Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Diplomová práce

Chromatické parametry a cyklické vlastnosti distančních grafů

Jakub Hofman

Vedoucí: Přemysl Holub

2019/2020

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci na téma "Chromatické parametry a cyklické vlastnosti distančních grafů" zpracoval samostatně pod dohledem vedoucího diplomové práce. Veškerou použitou literaturu a další podkladové materiály uvádím v seznamu použitých zdrojů.

V Plzni dne . . . .

podpis autora

Poděkování

Předně bych chtěl poděkovat svému vedoucímu Doc. RNDr. Přemyslu Holubovi Ph.D., jehož vstřícnost, obětavost a ochota byly velkou pomocí při tvorbě této práce. Dále děkuji Prof. Dr. rer. nat. habil. Ingovi Schiermeyerovi, Dr. rer. nat. Christophovi Brauseovi a M. Sc. Maximilianovi Geißerovi z Technické univerzity ve Freibergu za pomoc při výzkumu v průběhu mého výměnného pobytu. V neposlední řadě děkuji rodině a přátelům za psychickou podporu a trpělivost.

Abstrakt

Předmětem této práce jsou distanční grafy, což je speciální třída neorientovaných grafů. Pro množinu přirozených čísel $D = \{d_1, d_2, \dots\}$, která se nazývá distanční množina, je distanční graf $G(D)$ definován na množině vrcholů $V = \mathbb{Z}$ a obsahuje hrany $\{x, y\}$ takové, že $|x - y| \in D$. V této práci nejprve zrekapitulujeme již známé výsledky z oblasti vrcholového barvení a hamiltonovských vlastností distančních grafů se specifickými distančními množinami D. Dále budeme prezentovat známé výsledky pro barvení těchto grafů, která kladou speciální podmínky na vzdálenosti vrcholů, jako například distanční a pakovací barvení. Zobecněním těchto barvení je pak takzvané S-pakovací barvení, kdy pro neklesající sekvenci přirozených čísel $S = (a_1, a_2, \dots)$ má každá dvojice vrcholů obarvených stejnou barvou i vzdálenost, která je větší než hodnota a_i, $i = 1, 2, \dots$. Shrneme známé výsledky z oblasti S-pakovacího barvení a poté uvedeme výsledky vlastního výzkumu S-pakovacího barvení distančních grafů $G(1, t)$, $t \geqslant 2$ pro sekvence $S = (1, \dots, 1, 2, \dots)$. Nalezneme takové sekvence S, pro které existuje S-pakovací obarvení $G(1, t)$ a pro tyto sekvence určíme hodnotu S-pakovacího chromatického čísla, tedy nejmenší počet barev S-pakovacího obarvení. Nakonec nalezneme vybrané tvary některých periodických obarvení těchto grafů.

Klíčová slova

Teorie grafů, distanční graf, grafové barvení, chromatické číslo, pakovací barvení, hamiltonovské vlastnosti

Abstract

The subject of this diploma thesis is a special class of undirected graphs known as distance graphs. For an integer set $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ known as a distance set, the distance graph $G(D)$ is defined on the vertex set $V = \mathbb{Z}$ containing edges $\{x, y\}$ such that $|x - y| \in D$. We first summarize known results on vertex colourings and hamiltonian properties of distance graphs with specific distance sets. We then present known results on colourings of these graphs, which respect special conditions for vertex distances, e.g. distance and packing colourings. A generalization of these colourings is an S-packing colouring, where for a non-decreasing integer sequence $S = (a_1, a_2, \dots)$ all vertices with the same colour are pairwise at a distance greater than a_i, $i = 1, 2, \dots$. We summarize some known results on S-packing colouring and then we present the results of our research on S-packing colouring of distance graphs $G(1, t)$, $t \geqslant 2$ for $S = (1, \dots, 1, 2, \dots)$. We find sequences S, for which an S-packing colouring of $G(1, t)$ exists and for these sequences we determine the value of the S-packing chromatic number, i.e. the smallest number of colors of an S-packing colouring. Finally, we find patterns of some periodic colourings of these graphs.

Keywords

Graph theory, distance graph, graph colouring, chromatic number, packing colouring, hamiltonian properties

Obsah

1 Úvod

Distanční grafy jsou speciální třídou grafů. Jejich množinou vrcholů je množina celých čísel $\mathbb{Z}$ a hranami jsou spojené takové vrcholy x, y, pro které je $|x - y| \in D$ pro danou množinu D přirozených čísel. V této práci se budeme zabývat různými typy vrcholových barvení těchto grafů a některými jejich cyklickými vlastnostmi. V druhé kapitole zmíníme některé základní pojmy z teorie grafů. Ve třetí kapitole se zaměříme na historii problému vrcholového barvení distančních grafů, který vychází z problému obarvení eukleidovské roviny. Poté ve čtvrté kapitole zrekapitulujeme některé již známé výsledky z oblasti barvení distančních grafů. V páté kapitole se podíváme na vybrané hamiltonovské vlastnosti distančních grafů a v šesté kapitole se zaměříme na známé výsledky z oblasti 2-distančního a pakovacího barvení, které dále zobecníme na S-pakovací barvení. Nakonec budeme v sedmé kapitole prezentovat vlastní výsledky z oblasti S-pakovacího barvení distančních grafů $G(1, t)$.

2 Základní definice

U čtenáře se předpokládá základní znalost pojmů z teorie grafů. Ty z nich, které budeme v průběhu práce aktivně využívat, si v této kapitole stručně zrekapitulujeme. Ostatní používané definice a značení, které zde nebudou popsány, jsou převzaty ze skript pro předměty "Diskrétní matematika" [4, 27] a "Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost" [31, 32]. V této práci budeme pod pojmem graf rozumět graf neorientovaný, který neobsahuje násobné hrany ani smyčky.

Definice 2.1 [4]. *Mějme množiny V a E, kde $E = \{\{x, y\} \,:\, x, y \in V\} \subseteq \binom{V}{2}$. Potom uspořádanou dvojici $G = (V, E)$ nazveme neorientovaný graf, kde V je množina vrcholů a E je množina hran. Číslo $n = |V(G)|$ se nazývá řád grafu. O dvou vrcholech x, y říkáme, že jsou sousední, pokud $\{x, y\} \in E$.*

Vyjmenujme si některé elementární třídy grafů:

- Úplný graf K_n: $V(K_n) = \{1, \ldots, n\}$, $E(K_n) = \binom{V(K_n)}{2}$
- Diskrétní graf D_n: $V(D_n) = \{1, \ldots, n\}$, $E(D_n) = \emptyset$
- Cesta P_n pro $n \geqslant 2$: $V(P_n) = \{1, \ldots, n\}$, $E(P_n) = \{\{i, i+1\}, 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$
- Kružnice C_n pro $n \geqslant 3$: $V(C_n) = \{1, \ldots, n\}$,
  $E(C_n) = \{\{i, i+1\}, 1 \leqslant i \leqslant n-1\} \cup \{n, 1\}$
- Hvězda S_n: $V(S_n) = \{1, \ldots, n\}$, $E(S_n) = \{\{1, i\}, 1 < i \leqslant n\}$

Dalším důležitým pojmem je souvislost grafu. Graf G se nazývá souvislý, pokud mezi každou dvojicí vrcholů x, y existuje sled, tedy posloupnost hran a vrcholů $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$, kde $v_0 = x$, $v_k = y$, $v_i \in V(G)$ a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in E(G)$. Délka sledu je rovna číslu k, tedy počtu hran e_i, které sled tvoří. Souvislý graf, který navíc neobsahuje žádnou kružnici jako podgraf, se nazývá strom a používá se pro něj označení T.

Abychom pochopili pojem distančního grafu, o kterém tato práce pojednává, musíme nejprve definovat, jak se v grafu určuje vzdálenost dvou vrcholů.

Definice 2.2 [4]. *Nechť G je neorientovaný graf a $x, y \in V(G)$. Vzdálenost $d_G(x, y)$ vrcholů x, y v grafu G je rovna délce nejkratšího sledu mezi těmito vrcholy. Hodnota $\max\limits_{x,y \in G} d_G(x, y)$ se nazývá průměr a značí se* $\operatorname{diam}(G)$.

V této práci budou zmíněny výsledky mimo jiné i pro bipartitní grafy, které teď budeme definovat. Bipartitním grafem nazveme graf G, pro jehož množinu vrcholů $V(G)$ existuje rozdělení jejích prvků do dvou disjunktních množin V_1 a V_2 takové, že $V_1 \cup V_2 = V(G)$ a jehož množina hran $E(G)$ je tvořena pouze hranami $\{x, y\}$, kde $x \in V_1$ a $y \in V_2$. Pokud navíc každý vrchol z V_1 sousedí se všemi vrcholy z V_2, potom se tento graf nazývá úplný bipartitní.

Dále nadefinujme pojmy barvení grafů a chromatické číslo grafu, kterým budeme věnovat velkou část této práce.

Definice 2.3 [31]. *Nechť G je graf a $k \in \mathbb{N}$. Graf G se nazývá k-obarvitelný, jestliže existuje zobrazení $f : V(G) \to \{1, \dots, k\}$ takové, že $\forall x, y \in V(G) : \{x, y\} \in E(G) \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Zobrazení f se poté nazývá obarvení (respektive k-obravení) grafu G. Chromatické číslo (barevnost) grafu G je nejmenší přirozené číslo k, pro které je G k-obarvitelný a značí se $\chi(G)$.*

Uvedeme zde i chromatická čísla pro elementární třídy grafů:

- Úplný graf K_n: $\chi(K_n) = n$
- Diskrétní graf D_n: $\chi(D_n) = 1$
- Cesta P_n: $\chi(P_n) = 2$
- Kružnice sudé délky C_{2k}: $\chi(C_{2k}) = 2$
- Kružnice liché délky C_{2k+1}: $\chi(C_{2k+1}) = 3$
- Hvězda S_n: $\chi(S_n) = 2$
- Strom T: $\chi(T) = 2$
- Bipartitní graf G: $\chi(G) = 2$

Pro každý vrchol v grafu G definujme jeho stupeň $\deg(v)$ jako číslo, jehož hodnota je rovna počtu hran v G obsahujících v, respektive počet vrcholů sousedících s v. Maximální stupeň grafu G, který se značí $\Delta(G)$, je potom roven hodnotě $\max_{v \in G} \deg(v)$. Pokud mají všechny vrcholy grafu stupeň k, potom se graf nazývá k-regulární. Na závěr tohoto přehledu zde uvádíme Brooksovu větu udávající horní odhad chromatického čísla pomocí maximálního stupně grafu.

Věta 2.4. *(Brooks, 1941) Nechť G je souvislý graf. Pokud G není úplný ani lichá kružnice, potom $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.*

Poznamenejme, že pro grafy G, které jsou úplné nebo kružnice liché délky, je $\chi(G) = \Delta(G) + 1$. Nakonec zmíníme značení $\lceil x \rceil$ a $\lfloor x \rfloor$, kterým označíme horní, respektive dolní celou část hodnoty x a které budeme v této práci používat.

3 Motivace

Problematika distančních grafů má své začátky v následujícím problému: "Jaký je minimální počet barev, se kterými lze obarvit všechny body eukleidovské roviny tak, aby žádná dvojice bodů v jednotkové eukleidovské vzdálenosti neměla stejnou barvu?" Pro tento problém zatím nebylo nalezeno kompletní řešení. Bylo dokázáno, že je nutno použít alespoň 4 barvy, ale také, že k obarvení stačí barev 7.

Pro zjednodušenou obdobu tohoto problému, kterou je barvení vrcholů na přímce, lze první výsledky najít v článku [9] od Eggletona a spol. Jelikož k obarvení vrcholů na přímce postačí pouze dvě barvy, tak byl přednesen alternativní problém: "Jaký je minimální počet barev, se kterými lze obarvit všechny body reálné přímky tak, aby žádná dvojice bodů, jejichž eukleidovská vzdálenost má hodnotu mezi $1-\varepsilon$ a $1+\varepsilon$ pro $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$, neměla stejnou barvu?" Pro účely řešení tohoto problému byla definována speciální třída grafů.

Definice 3.1 [9]. *Nechť D je množina kladných reálných čísel. Označíme jako $G(D)$ takový graf, jehož vrcholy jsou všechny body na reálné přímce $\mathbb{R}^1$ a kde vrcholy x a y jsou sousední právě tehdy, když $|x-y| \in D$. Množinu D budeme nazývat distanční množina.*

Pro tento typ grafu se začal používat název distanční graf. Je zřejmé, že takto definovaný graf má nekonečně mnoho vrcholů i hran. V [9] bylo zkoumáno, jakou hodnotu má chromatické číslo distančního grafu $\chi(G(D))$ pro různé distanční množiny D. Byly nalezeny výsledky pro $\chi(G(D))$, kde D je uzavřený interval vzdáleností $\langle 1, \delta \rangle$ ("normalizovaný" tvar původního intervalu $\langle 1-\varepsilon, 1+\varepsilon \rangle$, přičemž $\delta > 1$ je vhodně zvolené), otevřený interval $(1, \delta)$, případně také nekonečné sjednocení uzavřených intervalů. V neposlední řadě zde byly zmíněny výsledky pro množiny D tvořené výhradně přirozenými čísly. V tomto případě stačí omezit množinu vrcholů příslušného distančního grafu $G(D)$ z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{Z}$, neboť při vytvoření takového grafu na množině reálných čísel by vznikly vrcholově disjunktní komponenty, z nichž by každá byla izomorfní s daným grafem na celých číslech. Právě tímto typem distančních grafů se budeme v naší práci zabývat.

Předpokládejme tedy, nebude-li uvedeno jinak, že pracujeme s distančním grafem $G(D)$, který má množinu vrcholů $V(G(D)) = \mathbb{Z}$ a distanční množina D je ve tvaru $D = \{d_1, d_2, \dots\}$, kde $1 \leqslant d_1 \leqslant d_2 \leqslant \dots$ pro všechna $d_i \in \mathbb{N}$. Bude-li D konečná množina s $|D| = k$, tak potom bude graf $G(D)$ $2k$-regulární.

4 Odhady chromatických čísel distančních grafů

Podívejme se nyní na některé již známé výsledky a vlastnosti, které budeme moci využít při našich pozdějších výzkumech a důkazech. Nejprve vyslovíme několik zobecňujících lemmat a vět, které poskytují vhodné hranice pro hodnotu chromatického čísla distančních grafů.

Lemma 4.1 [37]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ a $D' = \{n \cdot d_1, n \cdot d_2, \ldots, n \cdot d_r\}$. Potom $\chi(G(D)) = \chi(G(D'))$.*

Pravdivost tohoto lemmatu vychází ze skutečnosti, že graf $G(D')$ bude mít v tomto případě n vrcholově disjunktních komponent a každá z nich bude izomorfní s $G(D)$. Oba grafy budou tedy mít stejné chromatické číslo. Omezíme se tedy na grafy s distanční množinou, která je tvořena prvky, jejichž největší společný dělitel je 1, tedy $\gcd(D) = 1$.

V případě, že D je tvořena po sobě jdoucími čísly od 1 do určitého přirozeného čísla m, je určení chromatického čísla triviální.

Lemma 4.2 [9]. *Nechť m je libovolné přirozené číslo a $D = \{1, 2, \ldots, m\}$. Potom $\chi(G(D)) = m + 1$.*

Obarvení $f(i) = i \pmod{m+1} + 1$ je přípustné, a proto zde platí $\chi(G(D)) \leqslant m + 1$. Vrcholy 0 až m ale indukují úplný podgraf K_{m+1}, a tím pádem navíc platí $\chi(G(D)) \geqslant m + 1$. Nastane tedy rovnost. Podobným způsobem lze dokázat i následující lemma.

Lemma 4.3 [19]. *Nechť D je konečná množina, která neobsahuje žádný násobek přirozeného čísla $k \geqslant 2$. Potom $\chi(G(D)) \leqslant k$.*

Z tohoto lemmatu lze vyvodit i následující důležitý poznatek, díky kterému jsme schopni stanovit chromatické číslo velké části třídy distančních grafů.

Lemma 4.4 [40]. *Nechť D je distanční množina, která obsahuje pouze lichá čísla. Potom $\chi(G(D)) = 2$.*

Ověření pravdivosti tohoto lemmatu je jednoduché, neboť graf s touto distanční množinou je bipartitní, a proto ho lze obarvit dvěma barvami. Pro ostatní množiny D lze určit horní hranici chromatického čísla grafu $G(D)$ pomocí následujícího tvrzení, které pracuje s násobky přirozených čísel.

Tvrzení 4.5 [37]. *Nechť $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_r\}$ je konečná distanční množina. Potom*

$$\chi(G(D)) \leqslant \min_{n \in \mathbb{N}} n \cdot (|D_n| + 1),$$

kde $D_n \subseteq D$ je množina všech d_i, které jsou násobky čísla n.

Další velice významnou horní hranici pro chromatické číslo lze najít v závislosti na velikosti dané distanční množiny.

Lemma 4.6 [19]. *Nechť D je konečná distanční množina přirozených čísel. Potom $\chi(G(D)) \leqslant |D| + 1$.*

Další výsledky lze najít v publikaci [21], která se převážně zaměřuje na zkoumání chromatického čísla distančních grafů s $|D| = 4$. První tvrzení, které zde budeme zmiňovat, využívá a shrnuje poznatky z lemmat 4.3 a 4.4.

Tvrzení 4.7 [21]. *Nechť D je konečná distanční množina nesoudělných čísel. Potom*

(a) $\chi(G(D)) = 2$, jsou-li všechna $d_i \in D$ lichá,

(b) $\chi(G(D)) \leqslant 3$, není-li žádný prvek D dělitelný třemi,

(c) $\chi(G(D)) = 3$, není-li žádný prvek D dělitelný třemi a alespoň jeden prvek D je sudý.

Na základě těchto poznatků se další věty a lemmata zabývají distančními množinami s nesoudělnými prvky, z nichž alespoň jeden je sudý nebo dělitelný třemi, případně obojí. Budeme-li mít množinu D s $|D| = r$ obsahující nesoudělné prvky, z nichž alespoň jeden je sudý, tak určitě bude obsahovat liché i sudé prvky. Díky tomu bude $G(D)$ obsahovat lichou kružnici, což znamená $\chi(G(D)) \geqslant 3$. S pomocí lemmatu 4.6 navíc můžeme odvodit, že $\chi(G(D)) \leqslant r + 1$.

Lemma 4.8 [21]. *Nechť D je distanční množina s nesoudělnými prvky, z nichž alespoň jeden je sudý a $|D| = r \geqslant 2$. Potom $3 \leqslant \chi(G(D)) \leqslant r + 1$.*

Důsledek 4.9 [21]. *Nechť D je distanční množina s nesoudělnými prvky, z nichž alespoň jeden je dělitelný třemi a právě jeden je sudý. Potom $3 \leqslant \chi(G(D)) \leqslant 4$.*

Horní mez lze v tomto případě určit s využitím Tvrzení 4.5, neboť zde platí $|D_2| = 1$. Pro následující důsledek použijeme lemma 4.6.

Důsledek 4.10 [21]. *Nechť D je distanční množina s nesoudělnými prvky, z nichž alespoň jeden je sudý a $|D| = 4$. Potom $3 \leqslant \chi(G(D)) \leqslant 5$.*

S těmito poznatky lze určit chromatické číslo pro grafy s distanční množinou speciálního tvaru. První případ je, že $|D| = r$ a D obsahuje prvních $r - 1$ po sobě jdoucích přirozených čísel.

Věta 4.11 [21]. *Nechť $D = \{1, 2, \ldots, r-1, z\}$, kde $z \geqslant r$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} r & z \not\equiv 0 \pmod{r}, \\ r+1 & z \equiv 0 \pmod{r}. \end{cases}$$

Druhým případem je, že D obsahuje pouze po sobě jdoucí prvky, a je tedy tvořena aritmetickou posloupností s diferencí 1.

Věta 4.12 [21]. *Nechť* $D = \{d, d+1, \dots, d+t\}$ *a* $kd < t \leqslant (k+1)d$ *pro* $d, t \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$ *a* $k \geqslant 0$. *Potom* $\chi(G(D)) = k + 3$.

Pro distanční množiny tvořené aritmetickou posloupností s libovolnou celočíselnou nezápornou diferencí lze určit chromatické číslo následovně.

Věta 4.13 [20]. *Nechť* $a \in \mathbb{N}$ *a* $d \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. *Dále nechť* $D = \{a, a+d, a+2d, \dots\}$ *je tvořena aritmetickou posloupností, která nemusí být konečná. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} \lceil \frac{|D|-1}{a} \rceil + 2 & \text{pokud } d = 1, \\ 2 & \text{pokud } d \text{ je sudé nebo } |D| = 1, \\ 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pomocí následující věty lze určit chromatické číslo pro grafy s distanční množinou, která je tvořená násobky čísla $x \in \mathbb{N}$ až na poslední prvek.

Věta 4.14 [22]. *Nechť* $D = \{x, 2x, \dots, nx, y\}$ *pro* $x, y, n \in \mathbb{N}$, *kde* $x > 1$, $n \geqslant 2$ *a* $\gcd(x, y) = 1$. *Potom* $\chi(G(D)) = |D|$.

Byly také formulovány věty a tvrzení pro speciální typ distančních grafů, jejichž distanční množina je po řadě tvořena čísly od 1 do m s výjimkou k, tedy jedná se o množinu $D_{m,k} = \{1, 2, \dots, m\} \backslash \{k\}$, kde $k < m$. Graf s touto distanční množinou budeme analogicky značit $G(D_{m,k})$ a jeho chromatické číslo jako $\chi(G(D_{m,k}))$.

Pro grafy s distanční množinou tvořenou čísly od 2 do m je chromatické číslo určeno přesně.

Věta 4.15 [9]. *Mějme přirozené číslo* $m \geqslant 2$. *Potom* $\chi(G(D_{m,1})) = \lfloor \frac{1}{2}(m+3) \rfloor$.

Je-li v posloupnosti čísel v množině D vynechán prvek 2 místo 1, poté existuje pro takové distanční grafy dolní i horní hranice pro hodnotu chromatického čísla a ve vybraných případech je i tato hodnota určena přesně.

Věta 4.16 [9]. *Mějme přirozené číslo* $m \geqslant 4$. *Potom* $\chi(G(D_{m,2})) = \lfloor \frac{1}{2}(m+4) \rfloor$ *když* $m \not\equiv 3 \pmod 4$, *nebo platí* $\frac{1}{2}(m+3) \leqslant \chi(G(D_{m,2})) \leqslant \frac{1}{2}(m+5)$ *když* $m \equiv 3 \pmod 4$.

Pro všechny ostatní grafy $G(D_{m,k})$ lze určit alespoň dolní hranici chromatického čísla.

Věta 4.17 [9]. *Mějme přirozená čísla* k, m *taková, že* $1 \leqslant k \leqslant m$. *Potom platí*

$$\chi(G(D_{m,k})) \geqslant \min \left\{ m, \left[\frac{1}{2} \left(\frac{m}{k} + 3 \right) \right] \cdot k \right\}.$$

Věta 4.18 [9]. *Mějme přirozená čísla k, m taková, že $3 \leqslant k \leqslant m$. Potom platí*

$$\chi(G(D_{m,k})) \geqslant \max\left\{k, \left[\frac{1}{2}\left(\frac{m}{k-1}+1\right)\right]\cdot t\right\},$$

kde $t = 2$, pokud $k = 3$ a $t = k - 2$, pokud $k \geqslant 4$.

V následujících podkapitolách se zaměříme na konkrétní tvary distančních množin z hlediska kardinality a složení.

4.1 Prvočíselné vzdálenosti

Prvním zkoumaným typem distančních grafů byly grafy s distanční množinou, která obsahuje pouze prvočíselné prvky. Množinu všech prvočísel budeme značit $\mathbb{P}$ a v této podkapitole budeme předpokládat, že $D \subseteq \mathbb{P}$. Nejprve vyslovíme pro další výsledky velice důležité tvrzení.

Tvrzení 4.19 [9]. *Mějme množinu všech prvočísel $\mathbb{P}$ a distanční množinu $D = \{2, 3, 5\}$. Potom platí $\chi(G(D)) = 4$ a $\chi(G(\mathbb{P})) = 4$.*

Hlavní myšlenkou důkazu tohoto tvrzení pro množinu $\mathbb{P}$ je rozdělení přirozených čísel do čtyř tříd podle jejich hodnoty v aritmetice modulo 4, přičemž čísla patřící do stejné třídy budou obarvená stejnou barvou. Toto obarvení je v $G(\mathbb{P})$ přípustné, neboť stejně obarvená čísla se liší o násobek čtyř, a proto nebudou v grafu $G(\mathbb{P})$ sousední, jelikož žádné prvočíslo dělitelné čtyřmi neexistuje. Bude proto platit $\chi(G(\mathbb{P})) \leqslant 4$. Jelikož graf $G(2, 3, 5)$ je podgrafem $G(\mathbb{P})$, tak zároveň platí $\chi(G(2, 3, 5)) \leqslant \chi(G(\mathbb{P}))$. V [9] byl v důkazu využit graf H se specifickou strukturou, který je podgrafem $G(2, 3, 5)$ a pro který platí $\chi(H) = 4$. Jeho struktura je v článku podrobně popsána, ale v této práci jsme se rozhodli ji pro její specificitu vynechat. Pro tento důkaz je důležité, že $\chi(H) \leqslant \chi(G(2, 3, 5))$, a proto platí $\chi(G(2, 3, 5)) = \chi(G(\mathbb{P})) = 4$.

Jelikož pracujeme s množinami $D \subset \mathbb{P}$ a bude tedy podle tvrzení 4.19 platit, že $\chi(G(D)) \leqslant 4$, tak můžeme tyto množiny rozdělit do tříd 1, 2, 3 nebo 4 podle hodnoty $\chi(G(D))$. Určitě můžeme říct, že množina $D = \emptyset$ patří do třídy 1, neboť vzniklý graf bude diskrétní, a každý vrchol tedy lze obarvit stejnou barvou. Dále víme, že jakákoliv jednoprvková množina $D = \{d_1\}$, kde d_1 nemusí nutně být prvočíslo, patří do třídy 2. Vzniklý graf totiž bude tvořen d_1 vrcholově disjunktními cestami a k jeho obarvení stačí použít dvě barvy, které se budou při postupném procházení každé cesty střídat. Vybrané distanční množiny s větším počtem prvků lze do jednotlivých tříd rozřadit podle následující věty.

Věta 4.20 [9]. *Nechť $D \subset \mathbb{P}$ a $|D| \geqslant 2$. Potom lze D klasifikovat následovně:*

(a) pokud $2 \notin D$, potom je D ve třídě 2, přičemž v opačném případě je D ve třídě 3 nebo 4;

(b) pokud $2 \in D$ a $3 \notin D$, potom je D ve třídě 3;

(c) pokud $\{2,3\} \subseteq D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2 \pmod 5\}$, potom je D ve třídě 3;

(d) pokud $\{2,3\} \subseteq D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2, \pm 3, 7 \pmod{14}\}$, potom je D ve třídě 3;

(e) pokud $\{2,3,5\} \subseteq D$ nebo $\{2,3,11,13\} \subseteq D$, potom je D ve třídě 4.

Tato věta očividně nepokrývá všechny množiny $D \subseteq \mathbb{P}$. Můžeme pomocí ní však roztřídit všechny dvouprvkové prvočíselné množiny a většinu tříprvkových množin. Pro zbylé tříprvkové množiny vyslovíme následující větu.

Věta 4.21 [9]. *Nechť $p > 5$ je prvočíslo. Potom se množina $D = \{2, 3, p\}$ nachází ve třídě 3.*

Přesuneme se ke zkoumání chromatického čísla distančních grafů pro čtyřprvkové prvočíselné distanční množiny. Byla snaha najít distanční množiny co nejmenší velikosti takové, aby platilo, že $\chi(G(D)) = 4$. Jak už víme, tak tomuto popisu odpovídá jediná tříprvková distanční množina $D = \{2,3,5\}$, a proto začal výzkum množin čtyřprvkových. Bylo zjištěno, že pro distanční množiny se čtyřmi prvky je $\chi(G(D)) = 4$, pokud obsahují *prvočíselnou dvojici*, tedy prvočísla p, q taková, že $q = p + 2$. Vyslovme následující větu, která doplňuje výsledky z vět předchozích.

Věta 4.22 [8]. *Nechť čísla p, q tvoří prvočíselnou dvojici. Potom se množina $D = \{2,3\} \cup \{p, q\}$ nachází ve třídě 4.*

Jako reakce na tento výsledek byla v článku [10] přednesena domněnka, že pokud $\{2,3\} \subseteq D$, tak $\chi(G(D)) = 4$ právě tehdy, když D obsahuje prvočíselnou dvojici. Ta však byla později vyvrácena v [11], neboť bylo zjištěno, že se v tomto případě nejedná o ekvivalenci. Bylo dokázáno v [8], že $\chi(G(D)) = 4$, pokud D obsahuje prvočíselnou dvojici, ale opačná implikace neplatí, neboť existují 4-prvkové množiny D neobsahující prvočíselnou dvojici, pro které $\chi(G(D)) = 4$. První takové protipříklady byly prezentovány v článku [40] od Walthera, který se výzkumem tohoto tématu zabýval.

Věta 4.23 [40]. *Nechť $p, q \in \mathbb{P}$, $p \geqslant 7$ a $q = p + 8$. Potom $\chi(G(2,3,p,q)) = 4$ právě tehdy, když $p \in \{11, 23, 29\}$.*

Dalších pět takových množin lze najít v disertační práci Voigtové.

Věta 4.24 [37]. *Nechť $D = \{2, 3, p, q\}$, kde $p, q \in \mathbb{P}$. Potom $\chi(G(D)) = 4$ právě tehdy, když $(p, q) \in \{(11, 23), (11, 37), (11, 41), (17, 29), (23, 41)\}$.*

Tito dva autoři následně vydali další publikace včetně [38], kde bylo dokázáno, že těchto osm nalezených distančních množin je jediných, pro které je při daných předpokladech $\chi(G(D)) = 4$.

Věta 4.25 [38]. *Nechť $D = \{2, 3, p, q\}$ je množina prvočísel, kde $p \geqslant 7$ a $q > p+2$. Potom existuje pouze 8 dvojic (p, q), pro které je $\chi(G(D)) = 4$, konkrétně*

$$(p, q) \in \{(11, 19), (11, 23), (11, 37), (11, 41), (17, 29), (23, 31), (23, 41), (29, 37)\}.$$

Problém určení chromatického čísla pro prvočíselné distanční množiny s $|D| \leqslant 4$ je vyřešen. Pro množiny s větším počtem prvků však stále zůstává otevřený. Jediné zatím známé výsledky lze najít v již zmíněném článku [8] a v publikaci [42].

Věta 4.26 [42]. *Nechť $D = \{2, 3\} \cup \{p, p + 8, 2p + 13\} \subseteq \mathbb{P}$, kde $p \geqslant 3$. Potom $\chi(G(D)) = 4$, pokud jsou p, $p + 8$ i $2p + 13$ prvočísla.*

Věta 4.27 [42]. *Nechť $D = \{2, 3, p_1, p_2, p_3\} \subseteq \mathbb{P}$, kde $p_1 \equiv \pm 1 \pmod 3$, $p_2 = p_1 + 10$ a $p_3 > p_2$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Druhá zmíněná věta byla v tom samém článku zobecněna pro distanční množiny větší kardinality.

Věta 4.28 [42]. *Nechť $D = \{2, 3\} \cup \{p_i : p_i \in \mathbb{P} \wedge p_1 \equiv \pm 1 \pmod 3) \wedge p_2 = p_1 + 10 \wedge p_i > p_2, i = 3, 4, \dots\}$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Stále otevřeným problémem v této oblasti je úkol zjistit, jestli pro každou pevně danou velikost $|D|$ existuje pouze omezený počet množin $D \subset \mathbb{P}$, které neobsahují prvočíselnou dvojici a přesto platí $\chi(G(D)) = 4$, jako je tomu v případě $|D| = 4$.

4.2 Distanční grafy s $|D| \leqslant 3$

Podívejme se nyní, jaká je hodnota chromatického čísla v závislosti na velikosti množiny D. Z předchozí podkapitoly už víme, že pro $D = \emptyset$ je $\chi(G(D)) = 1$ a pro jakoukoliv jednoprvkovou množinu $D = \{d_1\}$ je $\chi(G(D)) = 2$. Pro $|D| = 2$ také není charakterizace složitá. Mohou zde nastat pouze tři možnosti pro prvky $d_1, d_2 \in D$: buď budou oba sudé, oba liché nebo budou opačné parity. Poslední zmiňovaný případ je pokryt následující větou.

Věta 4.29 [9]. *Nechť $D = \{r, s\}$, kde r, s jsou nesoudělná přirozená čísla opačné parity, a platí $r < s$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Rovnost je zde dána faktem, že hodnota 3 je jak dolní hranicí (existence liché kružnice), tak horní hranicí (viz lemma 4.6). Případ, kdy jsou obě čísla sudá, můžeme díky lemmatu 4.1 převést na jeden ze zbylých dvou případů. Vznikne-li případ čísel opačné parity, tak dle předchozí věty platí $\chi(G(D)) = 3$. V případě, kdy jsou obě čísla lichá, víme díky lemmatu 4.4, že $\chi(G(D)) = 2$.

Pro $|D| = 3$ už nejsou hodnoty chromatického čísla tak jednoznačné a tato problematika byla podrobena důkladnějšímu výzkumu. Dle lemmatu 4.6 zde obecně bude platit $\chi(G(D)) \leqslant 4$. Budou-li všechna tři čísla lichá, tak opět dle lemmatu 4.4 víme, že $\chi(G(D)) = 2$. Zbývá tedy určit, pro jaké množiny $D = \{d_1, d_2, d_3\}$, jejichž prvky jsou nesoudělné a alespoň jeden z nich je sudý, bude $\chi(G(D))$ nabývat hodnoty 3 nebo 4.

První výsledky pro tyto distanční množiny lze najít v článku [19] od Chena a spol., kde byla přednesena následující tři dělící kritéria pro vybrané množiny.

Věta 4.30 [19]. *Nechť $D = \{a, b, a+b\}$, kde $1 \leqslant a < b$ a $\gcd(a, b) = 1$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \textit{pokud } a \not\equiv b \pmod 3, \\ 3 & \textit{pokud } a \equiv b \pmod 3. \end{cases}$$

Věta 4.31 [19]. *Nechť $D = \{1, 2, c\}$, kde $c \geqslant 3$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \textit{pokud } c \equiv 0 \pmod 3, \\ 3 & \textit{pokud } c \not\equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Věta 4.32 [19]. *Nechť $D = \{a, a+1, c\}$, kde $a \geqslant 2$ a $c \geqslant a+2$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \textit{pokud } c = 2a+1, \\ 3 & \textit{pokud } c \neq 2a+1. \end{cases}$$

Poznamenejme, že případ z věty 4.32, kdy se $\chi(G(D)) = 4$, spadá pod stejný případ z věty 4.30. Je snadné zjistit, že si dané podmínky odpovídají. Všimněme si dále, že tyto dvě věty také zahrnují případ $D = \{2, 3, 5\}$, který je zmíněn v první části věty 4.19. Na základě těchto tří výsledků byla ve stejném článku přednesena následující hypotéza.

Hypotéza 4.33 [19]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$, kde $0 < a < b < c$, $\gcd(a, b, c) = 1$ a alespoň jedno číslo z této trojice je sudé. Potom $\chi(G(D)) = 4$ právě tehdy, když buď $c = a + b$ a $a \not\equiv b \pmod 3$ nebo $a = 1$, $b = 2$ a $c \equiv 0 \pmod 3$.*

Touto hypotézou byl motivován vznik článku [6]. V něm se Deuber a Zhu zabývali obarvením distančních grafů na reálných číslech, které by využívalo maximálně tři barvy. Tuto metodu poté aplikovali na distanční grafy na celých číslech. Její použitelnost nejprve demonstrovali na distančních grafech s D, kde $c \leqslant 2a$.

Věta 4.34 [6]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$, kde $0 < a < b < c$ a $c \leqslant 2a$. Potom $\chi(G(D)) \leqslant 3$.*

S využitím jejich metody se autoři dále v článku pokusili najít další distanční množiny D, pro které by byl distanční graf $G(D)$ 3-obarvitelný. Takové 3-obarvení existuje například v případě, že b je násobkem a.

Věta 4.35 [6]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$, kde b je násobkem a, $c \neq a + b$ a $\{a, b\} \neq \{1, 2\}$. Potom $\chi(G(D)) \leqslant 3$.*

Pokud navíc c není násobkem a, pak je hodnota $\chi(G(D))$ určena přesně.

Lemma 4.36 [6]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$, kde $b = 2a$ a c není násobkem a. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Nakonec byly zmíněny i další případy, pro které je možné dokázat pravdivost hypotézy 4.33.

Věta 4.37 [6]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$ a $s = \frac{b}{\gcd(a,b)}$. Pokud platí $s \geqslant \frac{3bc}{a(c-2b)}$ a $c > 2b$, potom $\chi(G(D)) \leqslant 3$.*

Důsledek 4.38 [6]. *Nechť $D = \{a, b, c\}$, kde $\gcd(a, b) = 1$, $a \geqslant 4$ a $c \geqslant \frac{2ab}{a-3}$. Potom $\chi(G(D)) \leqslant 3$.*

Článek byl zakončen poznatkem, že Hypotéza 4.33 byla ověřena pro všechny případy s výjimkou těch, kdy $D = \{a, b, c\}$ pro $2a < c < 2b$, přičemž nejproblematičtější se zdají být případy, kdy je trojice a, b, c blízko hodnotám splňujícím rovnost $a + b = c$.

Na konec kapitoly uvádíme výsledky z článku [35] od Voigtové, která se problematikou chromatického čísla tříprvkových množin zabývala nezávisle na předchozích autorech.

Věta 4.39 [35]. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{N}$ taková, že $a < b < c$, $c \geqslant 9b^2 - 10b + 2$, alespoň jedno z čísel a, b, c je liché, $b \equiv k \pmod{3a}$ pro $0 < k < 2a$ a $\gcd(a, b, c) = 1$. Dále nechť $D = \{a, b, c\}$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Věta 4.40 [35]. *Nechť $a, b, c \in \mathbb{N}$ taková, že $a < b < c$, $c \geqslant (a + b)^2 - (a + 2b)$, alespoň jedno z čísel a, b, c je sudé, $b \equiv k \pmod{3a}$ pro $a < k < 2a$ a $\gcd(a, b, c) = 1$. Dále nechť $D = \{a, b, c\}$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

4.3 Distanční grafy s $|D| = 4$

Přesuňme se nyní k distančním grafům se čtyřprvkovou distanční množinou. Opět díky lemmatům 4.4 a 4.6 víme, že v tomto případě platí $2 \leqslant \chi(G(D)) \leqslant 5$, přičemž $\chi(G(D)) = 2$, pokud jsou všechny prvky D liché a $\chi(G(D)) \geqslant 3$, pokud jsou prvky nesoudělné a alespoň jeden je sudý (viz důsledek 4.10). Zároveň do tohoto případu spadá většina výsledků pro prvočíselné množiny, o kterých jsme se zmínili v podkapitole 4.1.

V článku [19], ve kterém jsme nalezli převážně věty týkající se tříprvkových množin, můžeme najít i větu pojednávající o čtyřprvkových množinách.

Věta 4.41 [19]. *Nechť $x \geqslant 5$ je liché přirozené číslo a $D = \{2, 3, x, x+2\}$. Potom $\chi(G(D)) = 4$.*

Tuto větu můžeme považovat za zobecnění věty 4.22, neboť bude-li n prvočíslo, tak prvky n a $n + 2$ mohou tvořit prvočíselnou dvojici a právě tento případ již byl pokryt. V souvislosti s výzkumem distančních grafů s prvočíselnými distančními množinami byla pro důkaz věty 4.25 využita pomocná věta z článku [39] od Walthera a Voigtové, kterou zde samostatně uvádíme.

Věta 4.42 [39]. *Mějme přirozená čísla x, s taková, že $s \geqslant 10$ a $x \geqslant s^2 - 6s + 3$. Dále nechť $D = \{2, 3, x, x + s\}$. Potom $\chi(G(D))) = 3$.*

První rozsáhlejší výsledky najdeme v článku [21] motivovaném problematikou prvočíselných distančních grafů, který se zabývá převážně právě čtyřprvkovými distančními množinami. Autoři se zaměřili na zkoumání hodnoty chromatického čísla grafů $G(D)$, kde $D = \{2, 3, x, y\}$, v závislosti na rozdílu $s := y - x$, přičemž se s ohledem na výsledky z věty 4.42 omezili na hodnoty $s < 10$. Nejprve bylo dokázáno, že pro dostatečně velké hodnoty x bude $\chi(G(D) = 3$, přičemž mezní hodnota x se pro různá s mění.

Věta 4.43 [21]. *Nechť $D = \{2, 3, x, x + s\}$, kde $x > 3$. Potom $\chi(G(D)) = 3$, nastává-li jedna z následujících možností:*

(a) $s = 1$ a $x > 21$,

(b) $s = 4, 5$ a $x > 17$,

(c) $s = 6$ a $x > 16$,

(d) $s = 7$ a $x > 40$,

(e) $s = 8$ a $x > 92$,

(f) $s = 9$ a $x > 19$.

Pro zbylé hodnoty $x > 3$ a hodnoty $s = 1, 4, 5, \ldots, 9$ autoři nejprve s pomocí počítače určili, jestli jsou dané grafy 3-obarvitelné. U grafů, které nejsou 3-obarvitelné, se podařilo najít 4-obarvení. V tabulce 1 jsou uvedeny hodnoty $x > 3$ takové, že pro $s = 1, 4, 5, \ldots, 9$ je $\chi(G(2, 3, x, x + s)) = 4$.

s	x
1	$4, 5, 10$
4	$5, 6$
5	5
6	5
7	$4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 22$
8	$4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 15, 18, 19, 23, 24, 28, 29, 33, 37, 42, 47$
9	$4, 5, 10$

Tabulka 1: [21] Hodnoty x, pro které je $\chi(G(\{2, 3, x, x+s\})) = 4$ v závislosti na hodnotě s.

Případy, kdy $s = 2$ nebo $s = 3$, byly řešeny samostatně. První zmiňovaný případ je pokrytý větou, která rozšiřuje poznatky zaznamenané ve větě 4.41.

Věta 4.44 [21]. *Nechť $x > 3$ je přirozené číslo a $D = \{2, 3, x, x + 2\}$ je distanční množina. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 3 & x \equiv 2 \pmod 6, \\ 4 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

V následující větě najdeme hodnoty $\chi(G(D))$ pro takové množiny D, kde $s = 3$, čímž máme nalezené hodnoty chromatického čísla ve všech případech pro $s < 10$.

Věta 4.45 [21]. *Nechť $D = \{2, 3, x, x + 3\}$. Potom*

(a) $\chi(G(D)) = 3$ *právě tehdy, když* $x \equiv 3 \pmod 9$,

(b) $\chi(G(D)) = 4$ *právě tehdy, když* $x \not\equiv 3 \pmod 9$ *a* $x \neq 5$,

(c) $\chi(G(D)) = 5$ *právě tehdy, když* $x = 5$.

Zaměřme se v této větě na případ (c). Ten říká, že jedinou množinou tvaru $D = \{2, 3, x, x + 3\}$, pro kterou je $\chi(G(D)) = 5$, je množina $\{2, 3, 5, 8\}$. Je vidět, že se jedná i o jedinou takovou množinu ve tvaru $D = \{2, 3, x, x + s\}$, kde $s < 10$. Byla vznesena hypotéza, že tato množina je zároveň jedinou množinou tvaru $D = \{2, 3, x, y\}$, kde $3 < x < y$, pro kterou je $\chi(G(D)) = 5$. Na konci této podkapitoly se přesvědčíme o její správnosti. Mezitím si můžeme všimnout, že $\{2, 3, 5, 8\}$ se skládá z dvojice prvků $(3, 5)$, jejich součtu (8) a jejich rozdílu (2). Právě distančním množinám se strukturou $\{x, y, x+y, y-x\}$ je věnována poslední část tohoto článku. Dovolíme si poznamenat, že doteď jsme při notaci distančních množin trvali na rostoucím uspořádání jejich prvků. V tomto případě od této podmínky pro přehlednost upustíme. Hlavní výsledek uvádíme v následující větě.

Věta 4.46 [21]. *Nechť $D = \{x, y, x+y, y-x\}$, kde x, y jsou nesoudělná a $x < y$.*

(a) Mají-li x a y opačnou paritu, potom $\chi(G(D)) = 4$.

(b) Je-li $x = 1$ a $y \equiv 1 \pmod 2$, potom $\chi(G(D)) = 5$.

Případ, kdy x a y jsou obě lichá a $x > 1$, zůstal otevřený. Autoři předpokládali, že pro takové distanční množiny bude $\chi(G(D)) = 5$, ale tuto hypotézu ověřili pouze pro vybrané případy, kde $x = 3$ nebo $x = 5$. Významného výsledku pro čtyřprvkové množiny dosáhli Barajas a Serra v [1], když dokázali, že existují pouze dva tvary čtyřprvkových distančních množin, pro které je $\chi(G(D)) = 5$.

Věta 4.47 [1]. *Nechť $D = \{a, b, c, d\}$. Potom $\chi(G(D)) = 5$ právě tehdy, když je splněna jedna z následujících podmínek:*

1. *$D = \{1, 2, 3, 4n\}$, $n \in \mathbb{N}$,*

2. *$D = \{a, b, a+b, a+2b\}$, kde $a \equiv 0 \pmod 2$ a $b \equiv 1 \pmod 2$.*

Podrobný průzkum zbylých čtyřprvkových množin ve tvaru $D = \{2, 3, x, y\}$ najdeme v článku [5]. Autorky v něm určují hodnoty chromatického čísla v závislosti na existenci určitého prvku v D. Následující dvě věty se týkají množin D, které jako jeden prvek z dvojice x, y obsahují $4, 6$ nebo 10. Poznamenejme, že poslední prvek v množině D, pro který budeme v následujících větách používat značení k, nemusí být nutně největší prvek D.

Věta 4.48 [5]. *Nechť $D = \{2, 3, 6, k\}$, kde $k \geqslant 4$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \text{pokud } k \equiv 0, \pm 1, \pm 4 \pmod 9, \\ 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Věta 4.49 [5]. *Nechť D je ve tvaru $\{2, 3, 4, k\}$ nebo $\{2, 3, 10, k\}$, kde $k \geqslant 5$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \text{pokud } k \equiv 0, \pm 1 \pmod 6, \\ 3 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Případ, kdy $5 \in D$, lze pomocí minulých výsledků kompletně popsat. Díky větě 4.19 víme, že $\chi(G(2,3,5)) = 4$, a proto pro všechna $k \in \mathbb{N}$ bude hodnota $\chi(G(\{2,3,5,k\}))$ rovna buď 4, nebo 5. Díky větě 4.47 navíc víme, že $D = \{2,3,5,8\}$ je jediná distanční množina tohoto tvaru, pro kterou je $\chi(G(D)) = 5$, a pro všechna $k \neq 8$ je proto $\chi(G(2,3,5,k)) = 4$. Tato vlastnost platí mimo jiné i pro množinu $D = \{2,3,5,15\}$, která je navíc jediným případem, kdy $\chi(G(2,3,x,x+10)) = 4$, což říká následující věta.

Věta 4.50 [5]. *Nechť $D = \{2,3,x,x+10\}$, kde $x \geqslant 4$. Potom*

$$\chi(G(D)) = \begin{cases} 4 & \textit{pokud } x = 5, \\ 3 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Pro dále probírané množiny, které obsahují nějaký pevně daný prvek x, závisí hodnota chromatického čísla na velikosti rozdílu posledních dvou prvků. Je-li rozdíl dostatečně malý, potom se hodnota chromatického čísla zvyšuje. V následujících větách se zaměříme na případy, pro které je $\chi(G(D)) = 3$.

Věta 4.51 [5]. *Nechť $D = \{2,3,x,x+s\}$, kde $x = 7, 8$ a $s \geqslant 11$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Význam dostatečně velkého rozdílu posledních dvou prvků je demonstrován i v následující větě, která říká, že $\chi(G(D)) = 3$ za předpokladu, že y je alespoň dvakrát tak velké jako x.

Věta 4.52 [5]. *Nechť $D = \{2,3,x,y\}$, kde $12 \leqslant x < y$ a $x \neq 15, 16$. Pokud je $y \geqslant 2x$, potom $\chi(G(D)) = 3$.*

V následující větě jsou pokryty některé další případy s malými hodnotami x, pro které platí $\chi(G(D)) = 3$.

Věta 4.53 [5]. *Nechť $D = \{2,3,x,y\}$. Potom $\chi(G(D)) = 3$ v následujících případech:*

(a) $x = 9$ a $y \geqslant 36$,

(b) $x = 11$ a $y \geqslant 66$,

(c) $x = 15$ a $y \geqslant 60$,

(d) $x = 16$ a $y \geqslant 48$.

V případě, že jsou prvky x, y dostatečně velké s dostatečně velkým rozdílem, lze také určit přesnou hodnotu chromatického čísla.

Věta 4.54 [5]. *Nechť $D = \{2,3,x,x+s\}$, kde $s \geqslant 11$ a $x \geqslant 53$. Potom $\chi(G(D)) = 3$.*

Při podrobném zkoumání vět z této podkapitoly dojdeme k závěru, že jsme schopni určit chromatické číslo všech distančních grafů, kde $D = \{2, 3, x, y\}$ s výjimkou případů, kdy:

- $x = 9 \quad$ a $\quad 20 \leqslant y \leqslant 36$,
- $x = 11 \quad$ a $\quad 22 \leqslant y \leqslant 66$,
- $x \in \{12, 13, 14\} \cup \{17, 18, \ldots, 52\} \quad$ a $\quad x + 11 \leqslant y \leqslant 2x$,
- $x = 15 \quad$ a $\quad 26 \leqslant y \leqslant 60$,
- $x = 16 \quad$ a $\quad 27 \leqslant y \leqslant 48$.

Pro tyto zbývající množiny byl v [5] proveden test 3-obarvitelnosti. U těch, které tímto testem neprošly, je jasné, že pro příslušný graf $G(D)$ platí $\chi(G(D)) = 4$. V následující větě jsou tyto množiny vypsány. Můžeme si všimnout, že se v tomto výčtu objevuje pět množin tvořených pouze prvočísly, pro které byla hodnota $\chi(G(D)) = 4$ dokázána už v článku [38], který jsme zmiňovali v podkapitole 4.1. Jedná se o množiny, kde $(x, y) \in \{(11, 23), (11, 37), (11, 41), (17, 29), (23, 41)\}$.

Věta 4.55 [5]. *Nechť $D = \{2, 3, x, x + s\}$, kde $x \geqslant 9$, $x \neq 10$ a $s \geqslant 11$. Potom buď $\chi(G(D)) = 3$ nebo platí $\chi(G(D)) = 4$, pokud má dvojice $(x, x + s)$ jeden z následujících tvarů:*

$$(9, 23), (11, 23), (11, 27), (11, 28), (11, 32), (11, 37), (11, 41), (11, 46), (15, 35),$$

$$(15, 41), (16, 37), (17, 29), (18, 31), (23, 36), (23, 41), (24, 37), (28, 41).$$

Na konci tohoto článku je sepsáno shrnutí všech doposud známých výsledků pro množiny $D = \{2, 3, x, y\}$, které zde také uvedeme. Platí, že $\chi(G(D)) = 5 \Leftrightarrow D = \{2, 3, 5, 8\}$. Množiny tohoto typu, pro které je $\chi(G(D)) = 4$, jsou uvedeny v tabulkách 2 a 3. Pro ostatní množiny typu $\{2, 3, x, y\}$ platí, že $\chi(G(D)) = 3$.

V tuto chvíli jsme tedy schopni určit čtyřprvkové distanční množiny, pro které $\chi(G(D)) = 5$ a je-li $D = \{2, 3, x, y\}$, kde $3 < x < y$, tak také můžeme s jistotou určit, jestli $\chi(G(D)) = 3$ nebo $\chi(G(D)) = 4$. Až na několik výsledků, které jsou uvedeny v úvodu kapitoly 4 a na konci podkapitoly 4.1, nebyly zatím distanční množiny větší kardinality zkoumány.

s	x
1	$4, 5, 10$
2	$x \not\equiv 2 \pmod 6$
3	$x \not\equiv 3 \pmod 9$, $x \neq 5$
4	$5, 6$
5	5
6	5
7	$4, 5, 6, 10, 11, 12, 16, 17, 22$
8	$4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 15, 18, 19, 23, 24, 28, 29, 33, 37, 42, 47$
9	$4, 5, 10$
10	5

Tabulka 2: [5] Hodnoty $s \leqslant 10$ a příslušné hodnoty x takové, že pro množinu $D = \{2, 3, x, x + s\}$ platí $\chi(G(D)) = 4$.

x	y
$4, 10$	$y \equiv 0, \pm 1 \pmod 6$
5	všechna kladná čísla $y > 5$
6	$y \equiv 0, \pm 1, \pm 4 \pmod 9$
$x \geqslant 7$, $x \neq 10$	$(x, y) \in \{(9, 23), (11, 23), (11, 27), (11, 28), (11, 32), (11, 37), (11, 41), (11, 46), (15, 35), (15, 41), (16, 37), (17, 29), (18, 31), (23, 36), (23, 41), (24, 37), (28, 41)\}$

Tabulka 3: [5] Hodnoty x a příslušné hodnoty $y \geqslant 11$ takové, že pro množinu $D = \{2, 3, x, y\}$ platí $\chi(G(D)) = 4$.

4.4 Konečnost chromatického čísla

Díky lemmatu 4.6 víme, že pokud má distanční množina D konečný počet prvků, tak chromatické číslo distančního grafu $G(D)$ bude také konečné, neboť jeho horní hranice je v tomto případě daná hodnotou $|D| + 1$. V této kapitole se zaměříme na případy, kdy D má nekonečně mnoho prvků, ale $\chi(G(D))$ je přesto konečné.

V [36] bylo dokázáno tvrzení, že pro distanční graf $G(D)$ s distanční množinou $D = \{d_1, d_2, \dots\}$, kde $d_{i+1} \geqslant d_i$, je chromatické číslo konečné, pokud existuje index i_0 takový, že $\forall i \geqslant i_0 : d_{i+1} \geqslant (d_i + 1) \cdot (d_i + 2)$. V [30] byla přednesena přesnější charakteristika, která říká, že pokud $\inf\{\frac{d_{i+1}}{d_i} \mid i = 1, 2, \dots\} > 1$, tak bude chromatické číslo konečné a je-li růst prvků v distanční množině i jen lehce pomalejší než exponenciální, nebude možné daný distanční graf obarvit konečným počtem barev.

V následujících větách je popsán proces určení horního odhadu chromatického čísla v případě, že bude konečné.

Věta 4.56 [30]. *Nechť $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ je nekonečná distanční množina taková, že existuje celé číslo $r \geqslant 3$ a $d_{i+1} \geqslant \frac{2r-2}{r-2} \cdot d_i$ pro všechna $i \geqslant 1$. Potom existuje přípustné obarvení grafu $G(D)$) o r barvách.*

Vhodným dosazením za r a s využitím multiplikativních vlastností chromatického čísla pro sjednocení grafů se shodnou množinou vrcholů lze vyslovit následující větu.

Věta 4.57 [30]. *Nechť k je přirozené číslo. Pokud $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ je distanční množina taková, že $d_{i+1} \geqslant 4^{\frac{1}{k}} \cdot d_i$ pro všechna $i \geqslant 1$, potom je $G(D)$ 3^k-obarvitelný a pokud $d_{i+1} \geqslant 3^{\frac{1}{k}} \cdot d_i$ pro všechna $i \geqslant 1$, potom je $G(D)$ 4^k-obarvitelný.*

Vhodnou volbou k v obou případech dostáváme horní odhad chromatického čísla, který je $e^{\frac{(\ln 3)(\ln 4)}{\ln q}}$, kde $q = \inf\{\frac{d_{i+1}}{d_i}\}$ je dostatečně blízko jedné. Použijeme-li zápis $q = 1 + \varepsilon$ a využijeme-li skutečnosti, že $\frac{\ln(1+\varepsilon)}{\varepsilon} \to 1$ pro $\varepsilon \to 0$, zjistíme, že pro distanční graf $G(D)$ existuje v tomto případě přípustné obarvení o nejvýše $4.586^{\frac{1}{\varepsilon}}$ barvách pro ε dostatečně blízké nule. Z této věty proto vyplývá podmínka konečnosti chromatického čísla.

Důsledek 4.58 [30]. *Nechť $D = \{d_1, d_2, \dots\}$ je nekonečná distanční množina. Platí-li $\inf\{\frac{d_{i+1}}{d_i}\} > 1$, potom je chromatické číslo grafu $G(D)$ konečné. Obecněji platí, že chromatické číslo grafu $G(D)$ je konečné, pokud $\inf\{\frac{d_{i+k}}{d_i}\} > 1$ pro nějaké přirozené číslo k.*

Následující věta navíc dokazuje, že pro zajištění konečnosti chromatického čísla distančního grafu je exponenciální růst prvků distanční množiny nejen postačující, ale navíc i nutný.

Věta 4.59 [30]. *Nechť $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2 \geqslant \dots$ je posloupnost kladných reálných čísel, která libovolně rychle konverguje k nule. Potom existuje distanční množina D taková, že $d_{i+1} \geqslant (1 + \varepsilon_i) \cdot d_i$ pro všechna $i \geqslant 1$, ale graf $G(D)$ není obarvitelný konečným počtem barev.*

4.5 Periodická obarvení

Najdeme-li přípustné obarvení distančního grafu, může se stát, že toto obarvení bude periodické. To znamená, že ho lze popsat pomocí určité elementární posloupnosti barev po sobě jdoucích vrcholů, která se v obarvení dalších vrcholů opakuje. Nechť $f : \mathbb{Z} \to \{f_1, \dots, f_k\}$ je obarvení distančního grafu $G(D)$. Toto obarvení se nazývá periodické s periodou p, pokud platí $f(v) = f(v + p)$ pro všechna $v \in \mathbb{Z}$. Libovolné p-periodické obarvení budeme značit $[f_{i_1}, f_{i_2}, \dots, f_{i_p}]$, kde $\forall j \in \{1, \dots, p\}$: $i_j \in \{1, \dots, k\}$ a $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_p}$ je elementární opakující se posloupnost barev, kterou nazveme vzor. V případě, že se v rámci vzoru bude určitá podsekvence m barev opakovat r-krát po sobě, budeme používat označení $(f_{i_1}, \ldots, f_{i_m})^r$. Například vzor $[1,2,1,2,3,1,2,1,2,1,2,4]$ budeme moci zapsat jako $[(1,2)^2, 3, (1,2)^3, 4]$.

Periodická obarvení pro prvočíselné distanční grafy jsou podrobně zkoumána v článku [8], ve kterém Eggleton a spol. navázali na své výsledky z [9]. Uveďme na začátek jeden triviální poznatek.

Věta 4.60 [8]. *Nechť $D \subseteq \mathbb{P}$ je konečná. Potom má-li $G(D)$ přípustné k-obarvení, potom má přípustné periodické k-obarvení.*

Důsledkem této věty je skutečnost, že pro každou konečnou distanční množinu $D \subset \mathbb{P}$ lze určit $\chi(G(D))$ v konečném čase pomocí rozhodovacího algoritmu, který pro dané periodické obarvení určuje, jestli je přípustné. Budeme-li definovat hodnoty q a k, kde $q = \max(D)$ a $\chi(G(D)) \leqslant k$, tak můžeme jednoduše ověřit, že každé přípustné periodické obarvení $G(D)$ bude mít periodu $\leqslant q \cdot k^q$. Důkaz této věty je založen na "pidgeon-hole" principu.

Řekneme, že dvě obarvení jsou ekvivalentní, jestliže z jednoho lze vhodnou translací obarvených vrcholů a prohozením jednotlivých barev získat jiné. Dále budeme definovat pojem *chromatické obarvení*. Bude se jednat o libovolné přípustné obarvení grafu $G(D)$, které používá právě $\chi(G(D))$ barev. Předchozí větu lze tedy pochopit i tak, že každý distanční graf s konečnou prvočíselnou distanční množinou bude mít periodické chromatické obarvení.

Věta 4.61 [8]. *Každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ je periodické, pokud je splněn jeden z následujících případů:*

(i) $\chi(G(D)) \leqslant 2$,

(ii) $\chi(G(D)) = 3$ *a zároveň* $\{2, p, p+2\} \subseteq D$, *kde* p *a* $p+2$ *tvoří prvočíselnou dvojici,*

(iii) $\chi(G(D)) = 4$ *a zároveň* $\{2,3,5,7\} \subseteq D$.

U všech tří případů lze navíc určit, jakou budou mít tato chromatická obarvení periodu.

Důsledek 4.62 [8]. *Nechť $\chi(G(D)) = 2$ a $q := \min(D)$. Potom má každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ periodu 2 nebo $2q$.*

Důsledek 4.63 [8]. *Nechť $\chi(G(D)) = 3$ a $\{2, p, p+2\} \subseteq D$, kde p a $p+2$ tvoří prvočíselnou dvojici. Potom má každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ periodu rovnou některému děliteli $p-2$.*

Důsledek 4.64 [8]. *Nechť $\chi(G(D)) = 4$ a $\{2,3,5,7\} \subseteq D$. Potom má každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ periodu 4.*

Z libovolného chromatického obarvení lze pomocí přebarvení libovolného vrcholu nějakou dosud nevyužitou barvou vytvořit přípustné obarvení o $\chi(G(D))+1$ barvách. Tento triviální poznatek lze zobecnit, čímž dostáváme následující větu.

Věta 4.65 [8]. *Nechť $G(D)$ je distanční graf, který má přípustné k-obarvení. Potom má $G(D)$ neperiodické přípustné $(k+1)$-obarvení.*

V dalších větách se podíváme na vlastnosti chromatických 3-obarvení prvočíselných distančních grafů. Podle věty 4.20 víme, že aby $\chi(G(D)) = 3$, tak potom musí množina $D \subseteq \mathbb{P}$ obsahovat prvek 2 a alespoň jedno další prvočíslo. Pokud takto sestavená množina D neobsahuje prvek 3, potom lze graf $G(D)$ obarvit s využitím periodického obarvení $[1,2,3]$. V následujících větách budeme proto předpokládat, že $\{2,3\} \subseteq D$.

Na začátek zmíníme jeden zajímavý poznatek, který nám pomůže charakterizovat periodická chromatická obarvení těchto distančních grafů.

Lemma 4.66 [8]. *Mějme distanční množinu D takovou, že $\{2,3\} \subseteq D$ a $\chi(G(D)) = 3$. Potom každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ buď obsahuje tři po sobě jdoucí vrcholy $v, v+1, v+2$ s odlišnými barvami, nebo má periodu 6.*

V případě, že žádné tři po sobě jdoucí vrcholy nebudou mít vzájemně různé barvy, potom lze pouze použít obarvení $[1,1,2,2,3,3]$. Jelikož ale má být chromatickým obarvením, tak je použitelné pouze v případě, že D obsahuje pouze prvky 2 a 3.

Lemma 4.67 [8]. *Mějme distanční graf $G(D)$ takový, že $[1,1,2,2,3,3]$ je jeho chromatickým obarvením. Potom $D = \{2,3\}$.*

Naopak, pokud najdeme v takovém chromatickém obarvení tři po sobě jdoucí vrcholy se vzájemně různými barvami, potom jeho vzor nutně musí obsahovat posloupnost barev $\ldots 1,2,2,3,1,1,2 \ldots$ nebo její ekvivalent. Tuto skutečnost lze jednoduše ověřit, pokud zvolíme tři po sobě jdoucí vrcholy, obarvíme každý jinou barvou a potom určíme barvy vrcholů v jejich okolí s využitím podmínky, že $\{2,3\} \subseteq D$.

Věta 4.68 [8]. *Mějme distanční množinu D takovou, že $\{2,3\} \subseteq D$ a $\chi(G(D)) = 3$. Potom je každé chromatické obarvení grafu $G(D)$ ekvivalentní buď k obarvení $[\ldots,1,2,2,3,1,1,2,\ldots]$, nebo k obarvení $[1,1,2,2,3,3]$. Druhý případ nastává pouze, pokud $D = \{2,3\}$.*

Odsud lze odvodit, že pokud bude mít dané chromatické obarvení periodu 6, tak se musí jednat o obarvení $[1,1,2,2,3,3]$ grafu $G(2,3)$ nebo ekvivalent tohoto obarvení.

Důsledek 4.69 [8]. *Mějme distanční množinu D takovou, že $\{2,3\} \subseteq D$, $\chi(G(D)) = 3$ a $G(D)$ má chromatické obarvení s periodou 6. Potom $D = \{2,3\}$ a každé chromatické obarvení $G(D)$ s periodou 6 je ekvivalentní k $[1,1,2,2,3,3]$.*

Otázka chromatického obarvení s periodou 6 je tedy vyřešena. Zaměřme se nyní na druhý případ, kdy vzor periodického obarvení obsahuje podsekvenci $\ldots 1,2,2,3,1,1,2\ldots$. Mohlo by se zdát, že všechna ostatní chromatická obarvení grafů $G(D)$, kde $\{2,3\} \subseteq D$, musí mít nutně periodu větší nebo rovnou 7. Když se však podíváme na zmíněnou podsekvenci, tak vidíme, že jak první dva, tak poslední dva prvky jsou $1,2$. Tím pádem se mohou poslední dva prvky brát jako začátek další kopie vzoru, čímž získáme obarvení $[1,2,2,3,1]$.

Věta 4.70 [8]. *Nechť $\{2,3\} \subseteq D$. Pokud má $G(D)$ periodické 3-obarvení, potom má toto obarvení periodu alespoň 5. Dále platí, že $G(D)$ má periodické 3-obarvení s periodou 5 právě tehdy, když $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2 \pmod 5\}$, a každé takové 3-obarvení je ekvivalentní k $[1,2,2,3,1]$.*

Pro další věty budeme definovat následující důležité pojmy. Chromatickou periodou $\pi(D)$ nazveme číslo odpovídající nejmenší možné periodě chromatického obarvení grafu $G(D)$. Hodnoty $\pi(D)$ pro distanční grafy, které mají konečnou distanční množinu a chromatické číslo $\chi(G(D)) = k$, budou tvořit množinu, kterou nazveme spektrum. Budeme ho značit $\mathrm{spec}(k) := \{\pi(D) : D \subset \mathbb{P}, |D| < \infty, \chi(G(D)) = k\}$.

S využitím již známých faktů lze odvodit vzhled některých spekter. Platí, že $\mathrm{spec}(1) = \{1\}$, neboť jediný distanční graf obarvitelný jednou barvou je diskrétní graf a v něm jsou všechny vrcholy obarvené stejnou barvou, což lze vnímat jako periodické obarvení s periodou 1. Z důkazu Tvrzení 4.19 víme, že každý distanční graf, kde $D \subseteq \mathbb{P}$, lze obarvit tak, že postupně obarvujeme jednotlivé vrcholy pomocí čtyř barev podle vzoru $[1,2,3,4]$. Proto platí, že $\mathrm{spec}(4) = \{4\}$. Nakonec lze jednoduše určit, že $\mathrm{spec}(2) = \{2,4\}$. Pokud D obsahuje pouze liché prvky, potom lze $G(D)$ obarvit dvěma barvami, které se budou postupně střídat, což je obarvení s periodou 2. Další 2-obarvitelné distanční grafy jsou grafy s jednoprvkovou distanční množinou. Pokud je však tento prvek lichý, tak je pokrytý předchozím případem. Sudá čísla s výjimkou 2 nejsou prvočísla, a proto je nebudeme brát v úvahu. Graf $G(2)$ lze obarvit obarvením se vzorem $[1,1,2,2]$, a proto je 4 druhým a posledním prvkem $\mathrm{spec}(2)$.

Jelikož zkoumáme chromatická 3-obarvení, bude nás zajímat, jak vypadá $\mathrm{spec}(3)$. Určitě bude obsahovat prvek 3, neboť takovou chromatickou periodu mají všechny distanční grafy, u kterých $3 \notin D$. Dále podle předchozí věty víme, že ostatní 3-obarvitelné distanční grafy s konečnou množinou D mají chromatickou periodu alespoň 5. Navíc jsme již schopni určit distanční grafy, pro které je tato perioda přímo 5 (například $G(2,3,7)$), takže i prvek 5 patří do $\mathrm{spec}(3)$. V následujících větách jsou sepsána periodická 3-obarvení s periodou $\leqslant 15$ a distanční grafy, pro které jsou přípustná.

Věta 4.71 [8]. *Nechť* $\{2,3\} \subseteq D$. *Pokud má* $G(D)$ *periodické* 3-*obarvení, potom má toto obarvení chromatickou periodu* 5 *nebo alespoň* 9. *Dále platí, že* $G(D)$ *má periodické* 3-*obarvení s periodou* 9 *právě tehdy, když* $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod 9\}$, *a každé takové* 3-*obarvení je ekvivalentní k* $[1,2,2,3,1,1,2,3,3]$.

Z věty 4.68 a jejího důsledku víme, že jediný distanční graf s 3-obarvením o periodě 6 je graf s $D = \{2,3\}$. Tato množina však splňuje podmínky pro 3-obarvení o periodě 5 z věty 4.70. Číslo 6 tedy nepředstavuje hodnotu chromatické periody žádného uvažovaného distančního grafu, a proto tento prvek nebude ani součástí spec(3). To samé platí i pro prvky 7 a 8, avšak zde je tato skutečnost dána podmínkou existence barevné posloupnosti $\ldots 1,2,2,3,1,1,2\ldots$ ve vzoru obarvení, která žádné obarvení o periodě 7 nebo 8 nepovoluje.

Důsledek 4.72 [8]. *Mějme distanční množinu* D *takovou, že* $\{2,3\} \subseteq D$ *a* $\chi(G(D)) = 3$. *Potom neexistuje žádné chromatické obarvení* $G(D)$ *s periodou* 7 *nebo* 8.

Číslo 9 je chromatickou periodou například grafu $G(2,3,11)$, takže je také prvkem spec(3). Zatím tedy víme, že $\mathrm{spec}(3) = \{3,5,9,\ldots\}$, a pokusíme se zjistit, jaká další čísla $\leqslant 15$ do něj patří. V další větě jsou charakterizovány distanční grafy s 3-obarvením o periodě 10.

Věta 4.73 [8]. *Nechť* $\{2,3\} \subseteq D$. *Potom má* $G(D)$ *periodické* 3-*obarvení s periodou* 10 *právě tehdy, když* $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2 \pmod 5\}$, *a každé takové* 3-*obarvení je ekvivalentní k* $[1,2,2,3,1,1,2,2,3,3]$.

Všimněme si, že i přesto, že existuje 3-obarvení zde zkoumaných distančních grafů s periodou 10, tak toto číslo není prvkem spec(3). Toto obarvení je totiž přípustné pro grafy, pro které již bylo ve větě 4.70 definováno 3-obarvení s periodou 5, která je zároveň i chromatickou periodou těchto grafů. To znamená, že neexistuje žádná distanční množina, jejíž chromatickou periodou by bylo číslo 10.

Důsledek 4.74 [8]. *Číslo* 10 *není prvkem* spec(3).

Existují i 3-obarvení distančních grafů o periodě 11, přičemž tato hodnota bude dalším prvkem spec(3). Příkladem grafu, pro který je chromatickou periodou číslo 11, je distanční graf $G(2,3,19)$.

Věta 4.75 [8]. *Nechť* $\{2,3\} \subseteq D$. *Pokud má* $G(D)$ *periodické* 3-*obarvení, potom má toto obarvení periodu* 5, 9 *nebo alespoň* 11. *Dále platí, že* $G(D)$ *má periodické* 3-*obarvení s periodou* 11 *právě tehdy, když* $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2, \pm 3 \pmod{11}\}$, *a každé takové* 3-*obarvení je ekvivalentní k* $[1,2,2,3,1,1,2,2,3,3,1]$.

Podobně jako v případě čísel 7 a 8 nebudou do spec(3) patřit ani 12 a 13. Číslo 14 do tohoto spektra patřit bude, neboť existují 3-obarvení o periodě 14 a v případě vybraných grafů jako například $G(2,3,59)$ se jedná o chromatickou periodu.

Věta 4.76 [8]. *Nechť* $\{2,3\} \subseteq D$. *Pokud má* $G(D)$ *periodické* 3-*obarvení, potom má toto obarvení periodu maximálně* 11 *nebo alespoň* 14. *Dále platí, že* $G(D)$ *má periodické* 3-*obarvení s periodou* 14 *právě tehdy, když* $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2, \pm 3, 7 \pmod{14}\}$, *a každé takové* 3-*obarvení je ekvivalentní k*

$$[1,2,2,3,1,1,2,2,3,1,1,2,3,3].$$

Nakonec se budeme zabývat existencí 3-obarvení o periodě 15. V tomto případě jsme schopni najít dokonce 3 různá přípustná obarvení a jejich ekvivalenty.

Věta 4.77 [8]. *Nechť* $\{2,3\} \subseteq D$. *Potom má* $G(D)$ *periodické* 3-*obarvení s periodou* 15 *právě tehdy, když* $D \subseteq \{p \in \mathbb{P} : p \equiv \pm 2, 3, \pm 7 \pmod{15}\}$, *a každé takové* 3-*obarvení je ekvivalentní k jednomu z následujících obarvení:*

$$[1,2,2,3,1,1,2,2,3,1,1,2,2,3,3],$$
$$[1,2,2,3,1,1,2,2,3,1,1,2,3,3,1],$$
$$[1,2,2,3,1,1,2,2,3,3,1,1,2,3,3].$$

Ani v tomto případě však $15 \notin \mathrm{spec}(3)$. Důvod je stejný jako pro číslo 10. Všechny distanční grafy, pro které budou tato obarvení přípustná, již spadají do charakterizace z věty 4.70 a existuje pro ně tedy 3-obarvení o periodě 5. Číslo 15 tedy nemůže být chromatickou periodou žádného zde zkoumaného distančního grafu.

Důsledek 4.78 [8]. *Číslo* 15 *není prvkem* spec(3).

Určili jsme tedy všechna čísla $\leqslant 15$, která představují chromatickou periodu pro některý distanční graf $G(D)$, kde $\{2,3\} \subseteq D$ a $\chi(G(D)) = 3$. Konkrétně se jedná o $\{3,5,9,11,14\}$. Na konec této kapitoly dodáváme poznatek, že Eggleton ve své pozdější publikaci [7] byl schopen dokázat, že všechna prvočísla s výjimkou 2, 7 a 13 jsou prvky spec(3), a tím pádem existuje přípustné chromatické obarvení třemi barvami nějakého distančního grafu s danou periodou.

5 Hamiltonovské vlastnosti pro konečné distanční grafy

V této kapitole se budeme zabývat distančními grafy, které mají konečný počet vrcholů. Nechť $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ je množina vrcholů a $D \subseteq \mathbb{N}$ je distanční množina. Potom konečný distanční graf (v literatuře se používá pojem toeplitzovský graf) $G_n(D)$ je graf s množinou vrcholů V a množinou hran $E = \{\{x, y\} \in \binom{V}{2} : \exists\, d_i \in D : |y-x| = d_i\}$. Tyto grafy byly zkoumány z hlediska jejich hamiltonovských vlastností. Před uvedením výsledků budeme definovat základní pojmy z oblasti hamiltonicity grafů. Pokud graf G obsahuje jako podgraf cestu, která prochází každý vrchol z $V(G)$ právě jednou, potom se G označuje za *traceable* a tato cesta se nazývá *hamiltonovská cesta*. Pokud G obsahuje jako podgraf kružnici, která prochází všechny vrcholy z $V(G)$ právě jednou, potom se G označuje za *hamiltonovský* a tato kružnice se nazývá *hamiltonovská kružnice*.

Hamiltonicitou toeplitzovských grafů s distanční množinou malé kardinality se zabývali van Dal a spol. ve své publikaci [34]. První důležitou otázkou, která je v tomto článku řešena, je souvislost toeplitzovského grafu. Lze totiž jednoduše odvodit, že nutnou podmínkou pro traceabilitu je souvislost grafu a pro hamiltonicitu 2-souvislost, což znamená, že graf zůstane souvislý, pokud z něj odstraníme libovolný vrchol. Následující věta poskytuje dolní odhad počtu komponent toeplitzovského grafu.

Věta 5.1 [34]. *Nechť $G_n(d_1, \ldots, d_k)$ je toeplitzovský graf. Potom má tento graf alespoň $\gcd(d_1, \ldots, d_k)$ komponent.*

Z této věty lze odvodit důsledek, který stanovuje podmínku souvislosti grafu pro hodnoty $d_1, \ldots, d_k$.

Důsledek 5.2 [18]. *Nechť $d_1, \ldots, d_k \in \mathbb{N}$. Pokud $\gcd(d_1, \ldots, d_k) > 1$, potom toeplitzovský graf $G_n(d_1, \ldots, d_k)$ není souvislý.*

Je očividné, že aby toeplitzovský graf byl souvislý, potom největší společný dělitel všech prvků D musí být 1. Pro toeplitzovské grafy s distanční množinou tvořenou dvěma prvky lze dokázat, ve kterých případech tento graf není traceable, respektive hamiltonovský, pokud se podíváme na vztah součtu $d_1 + d_2$ s řádem grafu n.

Věta 5.3 [34]. *Nechť $G_n(d_1, d_2)$ je toeplitzovský graf řádu $n \geqslant 5$. Pokud platí $d_1 + d_2 < n < 3d_1 + d_2$, potom $G_n(d_1, d_2)$ není hamiltonovský. Dále pokud $d_1 \geqslant 3$ a platí $d_1 + d_2 + 2 < n < 3d_1 + d_2$, potom $G_n(d_1, d_2)$ není traceable.*

Dále se autoři v článku zaměřili na distanční množiny, u nichž je pevně daný prvek d_1. Pokud je $d_1 = 1$, tak je toeplitzovský graf zcela jistě traceable. Jestli je graf také hamiltonovský závisí na paritě zbylých prvků množiny D.

Věta 5.4 [34]. *Nechť $G_n(1, d_2, \ldots, d_k)$ je toeplitzovský graf. Potom je tento graf hamiltonovský právě tehdy, když buď alespoň jedna z hodnot $n, d_2, \ldots, d_n$ má jinou paritu než ostatní, nebo jsou všechny sudé a $d_2 \leqslant \frac{n}{2}$.*

V případě, že $d_1 = 2$, se předpokládá, že d_2 je liché, jinak by měl graf více než jednu komponentu dle důsledku 5.2. Máme-li toeplitzovský graf $G_n(2, d_2)$, kde d_2 je dostatečně velké, potom traceabilita a hamiltonicita grafu závisí na paritě počtu jeho vrcholů.

Věta 5.5 [34]. *Nechť $G_n(2, d_2)$ je toeplitzovský graf, kde d_2 je liché číslo takové, že $d_2 \geqslant \frac{n-1}{2}$. Pokud je n sudé, potom je graf traceable, ale není hamiltonovský. Pokud je n liché, tak $G_n(2, d_2)$ je hamiltonovský právě tehdy, když $\frac{n-d_2}{2}$ je liché.*

Naopak bude-li d_2 dostatečně malé, tak graf $G_n(2, d_2)$ bude vždy hamiltonovský.

Věta 5.6 [34]. *Nechť $G_n(2, d_2)$ je toeplitzovský graf, kde $d_2 \equiv \epsilon \pmod 4$ pro $\epsilon = \pm 1$. Pokud je n sudé a $d_2 \leqslant \frac{n+\epsilon}{3}$, potom je graf hamiltonovský. Pokud je n liché a $d_2 \leqslant \frac{n+2+\epsilon}{4}$, potom je graf $G_n(2, d_2)$ hamiltonovský.*

Odsud můžeme dojít k závěru, že horní hranice pro hodnotu d_2 zaručující hamiltonicitu grafu $G_n(2, d_2)$ je $\frac{n+3}{4}$. Zároveň vidíme, že tato hranice je nejlepší možná, protože se jedná o nejmenší hodnotu z předchozí věty.

Věta 5.7 [34]. *Nechť $G_n(2, d_2)$ je toeplitzovský graf, kde d_2 je liché. Pokud $d_2 < \frac{n+3}{4}$, potom je graf $G_n(2, d_2)$ hamiltonovský.*

Pro toeplitzovské grafy s distanční množinou kardinality větší než 2 a sudým počtem vrcholů lze také dokázat, kdy budou hamiltonovské.

Věta 5.8 [34]. *Nechť $G_n(2, d_2, \ldots, d_k)$ je toeplitzovský graf, kde n je sudé, $d_2 > \frac{n}{2}$ a prvky $d_2, \ldots, d_k$ jsou liché. Potom je graf hamiltonovský právě tehdy, když alespoň jedno z čísel $\frac{n-d_i+1}{2}, i = 2, \ldots, k$ má jinou paritu než ostatní.*

Rekapitulaci výsledků z tohoto článku zakončíme speciálním případem grafu $G_n(d_1, d_2)$, kde n je násobkem součtu $d_1 + d_2$. V tomto případě bude graf vždy hamiltonovský.

Věta 5.9 [34]. *Nechť $G_n(d_1, d_2)$ je toeplitzovský graf, kde n je násobkem $d_1 + d_2$. Potom je graf $G_n(d_1, d_2)$ hamiltonovský.*

Dalším významným článkem k této problematice je [18] od Heubergera, který navazuje na výsledky z [34] a mnohé z nich rozšiřuje a vylepšuje. Nejprve je zde doplněna podmínka souvislosti toeplitzovského grafu, která k původnímu požadavku nesoudělnosti prvků distanční množiny přidává horní hranici pro součet prvního a posledního prvku.

Věta 5.10 [18]. *Nechť $G_n(d_1, \dots, d_k)$ je toeplitzovský graf. Dále nechť $g_m := \gcd(d_1, \dots, d_m)$ pro $m = 1, \dots, k$. Pokud $g_k = 1$ a $g_m + d_{m+1} \leqslant n + 1$ pro $1 \leqslant m \leqslant k - 1$, potom je graf $G_n(d_1, \dots, d_k)$ souvislý.*

Důsledek 5.11 [18]. *Nechť $G_n(d_1, \dots, d_k)$ je toeplitzovský graf. Pokud platí, že $\gcd(d_1, \dots, d_k) = 1$ a $d_1 + d_m \leqslant n + 1$, potom je graf $G_n(d_1, \dots, d_k)$ souvislý.*

Další výsledky se týkají grafů $G_n(d_1, d_2)$. S využitím minulé věty lze nyní o každém takovém grafu rozhodnout, jestli je souvislý a ve vybraných případech lze i vyloučit jeho hamiltonicitu.

Věta 5.12 [18]. *Nechť $G_n(d_1, d_2)$ je toeplitzovský graf, kde $1 \leqslant d_1 < d_2 \leqslant n - 1$. Potom*

(1) pokud $\gcd(d_1, d_2) > 1$ nebo $d_1 + d_2 \geqslant n + 2$, tak $G_n(d_1, d_2)$ není souvislý,

(2) pokud $\gcd(d_1, d_2) = 1$ a $d_1 + d_2 = n + 1$, tak $G_n(d_1, d_2)$ je traceable, ale není hamiltonovský,

(3) pokud $\gcd(d_1, d_2) = 1$ a $d_1 + d_2 \leqslant n + 1$, tak $G_n(d_1, d_2)$ je souvislý.

Zároveň pro graf $G_n(d_1, d_2)$ platí, že není hamiltonovský, pokud všechna tři čísla n, d_1, d_2 mají stejnou paritu. Pokud budou všechna sudá, tak $G_n(d_1, d_2)$ bude mít víc než jednu komponentu, neboť $\gcd(d_1, d_2) > 1$ a graf nebude souvislý. Pokud budou naopak všechna lichá, tak vznikne bipartitní graf, který má lichý počet vrcholů, a proto nemůže obsahovat hamiltonovskou kružnici.

Věta 5.13 [18]. *Nechť $n, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, přičemž $d_1 \equiv d_2 \equiv n \pmod 2$. Potom toeplitzovský graf $G_n(d_1, d_2)$ není hamiltonovský.*

Ve větě 5.7 z [34] byla pro graf $G_n(2, d_2)$ určena horní mez pro prvek d_2 taková, aby byl tento graf hamiltonovský. Tato věta byla zobecněna pro grafy $G_n(d_1, d_2)$ a nyní určuje minimální počet vrcholů pro hamiltonicitu v závislosti na obou prvcích d_1 i d_2.

Věta 5.14 [18]. *Nechť $n, d_1, d_2 \in \mathbb{N}$, která nejsou všechna stejné parity. Dále nechť $d_2 \equiv 1 \pmod{2d_1}$ a $n \geqslant 5d_2$, pokud je n sudé nebo $n \geqslant 6d_2 + d_1$, pokud n je liché. Potom toeplitzovský graf $G_n(d_1, d_2)$ je hamiltonovský.*

Poslední část tohoto článku je věnována toeplitzovským grafům s distanční množinou vysoké kardinality a obecným toeplitzovským grafům. V následující větě najdeme postačující podmínku hamiltonicity v případě, že má distanční množina alespoň $\frac{n}{2}$ prvků.

Věta 5.15 [18]. *Nechť $k \geqslant \frac{n}{2}$ a čísla $0 < d_1 < \cdots < d_k < n$ splňují nerovnici*

$$d_{m+1} < \frac{n+m}{2}$$

pro $1 \leqslant m < \frac{n}{2}$. Potom je toeplitzovský graf $G_n(d_1, \ldots, d_k)$ hamiltonovský.

Rekapitulaci výsledků z tohoto článku uzavřeme větou, ve které je určena postačující podmínka hamiltonicity obecného toeplitzovského grafu $G_n(d_1, \ldots, d_k)$, která je dána maximální hodnotou průměru všech prvků množiny D.

Věta 5.16 [18]. *Nechť $G_n(d_1, \ldots, d_k)$ je toeplitzovský graf, pro který platí*

$$\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^{k} d_i \leqslant n \cdot \left(1 - \frac{3n}{8k}\right).$$

Potom je graf $G_n(d_1, \ldots, d_k)$ hamiltonovský.

Toeplitzovské grafy $G_n(D)$ se svojí strukturou podobají jiné třídě grafů, které se nazývají cirkulanty. Obě tyto třídy grafů jsou definované na stejné množině vrcholů $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, ale zatímco pro toeplizovský graf je $E(G_n(D)) = \{\{x, y\} \in V \times V : \exists\, d_i \in D : y - x = d_i\}$, tak pro cirkulant $C_n(D)$ má množina hran tvar $E(C_n(D)) = \{\{x, y\} \in V \times V : \exists\, d_i \in D : y - x = \pm d_i\}$. Tyto dvě třídy mají neprázdný průnik, neboť za určitých okolností je toeplitzovský graf zároveň cirkulantem, což dokazuje následující věta.

Věta 5.17 [28]. *Nechť G je graf. Potom je G cirkulantem právě tehdy, když je regulárním toeplitzovským grafem.*

Lze dokázat, že každý cirkulant $C_n(D)$ je izomorfní s toeplitzovským grafem $G_n(D')$, kde $D' = D \cup \{n - d \in \mathbb{N} : d \in D\}$ a každý toeplitzovský graf $G_n(D)$ je izomorfní s cirkulantem $C_n(D')$, kde $D' = \{d \in D : d \leqslant \frac{n}{2}\}$. Odsud lze jednoduše odvodit, že $G_n(D)$ bude izomorfní s $C_n(D)$ právě tehdy, když distanční množina D splňuje podmínku $d_i \in D \Leftrightarrow n - d_i \in D$. Hamiltonicita cirkulantů má podobné podmínky jako v případě toeplitzovských grafů, o čemž se můžeme přesvědčit v následující větě.

Věta 5.18 [3]. *Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $D \subset \mathbb{N}$ je konečná. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) $C_n(D)$ *je souvislý.*

(ii) $\gcd(\{n\} \cup D) = 1$.

(iii) $C_n(D)$ *má Hamiltonovskou kružnici.*

Právě podobnost cirkulantů a toeplitzovských grafů motivovala autory publikace [28], která pojednávala o souvislosti a průměru toeplitzovských grafů, k vydání článku [29], ve kterém dokázali, že hamiltonicita těchto grafů je podmíněna existencí velkých komponent a dlouhých kružnic. Jejich hlavní výsledek uvádíme v následující větě.

Věta 5.19 [29]. *Nechť $D \subset \mathbb{N}$ je konečná a $|D| \geqslant 2$. Potom jsou následující tvrzení ekvivalentní:*

(i) *Existuje konstanta $c_1(D)$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ obsahuje toeplitzovský graf $G_n(D)$ komponentu řádu alespoň $n - c_1(D)$.*

(ii) $\gcd(D) = 1$.

(iii) *Existuje konstanta $c_2(D)$ taková, že pro každé $n \geqslant c_2(D) + 3$ obsahuje toeplitzovský graf $G_n(D)$ kružnici délky alespoň $n - c_2(D)$*

Bod (i) lze navíc rozšířit, neboť pokud $\gcd(D) = 1$ a $n \geqslant 2 \cdot \max(D) + 1$, tak bude toeplitzovský graf $G_n(D)$ souvislý. To znamená, že existuje konstanta $c_3(D)$ taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$, kde $n \geqslant c_3(D)$, je toeplitzovský graf $G_n(D)$ souvislý. Na závěr tohoto článku autoři vznesli hypotézu, která předpokládá existenci hamiltonovské cesty v dostatečně velkém toeplitzovském grafu a sami dokázali její platnost pro $|D| = 2$.

Hypotéza 5.20 [29]. *Nechť $D \subset \mathbb{N}$ je konečná distanční množina, kde $|D| \geqslant 2$ a $\gcd(D) = 1$. Potom existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n \geqslant 2$ a toeplitzovský graf $G_n(D)$ obsahuje hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a n.*

Věta 5.21 [29]. *Nechť $d_1, d_2 \in \mathbb{N}$ taková, že $d_1 < d_2$ a $\gcd(d_1, d_2) = 1$. Potom toeplitzovský graf $G_{d_1+d_2+1}(d_1, d_2)$ obsahuje hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a $d_1 + d_2 + 1$.*

Rautenbach, jeden ze spoluautorů [28] a [29], se tímto tématem dále zabýval v publikacích [24] a [25], na kterých pracoval se svými univerzitními kolegy, Löwensteinem a Regenem. V prvním zmiňované publikaci nejprve rozšířili výsledky z věty 5.21 a přidali základní poznatek pro graf $G_{d_1+d_2}(d_1, d_2)$.

Věta 5.22 [24]. *Nechť $D = \{d_1, d_2\}$ je distanční množina, kde $d_1 < d_2$ a $\gcd(d_1, d_2) = 1$. Potom*

(1) *toeplitzovský graf $G_{d_1+d_2}(D)$ je kružnice,*

(2) *toeplitzovský graf $G_{d_1+d_2+1}(D)$ obsahuje dvě hamiltonovské cesty P_{d_1} a P_{d_2} s koncovými vrcholy 1 a $d_1 + d_2 + 1$ takové, že $E(G_{d_1+d_2+1}(D)) = E(P_{d_1}) \cup E(P_{d_2})$.*

S použitím této věty a několika dalších pomocných lemmat se autorům podařilo dokázat správnost hypotézy 5.20. V následující větě je stanovena dolní hranice počtu vrcholů toeplitzovského grafu taková, aby graf nejen obsahoval hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a n, ale také aby byl hamiltonovský.

Věta 5.23 [24]. *Nechť $D = \{d_1, d_2, \ldots, d_k\} \subset \mathbb{N}$ pro $k \geqslant 3$ taková, že $\gcd(D) = 1$ a $\gcd(D') > 1$ pro každou vlastní podmnožinu $D' \subset D$. Dále nechť $d_2 > d_1 \geqslant 3g$, kde $g = \gcd(d_1, d_2)$. Pokud existuje $l \in \mathbb{N}$ takové, že $n = (d_1 + d_2) \cdot l$ splňuje nerovnici*

$$n \geqslant (d_1 + d_2 + g - 1) + (\max(D) + d_1 + d_2 + g - 1) \cdot (g - 1) + (d_1 + d_2 + g - 1),$$

potom $G_n(D)$ obsahuje Hamiltonovskou kružnici a $G_{n+1}(D)$ obsahuje Hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a $n + 1$.

Je jisté, že čísel n, pro která toeplitzovský graf $G_n(d_1, d_2)$ splňuje podmínky z této věty, je nekonečně mnoho. V tomto případě se však pouze jedná o hodnoty, které jsou násobkem součtu $d_1 + d_2$. Na konci tohoto článku byla uvedena silnější verze hypotézy 5.20, která říká, že tato věta platí pro všechna n, která jsou dostatečně velká.

Hypotéza 5.24 [24]. *Pro každou konečnou množinu $D \subseteq \mathbb{N}$, kde $|D| \geqslant 3$, $\gcd(D) = 1$ a $\gcd(D') \leq 1$ existuje číslo $n_D \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geqslant n_D$ má graf $G_n(D)$ Hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a n.*

Na závěr této kapitoly uvádíme hlavní výsledek z článku [25], kde autoři dokázali tuto hypotézu pro toeplitzovské grafy $G_n(d_1, d_2)$. Pro grafy s vyšší kardinalitou distanční množiny D zatím zůstává tato hypotéza neověřena.

Věta 5.25 [25]. *Nechť $D = \{d_1, d_2\} \subset \mathbb{N}$, kde $d_2 > d_1$ a $\gcd(d_1, d_2) = 1$. Potom existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že*

(1) pro všechna $n \geqslant n_0$ obsahuje graf $G_n(D)$ Hamiltonovskou cestu s koncovými vrcholy 1 a $n - 1$,

(2) pro všechna sudá $n \geqslant n_0$ obsahuje graf $G_n(D)$, kde $d_1 \cdot d_2$ je liché, Hamiltonovskou kružnici,

(3) pro všechna $n \geqslant n_0$ obsahuje graf $G_n(D)$, kde $d_1 \cdot d_2$ je sudé, Hamiltonovskou kružnici.

6 Grafová barvení při silnějších podmínkách vzdálenosti vrcholů

Doposud jsme se zabývali barvením, kde pouze sousední vrcholy musely být odlišně obarveny. Existují však i barvení, kde je tato podmínka vyžadována od každé dvojice vrcholů, které jsou od sebe ve vzdálenosti nejvýše k, kde $k \in \mathbb{N}$. V této kapitole budeme definovat některé základní typy těchto obarvení a zrekapitulujeme již známé výsledky.

6.1 2-distanční barvení

Barvení $f : V(G) \to \mathbb{N}$, u kterého pro každou dvojici vrcholů $u, v \in V(G)$ platí $f(u) = f(v) \Rightarrow d(u, v) > k$ pro nějakou pevnou hodnotu $k \in \mathbb{N}$, se nazývá k-distanční obarvení. Speciálně můžeme definovat pojem k-distanční chromatické číslo, což je hodnota rovna nejmenšímu počtu barev k-distančního obarvení grafu G, kterou budeme značit $\chi_k(G)$.

S k-distančním barvením také souvisí pojem mocnina grafu. Máme-li graf G s množinou vrcholů $V(G)$ a množinou hran $E(G)$, potom jeho k-tou mocninou je graf G^k s množinou vrcholů $V(G^k) = V(G)$ a množinou hran $E(G^k)$ obsahující hrany mezi každou dvojicí vrcholů, které mají v G vzdálenost nejvýše k, tedy $E(G^k) = \{\{u, v\} : d_G(u, v) \leqslant k\}$. Lze jednoduše určit, že každé přípustné obarvení grafu G^k je i platným k-distančním obarvení grafu G a naopak. Proto bude platit, že $\chi(G^k) = \chi_k(G)$. Speciálně můžeme definovat i druhou mocninu distančního grafu $G(D)$, kterou můžeme vnímat jako distanční graf $G(D^2)$, kde $D^2 = D \cup \{d + d' : d, d' \in D\} \cup \{d - d' : d, d' \in D\}$. I v tomto případě platí $\chi_2(G(D)) = \chi(G(D^2))$.

Pojem k-distančního barvení byl zaveden v roce 1969 v článku [23] od F. a H. Kramerových. Značná část výzkumu pak byla věnována 2-distančnímu barvení rovinných grafů a hledání odhadů 2-distančních chromatických čísel těchto grafů v závislosti na jejich maximálním stupni. Problematika 2-distančního barvení distančních grafů je ještě relativně nové téma. První článek, který se jí zabývá, je [2] z roku 2019, ve kterém jsou zaznamenány základní poznatky a odhady 2-distančních chromatických čísel vybraných distančních grafů. Na začátek uveďme pozorování ohledně obecného 2-distančního barvení, které udává dolní hranici 2-distančního chromatického čísla v závislosti na maximálním stupni grafu.

Pozorování 6.1 [2]. *Mějme libovolný neorientovaný graf G. Potom platí, že $\chi_2(G) \geqslant \Delta(G) + 1$.*

Tato skutečnost platí, neboť každý vrchol a jeho sousedé mají mezi sebou vzdálenost maximálně 2, a musí tedy být obarvené různými barvami. V případě distančního grafu $G(D)$, kde $D = \{1, \ldots, k\}$, můžeme s využitím lemmatu 4.6 určit i horní hranici, která však bude mít stejnou hodnotu, neboť $|D^2| = |\{1, \ldots, 2k\}| = 2k$.

Věta 6.2 [2]. *Nechť $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ pro $k \geqslant 2$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) = 2k + 1 = \Delta(G(D)) + 1.$$

Dále jsou v článku uvedeny odhady 2-distančního chromatického čísla pro grafy s vybraným tvarem D. Nejprve jsou kompletně charakterizovány distanční grafy, kde $D = \{1, t\}$ pro $t \geqslant 3$, přičemž případ $t = 2$, tedy $D = \{1, 2\}$, je již pokryt větou 6.2.

Věta 6.3 [2]. *Nechť $D = \{1, t\}$ pro $a \geqslant 3$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) = \begin{cases} 5 & \textit{pokud } t \equiv \pm 2 \pmod 5, \\ 6 & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Dalšími zkoumanými grafy byly distanční grafy s $D = \{1, t, t + 1\}$ pro $t \geqslant 3$. Znovu podotýkáme, že případ $t = 2$, tedy $D = \{1, 2, 3\}$, je pokryt větou 6.2. Ve vybraných případech lze 2-distanční chromatické číslo určit přesně, přičemž jeho hodnota je rovna dolní hranici z pozorování 6.1.

Věta 6.4 [2]. *Nechť $D = \{1, t, t + 1\}$ pro $t \geqslant 3$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) = 7 = \Delta(G(D)) + 1$$

právě tehdy, když $a \equiv 2 \pmod 7$ nebo $a \equiv 4 \pmod 7$.

Pro ostatní grafy s tímto typem distanční množiny lze alespoň určit horní hranici s pomocí nalezení vhodného 9-obarvení a tvrzení 4.5.

Věta 6.5 [2]. *Nechť $D = \{1, t, t + 1\}$ pro $t \geqslant 3$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) \leqslant 9 = \Delta(G(D)) + 3.$$

S využitím dvou předchozích vět dojdeme k závěru, že pokud $t \not\equiv 2, 4 \pmod 7$, tak potom bude hodnota $\chi_2(G(1, t, t + 1))$ rovna 8 nebo 9.

Důsledek 6.6 [2]. *Nechť $D = \{1, t, t+1\}$ pro $t \geqslant 3$, kde $t \not\equiv 2, 4 \pmod 7$. Potom*

$$8 \leqslant \chi_2(G(D)) \leqslant 9.$$

Poslední typ distančních grafů, pro které byly zkoumány odhady $\chi_2(G(D))$, mají distanční množinu $D = \{1, \ldots, m, t\}$ pro $2 \leqslant m < t$, kde případ $t = m + 1$ je již pokryt větou 6.2. I zde lze pro některé grafy určit hodnotu $\chi_2(G(D))$ přesně.

Věta 6.7 [2]. *Nechť $D = \{1, \ldots, m, t\}$ pro $2 \leqslant m < t$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) = 2m + 3 = \Delta(G(D)) + 1$$

právě tehdy, když $t \equiv m + 1 \pmod{2m + 3}$ nebo $t \equiv m + 2 \pmod{2m + 3}$.

Pro ostatní lze určit horní hranici, která je díky minulé větě doplněna i o hranici dolní.

Věta 6.8 [2]. *Nechť $D = \{1, \ldots, m, t\}$ pro $2 \leqslant m < t$. Potom*

$$\chi_2(G(D)) \leqslant 4m + 2 = 2 \cdot \Delta(G(D)) - 2.$$

Důsledek 6.9 [2]. *Nechť $D = \{1, \ldots, m, t\}$ pro $2 \leqslant m < t$, kde $t \not\equiv m + 1$ a $t \not\equiv m + 2 \pmod{2m + 3}$. Potom*

$$2m + 4 \leqslant \chi_2(G(D)) \leqslant 4m + 2.$$

Autoři ponechávají kompletní charakterizaci $G(D)$, kde $D = \{1, t, t+1\}$ s $t \geqslant 3$, nebo $D = \{1, \ldots, m, t\}$ s $2 \leqslant m < t$ z hlediska 2-distančního barvení jako otevřený problém. Jak bylo již řečeno, tato problematika je ještě relativně nová a výsledků tedy zatím není mnoho. Pro budoucí články je tedy vhodnou motivací zkoumání 2-distančního barvení distančních grafů určených distanční množinou jiného vzhledu.

6.2 Pakovací barvení

V této podkapitole budeme definovat nový typ barvení zavedený v [15], které se nazývá *pakovací barvení*. Je definováno jako zobrazení $f : V(G) \to \{1, \ldots, k\}$, kde $\forall u, v \in V(G) : f(u) = f(v) \Rightarrow f(u) < d(u, v)$. Znamená to, že každá dvojice obarvená barvou k musí od sebe být ve vzdálenosti větší než k. Zavedení pakovacího barvení bylo motivováno problémem přiřazování frekvencí radiovým stanicím tak, aby byly stanice se stejnou vysílací frekvencí v dostatečně velké vzdálenosti kvůli případnému překrývání signálů. Odtud také pochází jeho původní název, kterým bylo přenosové barvení (v angličtině broadcast colouring).

Existuje-li pakovací obarvení grafu G používající barvy 1 až k, potom je graf k-pakově obarvitelný. Nejmenší hodnota k, pro kterou je graf G k-pakově obarvitelný, se nazývá pakovací chromatické číslo grafu G a značí se $\chi_p(G)$. Základní poznatky a hodnoty $\chi_p(G)$ pro elementární třídy grafů byly sepsány v [15], kde byl tento pojem zaveden.

Pro vybrané elementární třídy grafů je určení pakovacího chromatického čísla triviální. V následujících větách je jeho hodnota určena pro cesty, kružnice a hvězdy.

Věta 6.10 [15]. *Nechť $n \geqslant 2$ je přirozené číslo a P_n je cesta na n vrcholech. Potom pro $n = 2, 3$ je $\chi_p(P_n) = 2$ a pro $n \geqslant 4$ je $\chi_p(P_n) = 3$.*

Věta 6.11 [15]. *Nechť $n \geqslant 3$ je přirozené číslo a C_n je kružnice na n vrcholech. Pokud $n = 3$ nebo je násobkem 4, potom $\chi_p(C_n) = 3$. Jinak $\chi_p(C_n) = 4$.*

Věta 6.12 [15]. *Nechť G je souvislý graf. Potom $\chi_p(G) = 2$ právě tehdy, když je G hvězda.*

Zmíníme zde další třídy grafů, pro které lze určit pakovací chromatické číslo relativně jednoduše. Nejprve se podíváme na stromy, u kterých jeho hodnota závisí na průměru celého grafu, tedy maximální možné vzdálenosti dvojice vrcholů. Pokud je graf T stromem s průměrem 2, potom je zároveň hvězdou a $\chi_p(T) = 2$. Pro stromy s průměrem 3 je pakovací chromatické číslo vždy 3. U stromů s průměrem 4 závisí hodnota $\chi_p(T)$ na okolí takzvaného středového vrcholu, což je vrchol, který se nachází uprostřed nejdelší cesty v tomto stromě.

Věta 6.13 [15]. *Nechť T je strom s průměrem 4 a středovým vrcholem v. Dále nechť n_i pro $i = 1, 2, 3$ je počet sousedů vrcholu v se stupněm i a L je počet sousedů vrcholu v se stupněm alespoň 4. Pokud $L = 0$, potom*

$$\chi_p(T) \leqslant \begin{cases} 4 & \text{pokud } n_3 \geqslant 2 \text{ a } n_1 + n_2 + n_3 \geqslant 3 \\ 3 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a pokud $L > 0$, potom

$$\chi_p(T) \leqslant \begin{cases} L + 3 & \text{pokud } n_3 \geqslant 1 \text{ a } n_1 + n_2 + n_3 \geqslant 2 \\ L + 1 & \text{pokud } n_1 = n_2 = n_3 = 0 \\ L + 2 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále byla stanovena hodnota horní hranice pakovacího chromatického čísla pro stromy, která závisí na jejich řádu.

Věta 6.14 [15]. *Nechť T je strom řádu n. Potom $\chi_p(T) \leqslant \frac{n+7}{4}$ s výjimkou případů $n = 4$, kdy $\chi_p(T) \leqslant 3$ nebo $n = 8$, kdy $\chi_p(T) \leqslant 4$.*

Hojně zkoumanou třídou z hlediska pakovacího barvení jsou také síťové grafy. Síťový graf $G_{r,c}$ má $r \cdot c$ vrcholů, které jsou uspořádané do r řad a c sloupců. Každý jeho vrchol $v_{i,j}$ pro $1 \leqslant i \leqslant r$ a $1 \leqslant j \leqslant c$, který se nachází v i-té řadě a j-tém sloupci, je spojený hranami s vrcholy $v_{i-1,j}$, $v_{i+1,j}$, $v_{i,j-1}$ a $v_{i,j+1}$ (pokud existují). U těchto grafů byly nalezeny přesné hodnoty pakovacího chromatického čísla v případě, že mají nejvýše 5 řad.

Věta 6.15 [15]. *Nechť $G_{r,c}$ je síťový graf s r řadami a c sloupci, kde $r \leqslant c$. Potom*

- $\chi_p(G_{2,c}) = 5$ *pro* $c \geqslant 6$,
- $\chi_p(G_{3,c}) = 7$ *pro* $c \geqslant 12$,
- $\chi_p(G_{4,c}) = 8$ *pro* $c \geqslant 10$,
- $\chi_p(G_{5,c}) = 9$ *pro* $c \geqslant 10$.

Pro síťové grafy s menším množstvím sloupců jsou hodnoty $\chi_p(G_{r,c})$ následující:

$r \backslash c$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2	3	4	4	4	5	...	...	...	...	...	...
3	-	4	5	5	6	6	6	6	6	6	7
4	-	-	5	7	7	7	7	7	8	...	...
5	-	-	-	7	7	7	8	8	9	...	...

Tabulka 4: [15] Hodnoty pakovacího chromatického čísla síťových grafů $G_{r,c}$ pro malá r a c. Případ, kdy $c < r$, lze převést na případ opačný.

V článku [15] byla také určená obecná horní hranice pro síťové grafy libovolného počtu řad a sloupců, podle které platí $\chi_p(G_{r,c}) \leqslant 23$. Zkoumaný byl také nekonečný síťový graf $\mathbb{Z}^2$, pro který byly v průběhu let postupně vylepšovány dolní i horní hranice v mnoha vydaných článcích. V době psaní této práce platí omezení $13 \leqslant \chi_p(\mathbb{Z}^2) \leqslant 15$ stanovené v [26].

Než se přesuneme k výsledkům pro distanční grafy, zmíníme v rychlosti vztah $\chi(G)$ a $\chi_p(G)$. Pro libovolný graf G bude jeho pakovací chromatické číslo větší nebo rovno chromatickému číslu, jehož hodnota závisí na klikovosti daného grafu, tedy řádu největšího úplného grafu, který je podgrafem grafu G.

Věta 6.16 [15]. *Nechť G je graf a $\omega(G)$ je jeho klikovost. Potom*

$$\omega(G) \leqslant \chi(G) \leqslant \chi_p(G).$$

6.2.1 Pakovací barvení distančních grafů G(1,t)

Pakovací barvení distančních grafů bylo podrobněji zkoumáno v článku [33] od Togniho, kde byly sepsány nalezené horní a dolní odhady pro pakovací chromatické číslo distančních grafů, jejichž distanční množina je ve tvaru $D = \{1, t\}$, kde $t \geqslant 2$. Nejprve uveďme důležitý poznatek o konečnosti pakovacího chromatického čísla.

Věta 6.17 [33]. *Nechť $D \subset \mathbb{N}$ je konečná distanční množina. Potom je pakovací chromatické číslo grafu $G(D)$ konečné.*

S pomocí následujícího lemmatu můžeme jednoduše určit vzdálenost dvojice libovolných vrcholů. Toto lemma využijeme i při vlastních výzkumech v pozdějších kapitolách.

Lemma 6.18 [33]. *Nechť $G(1,t)$ je distanční graf a u, v jsou dva jeho různé vrcholy. Potom je jejich vzdálenost $d(u,v) = \min(q+r, q+1+t-r)$, kde $|v-u| = qt+r$, přičemž $0 \leqslant r < t$.*

Nyní uveďme již zmíněné horní a dolní hranice, které Togni nalezl. Pro hodnoty $t \leqslant 10$ a jiné vybrané distanční množiny malé velikosti jsou hranice uvedeny v levé části tabulky 5. Pro velké hodnoty t jsou dolní hranice uvedeny v následující větě.

Věta 6.19 [33]. *Nechť $t, q \in \mathbb{N}$, kde $t \geqslant 2$. Potom*

$$\chi_p(G(1,t)) \leqslant \begin{cases} 89 & t = 2q+1,\ q \geqslant 35, \\ 40 & t = 2q+1,\ q \geqslant 223, \\ 179 & t = 2q,\ q \geqslant 89, \\ 81 & t = 2q,\ q \geqslant 224, \\ 29 & t = 96q \pm 1,\ q \geqslant 1, \\ 59 & t = 96q + 1 \pm 1,\ q \geqslant 1. \end{cases}$$

Další, kdo se zabýval hodnotami pakovacího chromatického čísla distančních grafů $G(1,t)$, byli Ekstein a spol., kteří v [12] vylepšili dolní a horní hranice pro $t \leqslant 10$. Porovnání nových hranic můžete vidět v pravé části tabulky 5.

D	$\chi_p \geqslant$	$\chi_p \leqslant$	perioda
$(1,2)$	8	8	54
$(1,3)$	9	9	32
$(1,4)$	11	16	320
$(1,5)$	10	12	1028
$(1,6)$	12	23	2016
$(1,7)$	10	15	640
$(1,8)$	11	25	5184
$(1,9)$	10	18	576
$(1,2,3)$	17	23	768
$(2,3)$	11	13	240
$(2,5)$	14	23	336

D	$\chi_p \geqslant$	$\chi_p \leqslant$
$(1,2)$	8	8
$(1,3)$	9	9
$(1,4)$	**14**	**15**
$(1,5)$	**12**	12
$(1,6)$	**15**	23
$(1,7)$	**14**	15
$(1,8)$	**15**	25
$(1,9)$	**13**	18

Tabulka 5: Horní a dolní odhady pakovacího chromatického čísla pro vybrané distanční grafy. V levé tabulce jsou vypsány hodnoty vyzkoumané v [33] společně s periodou barvení, které udává horní hranici. V pravé tabulce jsou uvedeny vylepšené odhady nalezeny v [12]. Upravené hodnoty jsou označeny tučně.

Dále byly určeny dolní hranice pakovacího chromatického čísla pro $t \geqslant 9$ a horní hranice pro velká t.

Věta 6.20 [12]. *Nechť $D = \{1, t\}$, kde $t \geqslant 9$. Potom $\chi_p(G(D)) \geqslant 12$.*

Věta 6.21 [12]. *Nechť $D = \{1, t\}$. Potom pro libovolné liché $t \geqslant 575$ je $\chi_p(G(D)) \leqslant 35$ a pro libovolné sudé $t \geqslant 648$ je $\chi_p(G(D)) \leqslant 56$.*

Při určování přípustnosti pakovacích barvení se často využívá metody hustot barev. Nechť H_k je konečný podgraf $G(1, t)$ indukovaný vrcholy $-k, -k+1, \ldots, k$. Pro množinu vrcholů $X \subseteq V(G(1, t))$ definujeme hustotu $\rho(X)$ jako

$$\rho(X) = \limsup_{k \to \infty} \frac{|X \cap V(H_k)|}{|V(H_k)|}.$$

Dále budeme definovat pro libovolnou barvu c hustotu $\rho(c)$ jako

$$\rho(c) = \max_f \rho(X_c),$$

kde f je pakovací obarvení grafu $G(1, t)$ a X_c je množina vrcholů $G(1, t)$, které jsou při obarvení f obarvené barvou c. Podobně lze definovat i hustotu více barev $\rho(c_1, \ldots, c_l)$ jako

$$\rho(c_1, \ldots, c_l) = \max_f \rho(X_{c_1} \cup \cdots \cup X_{c_l}).$$

Pomocí hustoty barev lze určit, jestli pro dané barvy existuje pakovací obarvení daného grafu. Tato metoda je použitelná i pro barvení obecných grafů G, což dokazuje následující lemma, které bylo uvedeno v [14].

Lemma 6.22 [14]. *Nechť G je libovolný neorientovaný graf. Pokud existuje přípustné k-obarvení grafu G, potom pro každé $1 \leqslant l \leqslant k$ platí, že*

$$\sum_{i=1}^{k} \rho(i) \geqslant \rho(1, \ldots, l) + \sum_{i=l+1}^{k} \rho(i) = 1.$$

6.2.2 Pakovací barvení distančních grafů G(k,t)

V návaznosti na články zmíněné v minulé podkapitole se Ekstein, Holub a Togni společně podíleli na studii pakovacího barvení u distančních grafů $G(k, t)$ pro $k < t$, ve které byly zobecněny výsledky studie grafů $G(1, t)$. Nejprve byly nalezeny horní a dolní odhady pakovacího chromatického čísla pro distanční grafy $G(k, t)$, kde $2 \leqslant k < t \leqslant 10$, které zde uvádíme v tabulce 6.

$k\backslash t$	3	4	5	6	7	8	9	10
2	**13**	$D(1,2)$	14-22	$D(1,3)$	15-27	$D(1,4)$	12-31	$D(1,5)$
3	-	14-19	**13**	$D(1,2)$	13-17	14-28	$D(1,3)$	13-29
4	-	-	13-22	$D(2,3)$	16-32	$D(1,2)$	15-32	$D(2,5)$
5	-	-	-	15-29	13-20	14-32	13-23	$D(1,2)$
6	-	-	-	-	15-29	$D(3,4)$	$D(2,3)$	$D(3,5)$
7	-	-	-	-	-	14-34	12-23	12-40
8	-	-	-	-	-	-	12-37	$D(4,5)$
9	-	-	-	-	-	-	-	12-42

Tabulka 6: [13] Horní a dolní odhady pakovacího chromatického čísla grafů $G(k,t)$ pro $2 \leqslant k < t \leqslant 10$. Přesné hodnoty jsou vyznačeny tučně. V případech, kdy distanční graf nebude souvislý kvůli soudělnosti k a t, je uveden distanční graf, se kterým budou vzniklé komponenty izomorfní a jehož hranice pro pakovací chromatické číslo jsou zde stejné.

Před rekapitulací ostatních výsledků připomeneme důležitý poznatek z lemmatu 4.1. Budeme-li mít distanční graf $G(k,t)$ takový, že existuje číslo $n \neq 1$, které je největším společným dělitelem k a t, potom bude tento graf složen z n komponent izomorfních s $G(\frac{k}{n}, \frac{t}{n})$. Předpokládáme tedy, že k a t jsou nesoudělná, díky čemuž bude graf $G(k,t)$ souvislý.

Následující věty udávají horní hranice pakovacího chromatického čísla v závislosti na vzájemné paritě čísel k a t. Nejprve je zkoumán případ, kdy jsou obě čísla lichá.

Věta 6.23 [13]. *Nechť k,t jsou lichá nesoudělná přirozená čísla, kde $t \geqslant 825$ a $D = \{k,t\}$. Potom $\chi_p(G(D)) \leqslant 30$.*

Tuto mez aplikovat i v případě $k = 1$, a proto dostáváme u vybraných případů vylepšení výsledků z věty 6.19. Mají-li k a t opačnou paritu, potom roste hodnota horní meze i hraniční hodnota t, pro které lze tuto mez na graf $G(k,t)$ aplikovat.

Věta 6.24 [13]. *Nechť k,t jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že k je liché a $t \geqslant 898$ je sudé. Dále nechť $D = \{k,t\}$. Potom $\chi_p(G(D)) \leqslant 56$.*

Stejná horní mez byla určena i pro případ, kdy k je sudé a t je liché. Zde je však nárok na hodnotu t, od které je tato mez aplikovatelná, ještě o něco vyšší.

Věta 6.25 [13]. *Nechť k,t jsou nesoudělná přirozená čísla taková, že k je sudé a $t \geqslant 923$ je liché. Dále nechť $D = \{k,t\}$. Potom $\chi_p(G(D)) \leqslant 56$.*

Nakonec zmíníme rozšíření poznatku z věty 6.20, díky kterému lze dolní mez pakovacího chromatického čísla grafů $G(1,t)$ pro většinu t použít i pro obecné distanční grafy $G(k,t)$.

Věta 6.26 [13]. *Nechť $D = \{k,t\}$, kde $t \geqslant 9$. Potom $\chi_p(G(D)) \geqslant 12$.*

6.3 S-pakovací barvení

U pakovacího barvení platilo, že hodnota barvy udávala, v jaké minimální vzdálenosti od sebe musí být stejně obarvené vrcholy. Nyní definujme typ obarvení zavedený v [17], kde je pro každou barvu i minimální vzdálenost určena číslem a_i. Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ je neklesající posloupnost přirozených čísel. Zobrazení $f : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ takové, že $\forall u, v \in V(G) : f(u) = i = f(v) \Rightarrow d(u, v) > a_i$ pro $i = 1, \dots, k$, nazveme S-pakovacím k-obarvením grafu G. Nejmenší hodnotu k, pro kterou existuje S-pakovací k-obarvení grafu G, nazveme S-pakovacím chromatickým číslem grafu G a budeme ji značit $\chi_S(G)$. Tento typ obarvení zobecňuje například přípustné, k-distanční a pakovací obarvení, neboť tato obarvení lze po řadě vyjádřit jako S-pakovací obarvení, kde $S = (1, 1, 1, \dots)$, $S = (k, k, k, \dots)$ a $S = (1, 2, 3, \dots)$.

Pojem S-pakovacího barvení byl zaveden v článku [17], kde byly také popsány jeho základní vlastnosti a nalezeny hodnoty $\chi_S(G)$ pro nízké hodnoty prvků a_i. Prvním důležitým poznatkem ohledně S-pakovacího barvení je, že pokud pro určité S_a je graf S_a-pakově obarvitelný, pak je i S_b-pakově obarvitelný, pokud S_b vznikne zmenšením libovolného počtu prvků v S_a.

Pozorování 6.27 [17]. *Nechť $S_a = (a_1, a_2, \dots)$ a $S_b = (b_1, b_2, \dots)$. Potom pro libovolný neorientovaný graf G platí, že pokud je $\chi_{S_a}(G) = k$ a $b_i \leqslant a_i$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$, potom $\chi_{S_b}(G) \leqslant k$.*

Díky tomuto pozorování lze dokázat poznatek z věty 6.16, kde je uvedeno, že $\chi(G) \leqslant \chi_p(G)$. Jak jsme uváděli, tak přípustné obarvení lze vyjádřit sekvencí $S_b = (1, 1, 1, \dots)$ a pakovací obarvení sekvencí $S_a = (1, 2, 3, \dots)$, a proto tato nerovnost platí. Stejně jako u předchozích typů obarvení platí i pro S-pakovací obarvení, že každý podgraf H grafu G nebude mít hodnotu $\chi_S(H)$ větší než $\chi_S(G)$.

Pozorování 6.28 [17]. *Nechť G je graf a H je jeho podgrafem. Potom $\chi_S(H) \leqslant \chi_S(G)$ pro libovolnou sekvenci S.*

V následujícím pozorování jsou sepsány některé základní poznatky o S-pakovacím chromatickém čísle, které vyplývají z elementárních vlastností grafů.

Pozorování 6.29 [17]. *Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ a G je graf řádu n. Potom*

1. $1 \leqslant \chi_S(G) \leqslant n$,
2. $\chi_S(G) = 1$ *právě tehdy, když G je diskrétní graf,*
3. $\chi_S(G) = n$ *právě tehdy, když G je souvislý a* $a_1 \geqslant \mathrm{diam}(G)$.

V další větě jsou sepsány všechny grafy, pro které je $\chi_S(G) = 2$ a vzhled sekvence S v případě, kdy tak nastává.

Věta 6.30 [17]. *Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ a G je souvislý graf. Potom*

1. *Pokud $a_1 = a_2 = 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je bipartitní.*
2. *Pokud $a_1 = 1$ a $a_2 > 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když G je hvězda.*
3. *Pokud $a_1 > 1$, potom $\chi_S(G) = 2$ právě tehdy, když $G = K_2$.*

Následující věty se týkají grafů, ve kterých vzdálenosti dvou vrcholů nejsou příliš velké. Konkrétně se zaměřují na grafy, ve kterých tato vzdálenost nepřesahuje hodnotu 2. S touto vlastností souvisí pojem *nezávislost* grafu G, který se značí $\alpha(G)$. Jedná se o číslo, jehož hodnota je rovna velikosti největší nezávislé množiny grafu G, tedy množiny vrcholů, které nejsou po dvojicích sousední. Horní hranice $\chi_S(G)$ bude v tomto případě záviset právě na nezávislosti grafu.

Věta 6.31 [17]. *Nechť $S = (1, a_2, a_3, \dots)$ a G je graf bez izolovaných vrcholů s nezávislostí $\alpha(G)$. Potom $\chi_S(G) \leqslant \alpha(G) + 1$, přičemž rovnost nastává v případě, kdy $a_2 \geqslant \operatorname{diam}(G)$.*

Klasickým případem grafů s průměrem 2 jsou úplné bipartitní grafy. U této třídy grafů lze určit hodnotu $\chi_S(G)$ pro libovolnou sekvenci S.

Věta 6.32 [17]. *Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ a $K_{m,n}$, kde $m \leqslant n$ je úplný bipartitní graf. Potom*

$$\chi_S(K_{m,n}) = \begin{cases} 2 & \text{pokud } a_1 = a_2 = 1, \\ m+1 & \text{pokud } a_1 = 1 \text{ a } a_2 > 1, \\ m+n & \text{pokud } a_1 > 1. \end{cases}$$

Podrobně zkoumaným grafem z hlediska S-pakovacího barvení je oboustranně nekonečná cesta, která se značí P_∞. Určení $\chi_S(P_\infty)$ je pro většinu sekvencí S složité, a proto jsou v mnoha případech známé pouze určité hranice. Následující věta nám dává nutnou podmínku konečnosti S-pakovacího chromatického čísla, a tedy i existence horní hranice. Je zde využita metoda hustot barev, kterou jsme zmínili na konci podkapitoly 6.1 o pakovacím barvení grafů $G(1,t)$. Jak víme, tak tuto metodu lze použít i pro obecnější barvení a díky speciální struktuře grafu P_∞ lze hodnoty hustot jednoduše vypočítat.

Věta 6.33 [17]. *Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$ a P_∞ je nekonečná cesta. Pokud $\chi_S(P_\infty) \leqslant k$, potom $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i + 1} \geqslant 1$.*

Důsledek 6.34 [17]. *Nechť* $S = (a_1, a_2, \dots)$*. Pokud* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{a_i + 1} < 1$*, potom* $\chi_S(P_\infty) = \infty$.

Pro malé hodnoty $\chi_S(P_\infty)$ lze relativně jednoduše určit, jak musí být S definováno, aby $\chi_S(P_\infty)$ dosáhlo této hodnoty. V následující větě jsou zmíněny tvary S, pro které má $\chi_S(P_\infty)$ hodnotu 2, 3 nebo 6.

Věta 6.35 [17]. *Nechť* $S = (a_1, a_2, \dots)$*. Potom*

$$\chi_S(P_\infty) = \begin{cases} 2 & \textit{pokud } a_1 = a_2 = 1, \\ 3 & \textit{pokud } (a_1, a_2, a_3) \textit{ je } (1,2,3),\ (1,3,3),\ \textit{nebo } (2,2,2), \\ 6 & \textit{pokud } S = (2,3,4,\dots). \end{cases}$$

Zaměřme se nyní na sekvence S, které jsou tvořené aritmetickou posloupností. Pro aritmetické posloupnosti s diferencí 1 známe dolní i horní odhad S-pakovacího chromatického čísla nekonečné cesty, který platí i pro $S = (1, 2, 3)$ a $S = (2, 3, 4, \dots)$ z minulé věty.

Věta 6.36 [15]. *Nechť* $S = (a, a+1, a+2, \dots)$*. Potom* $(e-1)\cdot a \leqslant \chi_S(P_\infty) \leqslant 2a+3$*.*

Důsledek 6.37 [15]. *Nechť* $S = (a, a+1, \dots, 3a+2)$*, kde* $a \in \mathbb{N}$*. Potom existuje* S*-pakovací obarvení nekonečné cesty* P_∞*.*

U aritmetických posloupností s přirozenou diferencí různou od nuly je známo, že hodnota $\chi_S(P_\infty)$ je konečná, ale přesný horní odhad zatím nebyl určen. Dolní odhad $\chi_S(P_\infty)$ závisí na velikosti diference vůči prvnímu prvku posloupnosti.

Věta 6.38 [17]. *Nechť je* S *tvořena aritmetickou posloupností. Potom je* $\chi_S(P_\infty)$ *konečné.*

Věta 6.39 [17]. *Nechť* $S = (a, a+d, a+2d, \dots)$*. Potom*

$$\chi_S(P_\infty) \geqslant \begin{cases} (e^d - 1) \cdot \frac{a-d+1}{d} & \textit{pokud } a \geqslant d, \\ \Big((a+1) \cdot e^{\frac{d}{1+1/a}} - (a-d+1)\Big) \cdot \frac{1}{d} & \textit{jinak.} \end{cases}$$

Nyní ukážeme, jaká je hodnota $\chi_S(P_\infty)$ pro S obsahující geometrickou posloupnost ve tvaru $(1, 2, 4, 8, \dots)$. Pokud je S tvořeno přímo touto nekonečnou posloupností, tak i hodnota $\chi_S(P_\infty)$ bude neomezená.

Věta 6.40 [17]. *Nechť* $S = (1, 2, 4, 8, \dots)$*. Potom* $\chi_S(P_\infty) = \infty$*.*

Díky větě 6.16 lze říci, že bude $\chi_S(P_\infty) = \infty$ pro všechna S tvořena geometrickou posloupností s přirozeným kvocientem větším než 1. Naopak pokud prvních k prvků S je rovno prvním k členů geometrické posloupnosti $(1, 2, 4, 8, \dots)$ a dalším prvkem v pořadí je znovu k-tý prvek této posloupnosti, potom bude S-pakovací chromatické číslo konečné.

Věta 6.41 [17]. *Nechť $S = (a_1, a_2, \dots)$, kde $a_i = 2^i - 1$ pro $i = 1, 2, \dots, k$ a $a_{k+1} = 2^k - 1$. Potom $\chi_S(P_\infty) = k + 1$.*

Zaměřme se nyní na S-pakovací 3-obarvení, tedy případ, kdy $S = (a_1, a_2, a_3)$. Nalezení přípustného 3-obarvení (neboli pro $S = (1, 1, 1)$) je takzvaný NP-těžký problém, tedy takový problém, na který lze převést libovolný problém řešitelný nedeterministickým algoritmem v polynomiálním čase. Je-li však a_3 dostatečně velké, potom se jeho řešení zjednodušuje. Podívejme se tedy na některé vybrané případy S-pakovacích 3-obarvení. Pro $a_1 = 2$ lze S-pakovací chromatické číslo určit jednoduše.

Věta 6.42 [17]. *Nechť G je souvislý graf. Potom G má $(2, 2, 2)$-pakovací obarvení právě tehdy, když je G buď cesta libovolné délky, nebo kružnice délky, která je dělitelná 3.*

Důsledek 6.43 [17]. *Nechť G je souvislý graf. Pokud G má (a_1, a_2, a_3)-pakovací obarvení, kde $a_1 \geqslant 2$ a $a_3 > 2$, potom má G nejvýše 5 vrcholů.*

Podívejme se nyní na případ, kdy $a_1 = 1$. Pokud mají zbylé dva prvky v sekvenci hodnotu alespoň 4, potom bude existence S-pakovacího obarvení grafu záviset na hodnotě čísla vrcholového pokrytí $\beta(G)$. Tato hodnota je rovna velikosti nejmenší množiny vrcholů v grafu takové, že alespoň jeden koncový vrchol každé hrany je v ní obsažen.

Věta 6.44 [17]. *Nechť G je souvislý graf a $4 \leqslant a_2 \leqslant a_3$. Potom G má $(1, a_2, a_3)$-pakovací obarvení právě tehdy, když je číslo vrcholového pokrytí $\beta(G) \leqslant 2$.*

Existence ostatních $(1, a_2, a_3)$-pakovacích obarvení je shrnuta v následující větě. I před ní však vysvětlíme některé použité pojmy. Multigraf je typ grafu, u kterého je povolena existence násobných hran. Podrozdělení grafu G je graf, který vznikne, pokud v G nahradíme každou jeho hranu cestou délky 2. Pokud tento proces provedeme pro všechny hrany G s výjimkou jedné, dostaneme skoro podrozdělení grafu G. Nakonec zmíníme pojem dominující vrchol, což je takový vrchol v grafu, který sousedí se všemi ostatními vrcholy.

Věta 6.45 [17]. *Nechť G je souvislý graf. Potom:*

1. *G má $(1,3,3)$-obarvení právě tehdy, když číslo vrcholového pokrytí $\beta(G) \leqslant 2$, nebo pokud G je podgrafem podrozdělení nějakého bipartitního multigrafu,*
2. *pro $a_3 \geqslant 4$ má G $(1,2,a_3)$-pakovací obarvení právě tehdy, když je G podgrafem podrozdělení nebo skoro podrozdělení nějakého bipartitního multigrafu s dominujícím vrcholem,*
3. *pro $a_3 \geqslant 4$ má G $(1,3,a_3)$-pakovací obarvení právě tehdy, když číslo vrcholového pokrytí $\beta(G) \leqslant 2$, nebo pokud G je podgraf podrozdělení nějakého bipartitního multigrafu s dominujícím vrcholem.*

Pro ostatní 3-prvkové množiny je úloha určení existence S-pakovacího barvení z hlediska výpočetní složitosti NP-těžká, stejně jako v případě $S = (1,1,1)$.

Na závěr této kapitoly se zmíníme o jedné z metod hledání přípustného S-pakovacího obarvení nekonečné cesty s malým množstvím použitých barev. Principem této metody je postupné "štěpení" existujících barev platného obarvení. Řekněme, že vybereme všechny vrcholy obarvené barvou i, o kterých víme, že jsou od sebe ve vzdálenosti alespoň $a_i + 1$. Pokud všechny tyto vrcholy pravidelně přebarvíme r novými barvy, tak bude vzdálenost vrcholů obarvených jednou z nových barev alespoň $r \cdot (a_i + 1) - 1$. Tímto procesem lze upravovat sekvenci S. Štěpením barvy hodnoty a_i na r částí tímto způsobem odpovídá v S procesu, ve kterém nahradíme hodnotu a_i pomocí r kopií hodnoty $r \cdot (a_i + 1) - 1$ a novým seřazením celé sekvence. Například, máme-li sekvenci $(1,1)$, která představuje platné S-pakovací obarvení P_∞, a jednu z těchto barev rozštěpíme na tři části, dostaneme sekvenci $(1,5,5,5)$, která také představuje platné obarvení. Takto získanou sekvenci nazýváme splinterovaná sekvence.

V článku [16], kde je tento pojem zaveden, je splinterovaná sekvence definována jako libovolná sekvence, která vznikne metodou štěpení ze sekvence (0). Ta je však pouze braná jako začátek pro štěpení a nepředstavuje žádné vrcholové obarvení. Jako další příklady zde uvádíme všechny splinterované sekvence délky nejvýše 5:

$$(1,1),\ (1,3,3),\ (1,5,5,5),\ (1,7,7,7,7),\ (1,3,7,7),\ (1,3,11,11,11),\ (1,3,7,15,15),$$

$$(1,5,5,11,11),\ (2,2,2),\ (2,2,5,5),\ (2,5,5,5,5),\ (2,2,8,8,8),\ (2,2,5,11,11),$$

$$(3,3,3,3),\ (3,3,3,7,7),\ (3,3,5,5,5),\ (4,4,4,4,4).$$

V souvislosti se štěpením sekvencí se zmíníme ještě o jednom důležitém pojmu z S-pakovacího barvení. Sekvenci $S = (a_1, \ldots, a_k)$ nazveme minimální pakovací chromatickou sekvencí (MPCS) grafu G, pokud platí, že existuje S-pakovací obarvení grafu G, ale pokud zvětšíme hodnotu libovolného členu S, tak takové obarvení existovat nebude. Může se stát, že pro určitý graf bude existovat více MPCS stejné délky. Pro některé grafy však nemusí existovat žádné. Například pro hvězdy žádná MPCS neexistuje, neboť jsou $(1, a_2)$-pakově obarvitelné pro všechna přirozená a_2.

Vztah splinterovaných sekvencí a MPCS je očividný při použití metody hustot barev. Sečteme-li hustoty všech k barev v každé splinterované sekvenci podle vzorce z věty 6.33, tak dostaneme hodnotu 1, což je mezní hodnota pro existenci S-pakovacího k-obarvení grafu P_∞. To znamená, že zvětšením hodnoty libovolné barvy dostaneme sekvenci, pro kterou již nejsme schopni najít obarvení, a proto je každá splinterovaná sekvence i MPCS.

Věta 6.46 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $S = (a_1, \dots, a_k)$ je splinterovaná sekvence představující přípustné S-pakovací k-obarvení P_∞. Potom S je MPCS grafu P_∞.*

V tomto případě opačná implikace nemusí nutně platit. Najdou se MPCS, které nelze získat procesem štěpení, a které tedy nejsou zároveň splinterované. Pokud vezmeme všechny MPCS maximální délky 5, tak zjistíme, že čtyři z nich nejsou splinterované.

Věta 6.47 [16]. *Nechť P_∞ je nekonečná cesta a $k \leqslant 5$. Potom všechny MPCS délky k jsou splinterované sekvence s výjimkou* $(2, 4, 4, 4, 6)$, $(2, 3, 4, 4, 9)$, $(2, 3, 3, 8, 8)$ a $(2, 3, 3, 4, 12)$.

7 Vlastní výsledky

Ve svém výzkumu jsem se zaměřil na S-pakovací barvení distančních grafů $G(1,t)$, $t \geqslant 2$ pomocí barev daných sekvencí $S = (1,\dots,1,2,\dots)$. Mým cílem bylo zjistit, jakými S tohoto tvaru lze daný distanční graf obarvit, dále jakou bude mít S v tomto případě kardinalitu a případně jak bude vypadat vzor použitého obarvení. Nejprve bylo nutné určit, které sekvence připadají v úvahu.

Z věty 6.3 víme, že pro grafy $G(1,t)$ existuje S-pakovací obarvení pro $S = (2,2,\dots)$ využívající 5 barev, pokud $t \equiv \pm 2 \pmod 5$, a 6 barev ve všech ostatních případech. Každé takové obarvení je dle pozorování 6.27 i $(1,\dots,1,2,\dots)$-pakovacím obarvením, a proto se stačí zaměřit na sekvence S s maximální velikostí 6. Dále je dle lemmatu 4.6 jisté, že pro každý distanční graf $G(1,t)$ existuje S-pakovací obarvení pro $S = (1,1,1)$. Zaměříme se tedy na sekvence $S = (1,1,2,2,\dots)$ a $S = (1,2,2,\dots)$. V případě, že bude t liché číslo, tak existuje dle bodu (a) v Tvrzení 4.7 S-pakovací obarvení $G(1,t)$ pro $S = (1,1)$. Cílem tedy bude najít S-pakovací obarvení grafů $G(1,t)$ s minimální počtem barev, kde $S = (1,1,2,2,\dots)$ pro sudá t a $S = (1,2,2,\dots)$ pro všechna t.

V případě $S = (1,1,2,2,\dots)$ lze jednoduše určit, že k obarvení $G = G(1,t)$, kde t je sudé, je potřeba alespoň čtyř barev, a proto $\chi_S(G) \geqslant 4$. Navíc jsem nalezl předpis vzoru obarvení, jehož délka je závislá na hodnotě t a pomocí kterého lze vytvořit vzor použitelného obarvení pro všechny zmíněné grafy G. Díky tomu lze dokázat, že $\chi_S(G) = 4$.

Věta 7.1. *Nechť $t \geqslant 2$ je sudé přirozené číslo a $G(1,t)$ je distanční graf. Dále nechť $S = (1,1,2,2,\dots)$. Potom $\chi_S(G(1,t)) = 4$ a existuje periodické S-pakovací obarvení $G(1,t)$ dané vzorem*

$$[(1,2)^{\frac{t}{2}}, 3, (1,2)^{\frac{t}{2}}, 4]$$

délky $2t+2$. Pro sudá $t \neq 2$ tato sekvence definuje i přípustné $(1,1,3,3)$-pakovací obarvení daného $G(1,t)$.

Důkaz. Nechť $G = G(1,t)$ je distanční graf a c je jeho S-pakovací obarvení, kde $S = (1,1,2,\dots)$. Nejprve dokažme, že $\chi_S(G) > 3$. Zvolme libovolný vrchol $x \in \mathbb{Z}$ a zaměřme se na kružnici $x, x-1, x-2, \dots, x-t+1, x-t, x$. Při procházení této kružnice budeme střídavě používat barvy 1 a 2 počínaje $c(x) = 1$. Protože t je sudé, tak se jedná o kružnici liché délky, a proto na této kružnici musí existovat vrchol y, pro který je $c(y) = 3$. Nutně musí platit, že $c(y-1) \neq c(y+1)$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c(y+1) = 1$ a $c(y-1) = 2$ a zaměřme se na cestu $y-1, y+t-1, y+t, y+t+1, y+1$. Nutně platí, že $c(y+t-1) = 1$ a $c(y+t+1) = 2$. Vrchol $y+t$ nelze obarvit žádnou ze 3 dosud použitých barev, a proto $\chi_S(G) \geqslant 4$.

Nyní dokážeme, že pro každý distanční graf $G(1,t)$, kde t je sudé, existuje periodické S-pakovací obarvení c využívající 4 barvy, které je dané vzorem

$$[(1,2)^{\frac{t}{2}}, 3, (1,2)^{\frac{t}{2}}, 4].$$

Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $c(0) = 1$ a $c(-1) = 4$. Dále nechť C_i je množina všech vrcholů $x \in V(G)$ takových, že $c(x) = i$. Ve výčtu prvků jednotlivých množin použijeme svislé čáry k oddělení vrcholů z různých kopií vzoru, nebude-li jasné, že dané vrcholy jsou z různých kopií. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$$\begin{aligned}
C_1 = \{&\dots, 0, 2 \dots, t-2, t+1, t+3, \dots, 2t-3, 2t-1 \mid \\
&2t+2, 2t+4, \dots, 3t, 3t+3, 3t+5, \dots, 4t-1, 4t+1 \mid 4t+4, \dots\} \\
C_2 = \{&\dots, 1, 3, \dots, t-1, t+2, t+4, \dots, 2t-2, 2t \mid \\
&2t+3, 2t+5, \dots, 3t+1, 3t+4, 3t+6, \dots, 4t, 4t+2 \mid 4t+5, \dots\} \\
C_3 = \{&\dots, t, 3t+2, 5t+4 \dots\} \\
C_4 = \{&\dots, 2t+1, 4t+3, 6t+5 \dots\}
\end{aligned}$$

Zaměříme se nyní na množinu C_1. Pro množinu C_2 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 1 \Leftrightarrow c(x+1) = 2$. Vidíme, že $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2i \pmod{2t+2} \vee x \equiv 2i + t + 1 \pmod{2t+2}, i = 0, 1, \dots, \frac{t}{2} - 1\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a - b| \in \ell \pmod{2t+2}$, kde $\ell = \{0, 2, 4, \dots, t-2\} \cup \{3, 5, 7, \dots, t-1, t+1, \dots, 2t-1\}$. Očividně $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+t+1) = 4$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv t \pmod{2t+2}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod{2t+2}$, tedy násobku $2t+2$. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože tato situace nikdy nenastane, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : d_G(a, b) \geqslant 3$. Navíc pokud by $d_G(a, b) = 3$, tak potom $|a-b| \in \{3, t-2, t+2, 2t-1, 2t+1, 3t\}$. I v tomto případě dojde ke sporu, s výjimkou případu $t = 2$, kdy $2t+2 = 3t = 6$. Proto platí $t \neq 2 \Rightarrow \forall a, b \in C_3 :\ d_G(a, b) \geqslant 4$.

Obarvení c představuje platné $(1, 1, 2, 2)$-pakovací obarvení pro všechny grafy $G(1, t)$, kde t je sudé. S výjimkou případu $t = 2$ se jedná dokonce o $(1, 1, 3, 3)$-pakovací obarvení. Pokud tedy $S = (1, 1, 2, 2, \dots)$, tak pro každý graf $G(1, t)$, kde t je sudé, existuje S-pakovací obarvení využívající 4 barvy, a proto $\chi_S(G(1, t)) \leqslant 4$. Platí tedy $\chi_S(G(1, t)) = 4$. □

Je tedy jisté, že pro všechny grafy $G(1, t)$, kde t je sudé, existuje $(1, 1, 2, 2)$-pakovací obarvení. Pro velké hodnoty t je však vzor tohoto obarvení příliš dlouhý. Dalším cílem tedy bylo najít krátké vzory, které by představovaly použitelná obarvení pro větší množství grafů $G(1, t)$. Při použití následujících vzorů délky $\leqslant 10$, z nichž byly některé odvozeny ze vzoru ve větě 7.1, lze obarvit všechny grafy $G(1, t)$, kde t je sudé a $t \not\equiv 0 \pmod{30}$.

Věta 7.2. *Mějme distanční graf $G(1,t)$, kde $t \geq 2$ a $S = (1,1,2,2)$. Potom existuje periodické S-pakovací obarvení $G(1,t)$, které je pro:*

(1) $t \equiv \pm 2 \pmod 6$ *dáno vzorem* $[1,2,3,1,2,4]$ *délky* 6,

(2) $t \equiv \pm 4 \pmod{10}$ *dáno vzorem* $[1,2,1,2,3,1,2,1,2,4]$ *délky* 10,

(3) $t \equiv \pm 2 \pmod{10}$ *dáno vzorem* $[1,2,3,1,4,2,1,3,2,4]$ *délky* 10,

Vzor (2) navíc představuje i $(1,1,3,3)$*-pakovací obarvení příslušných distančních grafů* $G(1,t)$.

Důkaz. Nechť $G = G(1,t)$ je distanční graf a c je jeho obarvení dané některým z uvedených vzorů, přičemž $c(0) = 1$ a $c(-1) = 4$. Dále nechť C_i je množina všech vrcholů $x \in V(G)$ takových, že $c(x) = i$.

(1) Nechť $t = 6n+2$ nebo $t = 6n+4$, $n \geqslant 0$. Pro $t = 2$ odpovídá obarvení c se vzorem $[1,2,3,1,2,4]$ obarvení, jehož použitelnost již byla dokázána ve větě 7.1. Předpokládejme tedy, že $t \geqslant 4$. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\dots, 0, 3, 6, 9, 12, 15, \dots\}\\
C_2 &= \{\dots, 1, 4, 7, 10, 13, 16, \dots\}\\
C_3 &= \{\dots, 2, 8, 14, 20, \dots\}\\
C_4 &= \{\dots, 5, 11, 17, 23, \dots\}
\end{aligned}
$$

Zaměříme se nyní na množinu C_1. Pro množinu C_2 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 1 \Leftrightarrow c(x+1) = 2$. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 3\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 3$, tedy násobku 3. Jelikož t je vždy sudé, tak platí $|a-b| \notin \{1,t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+3) = 4$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod 6\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 6$, tedy násobku 6. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 6n+2$ nebo $t = 6n+4$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : d_G(a,b) \geqslant 3$. Obarvení c tedy představuje $(1,1,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

(2) Nechť $t = 10n+4$ nebo $t = 10n+6$, $n \geqslant 0$. Pro $t = 4$ odpovídá obarvení c se vzorem $[1,2,1,2,3,1,2,1,2,4]$ obarvení, jehož použitelnost již byla dokázána ve větě 7.1. Předpokládejme tedy, že $t \geqslant 6$. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$C_1 = \{\dots, 0, 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17, \dots\}$
$C_2 = \{\dots, 1, 3, 6, 8, 11, 13, 16, 18, \dots\}$
$C_3 = \{\dots, 4, 14, 24, 34, \dots\}$
$C_4 = \{\dots, 9, 19, 29, 39, \dots\}$

Zaměříme se nyní na množinu C_1. Pro množinu C_2 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 1 \Leftrightarrow c(x+1) = 2$. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0, 2 \pmod 5\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{10}$, kde $\ell = \{0, 2, 3, 5, 7, 8\}$. Protože však $t = 10n + 4$ nebo $t = 10n + 6$, tak $|a - b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+5) = 4$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4 \pmod{10}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a - b| \equiv 0 \pmod{10}$, tedy násobku 10. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 10n+4$ nebo $t = 10n+6$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : d_G(a, b) \geqslant 3$. Navíc pokud by $d_G(a, b) = 3$, tak potom $|a - b| \in \{3, t-2, t+2, 2t-1, 2t+1, 3t\}$. I v tomto případě dojde ke sporu, a proto $\forall a, b \in C_3 :\ d_G(a, b) \geqslant 4$. Obarvení c tedy představuje jak $(1, 1, 2, 2)$-pakovací obarvení, tak i $(1, 1, 3, 3)$-pakovací obarvení $G(1, t)$.

(3) Nechť $t = 10n + 2$ nebo $t = 10n + 8$, $n \geqslant 0$. Pro obarvení c dané vzorem $[1, 2, 3, 1, 4, 2, 1, 3, 2, 4]$ budou množiny C_i vypadat následovně:

$C_1 = \{\dots, 0, 3, 6, 10, 13, 16, \dots\}$
$C_2 = \{\dots, 1, 5, 8, 11, 15, 18, \dots\}$
$C_3 = \{\dots, 2, 7, 12, 17, 22, 27 \dots\}$
$C_4 = \{\dots, 4, 9, 14, 19, 24, 29 \dots\}$

Zaměříme se nyní na množinu C_1. Pro množinu C_2 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 1 \Leftrightarrow c(x+5) = 2$. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0, 3, 6 \pmod{10}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{10}$, kde $\ell = \{0, 3, 4, 6, 7\}$. Protože však $t = 10n+2$ nebo $t = 10n+8$, tak $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+2) = 4$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2 \pmod 5\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 5$, tedy násobku 5. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak $|a - b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 10n+2$ nebo $t = 10n+8$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : d_G(a, b) \geqslant 3$. Obarvení c tedy představuje $(1, 1, 2, 2)$-pakovací obarvení $G(1, t)$.

□

Přesuňme se k sekvenci $S = (1, 2, 2, \dots)$. V tomto případě budeme hledat S-pakovací obarvení pro $G = G(1, t)$, přičemž nyní bereme v úvahu i lichá t. Lze jednoduše určit, že $\chi_S(G) \geqslant 5$. Navíc lze i v tomto případě najít předpisy vzorů platného obarvení, jejichž délka závisí na t a pomocí kterých lze obarvit každý graf $G(1, t)$. Proto bude platit, že $\chi(G) = 5$.

Věta 7.3. *Nechť $t \geqslant 2$ je přirozené číslo a $G(1, t)$ je distanční graf. Dále nechť $S = (1, 2, 2, \dots)$. Potom $\chi_S(G(1, t)) = 5$ a existuje periodické S-pakovací obarvení $G(1, t)$ dané vzorem*

(1) $[(1, 2, 1, 3)^n (1, 4, 1, 5)^n]$ *délky* $8n$ *pro* $t = 4n \pm 1, n \geqslant 1$,

(2) $[(1, 2, 1, 3)^n, 1, 2, 3, (1, 4, 1, 5)^n, 1, 4, 5]$ *délky* $8n + 6$ *pro* $t = 4n + 2, n \geqslant 0$,

(3) $[(1, 2, 1, 3)^{n-2}, (1, 2, 3)^3, (1, 4, 1, 5)^{n-2}, (1, 4, 5)^3]$ *délky* $8n + 2$ *pro* $t = 4n, n \geqslant 2$,

(4) $[1, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 3, 1, 4, 5]$ *délky* 20 *pro* $t = 4$.

Vzor (1) navíc definuje i přípustné $(1, 3, 3, 3, 3)$-pakovací obarvení daných grafů $G(1, t)$.

Důkaz. Nechť $G = G(1, t)$ je distanční graf a c je jeho S-pakovací obarvení, kde $S = (1, 2, 2, \dots)$. Nejprve dokažme, že $\chi_S(G) > 4$. Nechť $x \in \mathbb{Z}$ je vrchol takový, že $c(x) = 1$. Očividně tento vrchol musí existovat. Dále se zaměřme na vrcholy, které jsou v okolí vrcholu x, tedy vrcholy $x - t, x - 1, x + 1$ a $x + t$. Jelikož je každá dvojice těchto čtyř vrcholů ve vzdálenosti nejvýše 2, tak každý z nich musí dostat odlišnou barvu. Proto platí, že $\chi_S(G) \geqslant 5$.

Nyní dokážeme, že pro každý distanční graf $G(1, t)$ existuje periodické S-pakovací obarvení využívající 5 barev. V následujících případech předpokládejme, že c je obarvení $G(1, t)$ se vzorem, jehož jedna kopie začíná ve vrcholu 0. Dále nechť C_i je množina všech vrcholů $x \in V(G)$ takových, že $c(x) = i$.

Případ 1: t je liché

Nechť t je liché číslo ve tvaru $4n \pm 1$, $n \geqslant 1$. Dokážeme, že obarvení c dané vzorem

$$[(1, 2, 1, 3)^n, (1, 4, 1, 5)^n]$$

je $(1, 2, 2, 2, 2)$-pakovacím obarvením $G(1, t)$. Množiny C_i budou v tomto případě vypadat následovně:

$$C_1 = \{\dots, 0, 2, \dots, 8n - 4, 8n - 2 \mid 8n, 8n + 2, \dots, 16n - 4, 16n - 2 \mid \dots\}$$
$$C_2 = \{\dots, 1, 5, \dots, 4n - 7, 4n - 3 \mid 8n + 1, 8n + 5, \dots, 12n - 7, 12n - 3 \mid \dots\}$$
$$C_3 = \{\dots, 3, 7, \dots, 4n - 5, 4n - 1 \mid 8n + 3, 8n + 7, \dots, 12n - 5, 12n - 1 \mid \dots\}$$
$$C_4 = \{\dots, 4n+1, 4n+5, \dots, 8n-7, 8n-3 \mid 12n+1, 12n+5, \dots, 16n-7, 16n-3 \mid \dots\}$$
$$C_5 = \{\dots, 4n+3, 4n+7, \dots, 8n-5, 8n-1 \mid 12n+3, 12n+7, \dots, 16n-5, 16n-1 \mid \dots\}$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně se v C_1 nacházejí pouze sudé vrcholy a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 2$, tedy sudé číslo. Jelikož je t vždy liché číslo, tak $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů $a, b \in C_1$ není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z}: c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x+2) = 3 \Leftrightarrow c(x+4n) = 4 \Leftrightarrow c(x+4n+2) = 5$. Vidíme, že $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4i+1 \pmod{8n}, i = 0, \ldots, n-1\}$ a pro každou dvojici $a, b \in C_2$ bude rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n}$, kde $\ell = \{0, 4, 8, \ldots, 4n-8, 4n-4, 4n+4, 4n+8, \ldots, 8n-4\}$, tedy nějaký násobek 4 s výjimkou čísel $4n \pmod{8n}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 4n-1$ nebo $t = 4n+1$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : d_G(a,b) \geqslant 3$. Navíc pokud by $d_G(a,b) = 3$, potom $|a-b| \in \{3, t-2, t+2, 2t-1, 2t+1, 3t\}$. I v tomto případě dochází ke sporu, a proto $\forall a, b \in C_2 : d_G(a,b) \geqslant 4$. Obarvení c tedy představuje nejen $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení, ale i $(1,3,3,3,3)$-pakovací obarvení grafů $G(1,t)$ pro lichá t.

Případ 2: $t = 4n+2, n \geqslant 0$

Nechť t je číslo ve tvaru $4n+2$, $n \geqslant 0$. Dokážeme, že obarvení c dané vzorem

$$[(1,2,1,3)^n, 1, 2, 3, (1,4,1,5)^n, 1, 4, 5]$$

je $(1,2,2,2,2)$-pakovacím obarvením $G(1,t)$. Množiny C_i budou v tomto případě vypadat následovně:

$C_1 = \{\ldots, 0, 2, \ldots, 4n-2, 4n, 4n+3, 4n+5, \ldots, 8n+1, 8n+3 \mid 8n+6, \ldots\}$
$C_2 = \{\ldots, 1, 5, \ldots, 4n-3, 4n+1 \mid 8n+7, 8n+11, \ldots, 12n+3, 12n+7 \mid \ldots\}$
$C_3 = \{\ldots, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4n+2 \mid 8n+9, 8n+13, \ldots, 12n+5, 12n+8 \mid \ldots\}$
$C_4 = \{\ldots, 4n+4, 4n+8, \ldots, 8n, 8n+4 \mid 12n+10, 12n+14, \ldots, 16n+6, 16n+10 \mid \ldots\}$
$C_5 = \{\ldots, 4n+6, 4n+10, \ldots, 8n+2, 8n+5 \mid 12n+12, 12n+16, \ldots, 16n+8, 16n+11 \mid \ldots\}$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2i \pmod{4n+3}, i = 0, 1, \ldots, 2n\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+6}$, kde $\ell = \{0, 2, \ldots, 4n\} \cup \{3, 5, \ldots, 4n+1, 4n+3, \ldots, 8n+3\}$. Protože však $t = 4n+2$, tak $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x+4n+3) = 4$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4i+1 \pmod{8n+6}, i = 0, 1, \ldots, n\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+6}$, kde $\ell = \{0, 4, \ldots, 4n\} \cup \{4n+6, 4n+10, \ldots, 8n+2\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 4n+2$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : d_G(a,b) \geqslant 3$.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_5 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+4n+3) = 5$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4i+3$

$\pmod{8n+6}, i = 0, 1, \ldots, n-1 \vee x \equiv 4n+2 \pmod{8n+6}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+6}$, kde $\ell = \{0, 4, \ldots, 4n-4\} \cup \{3, 7, \ldots, 4n-1\} \cup \{4n+10, 4n+14, \ldots, 8n+2\} \cup \{4n+7, 4n+11, \ldots, 8n+3\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 4n+2$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : d_G(a,b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

Případ 3: $t = 4n, n \geqslant 2$

Nechť t je číslo ve tvaru $4n$, $n \geqslant 2$. Dokážeme, že obarvení c dané vzorem

$$[(1,2,1,3)^{n-2}, (1,2,3)^3, (1,4,1,5)^{n-2}, (1,4,5)^3]$$

je $(1,2,2,2,2)$-pakovacím obarvením $G(1,t)$. Množiny C_i budou v tomto případě vypadat následovně:

$$\begin{aligned}
C_1 = \{&\ldots, 0, 2, \ldots, 4n-10, 4n-8, 4n-5, 4n-2, 4n+1, 4n+3, \ldots, \\
&8n-9, 8n-7, 8n-4, 8n-1 \mid \ldots\} \\
C_2 = \{&\ldots, 1, 5, \ldots, 4n-11, 4n-7, 4n-4, 4n-1 \mid \\
&8n+3, 8n+7, \ldots, 12n-9, 12n-5, 12n-2, 12n+1 \mid \ldots\} \\
C_3 = \{&\ldots, 3, 7, \ldots, 4n-9, 4n-6, 4n-3, 4n \mid \\
&8n+5, 8n+9, \ldots, 12n-7, 12n-4, 12n-1, 12n+2 \mid \ldots\} \\
C_4 = \{&\ldots, 4n+2, 4n+6, \ldots, 8n-10, 8n-6, 8n-3, 8n \mid \\
&12n+4, 12n+8, \ldots, 16n-8, 16n-4, 16n-1, 16n+2 \mid \ldots\} \\
C_5 = \{&\ldots, 4n+4, 4n+8, \ldots, 8n-8, 8n-5, 8n-2, 8n+1 \mid \\
&12n+6, 12n+10, \ldots, 16n-6, 16n-3, 16n, 16n+3 \mid \ldots\}
\end{aligned}$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 2i \pmod{4n+1}, i = 0, 1, \ldots, 2n-4\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4n-5, 4n-2 \pmod{4n+1}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+2}$, kde $\ell = \{0, 2, \ldots, 4n-8, 4n-2, 8n-4\} \cup \{3, 5, \ldots, 4n-5, 4n+1, 4n+7, 4n+9, \ldots, 8n-1\}$. Protože však $t = 4n$, tak $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množinu C_4 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x+4n+1) = 4$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4i+1 \pmod{8n+2}, i = 0, 1, \ldots, n-2\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4n-4, 4n-1 \pmod{8n+2}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+2}$, kde $\ell = \{0, 4, \ldots, 4n-8\} \cup \{3, 6, 7, 10, 11, \ldots, 4n-10, 4n-9, 4n-6, 4n-5, 4n-2\} \cup \{4n+10, 4n+14, \ldots, 8n-2\} \cup \{4n+4, 4n+7, 4n+8, 4n+11, \ldots, 8n-8, 8n-5, 8n-4, 8n-1\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 4n$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : d_G(a,b) \geqslant 3$.

Přesuňme se k množině C_3. Pro množinu C_5 bude důkaz analogický, neboť platí, že $c(x) = 3 \Leftrightarrow c(x+4n+1) = 5$. Očividně $C_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4i+3 \pmod{8n+2}, i = 0, 1, \ldots, n-3\} \cup \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 4n-6, 4n-3, 4n \pmod{8n+2}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_3$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{8n+2}$, kde $\ell = \{0, 4, \ldots, 4n-12\} \cup \{3, 6, 7, 9, 10, 11, 13, \ldots, 4n-7, 4n-6, 4n-5, 4n-2\} \cup$

$\{4n+14, 4n+18, \dots, 8n-2\} \cup \{4n+5, 4n+8, 4n+9, 4n+11, 4n+12, 4n+13, 4n+15, \dots, 8n-7, 8n-5, 8n-4, 8n-1\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 4n$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_3 : \ d_G(a,b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

Případ 4: $t = 4$

Tento případ je uveden samostatně, neboť hodnota $t = 4$ nevyhovuje předpisu vzoru z případu 3. Dokážeme, že obarvení c dané vzorem

$$[1, 2, 1, 3, 4, 1, 5, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 5, 2, 1, 3, 1, 4, 5],$$

je $(1,2,2,2,2)$-pakovacím obarvením $G(1,t)$. Množiny C_i budou v tomto případě vypadat následovně:

$C_1 = \{\dots, 0, 2, 5, 7, 10, 12, 15, 17 \mid 20, 22, 25, 27, 30, 32, 35, 37 \mid \dots\}$
$C_2 = \{\dots, 1, 8, 14 \mid 21, 28, 34 \mid \dots\}$
$C_3 = \{\dots, 3, 9, 16 \mid 23, 29, 36 \mid \dots\}$
$C_4 = \{\dots, 4, 11, 18 \mid 24, 31, 38 \mid \dots\}$
$C_5 = \{\dots, 6, 13, 19 \mid 26, 33, 39 \mid \dots\}$

Zaměřme se na množinu C_1. Vidíme, že $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0, 2 \pmod 5\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod 5$, kde $\ell = \{0, 2, 3\}$. Očividně $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z} : \ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x-5) = 3 \Leftrightarrow c(x-10) = 4 \Leftrightarrow c(x+5) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1, 8, 14 \pmod{20}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{20}$, kde $\ell = \{0, 6, 7, 13, 14\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$. Protože však $t = 4$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : d_G(a,b) \geqslant 3$.

Pro $S = (1, 2, 2, \dots)$ jsme tedy u všech grafů $G(1,t)$ nalezli S-pakovací obarvení využívající 5 barev, a proto $\chi_S(G(1,t)) \leqslant 5$. Platí tedy $\chi_S(G(1,t)) = 5$. $\square$

Pro všechny grafy $G(1,t)$ lze tedy najít $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení. I zde však vzory při zvětšování hodnoty t dosahují velkých délek, a proto bude dalším cílem najít obarvení s kratšími vzory, které lze použít na větší množství grafů. Z věty 6.3 víme, že bude existovat 2-distanční, a tedy i $(2,2,2,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$ pro $t \equiv \pm 2 \pmod 5$. V [2] je v důkaze této věty uvedeno, že se jedná o obarvení se vzorem $[1, 2, 3, 4, 5]$. S využitím tohoto a následujících vzorů lze obarvit většinu grafů $G(1,t)$.

Věta 7.4. *Nechť $t \geqslant 2$ je přirozené číslo a $G(1,t)$ je distanční graf. Dále nechť $S = (1,2,2,2,2)$. Potom existuje periodické S-pakovací obarvení $G(1,t)$, které je pro:*

(1) $t \equiv \pm 2 \pmod 6$ *dáno vzorem* $[1,2,3,1,4,5]$,

(2) $t \equiv \pm 3 \pmod 8$ *dáno vzorem* $[1,2,1,3,1,4,1,5]$.

(3) $t \equiv \pm 2 \pmod{11}$ *dáno vzorem* $[1,2,3,1,4,5,1,2,3,4,5]$

(4) $t \equiv \pm 5 \pmod{11}$ *dáno vzorem* $[1,2,1,3,1,4,3,5,4,2,5]$

(5) $t \equiv \pm 5 \pmod{12}$ *dáno vzorem* $[1,2,3,1,2,3,1,4,5,1,4,5]$

(6) $t \equiv \pm 7 \pmod{16}$ *dáno vzorem* $[1,2,1,3,1,2,1,3,1,4,1,5,1,4,1,5]$

Vzory (2) a (6) navíc představují i $(1,3,3,3,3)$-pakovací obarvení daných grafů $G(1,t)$.

Důkaz. Nechť $G = G(1,t)$ je distanční graf a c je obarvení $G(1,t)$ se vzorem, jehož jedna kopie začíná ve vrcholu 0. Dále nechť C_i je množina všech vrcholů $x \in V(G)$ takových, že $c(x) = i$.

(1) Nechť $t = 6n+2$ nebo $t = 6n+4$, $n \geqslant 0$. Pro $t = 2$ odpovídá obarvení c se vzorem $[1,2,3,1,4,5]$ obarvení, jehož použitelnost již byla dokázána ve větě 7.3 v bodě (2). Předpokládejme tedy, že $t \geqslant 4$. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\dots,0,3,6,9,12,15,18,21,\dots\}\\
C_2 &= \{\dots,1,7,13,19,\dots\}\\
C_3 &= \{\dots,2,8,14,20,\dots\}\\
C_4 &= \{\dots,4,10,16,22,\dots\}\\
C_5 &= \{\dots,5,11,17,23,\dots\}
\end{aligned}
$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod 3\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a,b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 3$, tedy násobku 3. Jelikož $t = 6n+2$ nebo $t = 6n+4$, tak platí $|a-b| \notin \{1,t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a,b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z}:\ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x+1) = 3 \Leftrightarrow c(x+3) = 4 \Leftrightarrow c(x+4) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod 6\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a,b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 6$, tedy násobku 6. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1,2,t-1,t,t+1,2t\}$. Protože však $t = 6n+2$ nebo $t = 6n+4$, tak dochází ke sporu a $\forall a,b \in C_2:\ d_G(a,b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

(2) Nechť $t = 8n + 3$ nebo $t = 8n + 5$, $n \geqslant 0$. Pro $t = 3$ a $t = 5$ odpovídá obarvení c se vzorem $[1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5]$ obarvení, jehož použitelnost již byla dokázána ve větě 7.3 v bodě (1). Předpokládejme tedy, že $t \geqslant 11$. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\dots, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, \dots\}\\
C_2 &= \{\dots, 1, 9, 17, 25, \dots\}\\
C_3 &= \{\dots, 3, 11, 19, 27, \dots\}\\
C_4 &= \{\dots, 5, 13, 21, 29, \dots\}\\
C_5 &= \{\dots, 7, 15, 23, 31, \dots\}
\end{aligned}
$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně se v C_1 nacházejí pouze sudé vrcholy a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a - b| \equiv 0 \pmod 2$, tedy sudé číslo. Jelikož je t vždy liché číslo, tak $|a - b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů $a, b \in C_1$ není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z}:\ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x + 2) = 3 \Leftrightarrow c(x + 4) = 4 \Leftrightarrow c(x + 6) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1 \pmod 8\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a - b| \equiv 0 \pmod 8$, tedy násobku 8. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak potom $|a - b| \in \{1, 2, t - 1, t, t + 1, 2t\}$. Protože však $t = 8n + 3$ nebo $t = 8n + 5$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 :\ d_G(a, b) \geqslant 3$. Navíc pokud by $d_G(a, b) = 3$, tak potom $|a - b| \in \{3, t - 2, t + 2, 2t - 1, 2t + 1, 3t\}$. I v tomto případě dojde ke sporu, a proto $\forall a, b \in C_2 :\ d_G(a, b) \geqslant 4$. Obarvení c tedy představuje jak $(1, 2, 2, 2, 2)$-pakovací obarvení, tak i $(1, 3, 3, 3, 3)$-pakovací obarvení $G(1, t)$.

(3) Nechť $t = 11n + 2$ nebo $t = 11n + 9$, $n \geqslant 0$. Pro obarvení c dané vzorem $[1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5]$ budou množiny C_i vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{\dots, 0, 3, 6, 11, 14, 17, \dots\}\\
C_2 &= \{\dots, 1, 7, 12, 18, \dots\}\\
C_3 &= \{\dots, 2, 8, 13, 19, \dots\}\\
C_4 &= \{\dots, 4, 9, 15, 20, \dots\}\\
C_5 &= \{\dots, 5, 10, 16, 21, \dots\}
\end{aligned}
$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0, 3, 6 \pmod{11}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a - b| \in \ell \pmod{11}$, kde $\ell = \{0, 3, 5, 6, 8\}$. Jelikož $t = 11n+2$ nebo $t = 11n+9$, tak platí $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z}:\ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x + 1) = 3 \Leftrightarrow c(x + 8) = 4 \Leftrightarrow c(x + 9) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1, 7 \pmod{11}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$

je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{11}$, kde $\ell = \{0, 5, 6\}$. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 11n+2$ nebo $t = 11n+9$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : \ d_G(a, b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1, 2, 2, 2, 2)$-pakovací obarvení $G(1, t)$.

(4) Nechť $t = 11n + 5$ nebo $t = 11n + 6$, $n \geqslant 0$. Pro obarvení c dané vzorem $[1, 2, 1, 3, 1, 4, 3, 5, 4, 2, 5]$ budou množiny C_i vypadat následovně:

$C_1 = \{\dots, 0, 2, 4, 11, 13, 15, \dots\}$
$C_2 = \{\dots, 1, 9, 12, 20, \dots\}$
$C_3 = \{\dots, 3, 6, 14, 17, \dots\}$
$C_4 = \{\dots, 5, 8, 16, 19, \dots\}$
$C_5 = \{\dots, 7, 10, 18, 21, \dots\}$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0, 2, 4 \pmod{11}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a - b| \in \ell \pmod{11}$, kde $\ell = \{0, 2, 4, 7, 9\}$. Jelikož $t = 11n+5$ nebo $t = 11n+6$, tak platí $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z} : \ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x + 5) = 3 \Leftrightarrow c(x + 7) = 4 \Leftrightarrow c(x + 9) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1, 9 \pmod{11}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{11}$, kde $\ell = \{0, 3, 8\}$. Pokud by $d_G(a, b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 11n+5$ nebo $t = 11n+6$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 : \ d_G(a, b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1, 2, 2, 2, 2)$-pakovací obarvení $G(1, t)$.

(5) Nechť $t = 12n + 5$ nebo $t = 12n + 7$, $n \geqslant 0$. Pro obarvení c dané vzorem $[1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 4, 5, 1, 4, 5]$ budou množiny C_i vypadat následovně:

$C_1 = \{\dots, 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\}$
$C_2 = \{\dots, 1, 4, 13, 16, \dots\}$
$C_3 = \{\dots, 2, 5, 14, 17, \dots\}$
$C_4 = \{\dots, 7, 10, 19, 22, \dots\}$
$C_5 = \{\dots, 8, 11, 20, 23, \dots\}$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně $C_1 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{3}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a - b| \equiv 0 \pmod{3}\}$, tedy násobku 3. Jelikož $t = 12n + 5$ nebo $t = 12n + 7$, tak platí $|a - b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů a, b není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z} : \ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x + 1) = 3 \Leftrightarrow c(x + 6) = 4 \Leftrightarrow c(x + 7) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1, 4 \pmod{12}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{12}$, kde $\ell = \{0, 3, 9\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 12n+5$ nebo $t = 12n+7$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 :\ d_G(a,b) \geqslant 3$. Obarvení c proto představuje $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

(6) Nechť $t = 16n+7$ nebo $t = 16n+9$, $n \geqslant 0$. Pro $t = 7$ a $t = 9$ odpovídá obarvení c se vzorem $[1,2,1,3,1,2,1,3,1,4,1,5,1,4,1,5]$ obarvení, jehož použitelnost již byla dokázána ve větě 7.3 v bodě (1). Předpokládejme tedy, že $t \geqslant 23$. Množiny C_i budou vypadat následovně:

$$
\begin{aligned}
&C_1 = \{\dots, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\}\\
&C_2 = \{\dots, 1, 5, 17, 21, \dots\}\\
&C_3 = \{\dots, 3, 7, 19, 23, \dots\}\\
&C_4 = \{\dots, 9, 13, 25, 29, \dots\}\\
&C_5 = \{\dots, 11, 15, 27, 31, \dots\}
\end{aligned}
$$

Zaměřme se na množinu C_1. Očividně se v C_1 nacházejí pouze sudé vrcholy a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_1$ je rozdíl $|a-b| \equiv 0 \pmod 2$, tedy sudé číslo. Jelikož je $t = 16n+7$ nebo $t = 16n+9$, tak $|a-b| \notin \{1, t\}$, a proto žádná dvojice vrcholů $a, b \in C_1$ není sousední.

Přesuňme se k množině C_2. Pro množiny C_3, C_4 a C_5 bude důkaz analogický, neboť $\forall x \in \mathbb{Z} :\ c(x) = 2 \Leftrightarrow c(x+2) = 3 \Leftrightarrow c(x+8) = 4 \Leftrightarrow c(x+10) = 5$. Očividně $C_2 = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 1, 5 \pmod{16}\}$ a pro každou dvojici vrcholů $a, b \in C_2$ je rozdíl $|a-b| \in \ell \pmod{16}$, kde $\ell = \{0, 4, 12\}$. Pokud by $d_G(a,b) \leqslant 2$, tak potom $|a-b| \in \{1, 2, t-1, t, t+1, 2t\}$. Protože však $t = 16n+7$ nebo $t = 16n+9$, tak dochází ke sporu a $\forall a, b \in C_2 :\ d_G(a,b) \geqslant 3$. Navíc pokud by $d_G(a,b) = 3$, tak potom $|a-b| \in \{3, t-2, t+2, 2t-1, 2t+1, 3t\}$. I v tomto případě dojde ke sporu, a proto $\forall a, b \in C_2 :\ d_G(a,b) \geqslant 4$. Obarvení c tedy představuje jak $(1,2,2,2,2)$-pakovací obarvení, tak i $(1,3,3,3,3)$-pakovací obarvení $G(1,t)$.

□

8 Závěr

Cílem této práce bylo zrekapitulovat již známé výsledky z oblasti vrcholového barvení distančních grafů $G(D)$ a s jejich pomocí následně zkoumat S-pakovací barvení grafů $G(1,t)$ pro $S = (1,\dots,1,2,\dots)$. Konkrétně bylo snahou zjistit, pro které sekvence S existuje S-pakovací obarvení $G(1,t)$, dále pro tyto sekvence určit hodnotu S-pakovacího chromatického čísla $\chi_S(G(1,t))$ a případně i najít vzory periodických S-pakovacích obarvení. V kapitole 3 jsme přednesli problém, díky kterému byl definován pojem distančního grafu. Dále jsme v kapitole 4 shrnuli již známé výsledky z oblasti přípustného vrcholového barvení distančních grafů. V kapitole 5 jsme zkoumali hamiltonovské vlastnosti pro konečné distanční grafy a jejich podobnosti s třídou cirkulantů. V kapitole 6 jsme definovali již známé typy vrcholových barvení se speciálními podmínkami pro vzdálenosti vrcholů a uvedli známé výsledky z této problematiky pro obecné i distanční grafy. Nakonec jsme v kapitole 7 prezentovali vlastní výsledky ohledně S-pakovacího barvení distančních grafů $G(1,t)$ pro $S = (1,\dots,1,2,\dots)$.

Z předem známých výsledků bylo jisté, že pro každý distanční graf $G(1,t), t \geqslant 2$ existuje S-pakovací obarvení sekvencí $S = (1,1,1)$ a pro liché hodnoty t i sekvencí $S = (1,1)$. Byla tedy snaha určit sekvence minimální kardinality ve tvaru $S = (1,2,2,\dots)$, a pro sudá t i $S = (1,1,2,2,\dots)$, takové, aby existovalo S-pakovací obarvení $G(1,t)$. Ze základních vlastností distančních grafů lze určit, že $\chi_S(G(1,t)) = 5$, pokud $S = (1,2,2,\dots)$ a $\chi_S(G(1,t)) = 4$, pokud $S = (1,1,2,2,\dots)$ a t je sudé. Dalším úkolem bylo najít vzor periodického S-pakovacího obarvení. Zjistili jsme, že v obou případech lze najít předpisy vzorů, jejichž délka závisí na hodnotě t, pomocí kterých lze obarvit všechny uvažované distanční grafy $G(1,t)$. Protože však tyto vzory dosahují se stoupající hodnotou t vysokých délek, tak jsme chtěli najít vzory kratší délky, které by šlo použít k obarvení většího množství distančních grafů. Pro $S = (1,1,2,2)$ jsme nalezli tři vzory, pomocí nichž lze obarvit grafy $G(1,t)$, kde t je sudé a $t \not\equiv 0 \pmod{30}$. Pro $S = (1,2,2,2,2)$ jsme určili šest vzorů, pomocí nichž lze obarvit většinu distančních grafů $G(1,t)$.

Mnoho článků již bylo věnováno pakovacímu barvení distančních grafů, ale S-pakovací barvení těchto grafů ještě nebylo podrobněji zkoumáno. To může být dáno skutečností, že v této problematice existuje mnoho směrů, kudy výzkum vést. Budoucí články by se mohly zabývat nalezením zbylých vzorů pro S-pakovací barvení s $S = (1,2,2,2,2)$ nebo $S = (1,1,2,2)$ v případě $G(1,t)$, kde $t \equiv 0 \pmod{30}$. Další možností je zvýšení hodnot v S a pokračování v hledání S-pakovacích obarvení grafů $G(1,t)$, například pro $S = (2,\dots,2,3,\dots)$ nebo $S = (2,3,4,5,\dots)$. Také se nabízí hledání S-pakovacích barvení pro S použitá v tomto článku, ale pro jiné distanční grafy. Bylo by možné se zaměřit na jiné grafy s $|D| = 2$, například $G(k,t)$ pro $k \geqslant 2$, nebo zkoumat distanční grafy s distanční množinou větší kardinality, například $G(1,k,t)$ pro $k \geqslant 2, k < t$.

Reference

[1] Barajas, J.; Serra, O.; Distance graphs with maximum chromatic number. *Discrete Mathematics*, **308(8)**, (2008), 1355–1365.

[2] Benmedjdoub, B.; Bouchemakh, I.; Sopena, É.; 2-distance colorings of integer distance graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **39**, (2019), 589–603.

[3] Boesch, F.; Tindell, R.; Circulants and their connectivities. *J. Graph Theory*, **8**, (1984), 487–499.

[4] Čada R., Kaiser T., Ryjáček Z.; Diskrétní matematika. Plzeň : Západočeská univerzita, 170 s. ISBN: 80-7082-939-7, (2004).

[5] Der-Fen Liu, D.; Sutedja, A.; Chromatic number of distance graphs generated by the sets $\{2, 3, x, y\}$. *Journal of Combinatorial Optimization*, **25(4)**, (2013), 680–693 .

[6] Deuber, W., A.; Zhu, X.; The chromatic numbers of distance graphs. *Discrete Mathematics* **165/166** , (1997), 195–204.

[7] Eggleton, R.B.; New results on 3-chromatic prime distance graphs, *Axs Combinatoria*, **26B**, (1988), 153–180.

[8] Eggleton, R. B.; Erdös, P.; Skilton, D. K.; Coloring prime distance graphs. *Graphs and Combinatorics* **6**, (1990), 17–32.

[9] Eggleton, R. B.; Erdös, P.; Skilton, D. K.; Colouring the Real Line. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B **39**, (1985), 86–100.

[10] Eggleton, R. B.; Erdös, P.; Skilton, D. K.; Research Problem 77. *Discrete Mathematics*, **58**, (1986), 323.

[11] Eggleton, R. B.; Erdös, P.; Skilton, D. K.; Update information on research Problem 77. *Discrete Mathematics*, **69**, (1988), 105–106.

[12] Ekstein, J; Holub, P.; Lidický, B; Packing Chromatic Number of Distance Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **160(4-5)**, (2012), 518–524.

[13] Ekstein, J.; Holub, P.; Togni, O; The Packing Coloring of Distance Graphs $D(k, t)$, *Discrete Applied Mathematics*, **167**, (2014), 100–106.

[14] Fiala, J; Klavžar, S.; Lidický, B; The packing chromatic number of infinite product graphs. *European Journal of Combinatorics*, **30**, (2009), 1101–1113.

[15] Goddard, W.; Hedtniemi, S. M.; Hedetniemi, S. T.; Harris, J. M., Douglas, F. R.; Broadcast Chromatic Numbers of Graphs. *Ars Combinatoria*, **86**, (2008).

[16] Goddard, W.; Xu. H.; A note on S-packing colorings of lattices. *Discrete Applied Mathematics*, **166**, (2014), 255–262.

[17] Goddard, W.; Xu. H.; The S-Packing Chromatic Number of a Graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **32**, (2012), 795–806.

[18] Heuberger, C.; On hamiltonian Toeplitz graphs. *Discrete Mathematics*, **245**, (2002), 107–125.

[19] Chen, J.; Chang, G.; Huang, K.; Integral distance graphs. *J. Graph Theory*, **25**, (1997), 481–287.

[20] Kemnitz, A.; Kolberg, H.; Chromatic numbers of integer distance graphs. *Discrete Mathematics* **233**, (2001), 239–246.

[21] Kemnitz, A.; Kolberg, H.; Coloring of integer distance graphs. *Discrete Mathematics* **191**, (1998), 113–123.

[22] Kemnitz, A.; Marangio, M.; Colorings and list colorings of integer distance graphs. *Congr. Numer.*, **151**, (2001), 75–84.

[23] Kramer, F.; Kramer, H.; Un probleme de coloration des sommets d'un graphe, *C. R. Acad. Sci Paris A*, **268(7)**, 44–46.

[24] Löwenstein C.; Rautenbach, D.; Regen, F.; On Hamiltonian paths in distance graphs. *Applied Mathematics Letters*, **24**, (2011), 1075–1079.

[25] Löwenstein C.; Rautenbach, D.; Soták, R.; On Hamiltonian Paths and Cycles in Sufficiently Large Distance Graphs. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, **16**, (2014), 7–30.

[26] Martin, B.; Raimondi, F.; Chen, T.; Martin, J.; The packing chromatic number of the infinite square lattice is between 13 and 15, *Discrete Applied Mathematics*, **225**, (2017), 136–142.

[27] Matoušek, J.; Kapitoly z diskrétní matematiky. Praha: Karolinum, 2000. ISBN 80-246-0084-6.

[28] Penso, L. D.; Rautenbach, D.; Szwarcfiter, J. L.; Connectivity and diameter in distance graphs. *Networks*, **57(4)**, (2011), 310–315.

[29] Penso, L. D.; Rautenbach, D.; Szwarcfiter, J. L.; Long cycles and paths in distance graphs. *Discrete Mathematics*, **310**, (2010), 3417–3420.

[30] Ruzsa, I. Z.; Tuza, Zs.; Voigt, M.; Distance Graphs with Finite Chromatic Number. *Journal of Combinatorial Theory*, Series B **85**, (2002), 181–187 .

[31] Ryjáček, Z.; Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost 1 [online], Západočeská univerzita v Plzni, (2014), Available at: http://najada.fav.zcu.cz/ ryjacek/students/ps/TGD1.pdf

[32] Ryjáček, Z.; Teorie grafů, diskrétní optimalizace a výpočetní složitost 2 [online], Západočeská univerzita v Plzni, (2016), Available at: http://najada.fav.zcu.cz/ ryjacek/students/ps/TGD2.pdf

[33] Togni, O; On packing colorings of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **167**, (2014), 280–289.

[34] van Dal, R; Tijssen, G.; Tuza, Z.; van der Veen, J. A. A.; Zamfirescu, C.; Zamfirescu T.; Hamiltonian properties of Toeplitz graphs, *Discrete Mathematics*, **159**, (1996), 69–81.

[35] Voigt, M.; Coloring of Distance Graphs, *Ars Combinatoria*, **52**, (1999), 3–12.

[36] Voigt, M.; On the chromatic number of distance graphs, *J. Inform. Process. Cybernet. EIK*, **28** (1992), 21–28.

[37] Voigt, M.; Über die chromatische Zahl einer speziellen Klasse unendlicher Graphen, Ph.D. Thesis, Institut für Mathematik, Technische Hochschule, Ilmenau, Germany (1992).

[38] Voigt, M.; Walther, H.; Chromatic number of prime distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* **51**, (1994), 197–209.

[39] Voigt, M.; Walther, H.; On the chromatic number of special distance graphs. *Discrete Mathematics* **97**, (1991), 395–397.

[40] Walther, H.; Über eine spezielle Klasse unendlicher Graphen in: Graphentheorie II (Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990) 268–295.

[41] Yegnanarayanan, V.; Chromatic number of graphs with special distance sets. *Algebra Discrete Math.*, **17(1)**, (2014), 135–160.

[42] Yegnanarayanan, V.; Parthiban, A.; Vertex coloring of certain distance graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **86(4)**, (2013), 669–688.