2}$$

Dále z konstrukce bodu P vyplývá, že $\triangle BPC$ je rovnoramenný trojúhelník. Proto

$$|\angle CBP| = |\angle BPA| = |\angle APB|. \tag{4.3}$$

Ze vztahů (4.2) a (4.3) plyne:

$$|\angle ABP| > |\angle APB|. \tag{4.4}$$



Obrázek 4.3: Důkaz trojúhelníkové nerovnosti

Pro libovolný trojúhelník ABC platí, že vnitřní úhel trojúhelníka naproti delší straně má větší velikost než vnitřní úhel trojúhelníka naproti kratší straně. Odtud a ze vztahu (4.4) dostáváme $|AB| < |AP|$.

Z obrázku 4.3 je patrné, že $|AP| = |AC| + |CP|$. Z konstrukce bodu P znázorněné na obrázku 4.2 vyplývá, že $|CP| = |CB|$.

Tyto úvahy lze zapsat ve tvaru:

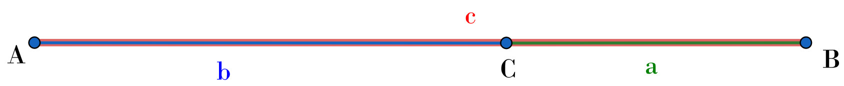
$$|AB| < |AP| = |AC| + |CP| = |AC| + |CB|$$

a tím je důkaz hotov.

2. Body A, B, C leží na přímce.
   Opět využijeme toho, že by vztah (4.1) měl platit pro libovolné přeznačení vrcholů. Můžeme tedy předpokládat:

   Předpoklad 2. $|AB| > \max\{|AC|, |BC|\}$.

   Jinými slovy, vrchol C se nachází uvnitř úsečky AB (viz obrázek 4.4). Pro tento případ nastává ve vztahu (4.1) rovnost triviálně.



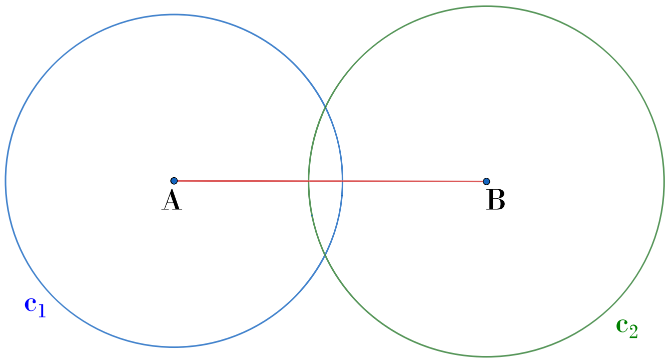
Obrázek 4.4: Body A, B, C pro případ, kdy $C \in AB$

□

Trojúhelníková nerovnost zajímala matematiky již od pradávna. Dle [6] byli výše uvedený důkaz věty 4.1.1 schopni provést již staří Řekové. Od té doby se objevila celá řada dalších důkazů. Příkladem může být metoda navržená právě v článku [6], která využívá dvě kružnice c_1 a c_2.

Důkaz pomocí kružnic (viz [6]). Tento důkaz se zaměřuje na variantu věty 4.1.1 s ostrou nerovností – tedy případ, kdy lze sestrojit $\triangle ABC$.

Sestrojme kružnici c_1 se středem v bodě A a poloměrem o velikosti strany AC. Dále sestrojme kružnici c_2 se středem B a poloměrem rovným velikosti strany BC (viz obr. 4.5).



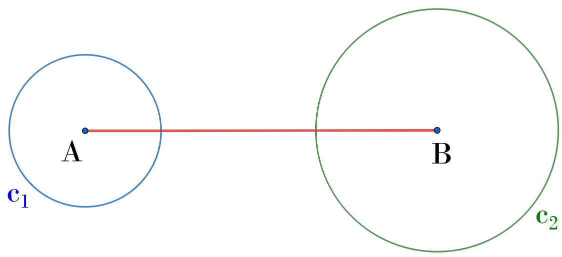
Obrázek 4.5: Kružnice se středy v bodě A a B

Poté autor pokračuje sporem – pokud by platilo:

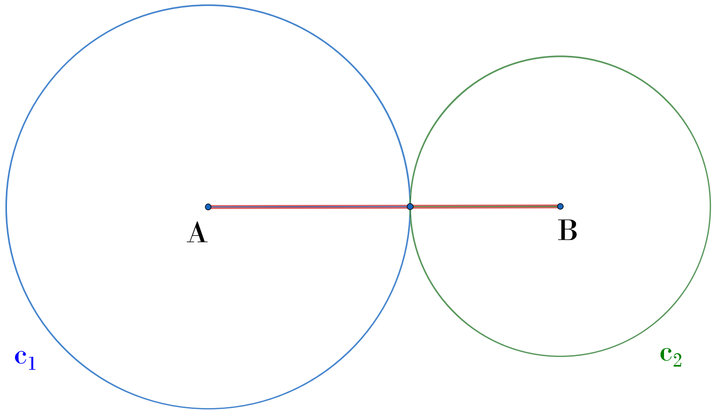
$$|AC| + |BC| \leq |AB|, \tag{4.5}$$

tedy součet poloměrů kružnic by byl menší nebo roven vzdálenosti jejich středů, musela by nastat jedna z těchto situací:

- Kružnice nemají žádný společný bod dotyku (viz obr. 4.6).
- Kružnice mají právě jeden společný bod (viz obr. 4.7).



Obrázek 4.6: Kružnice bez společného bodu



Obrázek 4.7: Kružnice s jedním společným bodem

V obou těchto případech úsečky $|AB|$, $|BC|$ a $|AC|$ netvoří trojúhelník, dochází ke sporu a ostrá varianta nerovnosti ve větě 4.1.1 je dokázána.

$\square$

Další geometrické důkazy této populární nerovnosti je možno čerpat v [6].

4.2 Trojúhelníková nerovnost na střední škole

Ve středoškolské matematice se setkáme s trojúhelníkovou nerovností zejména v oblasti *Planimetrie*.

4.2.1 Střední odborné školy

Na středních odborných školách se trojúhelníková nerovnost zpravidla nedokazuje ani neodvozuje. Příkladem možného zavedení této nerovnosti může být formulace z [15]:

„*V trojúhelníku je součet dvou stran větší než strana třetí a rozdíl dvou stran menší než strana třetí (trojúhelníkové nerovnosti). Např. v trojúhelníku ABC, jehož strany mají délky a, b, c, platí: $a + b > c$, $|a - b| < c$.*“

Následně jsou příklady zaměřeny zejména na využití této nerovnosti pro sestavení konkrétní nerovnice pro konkrétní situaci. V [15] je uvedeno například toto zadání:

Úloha 5. Jakou délku může mít strana c trojúhelníka ABC, je-li strana $a = 5\,cm$ a strana $b = 8\,cm$?

Řešení. Při řešení tohoto příkladu se očekává, že žák zná trojúhelníkovou nerovnost. Využít může vztahy $|a-b| < c$ a $a+b > c$. Odtud získá podmínku pro stranu c ve tvaru $3 < c < 13$.

■

4.2.2 Gymnázia

Na gymnáziích bývá trojúhelníková nerovnost odvozena postupnou úvahou převzatou z učebnice pro gymnázia [17]:

1. Poukázání na skutečnost, že přímá cesta z místa A do místa B je kratší než cesta z A do B přes C. A to s jedinou výjimkou, kdy C leží na přímo na cestě.

2. Připomenutí, že body trojúhelníka neleží na jedné přímce.

3. Vyvození závěru: $|AB| < |AC| + |BC|$, neboli $c < a + b$. Stejně tak $a < b + c$, $b < a + c$.

4. Souhrnný zápis: $|b - c| < a < b + c$.

V závislosti na konkrétní škole a učiteli je po žácích tento důkaz vyžadován. Obvykle bývá doplněn o grafickou ilustraci.

Spolu s vlastností polohy těžiště je trojúhelníková nerovnost dostatečným nástrojem pro řešení následujícího spíše nástavbového příkladu uvedeného v [13].

Úloha 6. Dokažte, že v každém trojúhelníku ABC platí: $3/4\ O < t_a + t_b + t_c < O$, kde O je obvod trojúhelníka ABC.

Důkaz dle [13]. Označme těžiště $\triangle\ ABC$ jako T. Důkaz lze rozložit na dvě části.

1. Důkaz levé části ($3/4\ O < t_a + t_b + t_c$):
   Z trojúhelníkové nerovnosti pro $\triangle\ ABT$, $\triangle\ BCT$ a $\triangle\ ACT$ spolu s užitím vlastnosti polohy těžiště získáme nerovnosti:

$$a < \frac{2}{3}t_b + \frac{2}{3}t_c,$$

$$b < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_c,$$
$$c < \frac{2}{3}t_a + \frac{2}{3}t_b.$$

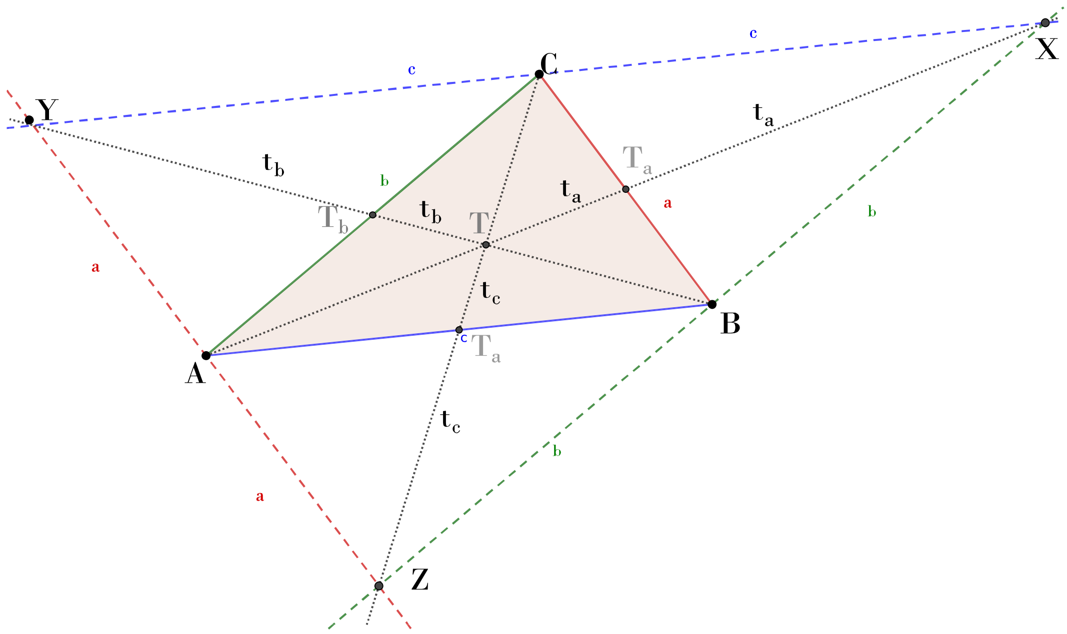
Po sečtení těchto tří nerovností získáme nerovnost:

$$a + b + c < \frac{4}{3}t_b + \frac{4}{3}t_c + \frac{4}{3}t_a.$$

Jelikož je součet stran a, b, c roven obvodu $\triangle\ ABC$, dostáváme po vynásobení obou stran rovnice číslem 3/4 nerovnost:

$$\frac{3}{4}O < t_a + t_b + t_c. \tag{4.6}$$

2. Důkaz pravé části ($t_a + t_b + t_c < O$):
Pro tuto část je užitečné doplnit si $\triangle\ ABC$ na rovnoběžníky $ABXC$, $BCYA$ a $CAZB$. Situace je znázorněna na obrázku 4.8.



Obrázek 4.8: Doplnění trojúhelníka ABC na rovnoběžníky

Po aplikaci trojúhelníkové nerovnosti na vzniklé trojúhelníky ABX, BCY a ACZ získáme opět tři nerovnosti:

$$2t_a < b + c,$$

$$2t_b < a + c,$$

$$2t_c < a + b.$$

Také tyto nerovnosti je potřeba sečíst:

$$2t_a + 2t_b + 2t_c < 2a + 2b + 2c,$$

nyní stačí nerovnost vydělit dvěma a získáme tento tvar nerovnosti:

$$t_a + t_b + t_c < a + b + c. \tag{4.7}$$

Tím je důkaz hotov.

□

4.3 Trojúhelníková nerovnost na vysoké škole

4.3.1 Metrický prostor

Význam trojúhelníkové nerovnosti je patrný také z definice metrik a metrických prostorů. Následující definice je převzata z [7].

Definice 4.3.1. Metrickým prostorem nazýváme každou neprázdnou množinu X, na níž je definováno zobrazení (tzv. metrika)

$$\varrho : X \times X \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

1. $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = 0,\ \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$
2. $\forall x, y \in X : \varrho(x, y) = \varrho(y, x),$
3. $\forall x, y, z \ \in X : \varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geq \varrho(x, z).$

Metrikou tedy rozumíme zobrazení do nezáporných reálných čísel, které je symetrické a splňuje trojúhelníkovou nerovnost. Přičemž nulový prvek získáme pouze, pokud prvky x a y splývají. Význam slova metrika lze ztotožnit se vzdáleností. Jednou z nejznámějších metrik je *Eukleidova vzdálenost*, jejíž dvourozměrná varianta byla rozebrána v předchozí kapitole a obecná varianta je znázorněna v Příkladu 1.

Příklad 1 (Eukleidovská vzdálenost). Je dán prostor $X = \mathbb{R}^n$ a metrika

$$\varrho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - z_i)^2} \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2}.$$

■

Dalším příkladem vzdálenosti je *Manhattanská metrika*, která je dle [1] odvozena od pravoúhlého systému ulic na Manhattanu. Cílem této metriky bylo určit reálnou vzdálenost, kterou musí urazit automobil při přesunu z jedné ulice do druhé. Matematický zápis této metriky je uveden v Příkladu 2.

Příklad 2 (Manhattanská metrika). Nechť je dán prostor $X = \mathbb{R}^n$ a metrika

$$\varrho(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + ... + |y_n - x_n| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|.$$

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \geq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i|.$$

■

V informatice se v oblasti kódování informace můžeme setkat s metrikou nazývanou *Hammingova vzdálenost*. Vzdálenost dvou stejně dlouhých řetězců je dle této metriky určena jako počet míst, na kterých se znaky těchto řetězců liší. Jednoduchá ukázka výpočtu je uvedena v příkladu 3. Více informací a další možnosti využití Hammingovy vzdálenosti je možno čerpat v [10].

Příklad 3 (Hammingova vzdálenost). Na vstupu jsou obdržena dvě binární slova stejné délky:

- slovo $A = 01011$
- slovo $B = 01101$

Tato slova můžeme chápat také jako jednoduché binární vektory:

- $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $a_i = 0 \vee 1$
- $B = (b_1, b_2, ..., b_n)$, $b_i = 0 \vee 1$

Obě tato slova mají stejné znaky na první, druhé a poslední pozici. Naopak na pozicích tři a čtyři se znaky liší. Proto bude Hammingova vzdálenost těchto dvou slov určena jako dva.

Hammingova metrika je vlastně Manhattanská metrika omezená jen na obor 0 a 1.

■

Příklad 4 (L^2 metrika.). Nechť je dán prostor $X = L^2(0,1)$ a metrika

$$\varrho(f,g) = \sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx},$$

kde f a g jsou funkce proměnné x.

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\sqrt{\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 (g(x) - h(x))^2 dx} \geq \sqrt{\int_0^1 (h(x) - f(x))^2 dx}.$$

■

4.3.2 Normovaný lineární prostor

Podobně jako v případě metrických prostorů, také pro definování normovaného lineárního prostoru je trojúhelníková nerovnost klíčová. Normou rozumíme funkci, jejíž obor hodnot jsou nezáporná čísla. Tato funkce každému nenulovému prvku přiřazuje kladné číslo, tzv. velikost. Nulovému prvku je pak přiřazena 0. Důležitou součástí definice je právě platnost trojúhelníkové nerovnosti.

Definice 4.3.2. Nechť X je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení p s těmito vlastnostmi:

1. $p(x) \geq 0$ pro všechna $x \in X$,
2. $p(x) = 0$ právě když $x = 0$,
3. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro všechna $\alpha \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$,
4. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ pro všechna $x, y \in X$,

nazýváme normou na X. Dvojice (X, p) je normovaný lineární prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

Norma $p(x)$ se obvykle značí symbolem $\|x\|$ a platí $\|x\| = \varrho(x, 0)$.
Nejběžnějšími příklady normy je na prostoru $\mathbb{R}$ absolutní hodnota a na prostoru $\mathbb{R}^2$ *Eukleidovská norma.* Následující příklady normovaných lineárních prostorů jsou převzaty z [7].

Příklad 5 (Prostor s eukleidovskou normou). Nechť je dán prostor $X = \mathbb{R}^n$ přičemž $n \in \mathbb{N}$ a eukleidovská norma

$$\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}.$$

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} + \sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2} \geq \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + ... + (x_n + y_n)^2}.$$

■

Příklad 6 (Prostor s maximovou normou). Nechť je dán prostor $X = \mathbb{R}^n$ přičemž $n \in \mathbb{N}$ a maximová norma

$$\|x\| = \|(x_1, ..., x_n)\| = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}.$$

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\max\{|x_1|, ..., |x_n|\} + \max\{|y_1|, ..., |y_n|\} \geq \max\{|x_1 + y_1|, ..., |x_n + y_n|\}.$$

■

Příklad 7 (Prostor se supremovou normou). Nechť je dán prostor $X = C(\langle 0, 1\rangle)$ a supremová norma

$$\|f\| = \sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)| = \max_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)|,$$

pro $f = C(\langle 0, 1\rangle)$.

Trojúhelníkovou nerovnost lze tedy zapsat jako:

$$\sup_{x \in \langle 0,1\rangle} |f(x)| + \sup_{y \in \langle 0,1\rangle} |f(y)| \geq \sup_{x+y \in \langle 0,1\rangle} |f(x + y)|.$$

■

5 Jensenova nerovnost

Další nerovností, se kterou se můžeme na střední škole v určité míře setkat, je Jensenova nerovnost. Jméno nese po dánském matematikovi Johanu Jensenovi a propojuje více poznatků z oblasti matematické analýzy. Před vyslovením samotné nerovnosti je nutné zavést několik pojmů.

5.1 Konvexní a konkávní funkce

Definice 5.1.1. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že funkce f je *konvexní* na intervalu I, pokud pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 z intervalu I a libovolné $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

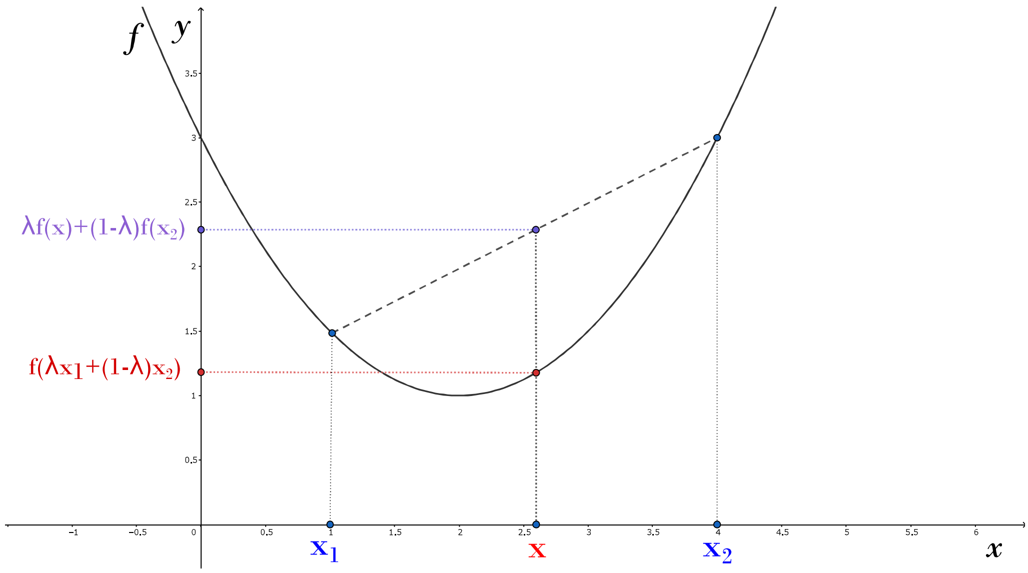
$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Definice 5.1.2. Nechť f je spojitá funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekněme, že funkce f je *konkávní* na intervalu I, pokud pro libovolná dvě čísla x_1, x_2 z intervalu I a libovolné $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ platí:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

Levá strana této nerovnosti představuje funkční hodnotu ve všech číslech mezi x_1 a x_2. Na pravé straně vztahů v definicích 5.1.1 a 5.1.2 máme hodnoty mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Spojíme-li krajní body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ získáme přímku, která je sečnou původní funkce. Na obrázcích 5.1 a 5.2 je zakreslena přerušovaně.

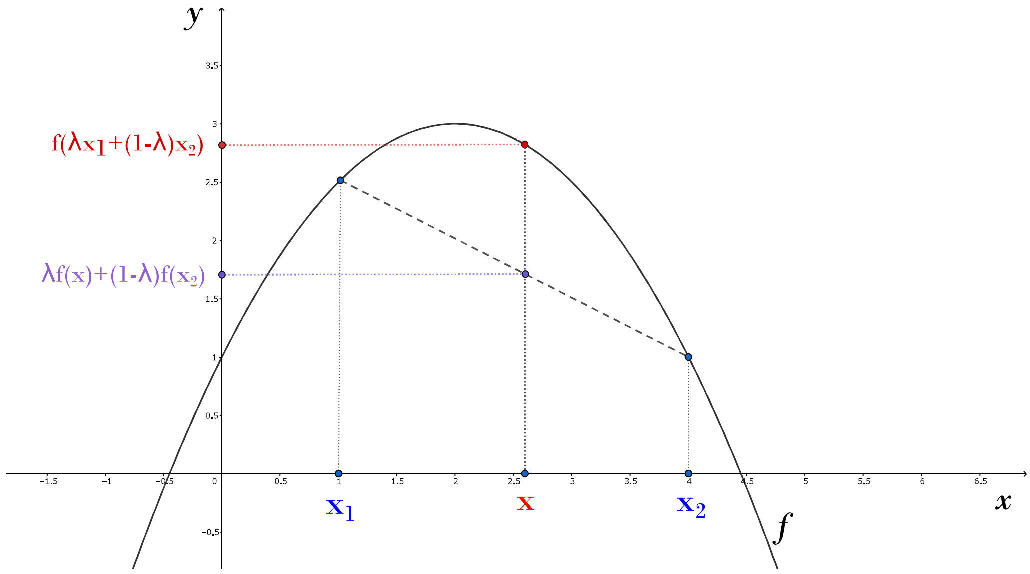
Pro konvexní funkci platí, že funkční hodnoty ve všech číslech mezi x_1 a x_2 jsou menší než příslušné hodnoty mezi $f(x_1)$ a $f(x_2)$. Jinými slovy, zvolíme-li si libovolný bod x takový, že $x_1 < x < x_2$, a vyčteme z grafu funkční hodnotu v tomto bodě a příslušnou hodnotu na sečně, bude vždy funkční hodnota dané funkce menší než funkční hodnota sečny (viz obrázek 5.1).



Obrázek 5.1: Konvexní funkce; $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pro $\lambda = \frac{8}{15}$

Při stejném výběru x získáme pro konkávní funkci nerovnost obrácenou. Funkční hodnota konkávní funkce v bodě x, $x_1 < x < x_2$, bude větší než funkční hodnota sečny v tomto bodě (viz obrázek 5.2).

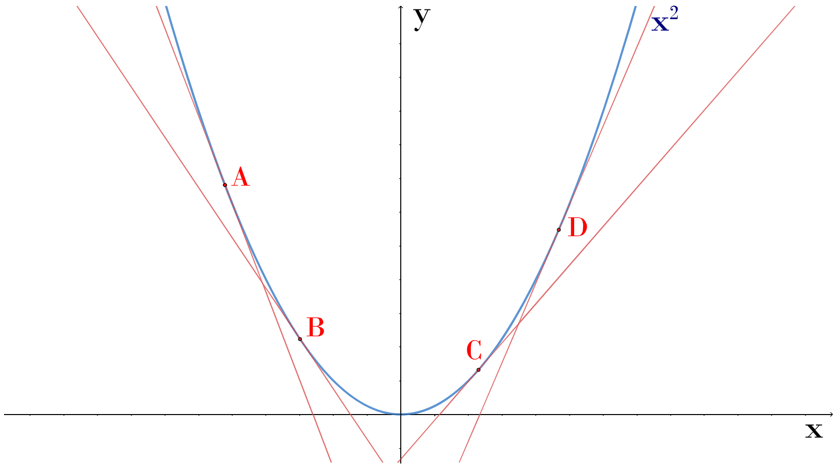
Jinak řečeno, graf konvexní funkce je pod sečnou a graf konkávní funkce je nad sečnou.



Obrázek 5.2: Konkávní funkce; $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ pro $\lambda = \frac{8}{15}$

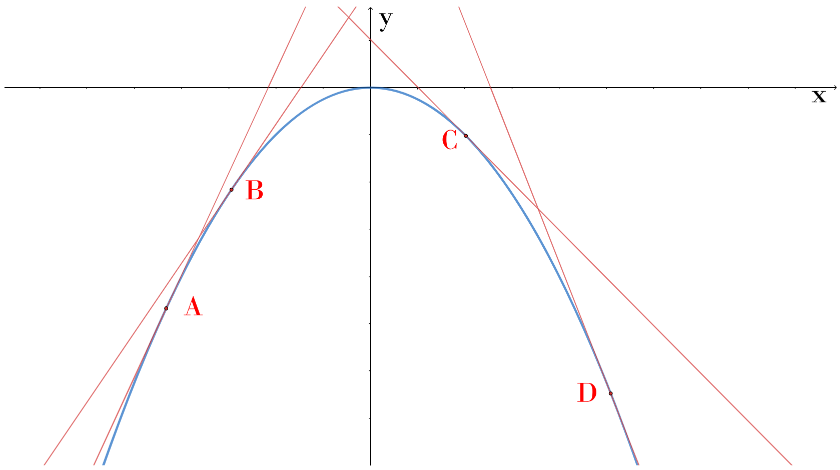
Ve vysokoškolské a někdy také středoškolské matematice studenti určují, zda je funkce konvexní či konkávní, pomocí druhé derivace funkce. Pokud je tato derivace kladná, pak je funkce v daném bodě konvexní. Pokud je druhá derivace záporná, jedná se v tomto bodě o funkci konkávní.

Pro konvexní funkci rovněž platí, že pokud existuje k dané funkci tečna, pak je „pod“ jejím grafem. Příkladem konvexní funkce, se kterou se středoškolští studenti běžně setkávají, může být funkce x^2. Situace je znázorněna na obrázku 5.3.



Obrázek 5.3: Ukázka konvexní funkce

Podobně pro konkávní funkci platí, že jestliže existuje k dané funkci tečna, pak je „nad“ jejím grafem. Příkladem může být funkce $-x^2$ (viz obrázek 5.4).



Obrázek 5.4: Ukázka konkávní funkce

5.2 Konvexní kombinace

Před zavedením samotné *Jensenovy nerovnosti* je vhodné ujasnit si ještě pojem *konvexní kombinace*. V [18] je uvedena následující definice.

Definice 5.2.1. Mějme reálná čísla x_1, x_2,...,x_n, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Dále mějme čísla λ_1, λ_2, ...,$\lambda_n \in \langle 0, 1 \rangle$, přičemž součet těchto čísel je roven jedné, tj. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Pak číslo

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

označujeme jako *konvexní kombinaci* x_1, x_2,...,x_n.

5.3 Jensenova nerovnost

Věta 5.3.1 (dle [18])**.** *Předpokládejme, že f je konvexní funkce na intervalu I. Pro libovolnou konvexní kombinaci čísel x_1, x_2,...,x_n z intervalu I platí:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n). \tag{5.1}$$

Obdobně můžeme Jensenovu nerovnost zavést také pro konkávní funkci.

Věta 5.3.2. *Předpokládejme, že f je konkávní funkce na intervalu I. Pro libovolnou konvexní kombinaci čísel x_1, x_2,...,x_n z intervalu I platí:*

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \geq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n). \tag{5.2}$$

Zaměříme-li se na větu 5.3.1 ve zmíněné souvislosti s definicí konvexní funkce, zjistíme, že se jedná pouze o její modifikaci. Definice konvexní funkce hovořila o konvexní kombinaci libovolných dvou bodů, kdežto *Jensenova nerovnost* je zobecněná na konvexní kombinaci libovolného počtu bodů. Toto pozorování je ostatně uvedeno už v [18].

Důkaz věty 5.3.1 pomocí indukce dle [18] a [8]. Indukci budeme vztahovat k počtu prvků. Budeme tedy dokazovat, že pokud nerovnost platí pro n, platí také pro $n + 1$ prvků.

1. Jak již bylo uvedeno výše, pro $n = 2$ se jedná o definici konvexní funkce.

2. Nyní tedy předpokládáme, že nerovnost:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n),$$

pro n prvků platí.

3. Uvažujme nyní funkční hodnotu konvexní kombinace $(n + 1)$ prvků a následně z prvního až $n-$tého členu argumentu funkce f vytkneme výraz $(1 - \lambda_{n+1})$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n + +\lambda_{n+1} x_{n+1})$$

$$=$$

$$f\left((1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 ... + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right)$$

4. Z konvexity funkce f vyplývá, že:

$$f\left((1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 ... + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} x_{n+1}\right)$$

$$\leq$$

$$(1 - \lambda_{n+1}) \cdot f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + ... + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

5. Z indukčního předpokladu dále vyplývá, že:

$$(1 - \lambda_{n+1}) \cdot f\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} x_1 + ... + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} x_n\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$\leq$$

$$(1 - \lambda_{n+1})\left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_1) + ... + \frac{\lambda_n}{1 - \lambda_{n+1}} f(x_n)\right) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

$$=$$

$$\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... \lambda_{n+1} f(x_{n+1})$$

Jensenova nerovnost je tedy dokázána pro libovolná $n \geq 2$.

□

Jako důsledek věty 5.3.1 dostaneme při speciální volbě $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $\forall i = 1, 2, ..., n$ znění Jensenovy věty uvedené v [11]:

Věta 5.3.3 (dle [11])**.** *Předpokládejme, že f je konvexní funkce na intervalu $\langle a, b \rangle \in \mathbb{R}$. Pro libovolná čísla x_1, x_2,...,x_n z intervalu $\langle a, b \rangle$ platí:*

$$nf\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leq f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n).$$

Poznámka 1. Jinými slovy funkční hodnota aritmetického průměru čísel x_1, x_2,...,x_n z intervalu $\langle a, b \rangle$ je menší nebo rovna aritmetickému průměru funkčních hodnot těchto čísel. Aritmetický průměr bude zaveden v kapitole 7.

Pro konkávní funkce platí věty 5.3.1 a 5.3.3 obdobně, jen jsou v nerovnostech otočená znaménka nerovnosti.

5.4 Jensenova nerovnost na střední škole

V rámci běžné výuky se s *Jensenovou nerovností* na učilišti, střední odborné škole ani na gymnáziu nesetkáme. To ovšem neznamená, že její aplikaci žáci nevyužijí při řešení matematických olympiád a korespondenčních seminářů.

Také proto některé střední školy zavádí dobrovolné semináře, ve kterých žákům tuto nerovnost představí. Jedním z příkladů, při jehož řešením bylo vhodné užít právě *Jensenovu nerovnost*, je následující úloha, která byla studentům zadána v rámci ústředního kola 63. ročníku matematické olympiády. Autorem zadání i řešení této úlohy jsou Tomáš Jurík a Jaromír Šimsa.

Úloha 7 (viz [9]). Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}} \tag{5.3}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Autoři úlohy uvádí více řešení, jedno z nich využívá *Jensenovu nerovnost* a právě to zde bude uvedeno. Dalším z možných řešení je aplikace *Cauchyho nerovnosti* (viz kapitola 6).

Řešení (s využitím *Jensenovy nerovnosti* (viz [9])). Nejprve se zaměříme na případy, kdy $a = 0$ nebo $b = 0$ nebo $a = b$. Ve všech těchto případech platí vztah triviálně a nastává v něm rovnost. Dále už uvažujeme, že jsou a, b různá nenulová čísla. Obě strany nerovnosti (5.3) můžeme vynásobit výrazem $\frac{1}{a+b}$:

$$\frac{a}{a+b} \cdot \frac{1}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{a+b}\frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{ab+1}}. \tag{5.4}$$

Levá strana této nerovnosti nápadně připomíná pravou stranu *Jensenovy nerovnosti*. Označíme nyní výraz $\frac{a}{a+b}$ jako λ_1 a výraz $\frac{a}{a+b}$ jako λ_2. Očividně platí:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b} = \frac{a+b}{a+b} = 1.$$

Dále uvažujme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ a označme $b^2 + 1 = x_1$, $a^2 + 1 = x_2$. Protože je funkce f ryze konvexní a x_1, x_2 jsou různá kladná čísla, je levá strana nerovnosti (5.4) pravou stranou *Jensenovy nerovnosti* (5.1).

Nyní je potřeba prokázat, že také pravá strana dokazované nerovnosti odpovídá levé straně *Jensenovy nerovnosti*. Do levé strany *Jensenovy nerovnosti* můžeme dosadit za x_1, x_2, λ_1 a λ_2 takto:

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = f\left(\frac{a}{a+b} \cdot (b^2+1) + \frac{b}{a+b}(a^2+1)\right).$$

Po sečtení a roznásobení získáme:

$$f\left(\frac{a + ab^2 + b + a^2 b}{a+b}\right) = f\left(\frac{ab^2 + a^2 b}{a+b} + \frac{a+b}{a+b}\right) = f(ab+1).$$

Konkrétně pro $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ získáme požadovanou pravou stranu nerovnosti (5.1):

$$f\left(ab+1\right) = \frac{1}{\sqrt{ab+1}}.$$

■

Další nadaní středoškoláci, kteří narazí na *Jensenovu nerovnost*, jsou řešitelé matematického korespondenčního semináře *PRASE*. Středoškolákům tento seminář poskytuje kromě zadání nejrůznější matematických úloh také doprovodný výukový seriál, který je zaměřený vždy na nějaké téma. A právě *Jensenovu nerovnost* můžeme nalézt v seriálu *Nerovnosti* [20]. Žáci zde najdou přiměřený výklad tématu a také několik ukázkových příkladů.

6 Cauchyovy–Schwarzova nerovnost

Cauchyova-Schwarzova nerovnost je jednou z nejhojněji užívaných nerovností v matematice. Známá je také pod názvy Cauchyho, Schvarzova nebo Bunjakovského nerovnost. V dnešní době existuje řada důkazů i aplikací této nerovnosti. Zde budou uvedeny důkazy dva. Dále je možno čerpat z [19].

6.1 Zavedení Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti

Věta 6.1.1 (dle [11])**.** *Mějme reálná čísla* a_1, a_2, ..., a_n *a* b_1, b_2, ..., b_n, *přičemž* $n \geq 2$. *Pak platí:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2). \quad (6.1)$$

Nerovnost můžeme také zapsat ve tvaru:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2. \quad (6.2)$$

Důkaz užitím kvadratické funkce dle [11]. Předpokládejme, že máme funkci:

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + ... + (a_nx - b_n)^2 \quad (6.3)$$

Po umocnění na druhou dle známého vzorce $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ a následnému vytknutí x a x^2 získáváme:

$$f(x) = (a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)x+(b_1^2+b^2+...+b_n^2) \quad (6.4)$$

Z vyjádření (6.3) plyne, že je funkce f zcela jistě nezáporná. Tedy diskriminant kvadratického výrazu v (6.4) bude nekladný, tj.:

$$4(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 - 4(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b^2x + ... + b_n^2) \leq 0.$$

Jednoduchou úpravou dostáváme:

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b^2x + ... + b_n^2)$$

Věta 6.1.1 je tedy dokázána.

□

Existuje celá řada důkazů věty 6.1.1. Uveďme si zde ještě jeden, který podobně jako předchozí důkaz používá zejména znalosti středoškolské matematiky.

Důkaz dle [21]. Mějme reálná čísla a_1, a_2, ..., a_n a b_1, b_2, ..., b_n, přičemž $n \geq 2$ a předpokládejme, že máme výraz:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2,$$

tento výraz můžeme snadno umocnit podle vzorce $(A - B)^2$:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_i^2b_j^2 - 2a_ib_ja_jb_i + a_j^2b_i^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i \sum_{j=1}^{n} a_jb_j$$

Pravou stranu nerovnosti lze přepsat do tvaru:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2 = 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

Levá strana rovnosti je díky druhé mocnině určitě nezáporná, proto musí být také pravá strana nezáporná. Tedy:

$$2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \geq 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2$$

Jednoduchou úpravou dostáváme:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

Věta 6.1.1 je tedy opět dokázána. □

6.2 Cauchyova-Schwarzova nerovnost na střední škole

Podobně jako tomu je u *Jensenovy nerovnosti*, ani s *Cauchyovou-Schwarzovou nerovností* se při standardní výuce na učilišti, střední odborné škole ani gymnáziu zpravila nesetkáme. Naopak při řešení matematicky zaměřených olympiád a korespondenčních seminářů ji žáci využijí poměrně hojně. Výklad této nerovnosti zprostředkovává středoškolákům například seriál jednoho z nejznámější matematických korespondenční seminářů nesoucí název *PRASE*. O *Cauchyově-Schwarzově nerovnosti* je pojednáno v díle *Nerovnosti* [20].

Příkladem užití Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti, je úloha, kterou je možno nalézt v [12]. Autorka uvádí, že se jedná o příklad, který připravili studenti Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy.

Úloha 8 (viz [9]). Dokažte pro x, y, $z \in \mathbb{R}^+$ nerovnost:

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{x+y+z}{2}. \tag{6.5}$$

Řešení (s využitím *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti* (viz [12])). Pro řešení této nerovnosti vyžijeme opět *Cauchyovu-Swcharzovu nerovnost* a to tak, že za a_1^2, a_2^2, a_3^2 dosadíme po řadě $\frac{x^2}{y+z}$, $\frac{y^2}{z+x}$, $\frac{z^2}{x+y}$ a za b_1^2, b_2^2, b_3^2 dosadíme po řadě $(y+z)$, $(z+x)$, $(x+y)$. Dostaneme:

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \cdot ((y+z)+(z+x)+(x+y)) \geq (x+y+z)^2.$$

Výraz můžeme snadno upravit do podoby:

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \cdot 2 \cdot (x+y+z) \geq (x+y+z) \cdot (x+y+z).$$

Nyní můžeme obě strany nerovnosti vydělit kladným výrazem $2(x+y+z)$ a získáme:

$$\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}\right) \geq \frac{(x+y+z)}{2},$$

což je přesně dokazovaná nerovnost (6.5).

■

Nadaní středoškoláci se s *Cauchyovou-Schwarzovou nerovností* setkají také při řešení matematické olympiády. Příkladem může být následující úloha převzatá z ústředního kola 63. ročníku. Autory (včetně řešení) jsou Jaromír Šimsa a Tomáš Jurík. Tato úloha již byla rozebírána v kapitole 5, ve které bylo uvedeno řešení pomocí *Jensenovy nerovnosti*. Zde bude předvedeno řešení pomocí *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti*, které je ale komplikovanější. Nicméně autoři úlohy uvádí obě možnosti řešení.

Úloha 9 (viz [9]). Pro libovolná nezáporná reálná čísla a a b dokažte nerovnost

$$\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}} \geq \frac{a+b}{\sqrt{ab+1}} \tag{6.6}$$

a zjistěte, kdy nastane rovnost.

Řešení (s využitím *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti* (viz [9])). Nejprve se zaměříme na případy, kdy $a = 0$ nebo $b = 0$. V obou těchto případech platí vztah triviálně a nastává v něm rovnost. Dále už uvažujeme, že jsou a, b kladná čísla a postupujme následovně:

1. Pomocí *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti*, která pro čtyři reálná čísla a_1, a_2, b_1, b_2 vypadá takto:

$$(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2), \tag{6.7}$$

dokážeme platnost tohoto pomocného vztahu:

$$\left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right) + (au + bv) \geq (a+b)^2. \tag{6.8}$$

Dosaďme do nerovnosti (6.7) $a_1 = \sqrt{a \cdot u}$, $b_1 = \sqrt{\frac{a}{u}}$, $a_2 = \sqrt{b \cdot v}$ a $b_2 = \sqrt{\frac{b}{v}}$, čímž získáme:

$$\left(\sqrt{a \cdot u} \cdot \sqrt{\frac{a}{u}} + \sqrt{b \cdot v} \cdot \sqrt{\frac{v}{b}}\right)^2 \leq \left((\sqrt{u \cdot a})^2 + (\sqrt{b \cdot v})^2\right) \cdot \left(\left(\sqrt{\frac{a}{u}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{b}{v}}\right)^2\right).$$

Což snadno upravíme do podoby:

$$(a+b)^2 \leq (au \ + bv) \cdot \left(\frac{a}{u} + \frac{b}{v}\right).$$

2. Nyní do nerovnosti (6.8) můžeme dosadit $u = \sqrt{b^2+1}$ a $v = \sqrt{a^2+1}$:

$$(a+b)^2 \leq \left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right) \cdot (a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}). \quad (6.9)$$

- Druhý činitel pravé strany vztahu (6.9) nejprve upravíme do podoby:

  $$(a\sqrt{b^2+1} + b\sqrt{a^2+1}) = \sqrt{a}\sqrt{ab^2+a} + \sqrt{b}\sqrt{a^2b+b}$$

  a následně můžeme užitím (jiné) *Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti*, kde $a_1 = \sqrt{a}$, $b_1 = \sqrt{ab^2+a}$, $a_2 = \sqrt{b}$ a $b_2 = \sqrt{a^2b+b}$, shora omezit pravou stranu předchozí rovnosti:

  $$\sqrt{a}\sqrt{ab^2+a} + \sqrt{b}\sqrt{a^2b+b} \leq \sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b}.$$

  Jednoduchou úpravou získáváme:

  $$\sqrt{a+b}\sqrt{ab^2+a+a^2b+b} = \sqrt{a+b}\sqrt{(a+b)(ab+1)} = (a+b)\sqrt{ab+1}.$$

- Nyní využijeme dříve odvozený vztah:

$$\sqrt{a}\sqrt{ab^2+a}+\sqrt{b}\sqrt{a^2b+b}\leq (a+b)\sqrt{ab+1}.$$

Díky němu bude spolu s nerovností (6.9) platit také tato:

$$(a+b)^2 \leq \left(\frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}}\right)\cdot (a+b)\sqrt{ab+1}.$$

Obě strany této nerovnosti můžeme vydělit kladným výrazem $(a+b)\cdot\sqrt{ab+1}$:

$$\frac{(a+b)}{\sqrt{ab+1}} \leq \frac{a}{\sqrt{b^2+1}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+1}},$$

což je požadovaná nerovnost.

3. Nyní se zaměříme na část zadání pátrající po rovnosti zadaného vztahu (6.6). Již na začátku řešení bylo určeno, že rovnost nastane při nulovém a nebo b. Pro získání dalšího případu rovnosti se zaměříme na vztah (6.8).

   Levou stranu této nerovnosti snadno převedeme do tvaru:

   $$\frac{a^2uv+abv^2+abu^2+b^2vu}{uv} \geq (a+b)^2.$$

   Dále můžeme pravou stranu vztahu upravit podle vzorce a vynásobit obě strany nerovnosti kladným výrazem uv:

   $$a^2uv+abv^2+abu^2+b^2vu \geq uva^2+2abuv+b^2uv,$$

   což snadno upravíme do podoby:

   $$abv^2+abu^2 \geq 2abuv.$$

   Získaný vztah můžeme vydělit kladným výrazem ab:

   $$v^2+u^2 \geq 2uv.$$

Nyní stačí využít jednoduché nerovnosti, popsané v kapitole 3.1. Výraz totiž snadno upravíme do tvaru:

$$v^2 - 2uv + u^2 = (u - v)^2 \geq 0,$$

z čehož vyplývá, že rovnost nastane v případě, že $u = v$. Což znamená, že musí platit $\sqrt{b^2 + 1} = \sqrt{a^2 + 1}$, čili třetím případem rovnosti (kromě variant $a = 0$ nebo $b = 0$) je $a = b$.

$\blacksquare$

6.3 Cauchyova-Schwarzova nerovnost na vysoké škole

Podobně jako trojúhelníková nerovnost, také *Cauchyova-Schwarzova nerovnost* může být užita v širším kontextu. Platná je totiž v každém unitárním prostoru. Unitární prostor je takový vektorový prostor V, ve kterém platí, že ke každé dvojici prvků $u, v \in V$ je jednoznačně přiřazeno číslo, které nazýváme *skalární součin.*

Před zavedením samotného skalárního součinu a prostoru se skalárním součinem je potřeba definovat vektorový prostor.

Definice 6.3.1 (dle [7])**.** *Vektorovým prostorem* nazýváme každou neprázdnou množinu X, na níž jsou definovány operace sčítání $(+)$ a násobení $(\cdot)$ číslem:

$$+ : X \times X \to X,$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$$

splňující následující podmínky:

1. $\forall x, y \in X : x + y = y + x$ (komutativita),
2. $\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativita vzhledem k „+“),
3. $(\exists 0 \in X)(\forall x \in X) : x + 0 = x$ (nulový prvek),
4. $(\forall x \in X)(\exists (-x) \in X) : x + (-x) = 0$ (opačný prvek),

5. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall x \in X) : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (asociativita vzhledem k „·“),

6. $\forall x \in X : 1 \cdot x = x$,

7. $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})(\forall x, y \in X) : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha, \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributivita).

Nyní již můžeme přejít k samotné definici prostoru se skalárním součinem.

Definice 6.3.2 (dle [7])**.** *Prostor se skalárním součinem* nazýváme každý vektorový prostor $X = (X, +, \cdot)$, na němž je definováno zobrazení (tzv. *skalární součin*):

$$(\cdot, \cdot) : X \times X \to \mathbb{R}$$

splňující podmínky:

1. $\forall y \in X : x \longmapsto (x, y)$ je lineární zobrazení na X,

2. $\forall x, y \in X : (x, y) = (y, x)$,

3. $\forall x \in X : (x, x) \geq, (x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

Lineárním zobrazením nazýváme libovolné zobrazení, které zachovává operace násobení a sčítání.

Dle [7] se dá snadno dokázat, že je-li X prostor se skalárním součinem, je zobrazení $\| \cdot \|: X \to \mathbb{R}$ definované předpisem $\| x \| := \sqrt{(x, x)}$ normou na X indukovanou skalárním součinem.

Na vysoké škole se s *Cauchyovo - Schwarzovou nerovností* můžeme setkat v takovéto podobě:

Věta 6.3.1 (dle [7])**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro každé $x, y \in X$ platí*

$$| (x, y) | \leq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)} = \| x \| \cdot \| y \| .$$

Důkaz této věty z pohledu vysokoškolské matematiky je uveden v [7]. Ve stejném pramenu jsou uvedeny i následující příklady prostorů, na kterých platí výše uvedená věta.

1. Prostor $X = \mathbb{R}^n$ se skalárním součinem

$$(x, y) := x_1 y_1 + ... + x_n y_n = \sum_{k=1}^{n} (x_k, y_k),$$

kde $x = (x_1, ..., x_n)$, $y = (y_1, ...y_n) \in \mathbb{R}^n$.

2. Prostor $X = L^2(0, 1)$ se skalárním součinem

$$(f, g) := \int_0^1 f(x) g(x) dx,$$

kde $f, g \in L^2(0, 1)$.

7 Nerovnosti mezi průměry

Vedle aritmetického průměru a geometrického průměru se na některých středních školách vyskytuje také zmínka o harmonickém a kvadratickém průměru. Mezi těmito čtyřmi průměry existují vztahy, které středoškoláci hojně využívají zejména v matematických olympiádách.

Všechny tyto průměry se vždy počítají na nějaké zadané množině čísel, označme ji nyní X. Pro aritmetický průměr na množině X se užívá zkratka $A(X)$, pro geometrický pak $G(X)$, označení $K(X)$ představuje kvadratický průměr a $H(X)$ harmonický průměr na množině X.

Definice 7.0.1. Nechť $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ je množina reálných čísel. Pak aritmetický průměr $A(X)$ a kvadratický průměr $K(X)$ zavádíme následovně:

- $A(X) = A(a_1, a_2, ..., a_n) = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$
- $K(X) = K(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}} = A(a_1^2, a_2^2, ..., a_n^2)$

Definice 7.0.2. Nechť $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ je množina reálných nenulových čísel. Pak harmonický průměr $H(X)$ definujeme takto:

$$H(X) = H(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{A\left(\frac{1}{a_1}, ..., \frac{1}{a_n}\right)} = \frac{1}{A\left(\frac{1}{X}\right)},$$

kde symbolem $\frac{1}{X}$ značíme množinu $\{\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}\}$.

Definice 7.0.3. Nechť $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ je množina nezáporných reálných čísel. Pak geometrický průměr $G(X)$ zavádíme následovně:

$$G(X) = G(a_1, a_2, ..., a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

7.1 AG nerovnost

Termín „AG nerovnost“ v matematice označuje vztah mezi aritmetickým a geometrickým průměrem. Zatímco aritmetický průměr n prvků získáme jejich součtem vyděleným n, geometrický průměr je roven $n-t\acute{e}$ odmocnině součinu prvků (viz výše).

Věta 7.1.1. *Pro aritmetický a geometrický průměr libovolné množiny X nezáporných čísel platí:*

$$G(X) \leq A(X). \tag{7.1}$$

Dle [14] existuje velké množství důkazů této populární nerovnosti. Autor se domnívá, že nejstarší důkaz předvedl A. L. Cauchy kolem roku 1820 a důležitost mu přikládá také kvůli užití regresivní indukce.

Důkaz regresivní indukcí dle [14]. Důkaz lze rozdělit do několika kroků zejména v závislosti na počtu prvků množiny X.

1. Pro $n = 2$, tedy $X = \{a_1, a_2\}$.
   V kapitole 3 byla dokázána nerovnost:

   $$ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \tag{7.2}$$

   pro všechna nezáporná čísla a a b.

   Nyní si lze zvolit $a = \sqrt{a_1}$ a $b = \sqrt{a_2}$. Tuto substituci dosadíme do nerovnosti (7.2) a získáme:

   $$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \tag{7.3}$$

   neboli $G(a_1, a_2) \leq A(a_1, a_2)$.

2. Pro $n = 4$, tedy $X = \{a_1, a_2, ...a_4\}$.

   Z předchozího kroku víme, že platí

   $$\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \qquad a \qquad \sqrt{a_3 a_4} \leq \frac{1}{2}(a_3 + a_4).$$

   Jelikož se jedná o dvě nerovnice, jejichž obě strany jsou nezáporné, lze provést jejich součin a pak je odmocnit:

   $$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \leq \sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\frac{1}{2}(a_3 + a_4)}. \tag{7.4}$$

Nyní použijeme substituci, tentokrát ve tvaru:

$$x_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2), \qquad x_2 = \frac{1}{2}(a_3 + a_4).$$

Pro x_1 a x_2 použijeme (7.3) a získáme nerovnost:

$$\sqrt{\frac{1}{2}(a_1 + a_2)\frac{1}{2}(a_3 + a_4)} \leq \frac{\frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(a_3 + a_4)}{2}.$$

Po úpravě pravé strany nerovnosti dostáváme spolu s nerovností (7.4) již dokazovanou AG nerovnost:

$$\sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \leq \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4},$$

neboli

$$G(X) \leq A(X).$$

3. Pro $n = 2^k$, neboli $X = \{a_1, a_2, ..a_{2^k}\}$

Dalším krokem je matematická indukce, kterou lze dokázat AG nerovnost na množině s počtem prvků rovným mocnině dvou.

Budeme předpokládat, že AG nerovnost platí pro $n = 2^k$ a chceme dokázat, že platí také pro $m = 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k = 2n$.
Nechť $X = \{a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}\}$, zvolme množinu Y a množinu Z tak, že $Y = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ a $Z = \{a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}\}$. Pak (dle indukčního předpokladu) platí:

$$G(Y) = G(a_1, a_2, ..., a_n) \leq A(a_1, a_2, ..., a_n) = A(Y)$$

$$G(Z) = G(a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}) \leq A(a_{n+1}, a_{n+2}, ..., a_{2n}) = A(Z).$$

Obě strany těchto nerovností jsou nezáporná čísla, proto je možné je vynásobit a odmocnit:

$$\sqrt{G(Y)G(Z)} \leq \sqrt{A(Y)A(Z)}. \tag{7.5}$$

Nyní v (7.3) substituujeme $a_1 = A(Y)$ a $a_2 = A(Z)$:

$$\sqrt{A(Y)A(Z)} \leq \frac{1}{2}(A(Y) + A(Z)) \tag{7.6}$$

Po spojení nerovností (7.5) a (7.6) dostaneme tvar:

$\sqrt{G(Y)G(Z)} \leq \frac{1}{2}(A(Y) + A(Z))$ neboli $G(X) \leq A(X)$.

4. Ostatní přirozená čísla $n \in \mathbb{N}$.
   V tomto kroku přijde právě zmíněná regresivní indukce, díky které (mimo jiné) je tento důkaz (dle [14]) zajímavý. Užitím zpětné indukce tvrdíme, že pokud AG nerovnost platí pro množinu Y s $n \geq 2$ prvky, platí také pro množinu s $n-1$ prvky.

   Nechť X je libovolná množina s $n-1$ nezápornými prvky . Tedy: $X = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$. Zkonstruujme množinu Y s n prvky tak, že $Y = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n\}$, přičemž prvek $a_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}$. Všechny prvky množiny Y jsou tedy rovněž nezáporné.

   Dle indukčního předpokladu platí nerovnost $G(Y) \leq A(Y)$:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \sqrt[n]{\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1}}$$
$$\leq$$
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + \frac{a_1+a_2+...+a_{n-1}}{n-1}}{n} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{n-1} \tag{7.7}$$

   Nerovnost (7.7) lze zapsat také jako:

$$(G(X))^{\frac{n-1}{n}} (A(X))^{\frac{1}{n}} \leq A(X).$$

   Po vynásobení obou stran nerovnosti kladným výrazem $(A(X))^{-\frac{1}{n}}$ dostaneme tvar:

$$(G(X))^{\frac{n-1}{n}} \leq (A(X))^{\frac{n-1}{n}}.$$

   Nyní již stačí obě strany nerovnosti umocnit výrazem $\frac{n-1}{n}$ a získáváme AG nerovnost na libovolné množině X s $n-1$ kladnými prvky.

□

7.2 GH nerovnost

Výrazem „GH nerovnost“ (nebo též „HG nerovnost“) označujeme nerovnost mezi geometrickým a harmonickým průměrem.

Věta 7.2.1. *Pro harmonický a geometrický průměr libovolné množiny X kladných čísel platí:*

$$H(X) \leq G(X). \tag{7.8}$$

Jelikož jsme již dokázali „AG nerovnost“, můžeme její platnost využít i v následujícím důkazu „GH nerovnosti“. Stejným způsobem k problematice přistupuje i autor [14].

Důkaz s využitím AG nerovnosti dle [14]. Postup lze rozdělit do následujících kroků:

1. Nejprve se zaměříme na definici aritmetického a harmonického průměru. Vyplývá z ní, že:
$$A\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{H(X)} \tag{7.9}$$

2. Nyní se budeme soustředit na definici samotného geometrického průměru. Vyplývá z ní, že:
$$G\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{G(X)} \tag{7.10}$$

3. Již dokázanou AG nerovnost (7.2) můžeme zapsat také takto:
$$G\left(\frac{1}{X}\right) \leq A\left(\frac{1}{X}\right)$$
Levou stranu této nerovnosti upravíme pomocí rovnosti (7.10) a pravou stranu přepíšeme podle vztahu (7.9) a získáme:
$$\frac{1}{G(X)} \leq \frac{1}{H(X)} \tag{7.11}$$

4. Na závěr již zbývá jen obě strany nerovnosti (7.11) vynásobit kladným výrazem $G(X) \cdot H(X)$ a věta 7.2.1 je dokázána.

□

7.3 KA nerovnost

Třetí významnou nerovností mezi průměry je tzv. „KA nerovnost“, která vyjadřuje vztah mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem.

Věta 7.3.1. *Pro kvadratický a aritmetický průměr libovolné množiny X reálných čísel platí:*

$$A(X) \leq K(X). \tag{7.12}$$

Důkaz s využitím Cauchyovy-Schwarzovy nerovnosti [23]. V kapitole 6 byla dokázána Cauchyova-Schwarzova nerovnost. Nyní tedy předpokládáme její platnost a postupujeme pomocí následujících kroků (viz [23]).

1. Nejprve do nerovnosti (6.1) dosadíme $b_i = 1$, $\forall i = 1, 2, ..., n$:

$$(a_1 1 + a_2 1 + ... + a_n 1)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)\underbrace{(1^2 + 1^2 + ... + 1^2)}_{n}.$$

2. Po roznásobení získáváme tvar:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \leq na_1^2 + na_2^2 + ... + na_n^2.$$

3. Obě strany předešlé nerovnosti můžeme vydělit kladným výrazem n^2:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}\right)^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{n}.$$

4. Nyní již zbývá jen obě strany nerovnosti odmocnit a důkaz je hotov.

□

V [23] je uveden také důkaz užitím Jensenovy nerovnosti.

7.4 Nerovnosti mezi průměry na střední škole

Ve standardní výuce matematiky na střední škole se zpravidla setkáme jen se zavedením aritmetického a případně geometrického průměru. Ostatní průměry patří spíše do nástavbového učiva.

Příkladem zadání úlohy na aritmetický průměr může být následující cvičení převzaté z učebnice matematiky pro střední školy [16].

Úloha 10. (viz [16])

Aritmetický průměr dvou čísel je 44. Jedno z nich je o 18 větší než druhé. Která jsou to čísla?

Řešení. Žáci si při řešení úlohy pravděpodobně jedno číslo označí písmenem x, druhé y a sestaví soustavu rovnic:

$$\frac{x+y}{2} = 44,$$
$$x - 18 = y.$$

Snadno zjistíme, že $x = 53$ a $y = 35$.

Nejedná se tedy o úlohu přímo na nerovnosti mezi průměry. Ty se vyskytují spíše v různých nástavbových zájmových aktivitách jako jsou olympiády a semináře.

Následující úloha je převzata z domácí části 68. ročníku matematické olympiády kategorie C. Autorem zadání i řešení je Patrik Bak.

Úloha 11. (viz [3]) Nechť a, b, c jsou kladná reálná čísla, jejichž součet je 3, a každé z nich je nejvýše 2. Dokažte, že platí nerovnost:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3abc < 9. \tag{7.13}$$

Řešení (s využitím *AG nerovnosti* (viz [3])). Víme, že jsou všechna čísla a, b, a c kladná ne větší než 2. Proto platí: $a^2 \leq 2a$, $b^2 \leq 2b$ a $c^2 \leq 2c$. Pokud sečteme tyto tři nerovnosti, dostaneme vztah:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 2a + 2b + 2c = 2(a + b + c) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Uvážíme-li navíc, že součet čísel a, b, c je roven třem, vyplyne, že se hraniční hodnotě 2 může rovnat nejvíce jedno z těchto čísel. Proto platí nerovnost:

$$a^2 + b^2 + c^2 < 6. \tag{7.14}$$

Zaměříme-li pozornost na dokazovanou nerovnost (7.13) a v souvislosti s platností nerovnosti (7.14), zbývá dokázat, že:

$$3abc \leq 3. \tag{7.15}$$

Dále využijeme obecně platnou *AG nerovnost*: $\sqrt[3]{abc} \leq \dfrac{a+b+c}{3}$.
Jelikož (dle zadání úlohy) je součet čísel $a+b+c=3$, získáváme:

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} = \frac{3}{3} = 1,$$

neboli: $\sqrt[3]{abc} \leq 1$, z čehož vyplývá, že dokazovaná nerovnost (7.15) platí.

■

Úloha na *AG nerovnost* se vyskytla také v letošním zadání matematické olympiády (70. ročník) a to v domácí části kategorie B. Autory zadání i řešení jsou Mária Dományová a Patrik Bak.

Úloha 12. (viz [2]) Jaká je největší možná hodnota výrazu $V = xy - x^3y - xy^3$, jsou-li x, y kladná reálná čísla?

Řešení (s využitím *AG nerovnosti* (viz [2])). Pro řešení tohoto příkladu použijeme postupně dvě *AG nerovnosti*. Nejprve si však zadaný výraz lehce upravíme:

$$xy - x^3y - xy^3 = xy \cdot (1 - x^2 - y^2). \tag{7.16}$$

Ze zadání víme, že činitel xy je kladný, pokud má být tedy výraz $V = xy \cdot (1 - x^2 - y^2)$ co největší, potřebujeme aby byl druhý činitel kladný.

Pro horní odhad výrazu V využijeme *AG nerovnost*, která má pro dvě reálná kladná čísla a, b tvar:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}. \tag{7.17}$$

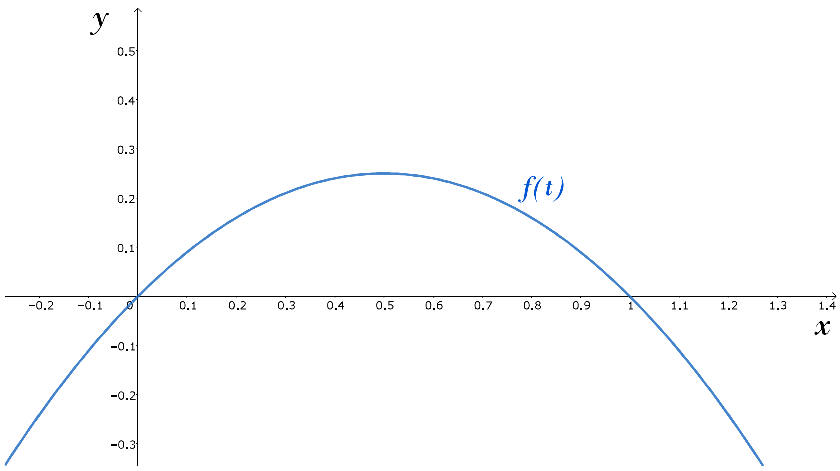
- Nejprve odhadneme výraz xy a to tak, že do nerovnosti (7.17) dosadíme za a a b po řadě x^2 a y^2. Získáme:

$$xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}.$$

Obě strany této nerovnosti můžeme vynásobit kladným výrazem $(1 - x^2 - y^2)$, dostaneme:

$$V \ = xy \cdot (1 - x^2 - y^2) \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \cdot (1 - (x^2 + y^2)). \qquad (7.18)$$

- Nyní zaměříme pozornost na druhý činitel pravé strany nerovnosti (7.18). Označíme součet $x^2 + y^2$ jako t a budeme hledat maximum funkce $f(t) = t(1 - t)$ pro $t \in (0, 1)$. Graf této funkce je znázorněn v obrázku 7.1.



Obrázek 7.1: Funkce $f(t)$

Pro nalezení maxima funkce f můžeme využít opět *AG nerovnost* (7.17), do které za a dosadíme t a za b dosadíme $1 - t$:

$$\sqrt{t(1-t)} \leq \frac{1}{2}.$$

Po umocnění na druhou a dosazení $t = x^2 + y^2$ dostaneme:

$$(x^2 + y^2) \cdot (1 - (x^2 + y^2)) \leq \frac{1}{4}.$$

Uvážíme-li oba předchozí body dohromady, vyplyne, že $V \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$.

Zbývá ověřit, že výraz V může skutečně hodnoty $\frac{1}{8}$ nabývat. Z uvedeného postupu vyplývá, že maximální hodnoty nabude výraz V v případě, že $x^2 = y^2$ a $t = 1 - t$ pro $t = x^2 + y^2$. A to proto, že v *AG nerovnosti* (7.16) nastává rovnost v případě, že se prvky a a b rovnají.

Po dosazení $t = x^2 + y^2$ a $x^2 = y^2$ do rovnosti $t = 1 - t$ dostaneme:

$$2x^2 = 1 - 2x^2,$$

z čehož po úpravě získáme: $x = \frac{1}{2}$. Výraz V tedy nabývá maxima pro $x = y = \frac{1}{2}$ a to hodnoty $\frac{1}{8}$.

$\blacksquare$

8 Matematické nerovnosti jako součást výuky na střední škole

8.1 Shrnutí současné situace

V současné době se matematické nerovnosti ve vyučovacím procesu na středních školách příliš nevyskytují. Částečnou výjimkou je snad trojúhelníková nerovnost, se kterou se žáci v určité míře setkají již na základní škole. Na střední škole ji aplikují v příkladech a převážně na gymnáziích se také objevuje její důkaz.

Studenti střední školy v příkladech využívají také nezápornost druhé mocniny reálných čísel. Zejména na matematicky orientovaných středních školách se můžeme setkat i s dalšími typy nerovností. Nerovnosti mezi průměry bývají využívány v důkazových úlohách při procvičování tématického celku Argumentace a ověřování.

Naopak s Jensenovou a Cauchyovou-Schwarzovou nerovností se na českých středních školách téměř nesetkáme. Výjimkou můžou být různé volitelné či volnočasové semináře, které některé školy nadaným studentům poskytují.

8.2 Námět na lepší zítřky

V předchozí sekci bylo shrnuto, že nerovnosti lze ve středoškolské matematice považovat spíše za okrajovou kapitolu. Studenti střední školy nejsou zvyklí tento typ úloh řešit a pokud se s nějakým zadáním setkají, často je pro ně těžko srozumitelné. Což je trošku škoda, neboť se při řešení tohoto typu úloh rozvíjí logické myšlení, student se učí argumentovat a obecně hledat důkazy ke svým tvrzením. Osvojit si tento způsob myšlení a argumentace je jistě důležité i pro běžné situace v reálném životě.

Na druhou stranu vzdělávací plány nejsou nafukovací a už nyní se často setkáváme s názory, že jsou zbytečně obsáhlé. Studenti jsou přesyceni informacemi a zapomínají i základy. Téma nerovností určitě není látka na pár hodin matematiky, jeho smysluplné začlenění by si vyžádalo spoustu hodin výuky. Není žádoucí navyšovat počet hodin, co studenti tráví ve škole, neboť se často už nyní blíží pracovní době dospělého člověka. Logicky se tedy dostáváme k závěru, že by bylo nutné zkrátit výuku ostatních témat v matematice nebo v jiném předmětu.

A nyní nastává otázka, zda bychom touto změnou nevyřadili základnější témata a nenahradili je tímto poměrně pokročilým tématickým celkem.

Pro většinovou populaci je téma nerovností možná až příliš abstraktní. Máme tu ale také nadané žáky. A také jim je potřeba věnovat dostatečnou pozornost a podporu. Tak jako žákům s různými hendikepy pomáháme v rámci inkluze s jejich efektivní kompenzací, měli bychom nadaným žákům pomáhat rozvíjet jejich přirozený talent a nadání. Ostatně s lehkou nadsázkou právě na nich může záviset kvalita našeho budoucího života.

Na gymnáziích a některých dalších střední školách se můžeme setkat s volitelnými či zájmovými semináři, ve kterých se studenti věnují nadstavbovým tématům, jako jsou například nerovnosti. Studenti se zde pod vedením učitele učí řešit rozmanité úlohy z matematicky zaměřených olympiád a korespondenčních seminářů. Často se zde vzájemně motivují či mezi sebou soutěží. A to je právě směr, který považuji za správný. Nadaní žáci či jen ti, které matematika baví, zde mají prostor pro rozvoj svých znalostí a dovedností ve společnosti podobně smýšlejících vrstevníků bez nechápavých pohledů spolužáků.

8.3 Návrh témat do rozšiřujících seminářů

Jedním z možných námětů do rozšiřujícího semináře je Trojúhelníková nerovnost. V kapitole 4 bylo uvedeno, že některé typy důkazů byli schopni provést již staří Řekové. Uplynulo spoustu let, během kterých se objevila celá řada nejrůznějších důkazů. Zejména ty založené na geometrických principech by mohly být pochopitelné a zároveň atraktivní pro nadané středoškoláky.

Na středních školách se studenti dozví, že existuje více různých typů průměru. Některé využívají ve fyzice při zpracování laboratorních protokolů.

Vztah mezi jednotlivými průměry již ale příliš zkoumán nebývá. A právě to by mohlo být studentům vysvětleno například během několikahodinového zájmového semináře.

Dalším možným obsahem rozšiřujících seminářů je jistě zmíněné řešení matematických olympiád a korespondenčních seminářů, které na některých školách probíhá již nyní. Tyto úlohy však bývají až uměle vytvořené, proto by studenty mohlo zaujmout zpestření výše zmíněnými návrhy.

Literatura

[1] Ault, S. *Taxicab Geometry: History and Formula* [online]. 2003-2020. Dostupné z: `<https://study.com/academy/lesson/taxicab-geometry-history-formula.html>`.

[2] Bak, P. Calábek, P. Dományová, M. Zhouf. J. *70. ročník matematické olympiády I. kolo kategorie B* [online]. 2020-2021. Dostupné z: `<http://www.matematickaolympiada.cz/media/6631128/b70i.pdf>`.

[3] Bak, P. Calábek, P. Rolínek, M. Šimsa, J. Švrček, J. Tkadlec, J. *68. ročník matematické olympiády I. kolo kategorie C* [online]. 2018-2019. Dostupné z: `<http://www.matematickaolympiada.cz/media/5433403/c68i.pdf>`.

[4] Boček, L. *Nerovnosti a nerovnice* [online]. [cit. 2020/10/29]. Dostupné z: `<https://olympiada.karlin.mff.cuni.cz/prednasky/bocek1.pdf>`.

[5] Boček, L. Charvát, J. Zhouf, J. *Matematika pro gymnázia: Rovnice a nerovnice.* Prometheus, 2010. ISBN 978-80-7196-362-2.

[6] Borongan, M. L. A. Someyama, N. New Proofs of Triangle Inequalities, 2018.

[7] Bouchala, J. *Úvod do funkcionální analýzy* [online]. 2012. [cit. 2020/04/08]. Dostupné z: `<http://mi21.vsb.cz/sites/mi21.vsb.cz/files/unit/uvod_do_funkcionalni_analyzy.pdf>`.

[8] Delgado, R. V. Manfrino, R. B. Ortega, J. A. G. *Inequalities: a Mathematical Olympiad approach.* Boston: Birkhauser, 2009. ISBN 978-3-0346-0049-1.

[9] Harminc, M. Jurík, T. Novotný, P. Rolínek, M. Švrček, T. Šimša. J. *63. ročník matematické olympiády III. kolo kategorie A* [online]. 2014. Dostupné z: `<http://www.matematickaolympiada.cz/media/924674/a63iii.pdf>`.

[10] Hoos, H. H. Stützle, T. *Science, health and medical journals, Hamming Distance* [online]. 2007. Dostupné z: `<https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/hamming-distance/>`.

[11] Hung, P. K. *Secrets in Inequalities.* GIL Publishing House, 2007. ISBN 978-973-9417-88-4.

[12] JANKOVÁ, L. Nerovnosti a jejich důkazy (včetně počítačových). Master's thesis, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity v Plzni, 2014.

[13] KAMENCOVÁ, B. Řešení složitějších úloh na trigonometrii pravoúhlého a obecného trojúhelníku. Master's thesis, Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2006.

[14] KUFNER, A. *Nerovnosti a odhady.* Mladá fronta, 1975. ISBN 23-049-75.

[15] MOLNÁR, J. *Planimetrie, Matematika pro střední odborné školy.* Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-415-5.

[16] ODVÁRKO, O. *Rovnice a nerovnice.* Prometheus, 2015. ISBN 978-80-7196-455-1.

[17] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia: Planimetrie.* Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-415-5.

[18] ŠALOM, P. Nerovnosti pro nadané žáky středních škol. Master's thesis, Univerzita Karlova v Praze, Matematicko–fyzikální fakulta, 2012.

[19] STEELE, J. M. *The Cauchy-Schwarz Master Class.* The Mathematical Association of America, 2004. ISBN 978-0-521-83775-0.

[20] UK, M. *PraSe — matematický korespondenční seminář* [online]. 2008/2009. Dostupné z: `<https://prase.cz/archive/29/9.pdf>`.

[21] WU, H. WU, S. *Various Proofs of the Cauchy-Schwarz Inequality* [online]. 2009. [cit. 2020/10/29]. Dostupné z: `<https://rgmia.org/papers/v12e/Cauchy-Schwarzinequality.pdf>`.

[22] ZHOUF, J. *Rovnice a nerovnice I, 3 díl.* Fraus, 2019. ISBN 978-80-7489-491-6.

[23] *Art of Problem Solving* [online]. [cit. 2020/10/29]. Dostupné z: `<https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Root-Mean_Square-Arithmetic_Mean-Geometric_Mean-Harmonic_mean_Inequality>`.