



FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD  
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY  
V PLZNI

# Řízení systémů s dvojitým lineárním paralelním pohonem

Bakalářská práce

Vypracoval: Michael Gulyj

Vedoucí práce: RNDr. Jana Königsmarková

Plzeň, 2023

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd  
Akademický rok: 2022/2023

# ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Michael GULYJ**  
Osobní číslo: **A20B0322P**  
Studijní program: **B0714A150005 Kybernetika a řídicí technika**  
Specializace: **Automatické řízení a robotika**  
Téma práce: **Řízení systémů s dvojitým lineárním paralelním pohonem**  
Zadávající katedra: **Katedra kybernetiky**

## Zásady pro vypracování

- Seznamte se s obecnou problematikou řízení systémů s dvojitým paralelním pohonem, tzv. model dual-driven gantry stage. Podrobně analyzujte systém, kdy je polohované závaží umístěno pevně ale na libovolném místě spojnice pohonů.
- Sestavte matematický model takového dynamického systému, vytvořte a analyzujte linearizovaný model.
- Navrhněte metodou přiřazení Jordanovy formy vhodnou stavovou, resp. výstupní zpětnou vazbu, analyzujte různé Jordanovy formy a výsledné vlastnosti a výhody navrženého řízení.
- Nasimulujte řízený systém v podobě MIL simulace ve zvoleném software.
- Analyzujte a porovnejte navržená řešení s jinými přístupy, např. s decentralizovaným řízením, či přístupem zvaným cross-coupling.

Rozsah bakalářské práce: **30-40 stránek A4**  
Rozsah grafických prací:  
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

Xie, Hanjun, and Qinruo Wang. „Modeling Dual-Drive Gantry Stages with Heavy-Load and Optimal Synchronous Controls with Force-Feed-Forward Decoupling.“ Entropy 24.8 (2022): 1153.  
Xie, Bin, et al. „Advanced Synchronous Control of Dual Parallel Motion Systems.“ IEEE Transactions on Industrial Electronics (2022).  
Gomand, Julien, et al. „Dual-drive gantry stage decoupling control based on a coupling model.“ Electro-Motion 15.2 (2008): 94-98.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jana Königsmarková**  
Výzkumný program 1

Datum zadání bakalářské práce: **17. října 2022**  
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2023**



**Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.**  
děkan



**Prof. Ing. Josef Psutka, CSc.**  
vedoucí katedry

## Prohlášení

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě bakalářskou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne 22. května 2023

.....

## Poděkování

Tímto bych rád poděkoval RNDr. Janě Königsmarkové za vedení bakalářské práce, poskytování cenných rad, za čas věnovaný konzultacím, ochotu a také trpělivost při vypracování práce.

Dále děkuji své rodině za podporu při studiu.

## Abstrakt

Bakalářská práce se zaměřuje na analýzu systému s dvojitým lineárním paralelním pohonem spolu s návrhem vhodného zpětnovazebního řízení založeného na změně dynamických vlastností systému pomocí přiřazení Jordanovy formy. Jsou zkoumány dva modely, model 4. řádu pro silové působení na vstupu a rozšířený model 6. řádu s napětím jako vstupní veličinou. V práci jsou analyzovány přístupy centralizovaného řízení, decentralizovaného řízení a následně i výstupní zpětná vazba pro různé Jordanovy formy. Práce se zabývá nalezením vhodných struktur Jordanových forem, které povedou na dobré chování uzavřeného systému. Všechny návrhy budou provedeny nejprve pro model se závažím pevně umístěným uprostřed spojnice pohonů a následně pro model s nesymetricky umístěným závažím.

**Klíčová slova:** H-gantry, Jordanova kanonická forma matice, decentralizace, synchronizace, minimální parametrizace, stavová zpětná vazba, výstupní zpětná vazba

## Abstract

This bachelor thesis is focused on analyzing a dual-driven gantry stage and designing a feedback control based on changing dynamical properties using the Jordan form assignment. Two models will be examined, a 4th order model with force on the input and an extended 6th order model with voltage on the input. Furthermore, the approaches of centralized control, decentralized control, and output feedback will be analyzed. The aim is to find suitable structures of Jordan canonical forms that will lead to good behavior of the closed loop. All designs will be done for a model with the load firmly placed in the middle of the perpendicular crossbeam and then for a model with an asymmetrically placed load.

**Key words:** H-gantry, Jordan canonical matrix form, decentralization, desynchronization, minimal parameterization, compensatory gain, state feedback, output feedback

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Obecná problematika</b>	<b>5</b>
2.1	Jordanova forma . . . . .	5
2.2	Podobnost matic . . . . .	7
2.3	Řiditelnost, pozorovatelnost . . . . .	7
2.4	Přiřazení Jordanovy formy stavovou zpětnou vazbou . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Odvození modelu s dvojitým lineárním paralelním pohonem</b>	<b>11</b>
3.1	Redukovaný model systému . . . . .	11
3.1.1	Popis systému pomocí diferenciálních rovnic . . . . .	12
3.1.2	Stavový popis systému . . . . .	12
3.2	Rozšířený model systému . . . . .	14
3.2.1	Popis systému pomocí diferenciálních rovnic . . . . .	14
3.2.2	Stavový popis systému . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Návrh zpětnovazebního řízení</b>	<b>15</b>
4.1	Redukovaný model systému . . . . .	15
4.1.1	Centralizované řízení . . . . .	16
4.1.2	Decentralizované řízení . . . . .	20
4.1.3	Výstupní zpětná vazba . . . . .	22
4.2	Rozšířený model systému . . . . .	25
4.2.1	Centralizované řízení . . . . .	27
4.2.2	Decentralizované řízení . . . . .	30
4.2.3	Výstupní zpětná vazba . . . . .	33
4.2.4	Experimentální simulace s polohovaným závažím . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Návrh stavové zpětné vazby pro modely s nesymetrickým umístěním závaží</b>	<b>37</b>
5.1	Redukovaný model systému . . . . .	37
5.1.1	Centralizované řízení . . . . .	37
5.1.2	Decentralizované řízení . . . . .	38
5.2	Rozšířený model systému . . . . .	40
5.2.1	Centralizované řízení . . . . .	40
5.2.2	Decentralizované řízení . . . . .	42
5.2.3	Výstupní zpětná vazba . . . . .	45
5.2.4	Experimentální simulace s polohovaným závažím . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Závěr</b>	<b>49</b>

# 1 Úvod

Systémy s dvojitým lineárním paralelním pohonem mají v dnešní době široká uplatnění, a to především v průmyslu, jako je například sériová výroba, logistika a skladování, robotika a automatizace či oblast 3D tisku. Podobné systémy obecně vyžadují neuvěřitelnou přesnost a robustnost, ovšem jejich řízení nemusí být tak jednoduché, především pokud pohybují se závažím, které není rovnoměrně rozloženo na spojnicí pohonů. Desynchronizace paralelních motorů by mohla vést k deformaci celé konstrukce. Z tohoto důvodu se systémy neobejdou bez zpětnovazebního řízení.

Systémy s dvojitým lineárním paralelním pohonem neboli dual-driven gantry stage představují širokou množinu mechanismů s motory upevněnými na dvou paralelních osách. Tyto motory (nejčastěji permanentní magnetické) jsou spojeny příčným nosníkem, se kterým ve stejném směru pohybují. Robotické kartézské systémy podobného typu mají v praxi mnoho podob, proto je o ně v poslední době zvýšený zájem ze strany průmyslové i akademické sféry. Systémy mohou nalézt své uplatnění například v oblastech laserového řezání, svařování, litografie, solárních panelů, LCD panelů, CNC strojů, přesné metrologie, 3D tiskáren, portálových jeřábů či CT skenování, [1, 2].

Někdy jsou tyto systémy také nazývány "H-gantry", jelikož jejich uspořádání připomíná tvar písmene H. V tomto rozložení je tah zatížení rovnoměrně rozložen na pohybové osy, což má za následek snížení deformačních účinků. Další výhodou může představovat robustnost podobného uspořádání. V momentě, kdy dojde k poškození jednoho z motorů, systém stále krátkou chvíli funguje, tudíž nemusí dojít k okamžité destrukci zařízení.

Dynamické vlastnosti paralelních pohonů budou ovlivněny mnoha faktory, například asymetrickou konstrukcí. Motory také mohou mít různé charakteristiky tlumení, nebo se s průběhem času či změnou teplot mohou měnit jejich mechanické vlastnosti. U většiny systémů je dokonce závaží umístěné na příčném nosníku pohyblivé, tudíž se mění těžiště konstrukce a na motory je vyvíjen rozdílný nápor. Při lineárním pohybu motorů může jednoduše vzniknout synchronní chyba, která povede k mírnému natočení příčného nosníku. Jelikož není fyzicky možné dokonale spojit nosník s paralelními jezci, může dojít k mechanickému opotřebení, v horším případě k deformaci a poškození systému, [1].

Nejčastěji se v literatuře autoři zabývají 3 typy způsobů řízení: master-master control (MMC), master-slave control (MSC) a cross-coupled control (CCC), [3].

- MMC - V systémech s tímto přístupem řízení jsou obecně řízeny oba paralelní pohony synchronně. Znamená to, že regulátory vysílají příkazy na obě osy ve stejných diskretních okamžicích. Jestliže senzory snímají polohu jednotlivých os přesně, je možné dosáhnout požadované synchronizace. Obecně ovšem víme, že v praxi není přesné snímání polohy příliš běžné. Synchronizace lze také dosáhnout za předpokladu, že působící chyba na obou paralelních senzorech je stejná. MMC řízení postrádá informaci o interakci mezi duálními osami, proto kvůli mechanické asymetrii a vnějším poruchám dosahuje pouze omezené synchronizace, [3, 4].
- MSC - Alternativní způsob řízení představuje přístup master-slave, kde jedna osa je primární (master) a druhá podřazená (slave). Osa "slave" má obecně

mnohem větší výkon a sleduje skutečnou polohu hlavní osy, kterou využívá jako vlastní referenční hodnotu. Svým řízením se poté snaží o co nejmenší rozdíl mezi jednotlivými polohami. Řízení na nadřazené ose může být na druhou stranu o něco pomalejší a především reguluje svoji polohu tak, aby odpovídala požadované hodnotě. Tento algoritmus je běžně užíván u systémů s vysokými požadavky na přesnost. Hlavní problém tohoto přístupu řízení představuje nevyhnutelné časové zpoždění přenosu signálu mezi jednotlivými osami, [4].

- CCC - Cross-coupled control prvně představený v roce 1980, vychází z přístupu MMC, [5]. Přístup bere v potaz desynchronizaci při navržení tzv. křížové vazby (cross-coupling), která reguluje chybu mezi polohami jednotlivých servopohonů pomocí úpravy referenční hodnoty a rychlosti. CCC regulátor je obecně těžký a časově náročný při náhodném ladění. Jakožto stavový regulátor CCC ignoruje mechanický vazební efekt mezi osami, což může opět vést ke snížení synchronizace především u systémů se složitou mechanickou strukturou, [3].

V práci se budeme zabývat návrhem stavové a výstupní zpětné vazby pomocí přiřazení Jordanovy formy s využitím přístupu MMC, kdy mají obě paralelní osy stejnou důležitost. Dále bude zkoumána možnost zjednodušení zpětné vazby ve formě decentralizace obou pohonů. Návrhy provedeme nejprve pro systém s umístěným závažím uprostřed příčného nosníku a poté pro variantu, kdy se těžiště nenachází uprostřed soustavy. Cílem bude nalézt vhodné Jordanovy formy, které povedou na zajímavé stavové či výstupní zpětné vazby s pokud možno co nejmenším stupněm desynchronizace. Při návrhu stavové zpětné vazby budeme využívat teorii odvozenou v práci [6] a procedury implementované v práci [7].

## 2 Obecná problematika

### 2.1 Jordanova forma

Jordanova kanonická forma představuje speciální typ blokově diagonální čtvercové matice, jež má určitou strukturu a definuje základní spektrální vlastnosti odpovídající matice. U každé matice můžeme provést její Jordanův kanonický rozklad a dvě podobné matice mají stejnou Jordanovu formu, [8, 9]. Jordanovu formu  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$  matice  $\mathbf{A}$  můžeme obecně zapsat ve tvaru:

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{k_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{J}_{k_n}(\lambda_n) \end{bmatrix}, \quad (1)$$

kde podmatice  $\mathbf{J}_{k_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , představuje takzvaný Jordanův blok. Číslo  $n$  tedy udává počet Jordanových bloků a odpovídá počtu lineárně nezávislých vlastních vektorů matice  $\mathbf{A}$ .

Velikost jednotlivých Jordanových bloků může být obecně různá. Počet Jordanových bloků příslušejících stejnému vlastnímu číslu udává jeho geometrickou násobnost. Součet velikostí všech Jordanových bloků příslušejících k témuž vlastnímu číslu je jeho algebraická násobnost, [8].



Chceme-li definovat reálnou Jordanovu formu, mohou být Jordanovy bloky dvojího typu. K reálnému vlastnímu číslu  $\lambda$  přísluší Jordanův blok

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Dvojici komplexních čísel  $\lambda = a \pm bi$  přísluší Jordanův blok typu

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{I}_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{I}_2 \\ & & & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

kde

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \quad \mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Komplexní Jordanovu formu bychom získali jednoduše pomocí bloků 2, kde vlastní číslo  $\lambda$  může být obecně reálné či komplexní. V této práci se nicméně budeme soustředit na reálnou Jordanovu formu, [9].

Speciálním typem může být Jordanova forma tvořená pouze z Jordanových bloků o velikosti  $1 \times 1$ , která odpovídá diagonální matici:

$$\mathbf{J}(\mathbf{A}) = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}, \quad (5)$$

kde  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  představují vzájemně různá reálná vlastní čísla matice.

Jiný příklad může představovat matice, která má všechna vlastní čísla reálná a totožná a pouze jeden reálný Jordanův blok (2) o velikosti  $n \times n$ ,

Tyto a mnoho dalších variant Jordanových forem bude uvažováno při navrhování stavové, resp. výstupní zpětné vazby.

Spektrální vlastnosti čtvercové matice jsou plně popsány buď její Jordanovou kanonickou formou, nebo pomocí invariantních polynomů této matice. Dvě matice jsou podobné, viz 2.2, právě tehdy, mají-li stejné invariantní polynomy. Každý z těchto nekonstantních invariantních polynomů má svůj stupeň. Jordanovu matici můžeme poté charakterizovat celočíselnou posloupností právě těchto stupňů nekonstantních invariantních faktorů, viz [6].

Uvažujme Jordanovu kanonickou formu ve tvaru (1) o dimenzi  $\mathbb{R}^{s \times s}$ . Nejprve vybereme všechny největší Jordanovy bloky matice  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$  příslušné k různým vlastním číslům matice  $\mathbf{A}$  a součet jejich řádů označíme  $\nu_1$ . Ze zbylých bloků Jordanovy matice opět vybereme všechny největší Jordanovy bloky příslušné k různým vlastním číslům, součet jejich řádů označíme  $\nu_2$ . Takto budeme postupovat v určování dalších přirozených čísel  $\nu_3, \dots, \nu_k$  do té doby, dokud nevyčerpáme všechny Jordanovy bloky. Pro takto vzniklou posloupnost  $\nu(\mathbf{J}(\mathbf{A})) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$  platí:

$$\nu_1 \geq \nu_2 \geq \dots \geq \nu_k \quad \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = s. \quad (6)$$

Tato charakterizace matice  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$  se nám bude následně hodit při návržení stavové zpětné vazby s minimální parametrizací v části 2.4.

## 2.2 Podobnost matic

Důležitou vlastností matic, kterou budeme dále využívat, je podobnost dvou matic, [9]. Matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$  jsou podobné, pokud existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že platí:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{T}^{-1}. \quad (7)$$

Podobnost matic se značí obvykle symbolem  $\sim$ , tedy pro (7) je  $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ .

Jsou-li dvě matice podobné, mají stejné Jordanovy formy, to znamená i stejná vlastní čísla včetně jejich geometrické a algebraické násobnosti.

Dále platí, že libovolná matice  $\mathbf{A}$ , může být převedena na svoji Jordanovu formu  $\mathbf{J}(\mathbf{A})$ , tj. existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že:

$$\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}(\mathbf{A})\mathbf{T}^{-1}. \quad (8)$$

Podobnost matic je důležitou vlastností při zjišťování, zda jsou dva dynamické systémy ekvivalentní.

Mějme autonomní systémy:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \qquad \dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{L}\mathbf{z}(t). \quad (9)$$

Jestliže existuje regulární matice  $\mathbf{T}$ , můžeme definovat převod mezi systémy (9)  $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ , potom  $\mathbf{z} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$ . Následně dostaneme:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{T}\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{A} &= \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1} \iff \mathbf{A} \sim \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (10)$$

Systémy jsou ekvivalentní právě tehdy, kdy jsou podobné jejich matice dynamiky. Nutno podotknout, že transformační matice  $\mathbf{T}$  není určena jednoznačně [10]. Tyto poznatky budeme využívat při návrhu stavové a výstupní zpětné vazby pomocí přiřazení Jordanovy kanonické formy v následující části.

## 2.3 Řiditelnost, pozorovatelnost

Lineární dynamický systém je říditelný, jestliže existuje řízení  $u(t)$  na konečném časovém intervalu  $t \in [t_0, t_1]$ , které způsobí změnu daného počátečního stavu systému  $\mathbf{x}(t_0)$  v koncový stav  $\mathbf{x}(t_1) = 0$ . Dynamický systém je říditelný právě tehdy, je-li hodnost matice říditelnosti  $\mathbf{Q}_c = [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \mathbf{A}^2\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$  rovna dimenzi vektoru stavu  $\mathbf{x}(t)$ , tedy pokud platí:

$$h[\mathbf{Q}_c] = \dim\{\mathbf{x}(t)\} = n. \quad (11)$$

Jak ukazuje rovnice (11), vlastnost říditelnosti systému závisí pouze na maticích  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{B}$ , proto dále můžeme hovořit o říditelnosti dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ , [11, 12].

Pro takto zavedenou říditelnost můžeme určit i další tvrzení, která jsou vzájemně ekvivalentní, [6]:

1. Dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  je říditelná.
2. Matice  $\mathbf{Q}_c$  má plnou řádkovou hodnost.

3.  $[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}, \mathbf{B}]$  má plnou řádkovou hodnost pro  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ .

4. Vlastní čísla matice  $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$  mohou být přiřazena libovolně maticí  $\mathbf{F}$ .

Právě vlastnost 4. bude klíčová v následující části 2.4.

Lineární dynamický systém je pozorovatelný, jestliže pozorováním vstupu  $u(t)$  a výstupu  $y(t)$  na konečném časovém intervalu  $t \in [t_0, t_1]$  lze určit počáteční stav systému  $\mathbf{x}(t_0)$ . Dynamický systém je pozorovatelný právě tehdy, když je hodnost matice pozorovatelnosti  $\mathbf{Q}_o = [\mathbf{C}^T, \mathbf{C}^T \mathbf{A}, \mathbf{C}^T \mathbf{A}^2, \dots, \mathbf{C}^T \mathbf{A}^{n-1}]^T$  rovna dimenzi vektoru stavu  $\mathbf{x}(t)$ , tedy:

$$h[\mathbf{Q}_o] = \dim\{\mathbf{x}(t)\} = n. \quad (12)$$

Opět tedy můžeme hovořit o pozorovatelnosti dvojice  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ , [11, 12].

Následující část věnující se přiřazení Jordanovy formy systému 2.4 stavovou zpětnou vazbou, resp. výstupní zpětnou vazbou lze aplikovat pouze na říditelný, resp. říditelný a pozorovatelný systém.

## 2.4 Přiřazení Jordanovy formy stavovou zpětnou vazbou

Jeden z možných popisů lineárního dynamického systému může být realizován pomocí stavového popisu. Stav je tvořen stavovými proměnnými, které v sobě nesou dostatečné množství informace k odhadu budoucího chování systému. Znalost aktuálního stavu spolu se vstupem nám stačí k určení výstupu a následujícího stavu. Z teorie řízení víme, že při určení výstupu u systému popsaného vnějším modelem musíme znát vstupy do systému všech předešlých okamžiků. Z tohoto faktu plyne, že stav představuje vnitřní souřadnice vyjadřující paměť systému. Mějme lineární časově invariantní dynamický systém:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (13)$$

kde  $\mathbf{A}$  je matice dynamiky,  $\mathbf{B}$  je vstupní matice a  $\mathbf{C}$  je matice výstupu. Budeme hledat takový vstup  $\mathbf{u}$ , který bude tvořen lineární kombinací stavů, tj.

$$\mathbf{u} = \mathbf{F}\mathbf{x}. \quad (14)$$

Potom dosazením do (13) dostaneme následující systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{BF}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BF})\mathbf{x}, \quad (15)$$

kde matice  $\mathbf{F}$  je hledaná zpětnovazební matice. Matice  $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$  ve výrazu (15) představuje matici dynamiky uzavřeného systému.

Naším cílem bude navrhnout stavovou zpětnou vazbu  $\mathbf{F}$ , která nám umožní změnit dynamické chování systému. Budeme navrhovat matici  $\mathbf{L}$ , v Jordanově kanonickém tvaru, která bude mít požadované spektrální vlastnosti, a tyto vlastnosti budeme chtít přenést na matici dynamiky uzavřeného systému  $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ . Musíme tedy zajistit podobnost těchto dvou matic, tj.  $\mathbf{A} + \mathbf{BF} \sim \mathbf{L}$ .

Dalším z požadavků na matici  $\mathbf{F}$  je, aby byla reálná. Budeme proto volit matici  $\mathbf{L}$  v reálném tvaru, tedy reálnou Jordanovu formu, kterou jsme uvedli v části 2.1.

Vstup  $\mathbf{u}$  reprezentuje vektor, neboť námi uvažovaný systém je systémem s více vstupy a výstupy, tzv. MIMO systém (multi input multi output). Hledaná matice  $\mathbf{F}$  bude mít poté rozměr:

$$\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (16)$$

kde  $n$  je počet stavových proměnných a  $m$  je počet vstupů.

Rovnice (7) ukazuje, že pro zajištění podobnosti musí platit, že existuje regulární matice  $\mathbf{T}$  taková, že:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{BF} &= \mathbf{T}\mathbf{L}\mathbf{T}^{-1}, \text{ tj.} \\ \mathbf{AT} + \mathbf{BFT} - \mathbf{TL} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Nyní budeme postupovat podle teorie uvedené v práci [6] náhradou součinu  $\mathbf{FT}$ . Označíme-li  $\mathbf{H} = \mathbf{FT}$ , obdržíme:

$$\mathbf{AT} + \mathbf{BH} - \mathbf{TL} = 0. \quad (18)$$

Tato rovnice představuje Sylvestrovu maticovou rovnici, [9]. Výpočet nyní může probíhat tak, že zvolíme náhodně vhodnou matici  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  a vyřešíme odpovídající Sylvestrovu maticovou rovnici. Potom bychom získali jednu stavovou zpětnou vazbu  $\mathbf{F}(\mathbf{H})$  jako:

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}) = \mathbf{HT}^{-1}. \quad (19)$$

V práci [6] je dále navržena minimální parametrizace stavových zpětných vazeb pomocí matice označované  $\mathbf{Q}(\alpha)$ , kde volné parametry jsou souhrnně označovány novým vektorovým návrhovým parametrem  $\alpha \in \mathbb{R}^\gamma$ . Pro dimenzi návrhových parametrů platí podle [6]:

$$\gamma = m \cdot n - \sum_{i=1}^k (2i - 1)\nu_i, \quad (20)$$

kde  $\nu(\mathbf{L}) = \{\nu_i\}_{i=1}^k$ , viz 2.1.

Pomocí matice  $\mathbf{Q}(\alpha)$  získáme parametrizované stavové zpětné vazby  $\mathbf{F}(\alpha)$ . V [6] bylo také dokázáno, že skoro každou matici  $\mathbf{H}$  lze touto maticí  $\mathbf{Q}(\alpha)$  nahradit. Potom parametrizované matice stavové zpětné vazby získáme jako:

$$\mathbf{F}(\alpha) = \mathbf{Q}(\alpha)\mathbf{T}^{-1}. \quad (21)$$

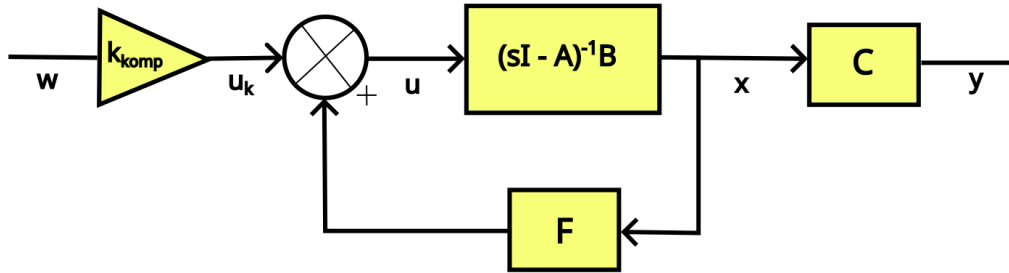
Při výpočtu stavové zpětné vazby využíváme práci [7], kde jsou uvedeny procedury pro výpočet stavových a výstupních zpětných vazeb implementované v software Maple. Příklad volání této procedury je pro stavovou zpětnou vazbu:

$$\mathbf{F} = \text{StateFeedback}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{L}). \quad (22)$$

Jako parametry této procedury pouze zadáváme matici dynamiky, vstupní matici a návrhovou matici  $\mathbf{L}$  v podobě seznamu přiřazovaných Jordanových bloků.

Volné parametry  $\alpha$  ve stavové zpětné vazbě mohou být použity dále ke splnění dalších požadavků, například pro splnění nějakých optimalizačních kritérií, nebo jak ukážeme později, i pro návrh decentralizovaného řízení.

Takto navržená stavová zpětná vazba by neměla v uzavřené smyčce obecně jednotkové statické zesílení, což znamená, že nemáme zajištěné vynulování regulační odchylky a tím pádem sledování referenčního signálu v ustáleném stavu. Statické zesílení bude záviset na čitateli přenosu otevřené smyčky (nulách systému) a zároveň na volbě pólů přiřazených stavovým regulátorem. Budeme proto navrhnout také přímovazební korekci kompenzačním zesílením, které nám zajistí jednotkové statické zesílení.



Obrázek 1: Stavová zpětná vazba s kompenzačním zesílením

V obrázku 1 představuje  $\mathbf{y}$  regulovanou veličinu,  $\mathbf{x}$  stav systému,  $\mathbf{u}$  vstup do systému,  $\mathbf{u}_k$  kompenzační řízení a  $\mathbf{w}$  referenční signál.

Kompenzační zesílení zvolíme ve tvaru  $\mathbf{u}_k = \mathbf{k}_{komp} \mathbf{w}$ . Přenos uzavřené smyčky, neboli komplementární citlivostní funkce, bude mít tento tvar:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{W(s)} = \mathbf{k}_{komp} \frac{b_0(s)}{a_z^*(s)} = \mathbf{k}_{komp} F_z(s), \quad (23)$$

kde  $b_0(s)$  reprezentuje nuly řízeného systému a  $a_z^*(s)$  jsou póly přiřazené stavovou zpětnou vazbou.

Z teorie řízení lineárních systémů [12] víme, že hodnotu statického zesílení dostaneme pokud do přenosu komplementární citlivostní funkce dosadíme za komplexní proměnnou hodnotu 0. Požadujeme tedy  $T(0) \stackrel{!}{=} 1$ , z čehož dostáváme vztah:

$$\mathbf{k}_{komp} = \frac{1}{F_z(0)}. \quad (24)$$

Přepočítání vnitřního stavového popisu na přenos systému v uzavřené smyčce získáme následovně, [12]. Uvažujeme-li matici dynamiky uzavřeného systému ve tvaru  $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$  viz (15), určíme přenos pomocí vzorce:

$$F_z = \frac{Y(s)}{U_k(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BF}))^{-1} \mathbf{B} \quad (25)$$

Pro výpočet kompenzačního zesílení dosazujeme  $s = 0$  a dostáváme finální výpočetní vztah:

$$\mathbf{k}_{komp} = (-\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{BF})^{-1} \mathbf{B})^{-1}. \quad (26)$$

Výraz (26) lze určit pouze pro čtvercovou regulární matici, aby bylo možné provést inverzi. Pomocí matice  $\mathbf{C}$  volíme, které stavy mají sledovat referenční signál. Jejich počet tedy musí odpovídat počtu vstupů.

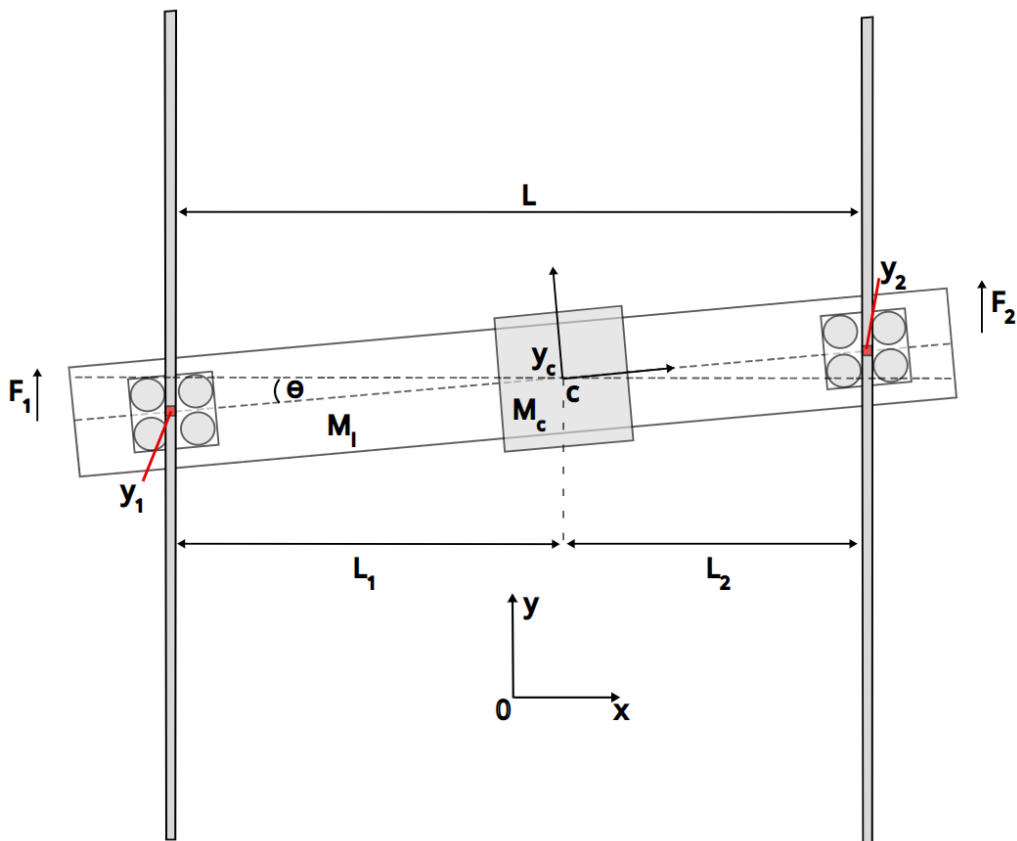
Nutno podotknout, že varianta přímovazební korekce kompenzačním zesílením není robustní varianta. Musíme totiž znát přenos uzavřené smyčky s dokonalou přesností, což je v praxi téměř nemožné. Navržená stavová zpětná vazba proto nebude schopna odregulovat poruchy, ovšem to není cílem této práce.

### 3 Odvození modelu s dvojitým lineárním paralelním pohonem

Je zřejmé, že podobných modelů s dvojitým lineárním paralelním pohonem existuje mnoho. Liší se ve složitosti, značení či například zavedení stavových veličin. V této části si nejprve odvodíme jednodušší model popisující dynamické chování systému mezi silovými a pohybovými účinky, který následně rozšíříme o proudové závislosti.

#### 3.1 Redukovaný model systému

Dynamický systém typu "H-gantry" je tvořen dvěma paralelními kolejnicemi ve směru osy  $y$ , které spojuje kolmé rameno, viz obrázek 2.



Obrázek 2: Nákres systému s dvojitým lineárním paralelním pohonem

Hmotnost celého nosníku (včetně závaží) představuje konstanta  $M$ ,  $C$  je umístění těžiště nosníku,  $y_1$  a  $y_2$  jsou aktuální polohy upevnění nosníku k jednotlivým kolej-

nicím,  $y_c$  je umístění těžiště na ose  $y$  a  $\Theta$  reprezentuje úhel natočení kolem těžiště  $C$ . V ideálním případě tedy požadujeme nulovou hodnotu proměnné  $\Theta$ , aby v systému nedocházelo k nežádoucím mechanickým deformacím.

Dále v obrázku 2 vidíme, že  $L$  představuje délku mezi paralelními kolejnicemi, kde  $L_1$  je vzdálenost těžiště závaží od levé kolejnice a  $L_2$  je vzdálenost těžiště od pravé kolejnice. Je tedy možné napsat rovnici propojující tyto vzdálenosti:

$$L = L_1 + L_2. \quad (27)$$

### 3.1.1 Popis systému pomocí diferenciálních rovnic

Dynamické závislosti pohybu systému lze popsat dvěma Newtonovými dynamickými rovnicemi, jež popisují silovou a momentovou rovnováhu. Dostaneme:

$$M\ddot{y}_c = -b_1\dot{y}_1 - b_2\dot{y}_2 + F_1 + F_2, \quad (28)$$

kde  $b_1, b_2$  jsou koeficienty viskózního tření jednotlivých kolejnic a  $F_1, F_2$  představující síly působící na jednotlivé motory.

Druhá rovnice vypadá následovně:

$$J\ddot{\Theta} + K\Theta = (-b_2\dot{y}_2 + F_2)L_2 - (-b_1\dot{y}_1 + F_1)L_1, \quad (29)$$

kde  $J$  je moment setrvačnosti příčného nosníku a  $K$  je jeho torzní tuhost, [3].

Z rovnice (29) lze vidět, že dynamika rovnoběžných os není stejná pokud  $L_1 \neq L_2$ . Z toho plyne, že rozdíl točivého momentu mezi oběma pohony povede k příčnému natočení nosníku okolo těžiště o úhel  $\Theta$ .

Parametry  $y_1, y_2, y_c$  a  $\Theta$  jsou vzájemně závislé. Aplikací Pythagorovy věty, lze vzájemný přepočítat reprezentovat následujícími rovnicemi:

$$y_1 = y_c - L_1 \sin(\Theta) \quad (30)$$

$$y_2 = y_c + L_2 \sin(\Theta). \quad (31)$$

V praxi je obecně úhel  $\Theta$  velice blízký nulové hodnotě, lze proto uvažovat následující aproximace:

$$\Theta \approx 0 \rightarrow \sin(\Theta) \approx \Theta. \quad (32)$$

Dostáváme tedy:

$$y_1 = y_c - L_1 \sin(\Theta) \approx y_c - L_1(\Theta) \quad (33)$$

$$y_2 = y_c + L_2 \sin(\Theta) \approx y_c + L_2(\Theta). \quad (34)$$

### 3.1.2 Stavový popis systému

Nyní máme připravené diferenciální rovnice a můžeme převést model do stavového popisu. Důležitá je ovšem volba stavů. V předchozí části jsme zmiňovali, že parametry  $y_1, y_2, y_c$  a  $\Theta$  jsou spolu propojeny. Z tohoto výběru můžeme tedy zvolit jako stavy dvě libovolné veličiny a jejich derivace. Zvolíme stavové proměnné:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} \quad (35)$$

a vstupy systému:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

V rovnicích (28) a (29) je dále třeba nahradit všechny časové proměnné, které neodpovídají stavům systému. Budou to konkrétně  $\ddot{y}_c$ ,  $\Theta$  a  $\ddot{\Theta}$ . To provedeme pomocí vztahů (33) a (34), které zderivujeme podle času a vyjádříme z nich potřebné proměnné:

$$\ddot{y}_c = \ddot{y}_1 + \frac{L_1(\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1)}{L_1 + L_2} \quad (37)$$

$$\Theta = \frac{y_2 - y_1}{L_1 + L_2} \quad \ddot{\Theta} = \frac{\ddot{y}_2 - \ddot{y}_1}{L_1 + L_2} \quad (38)$$

Provedeme zmiňovanou substituci vztahů (37), (38) v dynamických rovnicích (28) a (29) a následně vyjádříme proměnné  $\ddot{y}_1$  a  $\ddot{y}_2$ . Pro usnadnění výpočtů byl použit software Maple.

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (39)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (40)$$

$$\dot{x}_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 + a_5 u_1 + a_6 u_2 \quad (41)$$

$$\dot{x}_4 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 + b_5 u_1 + b_6 u_2, \quad (42)$$

kde  $a_1 = -\frac{KL_1}{J(L_1+L_2)}$ ,  $a_2 = \frac{KL_1}{J(L_1+L_2)}$ ,  $a_3 = -\frac{(ML_1^2+J)b_1}{MJ}$ ,  $a_4 = -\frac{(-ML_2L_1+J)b_2}{MJ}$ ,  $a_5 = \frac{ML_1^2+J}{MJ}$ ,  $a_6 = \frac{-ML_2L_1+J}{MJ}$ ,  $b_1 = \frac{KL_2}{J(L_1+L_2)}$ ,  $b_2 = -\frac{KL_2}{J(L_1+L_2)}$ ,  $b_3 = -\frac{(-ML_2L_1+J)b_1}{MJ}$ ,  $b_4 = -\frac{(ML_2^2+J)b_2}{MJ}$ ,  $b_5 = \frac{-ML_2L_1+J}{MJ}$  a  $b_6 = \frac{ML_2^2+J}{MJ}$

K rovnicím (39) - (42) byla sestrojena odpovídající matice dynamiky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{KL_1}{J(L_1+L_2)} & \frac{KL_1}{J(L_1+L_2)} & -\frac{(ML_1^2+J)b_1}{MJ} & -\frac{(-ML_2L_1+J)b_2}{MJ} \\ \frac{KL_2}{J(L_1+L_2)} & -\frac{KL_2}{J(L_1+L_2)} & -\frac{(-ML_2L_1+J)b_1}{MJ} & -\frac{(ML_2^2+J)b_2}{MJ} \end{bmatrix} \quad (43)$$

a vstupní matice:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{ML_1^2+J}{MJ} & \frac{-ML_2L_1+J}{MJ} \\ \frac{-ML_2L_1+J}{MJ} & \frac{ML_2^2+J}{MJ} \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Matici výstupů  $\mathbf{C}$  zvolíme podle toho, jaké stavy budeme chtít pozorovat. Pro sledování všech stavů odpovídá matice  $\mathbf{C}$  jednotkové matici řádu 4. Matice  $\mathbf{D}$  bude vždy nulová, jelikož se žádný vstup přímo nepřenáší na výstup.



## 3.2 Rozšířený model systému

### 3.2.1 Popis systému pomocí diferenciálních rovnic

Předchozí model z části 3.1 může být rozšířen, kdy jako vstup nebudeme uvažovat silové působení motorů, ale přiváděné napětí. Tahy jednotlivých motorů  $F_1$ ,  $F_2$  jsou přímo úměrné proudu na cívkách  $i_1$  a  $i_2$ . Závislost lze popsat vztahem:

$$F_1 = k_{t1}i_1 \quad (45)$$

$$F_2 = k_{t2}i_2, \quad (46)$$

kde  $k_{t1}$  a  $k_{t2}$  jsou konstanty tahu motoru.

Dynamicickou závislost mezi napětím a proudem, jeho derivací a rychlostí motoru dále popisují následující diferenciální rovnice:

$$u_1 = L_{a1}\dot{i}_1 + R_{a1}i_1 + k_{e1}\dot{y}_1 \quad (47)$$

$$u_2 = L_{a2}\dot{i}_2 + R_{a2}i_2 + k_{e2}\dot{y}_2, \quad (48)$$

kde  $k_{e1}$ ,  $k_{e2}$  jsou konstanty zpětné elektromotorické síly,  $L_{a1}$ ,  $L_{a2}$  odpovídá indukčnosti cívky a  $R_{a1}$ ,  $R_{a2}$  představuje odpor cívky, [1].

Tyto doplňkové vztahy spolu s rovnicemi (28) a (29) popisují rozšířený vnější model systému s dvojitým lineárním paralelním pohonem.

### 3.2.2 Stavový popis systému

Zavedeme-li nyní stavový popis obohacený o proudy na jednotlivých cívkách motorů dostáváme:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Vstup systému bude dále reprezentován vektorem napětí přiváděným na jednotlivé motory.

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

Pro odvození matice dynamiky  $\mathbf{A}$  a vstupní matice  $\mathbf{B}$  budeme opět vycházet ze vztahů (28) a (29), které jsme používali v předchozím modelu. V těchto rovnicích substituujeme nové přepočty tahů motorů a napětí (45), (46), (47), (48) a vyjádříme jednotlivé stavové proměnné:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (51)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (52)$$

$$\dot{x}_3 = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 + a_6x_6 \quad (53)$$

$$\dot{x}_4 = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5 + b_6x_6 \quad (54)$$

$$\dot{x}_5 = c_1x_3 + c_2x_5 + c_3u_1 \quad (55)$$

$$\dot{x}_6 = d_1x_4 + d_2x_6 + d_3u_2, \quad (56)$$

kde  $a_1 = -\frac{KL_1}{J(L_1+L_2)}$ ,  $a_2 = \frac{KL_1}{J(L_1+L_2)}$ ,  $a_3 = -\frac{(ML_1^2+J)b_1}{MJ}$ ,  $a_4 = -\frac{(-ML_2L_1+J)b_2}{MJ}$ ,  $a_5 = \frac{(ML_1^2+J)k_{t1}}{MJ}$ ,  $a_6 = \frac{(-ML_2L_1+J)k_{t2}}{MJ}$ ,  $b_1 = \frac{KL_2}{J(L_1+L_2)}$ ,  $b_2 = -\frac{KL_2}{J(L_1+L_2)}$ ,  $b_3 = -\frac{(-ML_2L_1+J)b_1}{MJ}$ ,  $b_4 = -\frac{(ML_2^2+J)b_2}{MJ}$ ,  $b_5 = \frac{(-ML_2L_1+J)k_{t1}}{MJ}$ ,  $b_6 = \frac{(ML_2^2+J)k_{t2}}{MJ}$ ,  $c_1 = -\frac{k_{e1}}{L_{a1}}$ ,  $c_2 = -\frac{R_{a1}}{L_{a1}}$ ,  $c_3 = \frac{1}{L_{a1}}$ ,  $d_1 = -\frac{k_{e2}}{L_{a2}}$ ,  $d_2 = -\frac{R_{a2}}{L_{a2}}$ ,  $d_3 = \frac{1}{L_{a2}}$ .

K takto sestrojeným rovnicím můžeme snadno dopočítat matici dynamiky:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{KL_1}{J(L_1+L_2)} & \frac{KL_1}{J(L_1+L_2)} & -\frac{(ML_1^2+J)b_1}{MJ} & -\frac{(-ML_2L_1+J)b_2}{MJ} & \frac{(ML_1^2+J)k_{t1}}{MJ} & \frac{(-ML_2L_1+J)k_{t2}}{MJ} \\ \frac{KL_2}{J(L_1+L_2)} & -\frac{KL_2}{J(L_1+L_2)} & -\frac{(-ML_2L_1+J)b_1}{MJ} & -\frac{(ML_2^2+J)b_2}{MJ} & \frac{(-ML_2L_1+J)k_{t1}}{MJ} & \frac{(ML_2^2+J)k_{t2}}{MJ} \\ 0 & 0 & -\frac{k_{e1}}{L_{a1}} & 0 & -\frac{R_{a1}}{L_{a1}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_{e2}}{L_{a2}} & 0 & -\frac{R_{a2}}{L_{a2}} \end{bmatrix} \quad (57)$$

a odpovídající vstupní matici:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L_{a1}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_{a2}} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

Podobně jako v části 3.1 bude matice  $\mathbf{D}$  nulová a volba matice  $\mathbf{C}$  závisí na tom, jaký výstup chceme sledovat.

## 4 Návrh zpětnovazebního řízení

### 4.1 Redukovaný model systému

Pro usnadnění výpočtu jednotlivých zpětných vazeb dále vyčíslíme získané modely systému. Zvolíme proto konkrétní hodnoty parametrů modelu, které budou inspirované článkem [1].

Tabulka 1: Koeficienty pro redukovaný model systému

Název	Značka	Hodnota	Jednotka
torzní tuhost nosníku	$K$	52520	$N \cdot m^{-1}$
hmotnost nosníku se závažím	$M$	50	$kg$
délka nosníku	$L$	0.8	$m$
koeficient viskózního tření motoru $y_1$	$b_1$	5	$N \cdot m \cdot s$
koeficient viskózního tření motoru $y_2$	$b_2$	5	$N \cdot m \cdot s$

Dále je zapotřebí určit poměr délek  $L_1$  a  $L_2$ . Pro začátek budeme uvažovat, že je závaží umístěno přímo uprostřed nosníku. Poté zobecníme umístění závaží do polohy různé od středu nosníku. Nejprve uvažujme tedy  $L_1 = L_2 = \frac{2}{5}$ .

Moment setrvačnosti příčného nosníku  $J$  nemůžeme zakomponovat do tabulky koeficientů 1, jelikož je jeho hodnota funkcí vzdáleností  $L_1$  a  $L_2$ . Moment setrvačnosti vypočítáme podle vzorce, viz [1]:

$$J = \frac{M}{3}(L_1^2 - L_1L_2 + L_2^2) = \frac{8}{3}. \quad (59)$$

Vyčíslenou matici dynamiky a vstupní matici dostaneme v tomto tvaru:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{19695}{2} & \frac{19695}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{19695}{2} & -\frac{19695}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{2}{25} & -\frac{1}{25} \\ -\frac{1}{25} & \frac{2}{25} \end{bmatrix}. \quad (61)$$

Pro jistotu také zkontrolujeme říditelnost systému, abychom zjistili, zda můžeme libovolně měnit dynamiku systému. Systém je říditelný právě tehdy, kdy má matice říditelnosti  $\mathbf{Q}_c$  plnou sloupcovou hodnotu, viz část 2.3.

Jelikož popisujeme MIMO systém, matice říditelnosti nebude čtvercová, ale bude mít rozměry  $n \times (n \cdot m)$ , tedy  $\mathbf{S}_c \in \mathbb{R}^{4 \times 8}$ . Matici si necháme vyčíslit v Maplu příkazem *ControllabilityMatrix(A,B)* a poté zkontrolujeme její sloupcovou hodnotu.

$$\text{rank}(\mathbf{Q}_c) = 4 = n \quad (62)$$

Podle (62) plyne, že matice říditelnosti má plnou hodnotu a tedy sledovaný systém je říditelný.

Také vypočítáme vlastní čísla celého systému, abychom věděli, jaké chování můžeme očekávat.

$$\lambda(\mathbf{A}_1) = \{0, -0.2, -0.3 + 140.339i, -0.3 - 140.339i\} \quad (63)$$

Jak ukazuje výraz (63), systém obsahuje jedno záporné reálné vlastní číslo, dvě komplexně sdružená vlastní čísla se zápornou reálnou částí a jedno nulové vlastní číslo, což indikuje mez stability. Všechna stabilní vlastní čísla jsou pomalá, jelikož mají reálnou složku velice blízkou nule. Navíc komplexně sdružená vlastní čísla mají mnohonásobně větší imaginární část. Můžeme proto usuzovat, že systém bude vykazovat pomalé kmitavé chování na mezi stability.

#### 4.1.1 Centralizované řízení

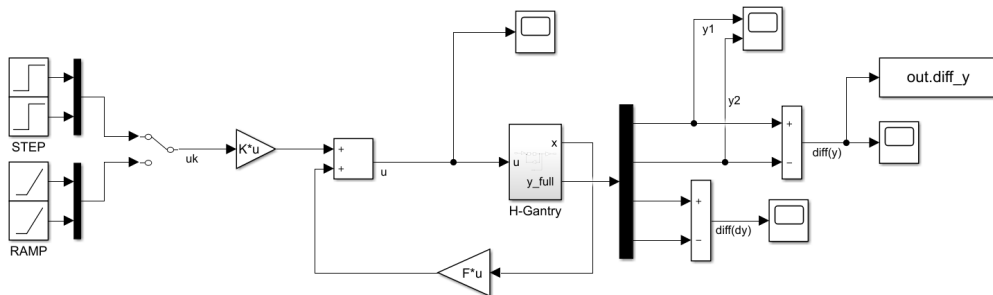
Pro navržení stavové zpětné vazby budeme používat postup popisovaný v části 2.4. Budeme navrhovat různé varianty Jordanových bloků, resp. Jordanových forem,

a vybereme ty, které povedou na vhodné chování uzavřeného systému. Jordanovy formy  $\mathbf{L}$ , které budeme uvažovat budou mít následující tvary:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_1 &= \begin{bmatrix} a & & \\ & a & \\ & & b \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_2 &= \begin{bmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_3 &= \begin{bmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & b \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{L}}_4 &= \begin{bmatrix} a & 1 & \\ & a & 1 \\ & & a \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_5 &= \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \\ & & & d \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_6 &= \begin{bmatrix} a & 1 & \\ & a & \\ & & b \\ & & & 1 \\ & & & & b \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (64)$$

Chování uzavřeného systému bude také samozřejmě záviset na volbě prvků  $a, b, c, d$ , které představují přiřazovaná vlastní čísla systému. Tyto parametry budou voleny podle chování uzavřeného systému. Vyzkoušíme mnoho různých kombinací vlastních čísel pro sledované Jordanovy formy. Následně určíme, jaké typy Jordanových forem povedou s danými parametry na co nejlepší chování řízeného systému. Naše úsilí bude směřováno k minimalizaci maximálního rozdílu poloh  $y_1$  a  $y_2$ . V práci budou dále uvedeny zajímavé dosažené výsledky.

Pro simulování chování uzavřeného systému bylo v prostředí SIMULINK vytvořeno následující schéma:



Obrázek 3: Simulační schéma stavové zpětné vazby modelu H-gantry

Subsystem s názvem "H-gantry" na obrázku 3 reprezentuje získaný matematický model systému ve formě matice  $\mathbf{A}_1$  a  $\mathbf{B}_1$ . Matice  $\mathbf{K}$  ze stejného schématu představuje kompenzační zesílení vyčíslené pomocí rovnice (26) tak, aby měl uzavřený systém jednotkové statické zesílení. Simulace budou prováděny pro referenční signál ve tvaru rampy se sklonem 0.2, tedy příčný nosník se bude pohybovat rychlostí  $0.2m/s$ .

Nejprve se zaměříme na návrh stavové zpětné vazby s využitím algoritmu z části 2.4. Hledáme vhodnou matici  $\mathbf{F}$ , která vylepší chování uzavřené smyčky. U stavové zpětné vazby obecně předpokládáme znalost celého stavu, nebo je zapotřebí využít odhadu pomocí rekonstrukce stavu. Matice  $\mathbf{F}$  bude v tomto případě obsahovat obecně pouze nenulové prvky. Tento přístup budeme nazývat centralizované řízení. Volba případných volných parametrů  $\alpha$  proto může být libovolná.

První návrhovou Jordanovu formu  $\mathbf{L}$  zvolíme ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{c1} = \text{diag}\{-70, -70, -90, -90\}. \quad (65)$$

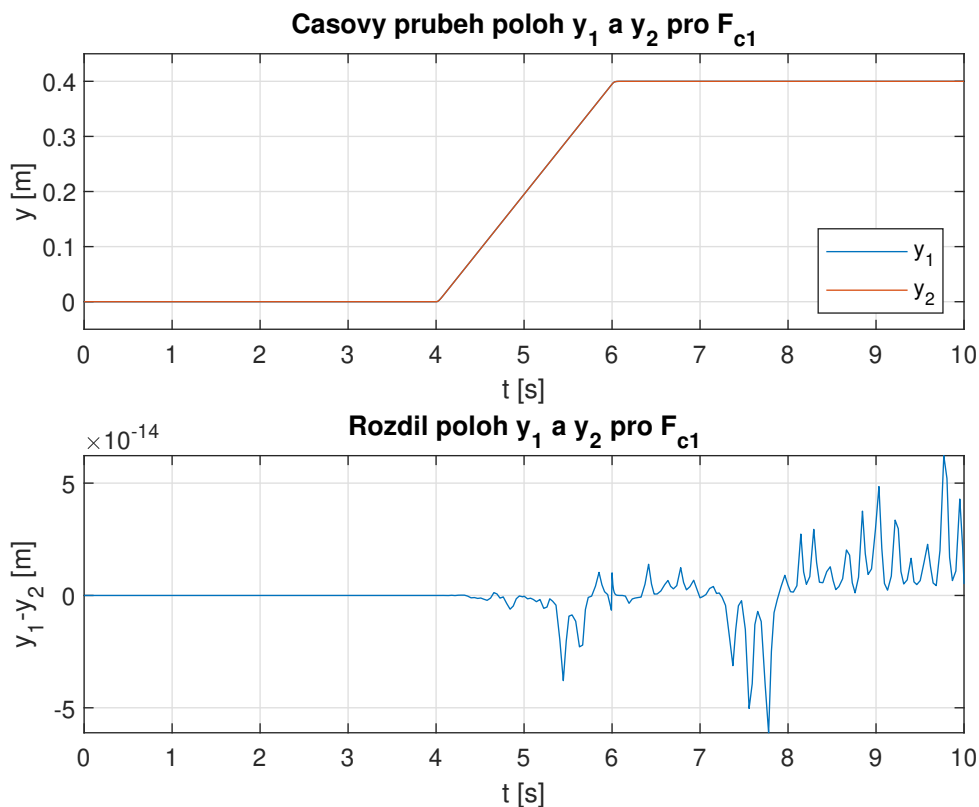
Jelikož provádíme minimální parametrizaci bude nás zajímat, zda se v matici  $\mathbf{F}_{c1}$  budou tvořit nějaké návrhové parametry  $\alpha$ , popřípadě jakou budou mít dimenzi. Pro objasnění si to ukážeme na této a následující Jordanově formě. Nejprve určíme stupně nekonstantních invariantních faktorů z části 2.1. Vyjde nám  $\nu(\mathbf{L}_{c1}) = \{2, 2\}$ . Aplikací vzorce (20) dále určíme dimenzi návrhových parametrů  $\alpha$ . Dimenze stavového prostoru je  $n = 4$  a počet vstupů systému máme  $m = 2$ .

$$\gamma_{c1} = 2 \cdot 4 - (1 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 0 \quad (66)$$

Pro Jordanovu formu (65) tedy v matici  $\mathbf{F}$  nevznikají žádné volné parametry a bude dána jednoznačně. Dostáváme:

$$\mathbf{F}_{c1} = \begin{bmatrix} -\frac{45875}{2} & -\frac{269125}{2} & -\frac{7985}{3} & -\frac{4000}{3} \\ -\frac{269125}{2} & -\frac{45875}{2} & -\frac{4000}{3} & -\frac{7985}{3} \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Jak již bylo zmíněno, referenční signál představuje rampu se sklonem 0.2, která na systém působí v časovém rozmezí  $t \in \langle 4, 6 \rangle$ .



Obrázek 4: Časový průběh poloh  $y_1$  a  $y_2$  pro stavovou zpětnou vazbu  $\mathbf{F}_{c1}$

Na obrázku 4 můžeme vidět, že systém následuje generovaný signál referenční hodnoty. Rozdíl poloh  $y_1$  a  $y_2$  je zanedbatelný, můžeme tedy považovat pohyb paralelních motorů za synchronní.

Jako další jsme testovali chování uzavřeného systému pro Jordanovu formu ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{c2} = \begin{bmatrix} -75 & 1 & & \\ & -75 & 1 & \\ & & -75 & \\ & & & -90 \end{bmatrix}. \quad (68)$$

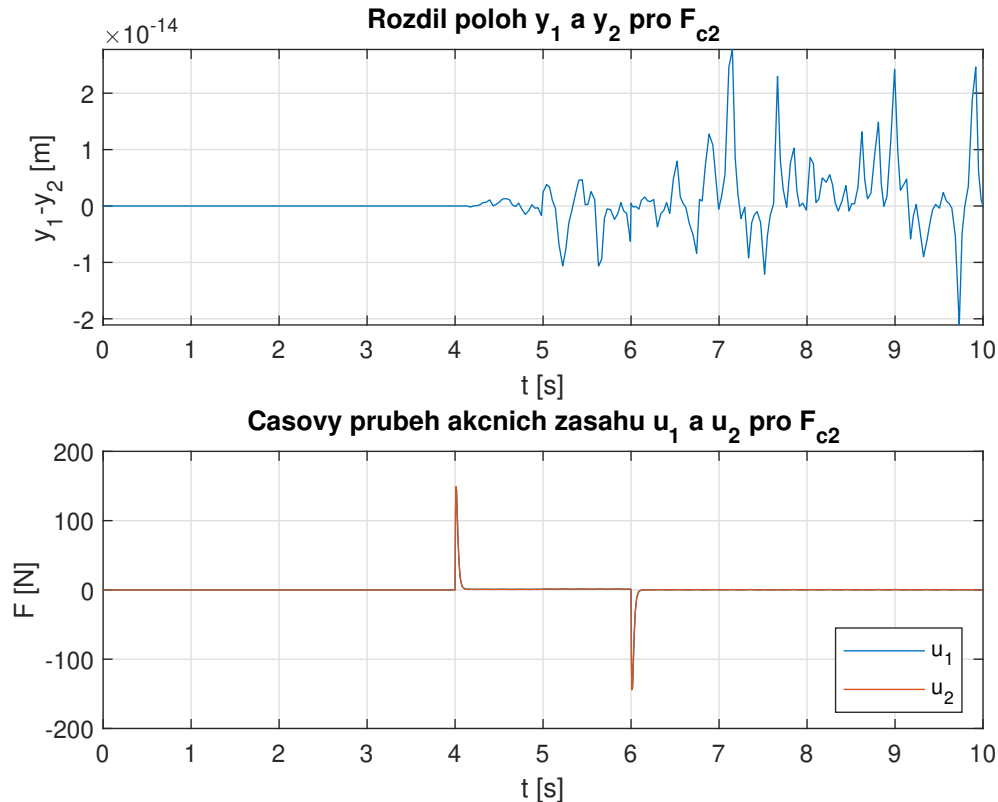
Opět si pro úplnost vypočítáme dimenzi volných parametrů  $\alpha$ . Pro matici (68) vyjde stupeň nekonstantního invariantního polynomu pouze jeden  $\nu(\mathbf{L}_{c2}) = \{4\}$ . Aplikací výpočtu (20) dostaneme:

$$\gamma_{c2} = 2 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 4. \quad (69)$$

Matice  $\mathbf{F}_{c2}(\alpha)$  obsahuje 4 volné parametry. Její prvky jsou obecně složité racionální funkce. Pro úplnost uvedeme tedy alespoň jednu takovou konkrétní stavovou zpětnou vazbu, pro kterou jsme získali dobré chování uzavřeného systému. Pro  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 1$  dostáváme vyčíslenou matici ve tvaru:

$$\mathbf{F}_{c2} = \begin{bmatrix} -8888.3708 & -159861.6292 & -2450.1694 & -1669.8306 \\ -126138.3708 & -42611.6292 & -1205.1694 & -2914.8306 \end{bmatrix}. \quad (70)$$

Necháme si vykreslit časový průběh rozdílu poloh  $y_1$  a  $y_2$  při aplikaci stejného referenčního signálu jako v předchozím případě. Zjistíme, že chování bude velice podobné jako na obrázku 4. Rozdíl poloh kmitá na řádově zanedbatelných hodnotách. Uvedeme také časový průběh akčních zásahů na jednotlivé motory.



Obrázek 5: Výsledky simulací pro  $\mathbf{F}_{c2}$

Obrázek 5 ukazuje, že oba motory jsou řízeny stejným akčním zásahem, který působí v momentě rozpořybování soustavy a uvedení soustavy do klidu. Akční zásah nedosahuje vysokých hodnot, proto by bylo možné ho fyzikálně realizovat.

Při testování dalších různých Jordanových forem se ukázalo, že volba Jordanových kanonických forem spolu s volbou parametrů v této části nehrála příliš velkou roli. Uzavřený systém vykazoval pro většinu návrhů dobré chování. To je především zapříčiněno znalostí celého stavu a symetrickou konstrukcí systému.

#### 4.1.2 Decentralizované řízení

Stavový regulátor využívá celý vektor stavu, aby vypočítal akční zásah a určil tak celou soustavu. Popisovaný systém je řízen dvěma motory, tudíž aby se vypočítal akční zásah na jeden z motorů, je v předchozím případě zapotřebí znát polohu i rychlost obou motorů zároveň, viz matice (67) a (70).

V této kapitole budeme využívat volné parametry  $\alpha$  v matici  $\mathbf{F}$ , abychom dosáhli vynulování některých zvolených prvků této matice a získali tak řízení, které bude pro každý z motorů využívat pouze informaci právě o jeho poloze a rychlosti. Tímto bychom odvodili typ decentralizovaného řízení. Budeme tedy hledat hodnoty parametrů  $\alpha$ , abychom vynulovali následující prvky a matice  $\mathbf{F}$  tak měla následující strukturu:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}, \quad (71)$$

kde \* reprezentuje obecně nenulový prvek matice.

Této vlastnosti není možné dosáhnout pro libovolnou Jordanovu formu. Například pro obecné návrhové matice  $\bar{\mathbf{L}}_1$  a  $\bar{\mathbf{L}}_2$  ze vztahu (64) nelze vynulovat odpovídající prvky a matici  $\mathbf{F}$  tak převést do hledané struktury. Pro zajímavost si můžeme ukázat, jak by vypadala nevyčíslená matice  $\mathbf{F}$  příslušící ke zmiňované Jordanově formě  $\bar{\mathbf{L}}_1$ .

$$\bar{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{50ba}{3} + \frac{164125}{2} & -\frac{25ba}{3} - \frac{164125}{2} & \frac{50a}{3} + \frac{50b}{3} + 5 & \frac{25a}{3} + \frac{25b}{3} \\ -\frac{25ba}{3} - \frac{164125}{2} & -\frac{50ba}{3} + \frac{164125}{2} & \frac{25a}{3} + \frac{25b}{3} & \frac{50a}{3} + \frac{50b}{3} + 5 \end{bmatrix} \quad (72)$$

Libovolná kombinace stabilních reálných parametrů  $a$  a  $b$  nezajistí převod matice do tvaru (71).

Naopak pro Jordanovy formy  $\bar{\mathbf{L}}_4, \bar{\mathbf{L}}_5, \bar{\mathbf{L}}_6$  z (64) získáváme požadovanou strukturu. Experimenty ukázaly, že vhodné chování uzavřeného systému ve smyslu minimalizace odchylek  $y_1$  a  $y_2$  dostaneme, pokud umístíme vlastní čísla Jordanových forem kolem hodnoty  $-89$ . Uvedeme výsledky rovnou pro všechny tři návrhové Jordanovy formy.

$$\mathbf{L}_{d1} = \begin{bmatrix} -89 & 1 & & \\ & -89 & 1 & \\ & & -89 & 1 \\ & & & -89 \end{bmatrix} \quad (73)$$

V matici  $\mathbf{F}_{d1}(\alpha)$  vznikají 4 volné parametry. K dosažení požadované struktury de-

centralizace volíme tyto hodnoty:

$$\alpha_{d1} = \{\alpha_1 = 31.78620375, \alpha_2 = -3.235487876, \\ \alpha_3 = 0.3194752117, \alpha_4 = -0.03117871031\}.$$

Vyčíslená zpětnovazební matice má poté tvar:

$$\mathbf{F}_{d1} = \begin{bmatrix} -38970.5606 & 0.0 & -1142.2275 & 0.0 \\ 0.0 & -81575.0550 & 0.0 & -3297.7725 \end{bmatrix}. \quad (74)$$

Druhý vyhovující návrh Jordanovy formy:

$$\mathbf{L}_{d2} = \text{diag}\{-87, -88, -89, -90\}. \quad (75)$$

Vhodná volba parametrů spolu s vyčíslenou maticí  $\mathbf{F}$ :

$$\alpha_{d2} = \{\alpha_1 = 26.60724717, \alpha_2 = 29.09743909, \\ \alpha_3 = 32.08088533, \alpha_4 = 35.71760254\}$$

$$\mathbf{F}_{d2} = \begin{bmatrix} -37204.4355 & 0.0 & -1118.0551 & 0.0 \\ 0.0 & -81680.6382 & 0.0 & -3296.9449 \end{bmatrix}. \quad (76)$$

Třetí návrh Jordanovy formy pro decentralizaci řízení:

$$\mathbf{L}_{d3} = \begin{bmatrix} -88 & 1 & & \\ & -88 & & \\ & & -89 & 1 \\ & & & -89 \end{bmatrix}. \quad (77)$$

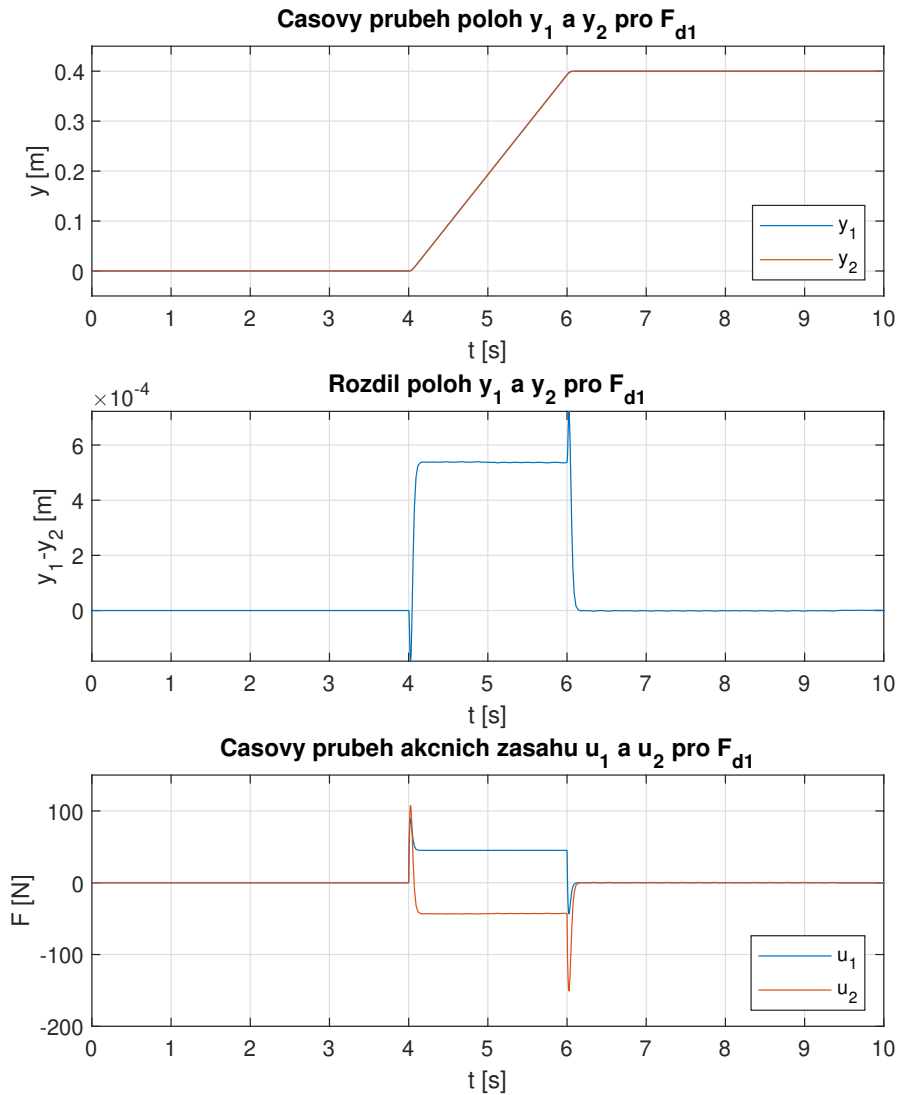
Nalezené vyhovující volné parametry  $\alpha$ , které po dosazení vedou na požadovaný tvar matice  $\mathbf{F}$ :

$$\alpha_{d3} = \{\alpha_1 = 29.11020616, \alpha_2 = -2.715831388, \\ \alpha_3 = 32.09468115, \alpha_4 = -3.279332723\}$$

$$\mathbf{F}_{d3} = \begin{bmatrix} -37236.4979 & 0.0 & -1117.9580 & 0.0 \\ 0.0 & -81505.2381 & 0.0 & -3297.0420 \end{bmatrix}. \quad (78)$$

Po bližší analýze se ukázalo, že zpětnovazební matice (74),(76), (78) jsou číselně velice podobné. Různá volba přiřazovaných Jordanových forem, avšak s podobným umístěním vlastních čísel v komplexní rovině, vede na podobné chování systému v uzavřené smyčce. To potvrzují i simulace, které pro všechny tři varianty vyšly téměř obdobně. Uvedeme si proto výsledky pouze pro matici (74).





Obrázek 6: Výsledky simulací pro  $F_{d1}$

Na obrázku 6 vidíme, že sledování referenční hodnoty máme zajištěné i při decentralizaci systému. Rozdíl poloh jednotlivých motorů nemá průběh symetrický kolem nuly. Znamená to, že se motor  $y_1$  nachází většinu času před motorem  $y_2$  s maximálním rozdílem  $0.7\text{mm}$ . Při decentralizaci se také ukazuje, že akční zásah není na oba motory stejný, jako tomu bylo při simulaci 5.

#### 4.1.3 Výstupní zpětná vazba

Při výstupní zpětné vazbě uvažujeme stejný lineární časově invariantní dynamický systém (13), ovšem vstup  $u$  bude určen jako lineární kombinace výstupu  $y$ , tj.

$$u = Gy. \quad (79)$$

Dosazením do obecného předpisu (13) dostaneme uzavřený systém

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{BGC}\mathbf{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BGC})\mathbf{x}, \quad (80)$$

kde  $\mathbf{G}$  je hledaná zpětnovazební matice a  $\mathbf{C}$  je matice výstupu. Předpokládáme, že systém je osazen pouze senzory snímající aktuální polohu jednotlivých motorů, tedy matice  $\mathbf{C}$  má tvar:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (81)$$

K nalezení požadované zpětnovazební matice  $\mathbf{G}$  ovšem využijeme opět stavovou zpětnou vazbu. Matici  $\mathbf{F}$  se budeme snažit dostat opět do speciálního tvaru

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (82)$$

kde \* reprezentuje obecně nenulový prvek matice. Hledaná matice  $\mathbf{G}$  pak bude rovna matici (82) s vynechanými nulovými sloupci.

Ukázalo se, že dostat matici  $\mathbf{F}$  do tvaru (82) je mnohem obtížnější, než varianta decentralizovaného řízení. Návrhovou Jordanovu formu jsme zvolili ve tvaru  $\overline{\mathbf{L}}_5$  z (64), neboť ta představuje největší volnost. Pro nalezení hledaného řešení, bylo zapotřebí ponechat vlastní čísla Jordanovy formy  $a, b, c, d$  jako volné parametry a naopak parametry  $\alpha$  zafixovat. Jediná možnost, jak dosáhnout výstupní zpětné vazby, byla pro vlastní čísla velice blízká imaginární ose. Požadovaný tvar matice  $\mathbf{F}$  byl nalezen například pro Jordanovu formu ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{v1} = \text{diag}\{-0.58792, -0.01208, -0.12998, -0.07001\}. \quad (83)$$

Pro parametry  $\alpha$  o hodnotách

$$\alpha_{v1} = \{\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = -4\},$$

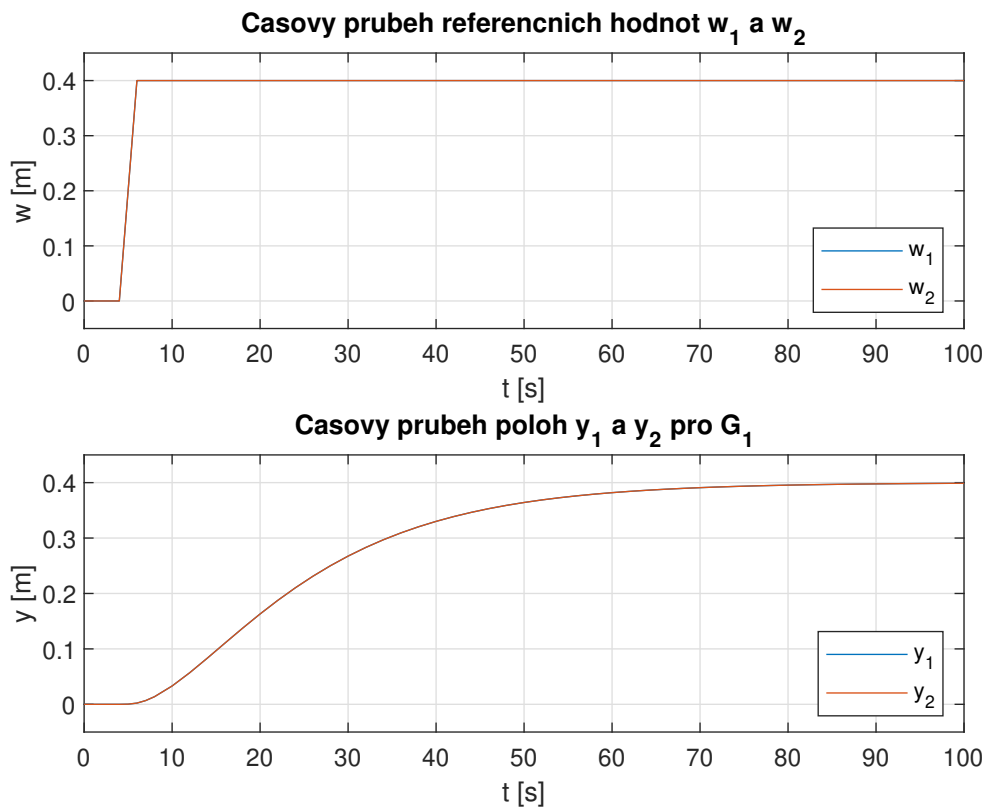
dostáváme vyčíslenou zpětnovazební matici ve tvaru:

$$\mathbf{F}_{v1} = \begin{bmatrix} 82062.3567 & -82062.5842 & 0 & 0 \\ -82062.5842 & 82062.3567 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (84)$$

Hledaná matice  $\mathbf{G}$ , která umožňuje zavedení výstupní zpětné vazby má poté tvar:

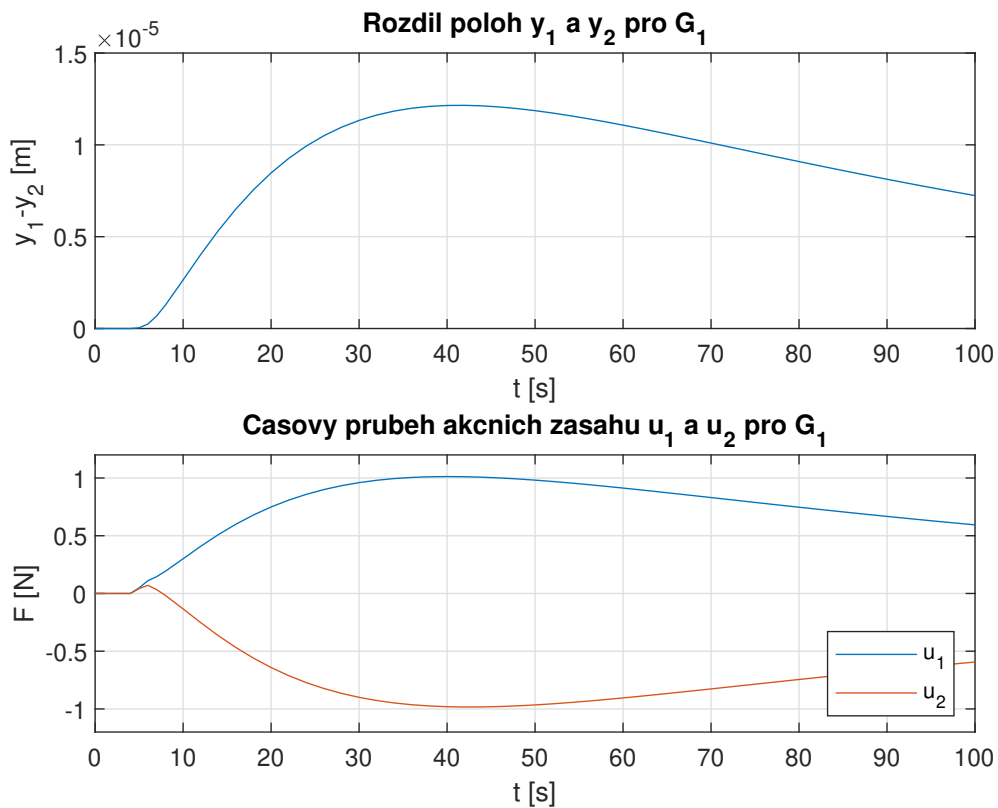
$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 82062.3567 & -82062.5842 \\ -82062.5842 & 82062.3567 \end{bmatrix}. \quad (85)$$

Dále provedeme simulace, abychom zjistili chování systému v uzavřené smyčce. V matici (85) jsou totožné "křížové" prvky, toto řízení by odpovídalo symetrické výstupní zpětné vazbě uvedené v [13].



Obrázek 7: Časový průběh referenčních hodnot a poloh  $y_1$  a  $y_2$  pro  $G_1$

Uzavřený systém má bohužel natolik pomalá vlastní čísla, že není schopný sledovat referenční signál se sklonem  $0.2m/s$ . Systém se v uzavřené smyčce ustálí na požadované hodnotě až téměř v čase 100s. Tato výstupní zpětná vazba tedy nesplňuje požadavky pro chování v uzavřené smyčce. Pro zajímavost ještě uvedeme průběh akčních zásahů a rozdíl poloh.



Obrázek 8: Časový průběh akčních zásahů a rozdílu poloh  $y_1$  a  $y_2$  pro  $G_1$

Na obrázku 8 vidíme, že rozdíl poloh nepřesahuje hodnotu  $1.25 \cdot 10^{-5} m$ , ovšem uzavřená smyčka je natolik pomalá, že malý stupeň desynchronizace přetrvává i po dosažení referenční hodnoty. Akční zásahy systému jsou velice malé a působí symetricky "proti" sobě.

Pro tento model 4. řádu se nám bohužel nepovedlo nalézt výstupní zpětnou vazbu, která by měla dobré chování v uzavřené smyčce. Vlastní čísla uzavřeného systému totiž nejdou zrychlit, jelikož bychom nedosáhli požadovaného vynulování prvků v matici  $F$ .

## 4.2 Rozšířený model systému

Nyní přikročíme k návrhu stavové zpětné vazby pro rozšířený model systému s lineárním paralelním pohonem z části 3.2. Hodnoty parametrů modelu inspirované článkem [1] jsou uvedeny v následující tabulce 2.

Tabulka 2: Koeficienty pro rozšířený model systému

Název	Značka	Hodnota	Jednotka
torzní tuhost nosníku	$K$	52520	$N \cdot m^{-1}$
hmotnost nosníku se závažím	$M$	50	$kg$
délka nosníku	$L$	0.8	$m$
koeficient viskózního tření motoru $y_1$	$b_1$	5	$N \cdot m \cdot s$
koeficient viskózního tření motoru $y_2$	$b_2$	5	$N \cdot m \cdot s$
tah motoru $y_1$	$k_{t1}$	61	$N \cdot A^{-1}$
tah motoru $y_2$	$k_{t2}$	61	$N \cdot A^{-1}$
zpětná elektromotorická síla motoru $y_1$	$k_{e1}$	49.6	$V \cdot m^{-1} \cdot s$
zpětná elektromotorická síla motoru $y_2$	$k_{e2}$	49.6	$V \cdot m^{-1} \cdot s$
indukčnost cívky na motoru $y_1$	$L_{a1}$	$5.07 \cdot 10^{-3}$	$H$
indukčnost cívky na motoru $y_2$	$L_{a2}$	$5.07 \cdot 10^{-3}$	$H$
odpor cívky na motoru $y_1$	$R_{a1}$	8.4	$\Omega$
odpor cívky na motoru $y_2$	$R_{a2}$	8.4	$\Omega$

Stejně jako v předchozím případě umístíme závaží do středu příčného nosníku  $L_1 = L_2 = \frac{2}{5}$  a moment setrvačnosti příčného nosníku určíme podle vztahu (59). Dostaneme  $J = \frac{8}{3}$ .

Vyčíslené matice popisující systém poté vypadají takto:

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{19695}{2} & \frac{19695}{2} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{122}{25} & -\frac{61}{25} \\ \frac{19695}{2} & -\frac{19695}{2} & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{61}{25} & \frac{122}{25} \\ 0 & 0 & -\frac{4960000}{507} & 0 & -\frac{280000}{169} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4960000}{507} & 0 & -\frac{280000}{169} \end{bmatrix} \quad (86)$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{100000}{507} & 0 \\ 0 & \frac{100000}{507} \end{bmatrix}. \quad (87)$$

Řiditelnost získaného systému popisovanou v části 2.3 zkontrolujeme s využitím Maplu. Matice říditelnosti bude mít nyní rozměr  $\mathbf{S}_c \in \mathbb{R}^{6 \times 12}$ . Platí:

$$\text{rank}(\mathbf{S}_c) = 6 = n \quad (88)$$

a systém  $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2)$  je tedy říditelný.

Vlastní čísla systému (86) jsou následující:

$$\lambda(\mathbf{A}_2) = \{0, -1642.267812, -14.7369216, -1612.717737, \\ -22.3434987 - 140.4783682i, -22.3434987 + 140.4783682i\}. \quad (89)$$

#### 4.2.1 Centralizované řízení

Způsob návrhu stavové zpětné vazby bude stejný jako v části 4.1.1, ovšem pro rozšířený systém. Jordanovy formy  $\mathbf{L}$ , které budeme uvažovat při návrhu, mají následující tvary:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{L}}_1 &= \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & a & & & & \\ & & b & & & \\ & & & b & & \\ & & & & c & \\ & & & & & c \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_2 &= \begin{bmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & & & & \\ & & b & 1 & & \\ & & & b & & \\ & & & & c & 1 \\ & & & & & c \end{bmatrix} \\ \bar{\mathbf{L}}_3 &= \begin{bmatrix} a & & & & & \\ & b & & & & \\ & & c & & & \\ & & & d & & \\ & & & & e & \\ & & & & & f \end{bmatrix} & \bar{\mathbf{L}}_4 &= \begin{bmatrix} a & 1 & & & & \\ & a & 1 & & & \\ & & a & 1 & & \\ & & & a & 1 & \\ & & & & a & b \\ & & & & & c \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (90)$$

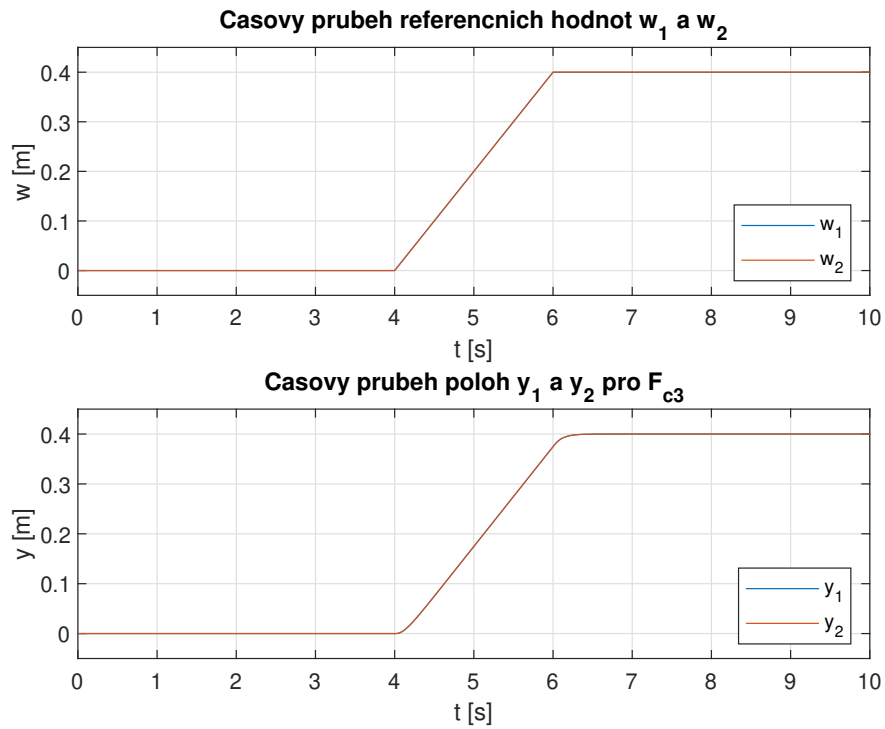
Provedeme návrh zpětné vazby pomocí Jordanovy formy ve tvaru  $\bar{\mathbf{L}}_1$  z výrazu (90). Volba parametrů  $a, b, c$  uvnitř Jordanovy formy byla inspirována vlastními čísly (89) otevřeného systému.

$$\mathbf{L}_{c3} = \begin{bmatrix} -10 & & & & & \\ & -10 & & & & \\ & & -50 & & & \\ & & & -50 & & \\ & & & & -150 & \\ & & & & & -150 \end{bmatrix} \quad (91)$$

Pro Jordanovu formu ve tvaru (91) je matice  $\mathbf{F}$  určena jednoznačně. Dimenze volných parametrů  $\alpha$  je tedy rovna nule.

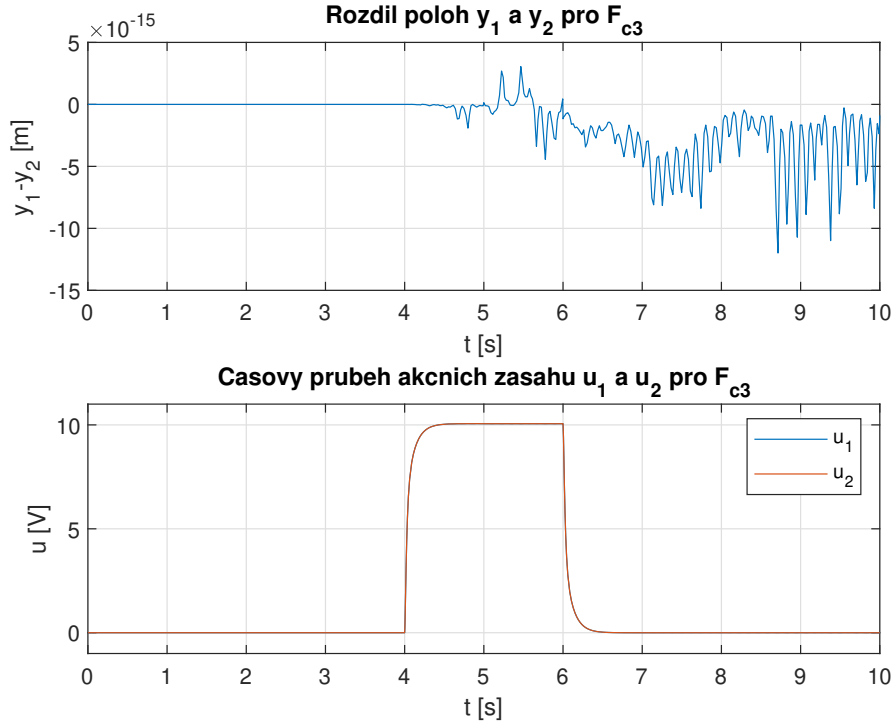
$$\mathbf{F}_{c3} = \begin{bmatrix} 1324.3411 & -1480.1813 & 43.3479 & -13.4004 & 7.3373 & -0.0010 \\ -1480.1813 & 1324.3411 & -13.4004 & 43.3479 & -0.0010 & 7.3373 \end{bmatrix} \quad (92)$$

Navíc ve výrazu (92) můžeme pozorovat určitou pravidelnost, a sice, že "vzájemně diagonální" prvky mají totožné hodnoty. Toto řízení také odpovídá symetrické stavové zpětné vazbě uvedené v [13]. Následně provedeme simulace chování v uzavřené smyčce.



Obrázek 9: Časový průběh referenčních hodnot a poloh  $y_1$ ,  $y_2$  pro matici  $F_{c3}$

Na obrázku 9 můžeme vidět, že na systém je aplikován stejný referenční signál jako v předchozí části. Jednotlivé polohy  $y_1$  a  $y_2$  následují průběh požadované hodnoty, ovšem oproti referenčnímu signálu mají mnohem hladší průběh při rozjezdu a zastavení. To je pro aplikaci řízení na reálný systém klíčová vlastnost. Znamená to, že také průběh akčních zásahů je mnohem hladší, to můžeme vidět na obrázku 10. Nutno připomenout, že pro rozšířený model nyní akční veličina představuje napětí ve voltech přiváděné na jednotlivé motory. Pro tento návrh stavové zpětné vazby s centralizovaným řízením je stupeň desynchronizace mezi jednotlivými polohami motorů zanedbatelný, viz 10. Můžeme usoudit, že uzavřený systém má velice dobré chování.



Obrázek 10: Rozdíl poloh  $y_1$  a  $y_2$  a průběh akčních zásahů pro matici  $F_{c3}$

Dále budeme testovat Jordanovu formu složenou ze třech Jordanových bloků o velikostech  $2 \times 2$ , tedy variantu  $\bar{L}_2$  z (90). Zvolíme o něco rychlejší vlastní čísla než v (91).

$$L_{c4} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & & & & \\ & -10 & & & & \\ & & -100 & 1 & & \\ & & & -100 & & \\ & & & & -200 & 1 \\ & & & & & -200 \end{bmatrix} \quad (93)$$

Zpětnovazební matice  $F_{c4}(\alpha)$  nyní obsahuje 6 volných parametrů, které mohou být zvoleny libovolně. Pro volné parametry ve tvaru:

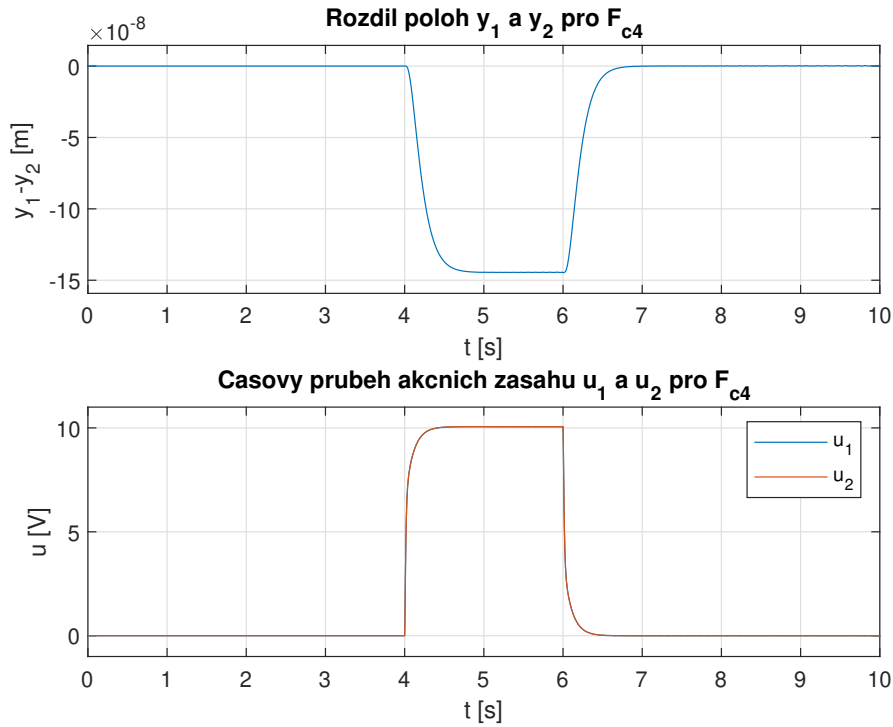
$$\alpha_{c4} = \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = -1\}, \quad (94)$$

obdržíme vyčíslenou zpětnovazební matici:

$$F_{c4} = \begin{bmatrix} 1692.2803 & -2107.8541 & -60.2613 & 62.1990 & 4.7623 & 2.0670 \\ -2389.7852 & 1974.2114 & -107.7007 & 109.6385 & -2.0691 & 8.8984 \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Simulace ukázaly, že průběh poloh  $y_1$  a  $y_2$  je totožný s obrázkem 9. Také pozorujeme pozvolnější náběh na rampu v referenční hodnotě.





Obrázek 11: Rozdíl poloh  $y_1$  a  $y_2$  a průběh akčních zásahu pro matici  $\mathbf{F}_{c4}$

Zajímavé chování zaznamenáváme v časovém průběhu rozdílu jednotlivých poloh. Křivka totiž téměř kopíruje průběh akčních zásahů na jednotlivé motory, které jsou v porovnání stejné jako na obrázku 10. Řádově je stupeň decentralizace o něco horší než pro (92), ovšem stále se pohybuje ve velice dobrých hodnotách.

#### 4.2.2 Decentralizované řízení

Tato kapitola se bude věnovat návrhu decentralizovaného řízení pro rozšířený model šestého řádu, reprezentovaný dvojicí matic (86), (87). Princip zůstává totožný, jako je popisován v části 4.1.2. Abychom dosáhli kompletní decentralizace systému, snažíme se pro rozšířený model dostat zpětnovazební matici  $\mathbf{F}$  do tvaru:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * & 0 & * \end{bmatrix}, \quad (96)$$

kde \* představuje obecně nenulový prvek.

Nejllepší chování v uzavřené smyčce, které splňuje požadavky pro decentralizaci, bylo nalezeno při přiřazení dvou následujících konkrétních Jordanových kanonických forem. První z nich má stejnou podobu jako (93) s posunutými nejnižšími vlastními čísly dále od imaginární osy, tedy:

$$\mathbf{L}_{d4} = \begin{bmatrix} -25 & 1 & & & & \\ & -25 & & & & \\ & & -100 & 1 & & \\ & & & -100 & & \\ & & & & -200 & 1 \\ & & & & & -200 \end{bmatrix}. \quad (97)$$

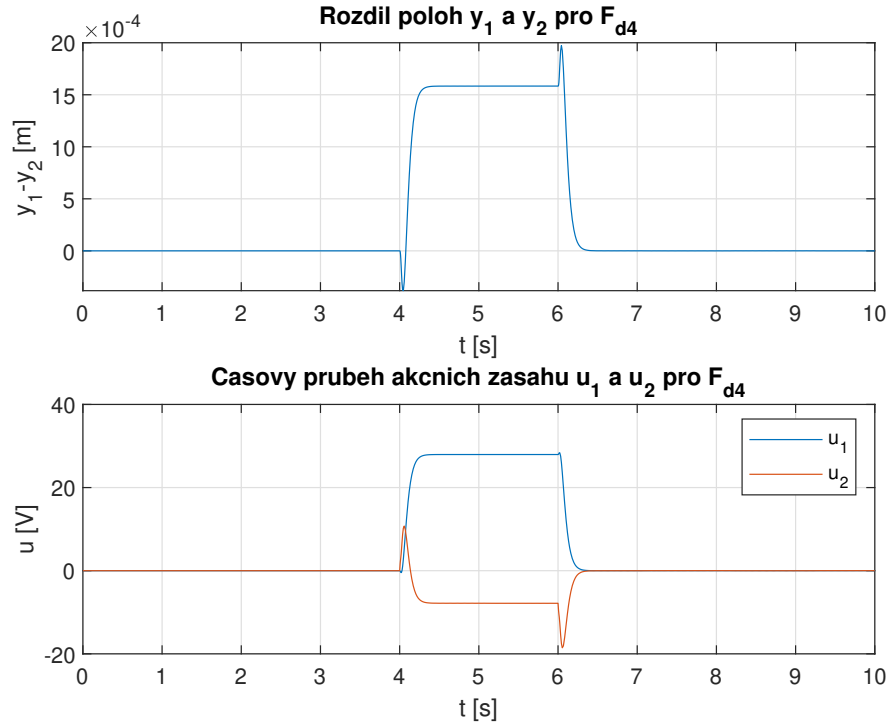
Získaná matice  $\mathbf{F}_{d4}(\alpha)$  obsahuje 6 volných parametrů, které umožní decentralizaci systému. Řešení bylo nalezeno pro následující hodnoty parametrů:

$$\alpha_{d4} = \{\alpha_1 = -1.472, \alpha_2 = 0.046, \alpha_3 = -4.530, \\ \alpha_4 = 3.921, \alpha_5 = -251.162, \alpha_6 = 32.772\}.$$

Vyčíslená matice  $\mathbf{F}$  s decentralizovaným řízením má poté tvar:

$$\mathbf{F}_{d4} = \begin{bmatrix} 2.3507 & 0 & 54.0695 & 0 & 8.00478 & 0 \\ 0 & -697.0187 & 0 & -54.4829 & 0 & 5.5038 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

Následující obrázek 12 ukazuje chování rozdílu poloh motorů a působení akčních zásahů pro uzavřený systém s maticí (98).



Obrázek 12: Výsledky simulací pro  $\mathbf{F}_{d4}$

Z výsledků simulace je vidět, že systém je díky kompenzačnímu zesílení schopný sledovat referenční signál. Na obrázku 12 vidíme, že maximální rozdíl jednotlivých poloh je 2 milimetry. To je pro decentralizované řízení stále uspokojivý výsledek. Při rozjezdu a zastavení konstrukce nastává v rozdílu poloh malý překmit. V časovém průběhu akčních veličin si můžeme povšimnout, že při lineárním pohybu působí paralelní motory proti sobě. Jedná se o důsledek decentralizace, který může mít za následek snížení účinnosti celého systému.

Druhé kvalitní chování uzavřeného systému jsme obdrželi pro Jordanovu formu

$\bar{\mathbf{L}}_4$  z (90) ve tvaru:

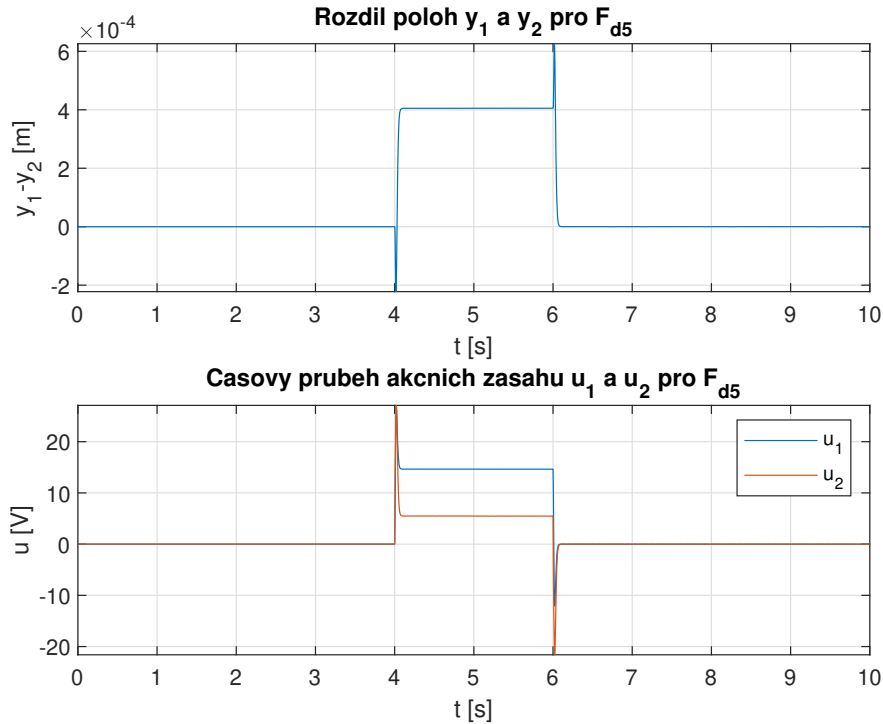
$$\mathbf{L}_{d5} = \begin{bmatrix} -200 & 1 & & & & \\ & -200 & 1 & & & \\ & & -200 & 1 & & \\ & & & -200 & & \\ & & & & -150 & \\ & & & & & -100 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Stejně jako pro Jordanovu formu (97) obsahuje zpětnovazební matice 6 volných parametrů  $\alpha$ . Jejich hodnoty pro dosažení speciálního tvaru matice  $\mathbf{F}$  spolu s jejím vyčíslením jsou zobrazeny níže.

$$\alpha_{d5} = \{\alpha_1 = 2.870, \alpha_2 = -0.013, \alpha_3 = 3.632 \cdot 10^{-5}, \\ \alpha_4 = 2.312 \cdot 10^{-8}, \alpha_5 = -9.158, \alpha_6 = 2.304\}$$

$$\mathbf{F}_{d5} = \begin{bmatrix} -1502.1099 & 0 & 16.6434 & 0 & 7.4317 & 0 \\ 0 & -9180.1958 & 0 & -198.5426 & 0 & 4.0488 \end{bmatrix}. \quad (100)$$

Jak můžeme vidět na následujícím obrázku 13, průběh rozdílu poloh je velice podobný jako v 12 s maximálním rozdílem  $0.6 \text{ mm}$ . Jordanova forma (99) obsahuje více rychlejších vlastních čísel, proto v rozdílu poloh zaznamenáváme agresivnější překmit. Výhodou zpětné vazby (100) je, že se motory při lineárním pohybu otáčejí ve stejném směru. To můžeme pozorovat v průběhu akčních zásahů v grafu 13.



Obrázek 13: Výsledky simulací pro  $\mathbf{F}_{d5}$

### 4.2.3 Výstupní zpětná vazba

Při návrhu výstupní zpětné vazby pro rozšířený systém budeme vycházet z postupu uvedeného v kapitole 4.1.3. Předpokládáme, že při řízení soustavy nemáme informaci o aktuálních rychlostech jednotlivých motorů. Výstupní matice  $\mathbf{C}$  tedy bude mít tvar:

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (101)$$

Zpětnovazební matici  $\mathbf{F}(\alpha)$  získanou pomocí minimální parametrizace se budeme snažit převést do tvaru:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} * & * & 0 & 0 & * & * \\ * & * & 0 & 0 & * & * \end{bmatrix}, \quad (102)$$

kde \* reprezentuje obecně nenulový prvek matice.

Nejlepší chování uzavřené smyčky bylo dosaženo při volbě Jordanových forem ve tvaru  $\bar{\mathbf{L}}_1$  a  $\bar{\mathbf{L}}_3$  z (90). Konkrétní tvar Jordanovy formy s dosazenými vlastními čísly je následující:

$$\mathbf{L}_{v2} = \begin{bmatrix} -25 & 1 & & & & \\ & -25 & & & & \\ & & -100 & 1 & & \\ & & & -100 & & \\ & & & & -356 & 1 \\ & & & & & -356 \end{bmatrix}. \quad (103)$$

Jedna z možných voleb volných parametrů, kterých ve zpětnovazební matici  $\mathbf{F}_{v2}(\alpha)$  vzniká 6, je zobrazena níže.

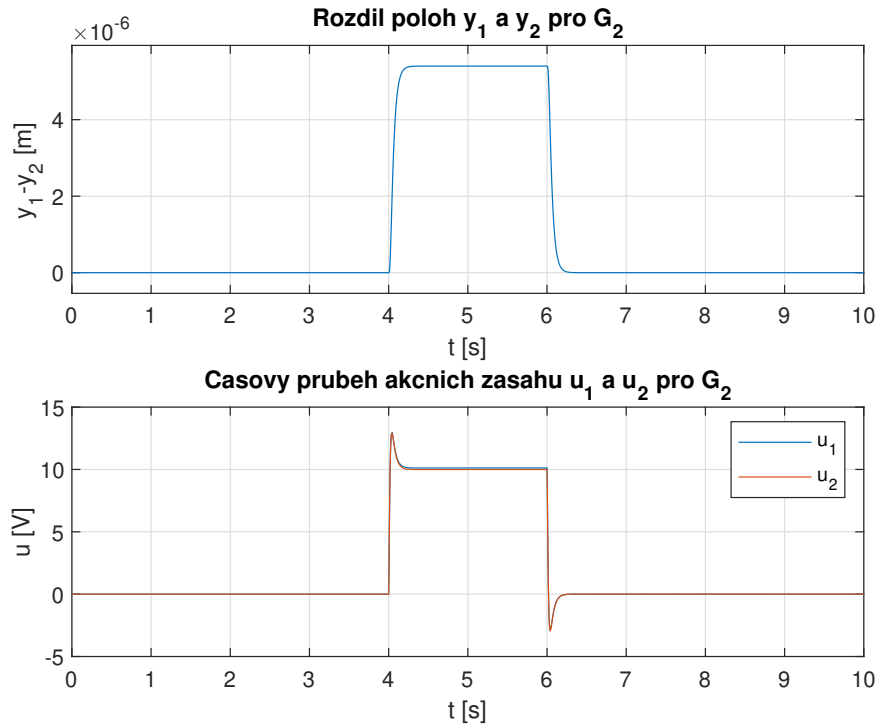
$$\alpha_{v2} = \{\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \alpha_3 = 1.007249068, \alpha_4 = -6.803626714 \cdot 10^{-5}, \\ \alpha_5 = 0.9886999528, \alpha_6 = 8.489974058 \cdot 10^{-5}\}$$

Po dosazení parametrů  $\alpha_{v2}$  dostáváme zpětnovazební matici do požadovaného tvaru. Vynecháním sloupců 3 a 4 získáme matici  $\mathbf{G}$ , která reprezentuje výstupní zpětnou vazbu.

$$\mathbf{F}_{v2} = \begin{bmatrix} 134693.2164 & -135554.4890 & 0.0 & 0.0 & -41.5937 & 48.3765 \\ 127257.7184 & -128118.3755 & 0.0 & 0.0 & -46.7401 & 53.5205 \end{bmatrix} \quad (104)$$

$$\mathbf{G}_2 = \begin{bmatrix} 134693.2164 & -135554.4890 & -41.5937 & 48.3765 \\ 127257.7184 & -128118.3755 & -46.7401 & 53.5205 \end{bmatrix} \quad (105)$$

Na následujícím obrázku 14 je znázorněn průběh rozdílů poloh a působení akčních zásahů pro uzavřený systém s výstupní zpětnou vazbou  $\mathbf{G}_2$ .



Obrázek 14: Výsledky simulací pro  $G_2$

Uzavřená smyčka dokáže dobře sledovat referenční signál, který reprezentuje lineární pohyb příčného nosníku po dobu dvou vteřin rychlostí  $0.2m/s$ . Na obrázku 14 vidíme pro výstupní zpětnou vazbu velice dobrý průběh rozdílu poloh, který nepřesahuje  $5 \cdot 10^{-6}m$ . Stejně dobré chování můžeme vidět i na průběhu akčních veličin na grafu níže ve stejném obrázku. Motory jsou po dobu celého pohybu řízeny téměř stejným napětím. Při rozjezdu a zastavení pozorujeme v akčních veličinách malý překmit, který je způsoben náhlou změnou referenčního signálu. Chování bychom mohli ještě vylepšit, pokud bychom upravili průběh referenční rampy, aby měla parabolický nájezd,[1]. Celkově zpětná vazba (105) zajišťuje nejlepší dosažené chování v uzavřené smyčce.

Druhý návrh výstupní zpětné vazby pro rozšířený systém budeme volit přiřazením Jordanovy formy ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{v3} = \text{diag}\{-10, -60, -150, -160, -180, -280\}. \quad (106)$$

Volbu volných parametrů  $\alpha$  spolu s vyčíslenou zpětnovazební maticí můžeme vidět níže.

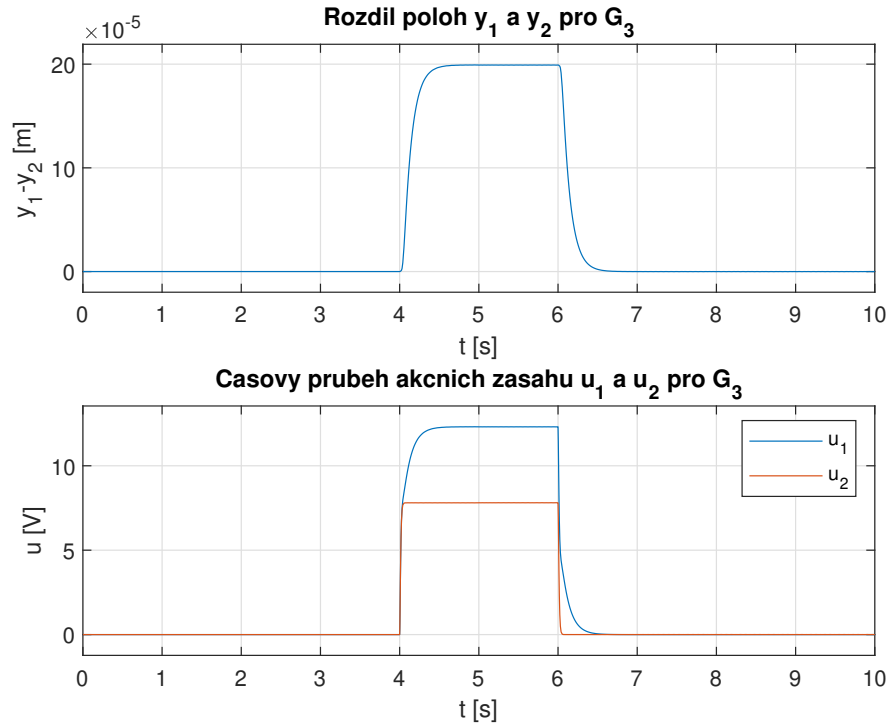
$$\alpha_{v3} = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.4380027705, \alpha_4 = 0.3644348452, \\ \alpha_5 = 0.1469519523, \alpha_6 = -1.062445253\}$$

$$\mathbf{F}_{v3} = \begin{bmatrix} 898.1453 & -1368.4591 & 0 & 0 & 6.3686 & 0.5850 \\ -4460.2977 & 4010.9850 & 0 & 0 & 0.8813 & 6.1767 \end{bmatrix} \quad (107)$$

Vynecháním nulových sloupců v matici (107) dostaneme následující matici (108),

která spolu s maticemi (86), (87) a (101) tvoří dynamiku uzavřeného systému.

$$\mathbf{G}_3 = \begin{bmatrix} 898.1453 & -1368.4591 & 6.3686 & 0.5850 \\ -4460.2977 & 4010.9850 & 0.8813 & 6.1767 \end{bmatrix} \quad (108)$$



Obrázek 15: Výsledky simulací pro  $\mathbf{G}_3$

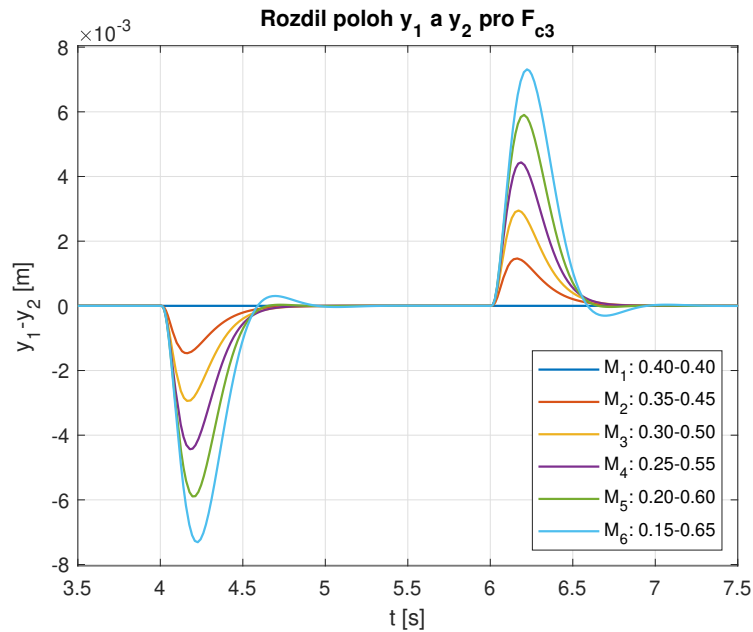
Výsledný časový průběh akčních zásahů a rozdílu poloh získaný pomocí simulací je znázorněn na obrázku 15. Stupeň synchronizace se oproti simulaci 14 zhoršil o dva řády, ovšem průběh akčních zásahů máme nyní bez náhlých překmitů. Motory nejsou oproti předchozí zpětné vazbě řízeny stejným napětím. Do druhého motoru je vyslán obdélníkový signál, zatímco první motor zajišťuje hladké sledování referenčního signálu. Matice (108) také zajišťuje velice dobré zpětnovazební chování.

#### 4.2.4 Experimentální simulace s polohovaným závažím

V předchozích kapitolách byly navrženy různé varianty zpětnovazebního řízení pro model, kdy je závaží umístěno přesně uprostřed spojnice pohonů. Následně by bylo zajímavé zjistit, jak se toto řízení bude chovat v případě, že by závaží bylo o něco vychýleno ze své původní středové polohy.

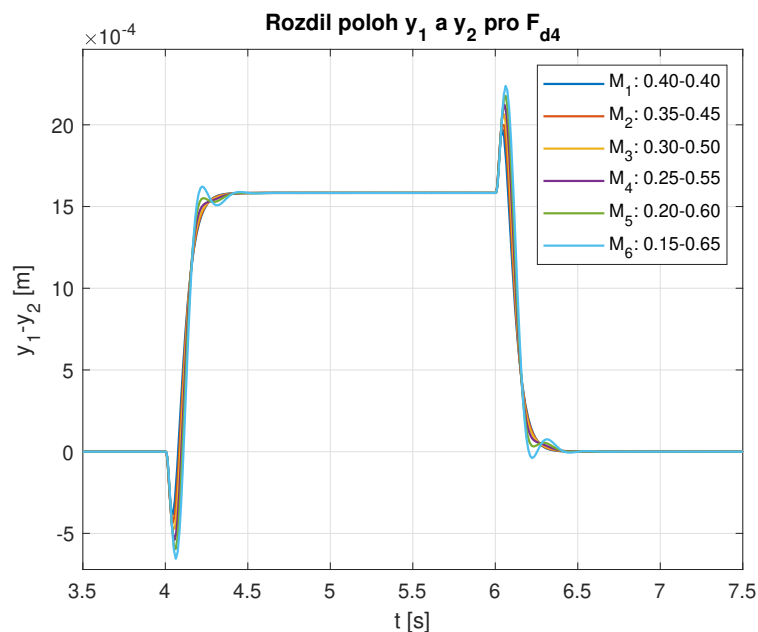
Pro tuto analýzu jsme si vytvořili několik modelů dynamického systému vždy s odlišným poměrem vzdáleností  $L_1, L_2$ . Pro tyto modely jsme vyzkoušeli zpětnovazební řízení pomocí stejné matice  $\mathbf{F}$ . Začneme s původní symetrickou konstrukcí  $L_1 = L_2 = 0.4m$  a budeme posouvat závaží vždy o 5 centimetrů k motoru 1, až dojdeme ke vzdálenosti  $L_1 = 0.15m, L_2 = 0.65m$ .

Velice dobrých výsledků bylo dosaženo pro centralizované řízení se zpětnou vazbou  $F_{c3}$ , (92). Na obrázku 16 je možné vidět, že se rozdíl poloh paralelních pohonů zhorší vždy o cca  $1\text{mm}$  při každém posunu závaží o  $5\text{cm}$ .



Obrázek 16: Výsledky simulací pro  $F_{c3}$  s různě vychýleným závažím.

Nyní ukažme odpovídající výsledky pro decentralizované řízení se zpětnou vazbou (98) při změně polohy závaží, viz obrázek 17. Rozdíl poloh motorů je změnou polohy závaží ovlivněn nepatrně. Proto bychom tedy mohli soudit, že můžeme používat tyto zpětné vazby i při malé změně těžiště systému, resp. při nepřesném umístění závaží.



Obrázek 17: Výsledky simulací pro  $F_{d4}$  s různě vychýleným závažím

## 5 Návrh stavové zpětné vazby pro modely s nesymetrickým umístěním závaží

V kapitole 4 jsme uvažovali, že je závaží umístěno uprostřed příčného nosníku. Vzdálenosti  $L_1$  a  $L_2$  byly shodné, tudíž se těžiště nacházelo přímo ve středu systému. V reálných aplikacích tento požadavek nemusí být splněn. Naopak je časté, že se na příčném nosníku nachází další pohyblivý subsystém, který přemisťuje závaží ve směru  $x$ . Systém s lineárním paralelním pohonem poté může pohybovat se závažím či jakýmkoliv koncovým efektozem v kartézské rovině. Má proto smysl navrhovat i takové řízení, které má nesymetricky umístěné závaží.

### 5.1 Redukovaný model systému

Začneme nejprve s analýzou systému 4. řádu. Hodnoty parametrů systému zůstávají stejné jako v tabulce 1, ovšem poměr délek  $L_1$ ,  $L_2$  zvolíme jiný, a to:  $L_1 = \frac{3}{10}$  a  $L_2 = \frac{5}{10}$ . Z toho plyne také změna momentu setrvačnosti, který je funkcí těchto vzdáleností. Podle vzorce (59) byla dopočítána hodnota  $J = \frac{19}{6}$ . S uvážením těchto změn se změní také vyčíslená matice dynamiky:

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{118170}{19} & \frac{118170}{19} & -\frac{23}{95} & \frac{13}{95} \\ \frac{196950}{19} & -\frac{196950}{19} & \frac{13}{95} & -\frac{47}{95} \end{bmatrix} \quad (109)$$

a vstupní matice:

$$\mathbf{B}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{23}{475} & -\frac{13}{475} \\ -\frac{13}{475} & \frac{47}{475} \end{bmatrix}. \quad (110)$$

Postup návrhu zpětných vazeb bude stejný jako ve všech předchozích částech. Řízení ovšem navrhuje pro systém reprezentovaný dvojicí (109), (110).

#### 5.1.1 Centralizované řízení

Centralizované řízení nám kvůli znalosti celého stavového prostoru doposud zajišťovalo největší přesnost synchronizace. Můžeme proto vyzkoušet, zda stejný tvar Jordanovy formy jako (65) povede na dobré chování v uzavřené smyčce i pro systém s nevyváženým těžištěm.

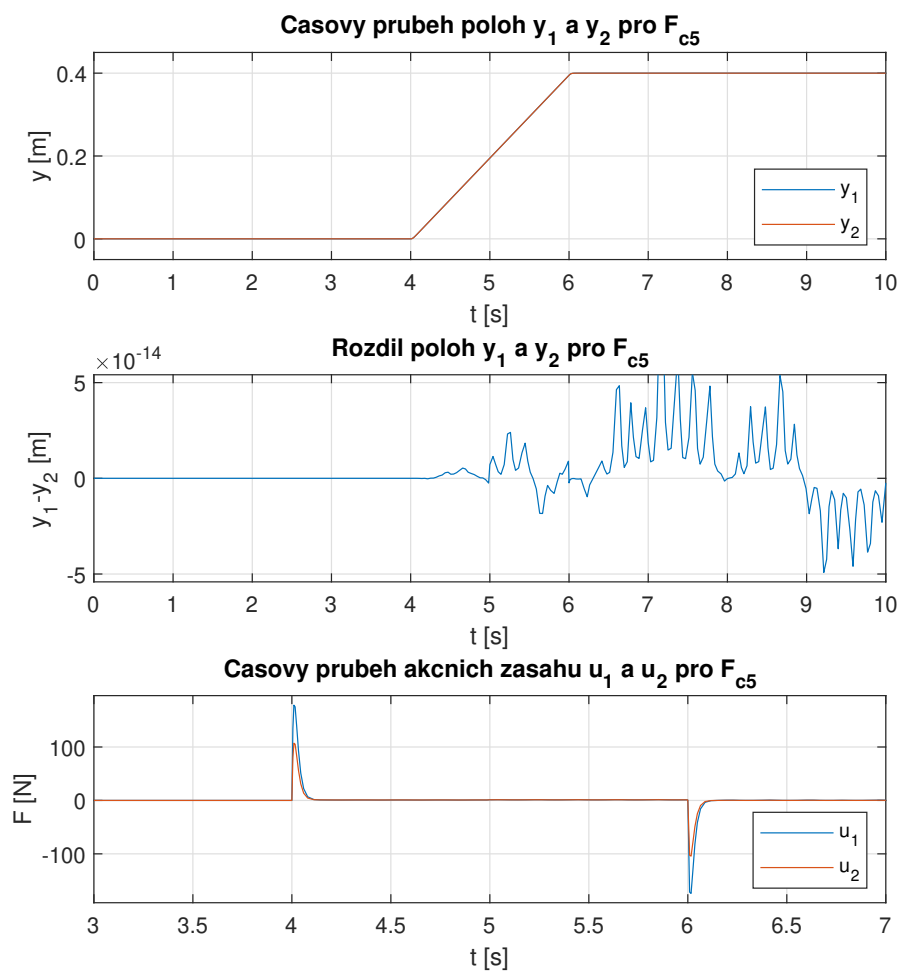
$$\mathbf{L}_{c5} = \mathbf{L}_{c1} = \text{diag}\{-70, -70, -90, -90\} \quad (111)$$

Zpětnovazební matice je pro tento návrh určena jednoznačně, a to:

$$\mathbf{F}_{c5} = \begin{bmatrix} -\frac{288625}{4} & -\frac{498875}{4} & -\frac{11735}{3} & -\frac{3250}{3} \\ -\frac{498875}{4} & \frac{26375}{4} & -\frac{3250}{3} & -\frac{5735}{3} \end{bmatrix}. \quad (112)$$



Jak simulace na následujícím obrázku 18 ukazují, systém je schopný perfektně sledovat referenční signál ve tvaru rampy i pro změněnou dynamiku. Dokonce je průběh rozdílu poloh  $y_1$  a  $y_2$  řádově úplně stejný jako pro vyvážený případ na grafu 4. Největší rozdíl nalezneme v průběhu působení akčních zásahů. Těžiště systému je nyní umístěno blíže k prvnímu z motorů, proto jsou na něj kladeny větší silové požadavky. Na přiblíženém spodním grafu ve stejném obrázku 18 vidíme, že je akční zásah  $u_1$  při rozjezdu a zpomalení ztlačně větší než zásah  $u_2$ . Při pohybu po rampě na motory nepůsobí žádné silové účinky, neboť se pohybují konstantní rychlostí. Ukazuje se, že je návrh Jordanovy formy ve tvaru (111) vhodný i pro nevyvážené systémy.



Obrázek 18: Výsledky simulací pro  $F_{c5}$

### 5.1.2 Decentralizované řízení

Přesouváme se k návrhu decentralizovaného řízení. Stejně tak jako v části 4.1.2 vyzkoušíme přiřazovat tři typy Jordanových forem:  $\bar{L}_4$ ,  $\bar{L}_5$ ,  $\bar{L}_6$ , které nalezneme ve vztahu (64). Experimenty ukázaly, že stejné chování uzavřené smyčky jako pro symetrický systém dostaneme, pokud vlastní čísla Jordanových kanonických forem

přesuneme kolem hodnoty  $-78$ . Všechny tři návrhy mají po této volbě téměř totožné zpětnovazební chování. Pro ukázkou si uvedeme alespoň jeden z nich.

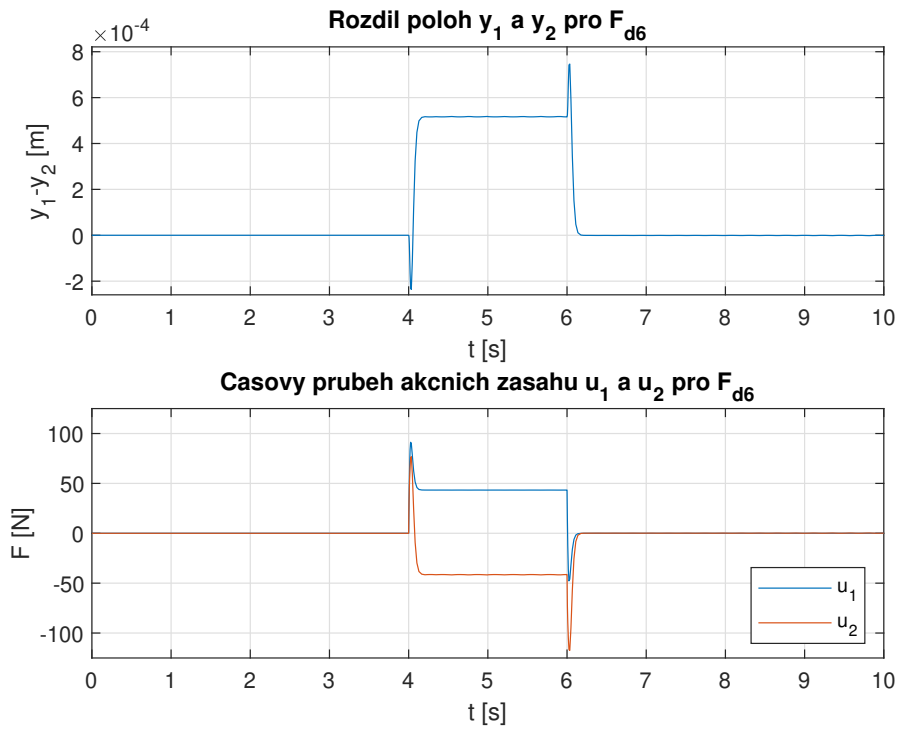
$$\mathbf{L}_{d6} = \begin{bmatrix} -77 & 1 & & \\ & -77 & & \\ & & -78 & 1 \\ & & & -78 \end{bmatrix} \quad (113)$$

Parametry  $\alpha$ , které zajistí decentralizaci, spolu s vyčíslenou zpětnovazební maticí  $\mathbf{F}$ , uvádíme níže.

$$\alpha_{d6} = \{\alpha_1 = 9.418094712, \alpha_2 = -0.3520149331, \\ \alpha_3 = 9.782258252, \alpha_4 = -0.3766780652\}$$

$$\mathbf{F}_{d6} = \begin{bmatrix} -34561.8292 & 0.0 & -1228.7487 & 0.0 \\ 0.0 & -52200.4400 & 0.0 & -2524.2294 \end{bmatrix} \quad (114)$$

Výsledky simulací můžeme vidět na obrázku 19.



Obrázek 19: Výsledky simulací pro  $\mathbf{F}_{d6}$

Průběh rozdílu jednotlivých poloh je téměř totožný jako na grafu 6. V časovém vývoji akčních zásahů vidíme, že při rozjíždění na motory působí podobné síly, ovšem zpomalení systému na konci referenční rampy zajišťuje především druhý motor. Dále vidíme, že při pohybu po rampě není silové působení nulové, jako na obrázku 18. Motory působí proti sobě, a to stejnými silami, aby celková síla byla nulová a nedocházelo ke zrychlení soustavy.

## 5.2 Rozšířený model systému

Nyní uvažujme model 6. řádu, který představuje realističtější popis systému s paralelním lineárním pohonem. Stejně jako v části 5.1 upravíme hodnoty vzdáleností na  $L_1 = \frac{3}{10}$ ,  $L_2 = \frac{5}{10}$  a s nimi spojený moment setrvačnosti  $J = \frac{19}{6}$ .

Dostáváme nový popis rozšířeného dynamického systému s nevycentrovaným závažím ve tvaru:

$$\mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{118170}{19} & \frac{118170}{19} & -\frac{23}{95} & \frac{13}{95} & \frac{1403}{475} & -\frac{793}{475} \\ \frac{196950}{19} & -\frac{196950}{19} & \frac{13}{95} & -\frac{47}{95} & -\frac{793}{475} & \frac{2867}{475} \\ 0 & 0 & -\frac{4960000}{507} & 0 & -\frac{280000}{169} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4960000}{507} & 0 & -\frac{280000}{169} \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{100000}{507} & 0 \\ 0 & \frac{100000}{507} \end{bmatrix}. \quad (116)$$

### 5.2.1 Centralizované řízení

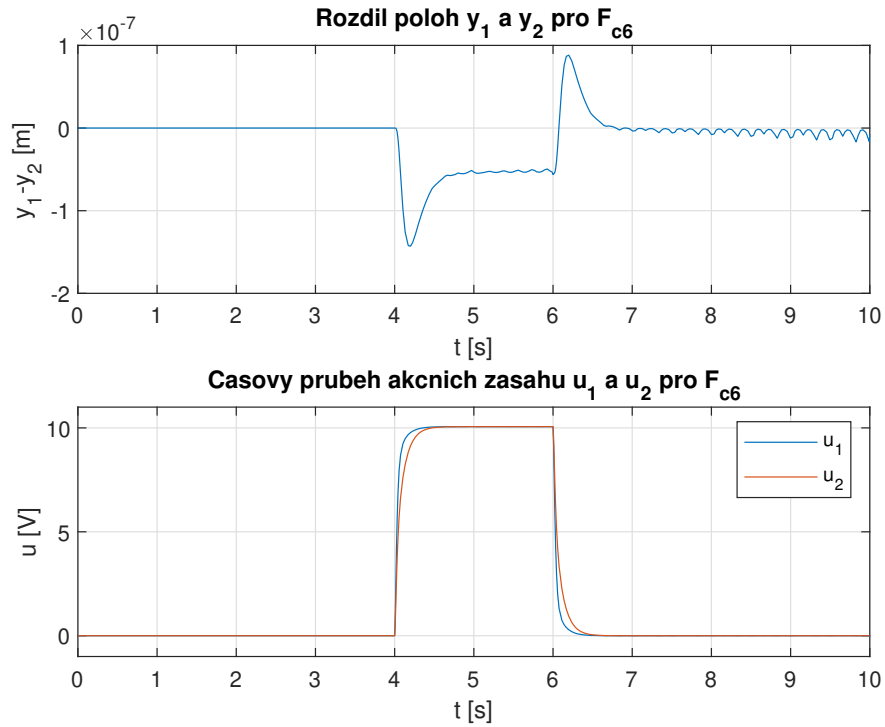
Vycházejme z původní Jordanovy kanonické formy (91) pro návrh centralizovaného řízení modelu 6. řádu. Při návrhu zpětné vazby se ukázvalo, že pro menší maximální rozdíl poloh  $y_1$  a  $y_2$  je zapotřebí zmenšit nejrychlejší vlastní čísla navrhované Jordanovy formy. Nakonec jsme tedy dospěli k Jordanově kanonické formě ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{c6} = \text{diag}\{-10, -10, -50, -50, -100, -100\}. \quad (117)$$

Dimenze návrhových parametrů je stejně jako pro (91) nulová, tedy matice  $\mathbf{F}$  je určena jednoznačně:

$$\mathbf{F}_{c6} = \begin{bmatrix} 986.9831 & -1116.8499 & 43.2622 & -10.4785 & 7.5900 & -0.0006938 \\ -1115.1268 & 1037.2067 & -10.4785 & 50.0152 & -0.0006938 & 7.5913 \end{bmatrix}. \quad (118)$$

Předpokládáme opět, že oba motory budou buzeny rozdílným napěťovým vstupem, neboť je těžiště umístěno blíže k prvnímu motoru. To potvrzují i simulace na obrázku 20. Akční zásah na první motor při rozjezdu a zpomalení působí s malým předstihem. Při rovnoměrném pohybu po rampě je přiváděné napětí na oba motory stejné a nenulové. Výsledný rozdíl jednotlivých poloh je řádově v desetinách mikrometru.



Obrázek 20: Výsledky simulací pro  $F_{c6}$

Pro zajímavost zkusíme v následujícím návrhu zachovat vlastní čísla Jordanovy kanonické formy, ovšem změnit její tvar. Namísto šesti bloků o rozměrech  $1 \times 1$  provedeme návrh zpětné vazby pro Jordanovu formu se třemi bloky o rozměrech  $2 \times 2$ .

$$\mathbf{L}_{c7} = \begin{bmatrix} -10 & 1 & & & & & \\ & -10 & & & & & \\ & & -50 & 1 & & & \\ & & & -50 & & & \\ & & & & -100 & 1 & \\ & & & & & -100 & \end{bmatrix} \quad (119)$$

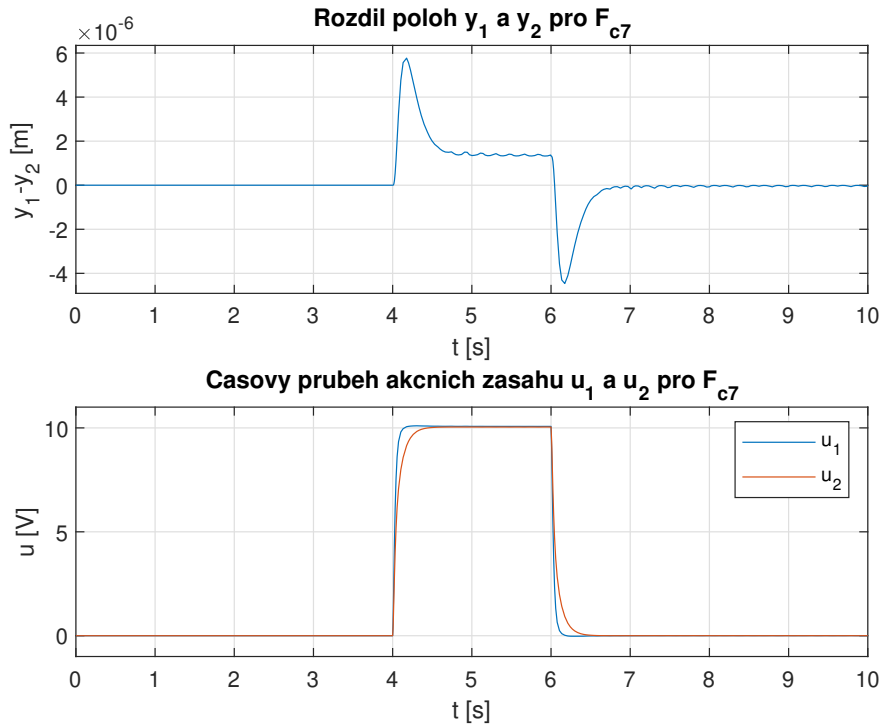
Můžeme vidět, že vlastní čísla jsou totožná s (117). Návrhové parametry  $\alpha$  jsme volili následovně:

$$\alpha_{c7} = \{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 1, \alpha_4 = -1, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = -1\}.$$

Dostaneme poté zpětnovazební matici ve tvaru:

$$\mathbf{F}_{c7} = \begin{bmatrix} 5658.8055 & -5800.9191 & -19.4811 & 52.1713 & 5.6897 & 3.1752 \\ 1676.2095 & -1761.2908 & -48.0566 & 87.5593 & -1.1372 & 9.4917 \end{bmatrix}. \quad (120)$$

Provedeme simulace a porovnáme je s výsledky 20.



Obrázek 21: Výsledky simulací pro  $F_{c7}$

Na první pohled jsou časové průběhy akčních zásahů na obrázcích 20 a 21 stejné. Po bližším prozkoumání si můžeme všimnout, že pro zpětnou vazbu (120) je akční zásah  $u_1$  při rozjezdu o něco větší, než pro zpětnou vazbu (118). To má za následek, že je při rozjezdu první motor nepatrně v předstihu. Při zpomalování je tomu naopak. Dostáváme tedy přesný opak chování rozdílu poloh, jako na obrázku 20. Řádově se pohybujeme v podobných hodnotách, ovšem návrh  $L_{c7}$  je v porovnání horší než  $L_{c6}$ .

### 5.2.2 Decentralizované řízení

V této kapitole přistoupíme k návrhu řízení s decentralizovanou strukturou. Podobně jako v části 4.2.2 hledáme takovou zpětnovazební matici, která bude ve speciálním tvaru (96). Nejprve navážeme na Jordanovu formu (97), která zajišťovala dobré chování uzavřené smyčky u modelu se symetrickou konstrukcí. Pro model s nesymetrickým umístěním závaží jsme získali lepší chování, pokud byla zpomalena nejmenší vlastní čísla. Dospěli jsme k následujícímu návrhu Jordanovy formy:

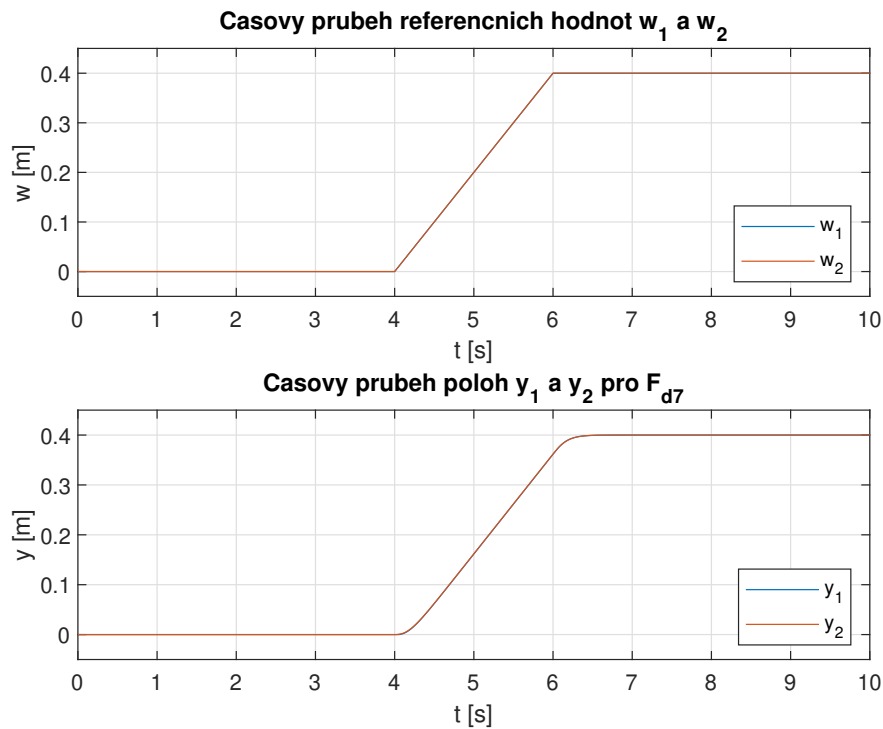
$$L_{d7} = \begin{bmatrix} -11 & 1 & & & & & \\ & -11 & & & & & \\ & & -100 & 1 & & & \\ & & & -100 & & & \\ & & & & -200 & 1 & \\ & & & & & -200 & \end{bmatrix}. \quad (121)$$

Volné parametry  $\alpha$ , pro které jsme získali decentralizované řízení, mají následující hodnoty:

$$\alpha_{d7} = \{\alpha_1 = -0.7203252113, \alpha_2 = 0.08977966026, \alpha_3 = 107.7861225, \\ \alpha_4 = -17.90125717, \alpha_5 = 64.96494764, \alpha_6 = 0.7110809358\}.$$

Vyčíslená zpětnovazební matice má poté tvar:

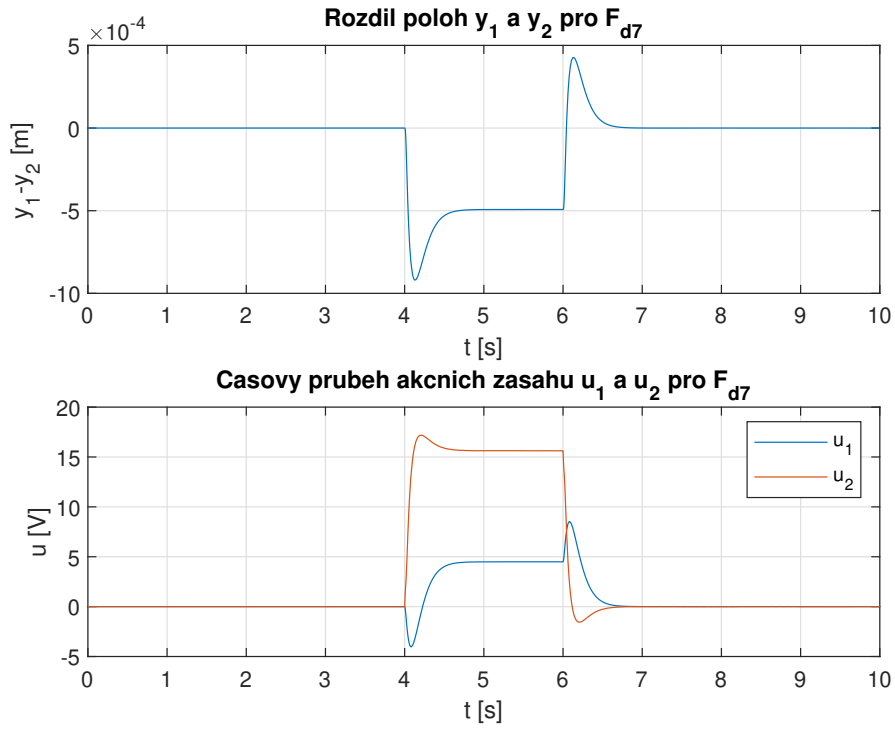
$$\mathbf{F}_{d7} = \begin{bmatrix} 19.4020 & 0 & 52.5147 & 0 & 8.1457 & 0 \\ 0 & -490.5868 & 0 & -33.8392 & 0 & 5.5045 \end{bmatrix}. \quad (122)$$



Obrázek 22: Časový průběh referenčních hodnot a poloh  $y_1$ ,  $y_2$  pro matici  $\mathbf{F}_{d7}$

Na obrázku 22 vidíme, že je systém při simulacích buzen stejným referenčním signálem jako ve všech předchozích případech. Zmenšení vlastních čísel v Jordanově formě má za následek, že je i celá uzavřená smyčka pomalejší. Na časovém průběhu poloh tedy můžeme vidět, že je náběh na rampu velice pozvolný bez ostrých hran.

Na obrázku 23 můžeme vidět, že maximální rozdíl poloh paralelních pohonů dosahuje v absolutní hodnotě téměř jednoho milimetru. Decentralizované řízení značně zhoršuje stupeň synchronizace pohonů, přesto je chování stále velice dobré. Na spodním grafu v obrázku 23 jsou znázorněny akční zásahy, které mají odlišný průběh. Druhý motor více přispívá k pohybu konstrukce, neboť je na něj přiváděno značně větší napětí než na motor číslo jedna. Naopak první motor se při změně rychlosti snaží pohyb usměrnit a působí v opačném směru.



Obrázek 23: Rozdíl poloh  $y_1$ ,  $y_2$  a průběh akčních zásahů pro matici  $\mathbf{F}_{d7}$

Druhá vyhovující Jordanova forma vychází z matice (99), kterou opět upravíme, abychom vylepšili chování uzavřené smyčky. Po úpravě vlastních čísel Jordanovy formy jsme dospěli k následujícímu tvaru:

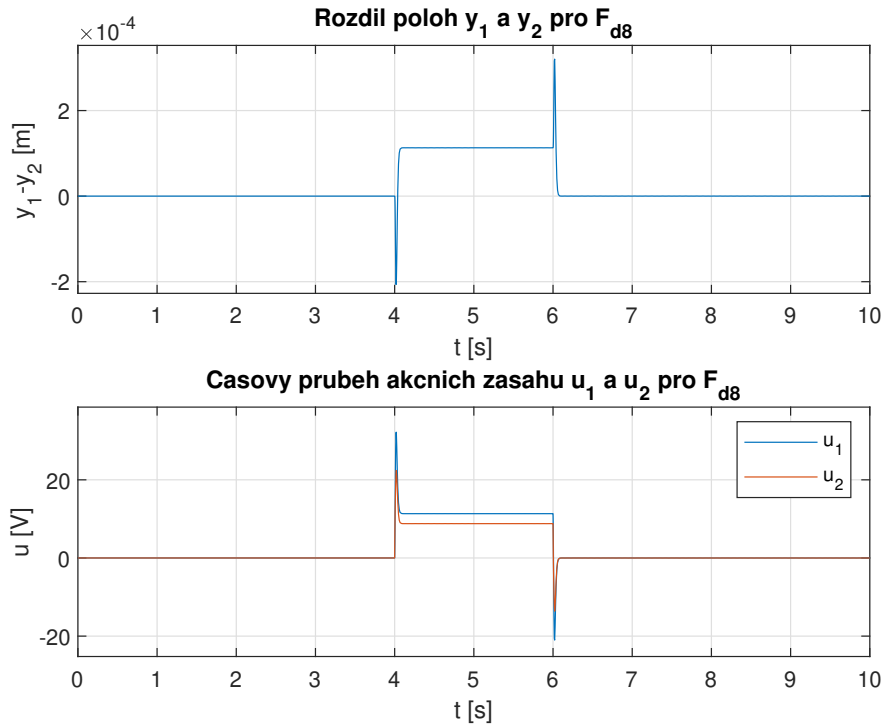
$$\mathbf{L}_{d8} = \begin{bmatrix} -210 & 1 & & & & & \\ & -210 & 1 & & & & \\ & & -210 & 1 & & & \\ & & & -210 & 1 & & \\ & & & & -210 & -150 & \\ & & & & & -150 & -100 \end{bmatrix}. \quad (123)$$

Opět pro úplnost uvádíme parametry, které vedou na decentralizaci, spolu s vyčíslenou maticí  $\mathbf{F}$ .

$$\alpha_{d8} = \{\alpha_1 = 1.886661141, \alpha_2 = -0.01005629293, \alpha_3 = 4.113255378 \cdot 10^{-5}, \\ \alpha_4 = 8.924457962 \cdot 10^{-8}, \alpha_5 = 0.5197805425, \alpha_6 = 1.474534148\}$$

$$\mathbf{F}_{d8} = \begin{bmatrix} -2681.3035 & 0 & -12.8930 & 0 & 7.1966 & 0 \\ 0 & -7970.8268 & 0 & -146.6225 & 0 & 4.0808 \end{bmatrix} \quad (124)$$

Uzavřená smyčka (124) má více rychlejších vlastních čísel než (122). Časový průběh poloh  $y_1$  a  $y_2$  potom dobře kopíruje tvar referenčního signálu.



Obrázek 24: Výsledky simulací pro  $F_{d8}$

Na obrázku 24 můžeme také vidět mnohem agresivnější průběh akčních zásahů. Při rozjezdu a zpomalení soustavy působí motory vždy ve stejném směru. Signál je ovšem velice agresivní, proto bychom mohli u reálného systému pozorovat viditelné trhnutí. Implementace zpětné vazby na reálný systém by proto nemusela být vhodná. Rozdíl poloh vychází řádově velice podobně jako na obrázku 23. Můžeme vidět, že skokové změny akčních zásahů způsobují skokové změny rozdílu poloh.

### 5.2.3 Výstupní zpětná vazba

Na závěr navrhne výstupní zpětnou vazbu pro rozšířený model s nesymetricky umístěným závažím. Stejně jako v kapitole 4.2.3 hledáme zpětnovazební matici ve tvaru (102). Výstupní matice  $C$  zůstává ve tvaru (101).

Při návrhu vyjdeme z Jordanovy formy (103). Nejlepší chování systému v uzavřené smyčce jsme získali přiřazením Jordanovy formy ve tvaru:

$$\mathbf{L}_{v5} = \begin{bmatrix} -25 & 1 & & & & \\ & -25 & & & & \\ & & -100 & 1 & & \\ & & & -100 & & \\ & & & & -328 & 1 \\ & & & & & -328 \end{bmatrix}. \quad (125)$$

V matici  $F_{v5}(\alpha)$  se nachází 6 volných parametrů. Abychom získali matici  $F_{v5}(\alpha)$  ve



tvary (102), zvolili jsme následující hodnoty volných parametrů:

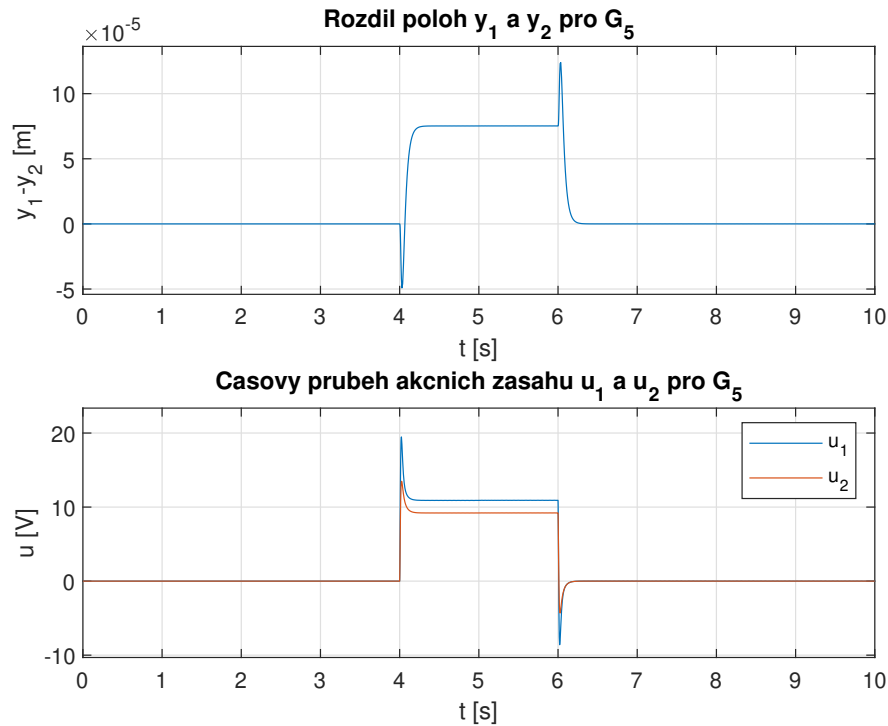
$$\alpha_{v5} = \{\alpha_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \alpha_3 = 0.3636754544, \\ \alpha_4 = -0.002907306150, \alpha_5 = 0.4052277168, \alpha_6 = 0.000450177180\}.$$

Po dosazení parametrů a vynechání nulových sloupců matice dostáváme hledanou zpětnovazební matici  $\mathbf{G}$ .

$$\mathbf{F}_{v5} = \begin{bmatrix} 15196.7397 & -16289.9828 & 0 & 0 & 3.2230 & 7.4151 \\ 1527.9665 & -2617.3779 & 0 & 0 & -1.0584 & 8.9874 \end{bmatrix} \quad (126)$$

$$\mathbf{G}_5 = \begin{bmatrix} 15196.7397 & -16289.9828 & 3.2230 & 7.4151 \\ 1527.9665 & -2617.3779 & -1.0584 & 8.9874 \end{bmatrix} \quad (127)$$

Výsledky simulací chování uzavřené smyčky vidíme na následujícím obrázku 25. Maximální rozdíl poloh paralelních motorů se pohybuje řádově v desetínách milimetru. Přiváděné napětí na oba motory je v průběhu simulace velice podobné. Kvůli nevyvážené konstrukci zabírá první motor o něco více. Akční zásahy mají v každý okamžik simulace stejné znaménko, tudíž nedochází k vzájemnému brzdění motorů. Chování uzavřené smyčky můžeme proto považovat za velice dobré.



Obrázek 25: Výsledky simulací pro  $\mathbf{G}_5$

Poslední návrh zpětné vazby budeme provádět pro tvar Jordanovy formy  $\bar{\mathbf{L}}_3$  z (90). Vlastní čísla matice byla volena podobně jako v návrhu (106).

$$\mathbf{L}_{v6} = \text{diag}\{-10, -60, -100, -160, -180, -280\} \quad (128)$$

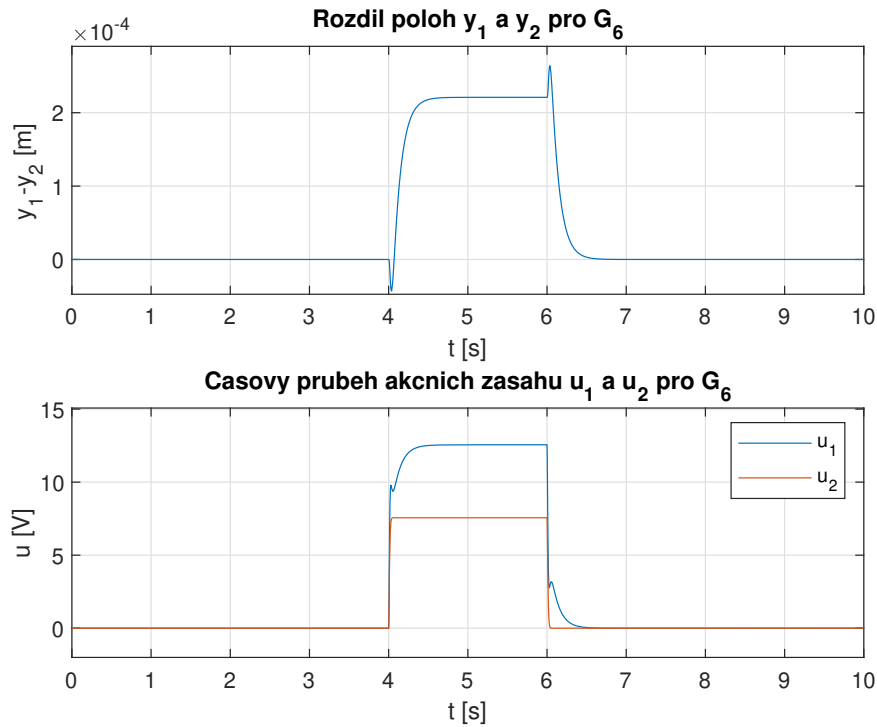
Volba volných parametrů spolu s vyčíslenou zpětnovazební maticí  $\mathbf{F}$  jsou následující:

$$\alpha_{v6} = \{\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0.2576401756, \alpha_4 = 0.3417533854, \\ \alpha_5 = 0.3398106732, \alpha_6 = 0.2614479017\}$$

$$\mathbf{F}_{v6} = \begin{bmatrix} 4971.3670 & -5476.3004 & 0 & 0 & 5.6531 & 3.0835 \\ -2849.6300 & 2361.8114 & 0 & 0 & 0.0183 & 7.1453 \end{bmatrix}. \quad (129)$$

Výsledná matice výstupní zpětné vazby je ve tvaru:

$$\mathbf{G}_6 = \begin{bmatrix} 4971.3670 & -5476.3004 & 5.6531 & 3.0835 \\ -2849.6300 & 2361.8114 & 0.0183 & 7.1453 \end{bmatrix}. \quad (130)$$



Obrázek 26: Výsledky simulací pro  $\mathbf{G}_6$

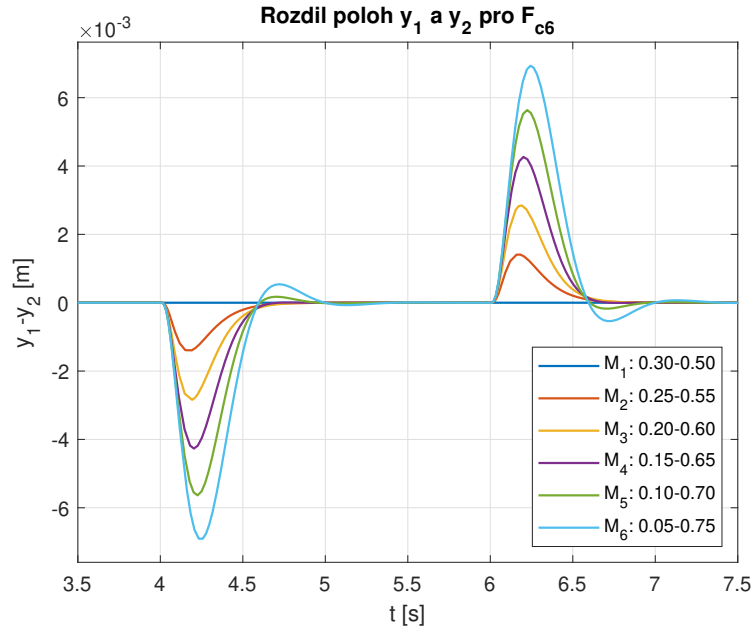
Návrh zpětné vazby (130) je zde uváděn kvůli zajímavému průběhu akčních zásahů, který je znázorněn na obrázku 26. Akční zásah na druhý motor představuje téměř obdélníkový signál, zatímco první motor reguluje pohyb soustavy, aby odpovídal referenčnímu signálu. Rozdíl poloh se řádově pohybuje v desítkách milimetru a tvarově velice odpovídá rozdílu poloh u předchozí výstupní zpětné vazby na obrázku 25.

#### 5.2.4 Experimentální simulace s polohovaným závažím

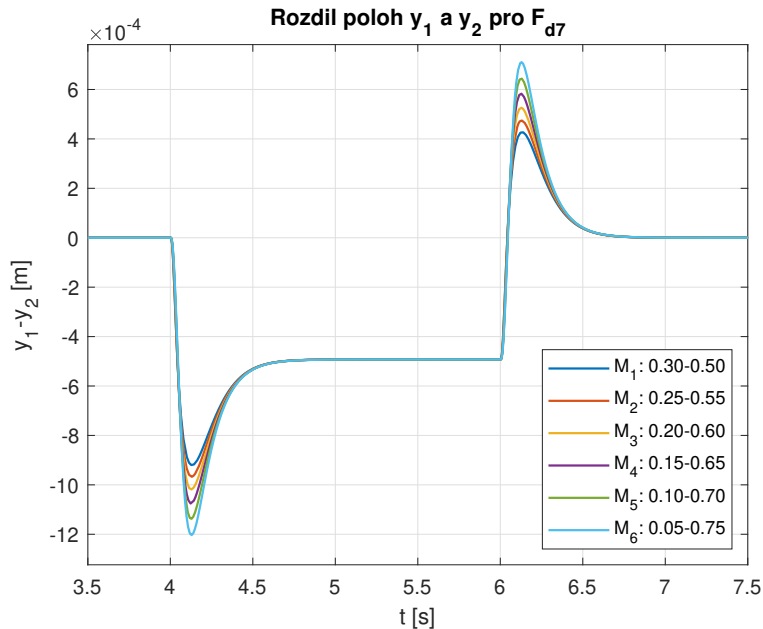
Obdobně jako v kapitole 4.2.4 můžeme nyní otestovat, jak se zhorší chování uzavřené smyčky, pokud změním polohu závaží na příčném nosníku. Řízení je již

navrženo pro model s nesymetrickým umístěním závaží pro vzdálenosti  $L_1 = 0.3m$  a  $L_2 = 0.5m$ , postupně přejdeme až ke vzdálenostem  $L_1 = 0.05m$ ,  $L_2 = 0.75m$ .

Nejlépe výsledky byly získány při experimentech pro centralizované řízení s řízením  $F_{c6}$  a pro decentralizovanou strukturu s řízením  $F_{d7}$ , viz (118) a (122).



Obrázek 27: Výsledky simulací pro  $F_{c6}$  s různě vychýleným závažím



Obrázek 28: Výsledky simulací pro  $F_{d7}$  s různě vychýleným závažím

Z grafů 27 a 28 vidíme, že pro tyto navržené zpětné vazby dostaneme dobré chování uzavřeného systému i v případě změny polohy závaží, neboť změna rozdílu poloh je stále velmi malá.

## 6 Závěr

Bakalářská práce je věnována systému s dvojitým lineárním paralelním pohonem a návrhu zpětnovazebního řízení pomocí přiřazení Jordanovy formy pro tento systém. V první části práce byl odvozen zjednodušený model tohoto systému, který vedl na stavový popis 4. řádu. Následně byl rozšířen na více věrohodný model 6. řádu, který využívá na vstupu napětí na motory.

Druhá část této bakalářské práce byla věnována hledání vhodných Jordanových forem, které by umožňovaly řízení systému s dosažením dobré synchronizace motorů. Modely odvozené v první části byly vyčísleny tak, že popisovaly systém střední velikosti s příčným nosníkem o délce  $0.8m$  a hmotnosti  $50kg$  včetně závaží. Pomocí minimální parametrizace stavových zpětných vazeb bylo nejprve navrženo několik variant centralizovaného řízení pro několik Jordanových forem. Volné parametry ve zpětnovazební matici byly dále využity k vynulování určitých prvků matice a následnému zajištění decentralizované struktury řízení. Princip nulování vhodných prvků byl dále využit i pro návrh výstupní zpětné vazby. Pomocí platformy MATLAB/SIMULINK byly následně získané výsledky otestovány ve formě MIL (Model-in-the-loop) simulací.

Centralizované řízení dávalo obecně nejlepší výsledky ve smyslu synchronizační chyby a časového průběhu akčních zásahů. Decentralizace systému způsobila zvětšení maximálního rozdílu poloh paralelních pohonů. Nicméně tento rozdíl při pohybu konstrukce rychlostí  $0.2m/s$  nepřekročil řádově několik milimetrů. Dospěli jsme tak k návrhu několika zajímavých řešení, zejména k maticím (98) a (122), které navzdory decentralizaci poskytovaly velice dobré chování uzavřené smyčky i při možných změnách těžiště soustavy. Obdobně pro výstupní zpětnou vazbu jsme získali pro rozšířený model dobré chování uzavřeného systému, které zajišťuje matice výstupní zpětné vazby ve tvaru (105).

Při návrhu zpětných vazeb se pro systém s dvojitým lineárním paralelním pohonem nejvíce osvědčily tři struktury Jordanových forem: Jordanova forma tvořená dvojicemi stejných vlastních čísel poskládaných do bloků o velikosti  $1 \times 1$ , Jordanova forma tvořená různými bloky o velikosti  $2 \times 2$  a dále diagonální Jordanova forma se všemi různými vlastními čísly. Volba těchto návrhových struktur byla vhodná pro model se symetricky umístěným závažím i pro model s nesymetrickým rozložením váhy.

## Reference

- [1] Hanjun Xie and Qinruo Wang. Modeling dual-drive gantry stages with heavy-load and optimal synchronous controls with force-feed-forward decoupling. *Entropy*, 24(8):1153, 2022.
- [2] Julien Gomand, Xavier Kestelyn, Richard Bearee, and Pierre-Jean Barre. Dual-drive gantry stage decoupling control based on a coupling model. *ElectroMotion*, 15(2):94–98, 2008.
- [3] Bin Xie, Li Lei, Yuan Yao, and Yesong Li. Advanced synchronous control of dual parallel motion systems. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 70(2):1270–1281, 2022.
- [4] R.D. Lorenz and P.B. Schmidt. Synchronized motion control for process automation. In *Conference Record of the IEEE Industry Applications Society Annual Meeting*,, pages 1693–1698 vol.2, 1989.
- [5] Yoram Koren. Cross-coupled biaxial computer control for manufacturing systems. 1980.
- [6] Miloš Schlegel. *Modální řízení konečněrozměrných lineárních systémů*. Plzeň, 1984. Disertační práce.
- [7] Jana Königsmarková. *Přiřazení pólů lineárnímu dynamickému systému výstupní zpětnou vazbou*. Západočeská univerzita v Plzni, 2010. Bakalářská práce.
- [8] Roger A Horn and Charles R Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2012.
- [9] Feliks Rouminovich Gantmacher. The theory of matrices. volume one. *Translated by KA Hirsch, Chelsea Publishing Company, Printed in USA, Card Nr. 59-11779, ISBN: 8284-0131-4*, 1960.
- [10] Miloš Schlegel. *Přiřazení Jordanovy formy zpětnou vazbou*. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, 2023. Pomocný text k předmětu: Návrh řídicích systémů.
- [11] Torkel Glad and Lennart Ljung. *Control theory*. CRC press, 2000.
- [12] M. Goubej and J Melichar. *Lineární systémy 1*. Západočeská univerzita, Fakulta aplikovaných věd, 2017. Pomocný text k předmětu: Lineární systémy 1.
- [13] Jana Königsmarková and Miloš Schlegel. Input and output symmetric dynamical systems: Features and control design. In *15th European Workshop on Advanced Control and Diagnosis (ACD 2019) Proceedings of the Workshop Held in Bologna, Italy, on November 21–22, 2019*, pages 187–201. Springer, 2022.