FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD
ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY
V PLZNI

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

Reedova hypotéza pro vrcholové barvení grafů

2024 Karel Antonín Kalvas

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI
Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení:	**Karel Antonín KALVAS**
Osobní číslo:	**A21B0056P**
Studijní program:	**B0541A170007 Matematika a její aplikace**
Téma práce:	**Reedova hypotéza pro vrcholové barvení grafů**
Zadávající katedra:	**Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

U vrcholového barvení grafů existuje několik otevřených problémů. Jedním z nich je Reedova hypotéza z roku 1998, která dává do vztahu chromatické číslo, klikovost a maximální stupeň grafu. Tato hypotéza byla již dokázána pro speciální třídy grafů, některé z nich jsou charakterizované pomocí zakázaných podgrafů, nicméně pro obecné grafy zůstává otevřená.

1. Seznamte se s vrcholovým barvením grafů.
2. Sestudujte všechny prozatím známé výsledky týkající se Reedovy hypotézy.
3. Pokuste se zaměřit na vylepšení výsledků ve směru tříd grafů určených zakázanými podgrafy.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

- N. R. Aravind, T. Karthick, C. R. Subramanian; Bounding χ in terms of ω and Δ for some classes of graphs; Discrete Mathematics 311 (2011), 911-920;
- A. D. King, B. A. Reed, A. Vetta; An upper bound for the chromatic number of line graphs; European Journal of Combinatorics 28 (8) (2007), 2182-2187;
- B. Reed; ω, Δ and χ; Journal of Graph Theory 27 (1998), 177-212.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jan Ekstein, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2024**

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
L.S.

Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan

Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem předloženou práci vypracoval samostatně s použitím literatury, jejíž úplný seznam je uveden na konci práce.

V .... dne .... Podpis autora ....

Poděkování

Tímto bych rád poděkoval panu RNDr. Janu Eksteinovi, Ph.D. za jeho vedení, cenné rady a čas, který mi při přípravě této práce věnoval.

Abstrakt

V této práci se seznámíme s vrcholovým barvením grafů. Následně představíme Reedovu hypotézu ([15]), která dává horní odhad na chromatické číslo grafu G jako $\chi(G) \leq \lceil \frac{\omega(G)+\Delta(G)+1}{2} \rceil$. Následně shrneme doposud známé výsledky z oblasti Reedovy hypotézy a zaměříme se na výsledky které, uveřejnili Aravind a kol. v [2], kde mimo jiné ukázali, že třída $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free grafů a třída $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafů splňuje Reedovu hypotézu. Ve snaze o oslabení požadavku na počet zakázaných podgrafů v rámci vlastních výsledků uvedeme třídu grafů, která splňuje Reedovu hypotézu a rozšiřuje výše zmíněné výsledky.

Klíčová slova

Vrcholové barvení; Reedova hypotéza; chromatické číslo; klikovost; maximální stupeň; zakázané podgrafy.

Abstract

In this work, we will introduce the concept of vertex colouring of graphs. Subsequently, we will present Reed's conjecture ([15]), which provides an upper bound on the chromatic number of a graph G, expressed as $\chi(G) \leq \lceil \frac{\omega(G)+\Delta(G)+1}{2} \rceil$. Following that we will then summarize the known results in the area of Reed's conjecture and focus on the results published by Aravind et al. in [2], where they proved that the class of $\{Chair, House, Bull, K_1+C_4\}$-free graphs and the class of $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free graphs satisfy Reed's conjecture. In an attempt to weaken the requirement on the number of forbidden subgraphs within our own results, we will introduce a class of graphs that satisfies Reed's conjecture and extends the aforementioned results.

Keywords

Vertex coloring; Reed's conjecture; chromatic number; clique number; maximum degree; forbidden subgraphs.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

Teorie grafů je odvětvím matematiky, které se zaměřuje na studium grafů, tedy struktur sestávajících z vrcholů a hran. Grafy nacházejí široké uplatnění v mnoha oblastech, včetně informatiky, logistiky, biologie a sociálních věd, kde slouží jako modely pro analýzu komplexních systémů a řešení optimalizačních problémů.

V Kapitole 2 zavedeme základní pojmy a značení z oblasti teorie grafů, které je dále použité v této práci.

V Kapitole 3 se seznámíme s vrcholovým a hranovým barvením grafů a následně uvedeme základní výsledky z oblasti vrcholového barvení grafů jako je Brooksova věta ([5]) z roku 1941, která zlepšuje triviální horní odhad na minimální počet barev nutný k obarvení grafu za pomoci maximálního stupně grafu. Dále uvedeme dvě hypotézy, které tento horní odhad ještě snižují. Jednou z těchto hypotéz je Reedova hypotéza ([15]) z roku 1998, která dává horní odhad chromatického čísla grafu v řeči klikovosti grafu a maximálního stupně. Tato hypotéza je stále otevřeným problémem. Dále v Kapitole 3.1 uvedeme dosavadní výsledky z oblasti Reedovy hypotézy a následně se zaměříme na třídy grafů, které jsou dány zakázanými podgrafy a splňují Reedovu hypotézu. Jeden z výsledku v oblasti zakázaných podgrafů uveřejnil Aravind a kol. roku 2011 v [2], kde mimo jiné ukázali dvě třídy grafů, které jsou dány čtyřmi zakázanými podgrafy a splňují Reedovu hypotézu.

V Kapitole 4 navážeme na tyto třídy grafů a ve snaze o oslabení požadavků na počet zakázaných podgrafů uvedeme vlastní výsledky v podobě nové třídy grafů, která splňuje Reedovu hypotézu a zobecňuje výsledky z [2]. Na závěr shrneme obsah této práce a uvedeme podněty k dalšímu zkoumání.

Kapitola 2

Pojmy a značení

Základní pojmy teorie grafů byly přejaty z knihy R. Diestela, *Graph Theory* [7].

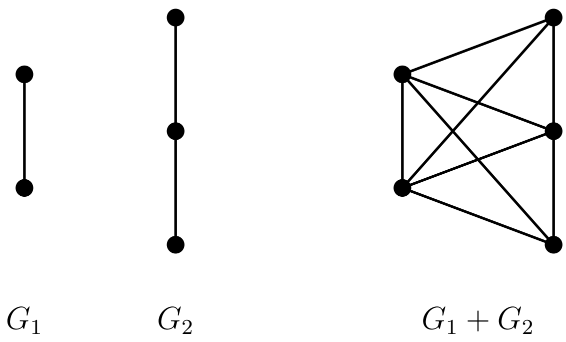
Neorientovaným grafem $G = (V(G), E(G))$ rozumíme dvojici množin, kde $V(G)$ je množinou vrcholů a $E(G)$ je množinou hran. Platí, že $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$, tedy že množina hran obsahuje neuspořádané dvouprvkové podmnožiny množiny vrcholů. Pokud $\{x, y\} \in E(G)$, pak říkáme, že x, y jsou *sousední vrcholy*, nebo, že x, y jsou spojeny hranou a píšeme $xy \in E(G)$. Vrcholy neorientovaného grafu obvykle zakreslujeme jako body a hrany jako čáry spojující dva vrcholy. Řekneme, že neorientovaný graf G má *řád* n, nebo, že G je *na* n *vrcholech*, pokud $|V(G)| = n$.

Orientovaným grafem $G = (V(G), E(G))$ je obdobně jako v neorientovaném případě dvojice množin, kde $V(G)$ je množinou vrcholů a $E(G)$ je množinou hran. Na rozdíl od neorientovaného grafu tvoří hrany grafu G uspořádané dvojice, tedy $E(G) \subset V(G) \times V(G)$. V této práci se nicméně budeme zabývat pouze neorientovanými grafy. Pojmem *graf* tedy vždy myslíme neorientovaný graf.

Okolím vrcholu x grafu G nazveme množinu $N(x) = \{y \in V(G) : xy \in E(G)\}$. *Okolím množiny* $S \subseteq V(G)$ je množina $N(S) = \{y \in V(G) \setminus S :$ existuje vrchol $x \in S$ tak, že $xy \in E(G)\}$. Pro množiny vrcholů S a T je $[S, T]$ množina všech hran xy takových, že $x \in S$ a $y \in T$. Množina hran $[S, T]$ je *úplná*, pokud je každý vrchol z S sousední s každým vrcholem z T. Pokud $S \subset V(G)$, potom řekneme, že vrchol $y \in V(G) \setminus S$ *je sousední* s S, případně *y sousedí s* S, pokud $[\{y\}, S] \neq \emptyset$. Grafy G a H jsou *vrcholově disjunktní* pokud platí, že $V(G) \cap V(H) = \emptyset$. Pokud navíc platí, že $[V(G), V(H)] = \emptyset$, potom říkáme, že grafy G a H jsou *disjunktní*.

Mějme dva vrcholově disjunktní grafy G a H. *Sjednocení* grafů G a H, značíme $G \cup H$, je graf s množinou vrcholů $V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$ a množinou hran $E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$. Sjednocením vrcholově disjunktních grafů $G_1, G_2, ..., G_n$, značíme $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$, je graf s množinou vrcholů $V(\bigcup_{i=1}^{n} G_i) = \bigcup_{i=1}^{n} V(G_i)$ a množinou hran $E(\bigcup_{i=1}^{n} G_i) = \bigcup_{i=1}^{n} E(G_i)$. Pro kladné celé číslo k, kG značí sjednocení k disjunktních grafů, každý izomorfní s G.

Pro vrcholově disjunktní grafy G a H operaci $G+H$ nazveme *join* a výsledkem je graf s množinou vrcholů $V(G+H) = V(G) \cup V(H)$ a množinou hran $E(G+H) = E(G) \cup E(H) \cup \{xy : x \in V(G), y \in V(H)\}$. V joinu grafů G a H je množina $[V(G), V(H)]$ úplná. Operace join je znázorněna na Obrázku 2.1



Obrázek 2.1: Příklad joinu grafů G_1 a G_2.

Doplněk grafu G, značíme G^C, je graf s množinou vrcholů $V(G^C) = V(G)$ a množinou hran $E(G^C) = \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$. Doplněk G^C grafu G je tedy graf, který má stejnou množinu vrcholů jako G a obsahuje právě ty hrany, které v $E(G)$ chybí.

Vzdálenost vrcholů u a v v grafu G je délka nejkratší cesty mezi vrcholy u a v v G a značíme ji jako $\mathrm{dist}(u,v)$. Pro $S \subseteq V(G)$ a $x \in V(G) \setminus S$ je vzdálenost $\mathrm{dist}(x,S) = \min_{y \in S} \mathrm{dist}(x,y)$.

Stupněm vrcholu v v grafu G rozumíme počet hran obsahujících vrchol v, značíme jej $\mathrm{d}_G(v)$. *Minimální stupeň grafu* G, značíme $\delta(G)$, je nejmenší stupeň vrcholu ze všech vrcholů grafu, tedy $\delta(G) = \min\{\mathrm{d}_G(v) : v \in V(G)\}$. *Maximální stupeň grafu* G, značíme $\Delta(G)$, je největší stupeň vrcholu ze všech vrcholů grafu, tedy $\Delta(G) = \max\{\mathrm{d}_G(v) : v \in V(G)\}$.

Nezávislost grafu G, značíme $\alpha(G)$, je celé číslo, které udává velikost největší množiny $S \subseteq V(G)$ takové, že pro všechna $x, y \in S$ je $xy \notin E(G)$.

Klikovost grafu G, značíme $\omega(G)$, je celé číslo udávající počet vrcholů největšího úplného podgrafu v G.

Mějme grafy G a H. Grafy G a H jsou *izomorfní*, píšeme $G \cong H$, pokud existuje bijekce $f : V(G) \to V(H)$, pro kterou platí, že $xy \in E(G)$ právě tehdy, když $f(x)f(y) \in E(H)$. Pokud je $V(H) \subseteq V(G)$ a $E(H) \subseteq E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$, potom graf H je *podgrafem* grafu G a píšeme $H \subseteq G$. Pokud $H \subseteq G$ a pokud $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$, potom říkáme, že H je *indukovaným podgrafem* grafu G a píšeme $H \sqsubseteq G$. Pokud $S \subseteq V(G)$, potom $[S]$ značí indukovaný podgraf grafu G takový, že $V([S]) = S$ a $E([S]) = E(G) \cap \binom{S}{2}$ a říkáme, že $[S]$ je *podgraf indukovaný množinou* S. Graf indukovaný množinou vrcholů $\{v_1, v_2, ..., v_t\}$ označme jako $[v_1, v_2, ..., v_t]$. Pro vrchol $x \in V(G)$ značí $G - x$ podgraf grafu G indukovaný množinou $V(G) \setminus \{x\}$. Pokud $\mathcal{F}$ je množina grafů, potom řekneme, že graf G je $\mathcal{F}-$free pokud neobsahuje žádný indukovaný podgraf izomorfní s jakýmkoli grafem z $\mathcal{F}$. Pokud je množina $\mathcal{F}$ jednoprvková, vynecháme v zápisu složené závorky.

V grafu G je *sledem* mezi vrcholy u a v posloupnost vrcholů $u = x_0, ..., x_k = v$ taková, že $x_i x_{i+1} \in E(G)$, pro každé $i = 0, 1, 2, .., k - 1$. Sledem v grafu G tedy rozumíme posloupnost vrcholů, přičemž každé dva po sobě jdoucí vrcholy jsou spojeny hranou. *Cesta mezi vrcholy* u a v v grafu G je sled $u = x_0, ..., x_k = v$, ve kterém se každý vrchol x_i vyskytuje pouze jednou. Číslo k je *délka* této cesty. *Tah* z vrcholu u do vrcholu v v grafu G je sled $u = x_0, ..., x_k = v$ ve kterém jsou pro $i = 0, 1, 2, ..., k - 1$ všechny hrany $x_i x_{i+1}$ různé. Tah je tedy sled, ve kterém se mohou opakovat vrcholy, ale ne hrany. Graf G je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy x a y existuje cesta mezi vrcholy x a y.

Řekneme, že graf G je *úplný*, pokud je počet hran roven počtu všech dvouprvkových podmnožin množiny vrcholů, tedy $|E(G)| = \binom{|V(G)|}{2}$. To znamená, že každý vrchol grafu G je spojen se všemi ostatními vrcholy hranou. Úplný graf na n vrcholech značíme jako K_n.

Cesta P_n na n vrcholech, je graf s množinou vrcholů $V(P_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ a množinou hran $E(P_n) = \{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}$, kde pro $i = 1, ..., n$ je $e_i = v_i v_{i+1}$. *Délkou cesty* P_n je velikost množiny $E(G)$, což je $n - 1$. Na cestu je tedy možné nahlížet buď jako na graf, nebo jako sled, ve kterém se neopakují vrcholy.

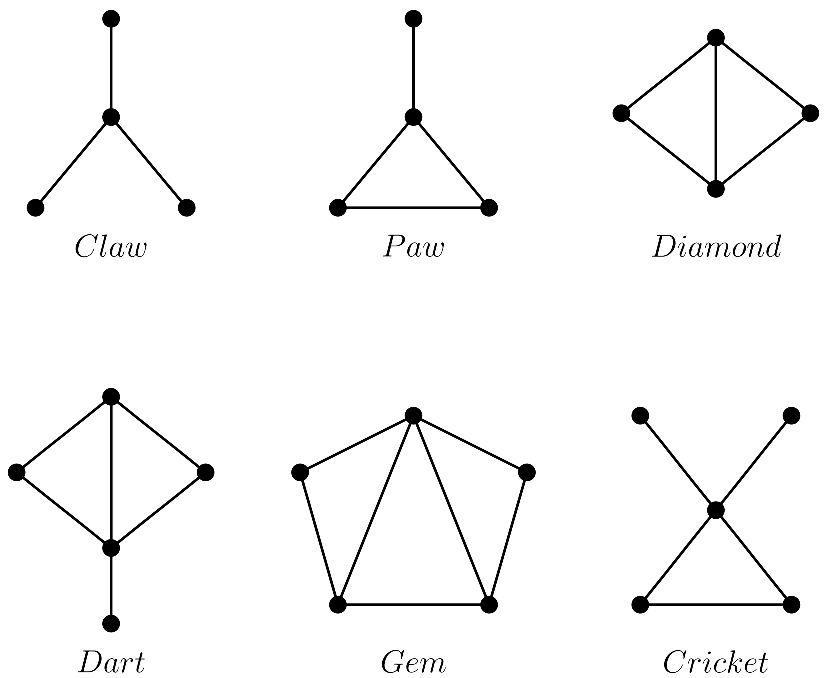
Kružnicí C_n na n vrcholech je cesta na n vrcholech, kde první a poslední vrcholy cesty jsou spojeny hranou, tj. $V(C_n) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, $E(C_n) = E(P_n) \cup v_n v_1$. *Délkou kružnice* C_n je velikost množiny $E(G)$, což je n. *Sudá kružnice* je kružnice se sudým počtem vrcholů. *Lichá kružnice* je kružnice s lichým počtem vrcholů. *Lichá díra*, někdy také *odd-hole*, v grafu G je lichá kružnice C_{2k+1}, kde $k \geq 2$.

Podstatnou část této práce tvoří grafy, které obsahují lichou díru jako indukovaný podgraf. Abychom později lépe porozuměli struktuře těchto grafů, definujme v grafu G množinu B následovně.

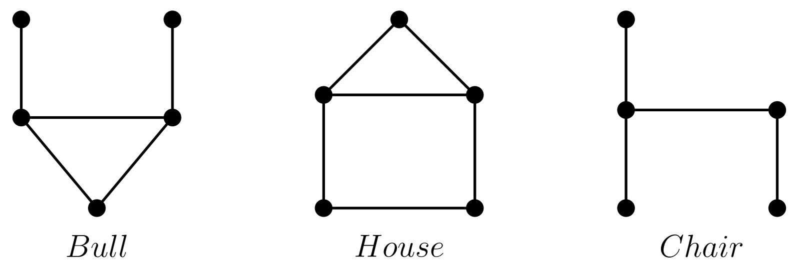
Definice 1. Nechť G je graf obsahující lichou díru C jako indukovaný podgraf. Potom množina B grafu G je množina vrcholů $x \in V(G)$ které sousedí s každým vrcholem liché díry C, tj. $[N(x) \cap V(C)] \cong C$. Pokud graf G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom množina B grafu G je prázdná.

Poznamenejme, že i v grafech které obsahují lichou díru jako indukovaný podgraf, může být množina B prázdná.

Na Obrázku 2.2 definujme grafy *Claw*, *Paw*, *Diamond*, *Dart*, *Gem* a *Cricket*.

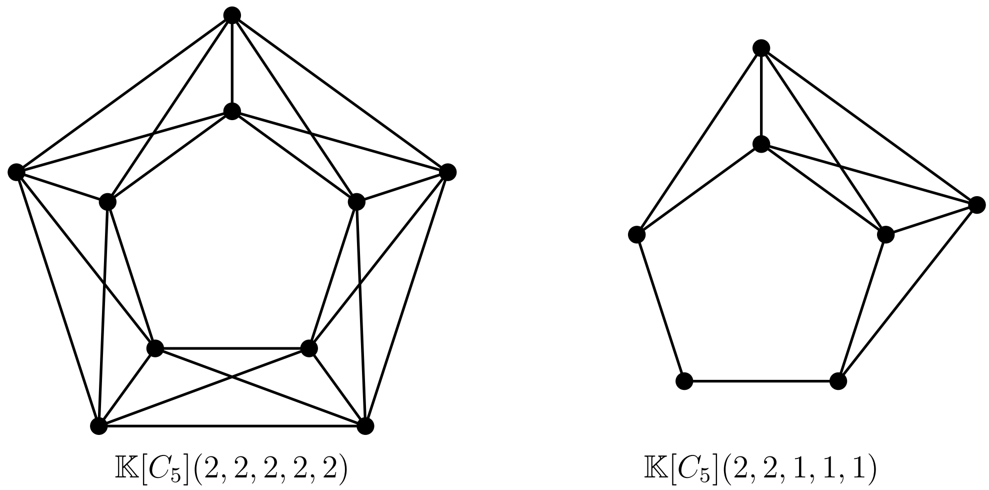


Obrázek 2.2: Grafy $Claw, Paw, Diamond, Dart, Gem$ a $Cricket$.



Obrázek 2.3: Grafy *House*, *Bull* a *Chair*

Uveďme nyní další tři speciální grafy, které sehrají důležitou roli v dalších kapitolách. *Bull* je graf na 5 vrcholech s 5 hranami, kde tři vrcholy tvoří *trojúhelník*, tj. graf K_3, a zbývající dva vrcholy jsou nesousední a každý je spojen s právě jedním vrcholem v trojúhelníku. *House* je *Bull* kde navíc vrcholy které nejsou součástí trojúhelníku, tvoří hranu. Ekvivalentně lze říci, že *House* je graf, který tvoří doplněk cesty na 5 vrcholech, tj. $House \cong P_5^C$. *Chair* je *Bull* bez jedné z hran, která obsahuje vrchol stupně 2. Grafy *House*, *Bull* a *Chair* jsou znázorněny na Obrázku 2.3.



Obrázek 2.4: Příklady úplné expanze grafu.

Nechť G je graf na n vrcholech $v_1, v_2, ..., v_n$ a nechť $H_1, H_2, ..., H_n$ jsou vrcholově disjunktní grafy. Potom *expanzi* $G(H_1, H_2, ..., H_n)$ grafu G získáme nahrazením vrcholu v_i v G grafem H_i, kde $i = 1, ..., n$ a vrcholy $x \in H_i$ a $y \in H_j$ tvoří hranu, právě tehdy, když jsou vrcholy v_i a v_j sousední v G. Pokud jsou grafy H_i úplné, hovoříme o *úplné expanzi* grafu G a píšeme $\mathbb{K}[G]$, případně $\mathbb{K}[G](m_1, m_2, ..., m_n)$, pokud $H_i \cong K_{m_i}$. Příklady úplné expanze grafu jsou znázorněny na Obrázku 2.4.

Kapitola 3

Barvení grafů

Mějme graf G. *Vrcholové barvení* grafu G je zobrazení $c : V(G) \to \{1, 2, ..., k\}$, kde k je přirozené číslo. Číslům z množiny $\{1, 2, ..., k\}$ říkáme *barvy*. *Přípustné vrcholové barvení*, případně pouze *barvení* či *obarvení*, je vrcholové barvení c takové, že pro každou hranu $xy \in E(G)$ je $c(x) \neq c(y)$, neboli pokud jsou x a y sousední vrcholy, pak každému z nich bude přiřazeno jiné číslo. Pokud přípustné vrcholové barvení c existuje pro dané k, pak říkáme, že graf G je *k-obarvitelný*. *Chromatické číslo* $\chi(G)$ je minimální číslo k, pro které je graf G k-obarvitelný. Poznamenejme, že barvení řešíme pro souvislé grafy. Pokud graf není souvislý, potom řešíme barvení pro jednotlivé komponenty.

Obdobně lze definovat *přípustné hranové barvení*, případně pouze *hranové barvení* grafu G jako zobrazení $\bar{c} : E(G) \to \{1, 2, ..., k\}$ takové, že pro všechny hrany $x, y \in E(G)$ takové, že x a y obsahují stejný vrchol, platí $\bar{c}(x) \neq \bar{c}(y)$, neboli dvěma hranám, které obsahují stejný vrchol, je přiřazena jiná barva. *Chromatický index* $\chi'(G)$ grafu G je potom minimální počet barev k nutný na hranové obarvení grafu G. V této práci se nicméně dále budeme zabývat pouze vrcholovým barvením.

Triviálním odhadem dolní meze chromatického čísla $\chi(G)$ grafu G je klikovost $\omega(G)$, tj. $\omega(G) \leq \chi(G)$. Triviálním odhadem horní meze chromatického čísla $\chi(G)$ je potom $\Delta(G) + 1$, tj. $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$. Jeden z klasických odhadů horní meze, za pomoci maximálního stupně $\Delta(G)$, dává Brooksova věta ([5]) z roku 1941, která poskytuje horní odhad $\chi(G) \leq \Delta(G)$ pro grafy, které nejsou úplné, ani liché kružnice.

Věta (Brooks, [5]). *Nechť G je graf. Pokud G není úplný graf ani lichá kružnice, potom platí $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Borodin a Kostochka ([4]) roku 1977 uvedli jednu z prvních hypotéz, která udává lepší horní odhad chromatického čísla. Hypotéza udává, že chromatické číslo $\chi(G)$ lze shora odhadnout hodnotou $\max\{\omega(G), \Delta(G) - 1\}$, pokud je $\Delta(G) \geq 9$. Požadavek na $\Delta(G) \geq 9$ je nutný, jelikož pro $\Delta(G) = 8$ lze nalézt protipříklad v podobě grafu $G \cong \mathbb{K}[C_5](3, 3, 3, 3, 3)$ pro který platí, že $\Delta(G) = 8$, $\omega(G) = 6$ a $\chi(G) = 9$.

Hypotéza (Borodin-Kostochka, [4]). *Pro každý graf G s maximálním stupněm $\Delta(G) \geq 9$ platí, že $\chi(G) \leq \max\{\omega(G), \Delta(G) - 1\}$.*

Další hypotézu na horní odhad chromatického čísla uvedl Reed ([15]) roku 1998. Tento odhad lze chápat jako horní celou část z aritmetického průměru triviální dolní meze $\omega(G)$ a triviální horní meze $\Delta(G) + 1$ v grafu G.

Hypotéza 1 (Reed, [15]). *Pro každý graf G je $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\omega(G)+\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$.*

V této práci se budeme zabývat horním odhadem z Hypotézy 1. Označme proto v grafu G tento horní odhad jako $\gamma(G) := \left\lceil \frac{\omega(G)+\Delta(G)+1}{2} \right\rceil$. Graf G potom splňuje Hypotézu 1, pokud pro něj platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

3.1 Výsledky z oblasti Reedovy hypotézy

Hypotéza 1 je stále otevřený problém. Podařilo se již dokázat, že Hypotéza 1 platí pro speciální třídy grafů. Reed ([15]) dokázal, že Hypotéza 1 platí pro grafy s $\Delta(G) = |V(G)| - 1$. Kohl a Schiermeyer ([13]) tento odhad následně zlepšili na $\Delta(G) \geq |V(G)| - 7$, případně $\Delta(G) \geq |V(G)| - \alpha(G) - 4$. Gernert a Rabern ([8]) ukázali, že Hypotéza 1 platí, pokud $\omega(G) = \Delta(G)$, $\omega(G) = \Delta(G) + 1$ nebo pokud $\chi(G) \leq \omega(G) + 2$.

Ukažme nyní, že Hypotéza 1 platí pro *rovinné grafy*, tedy grafy, které lze zakreslit do roviny tak, že se hrany grafu neprotínají.

Věta 1. *Nechť G je rovinný graf. Potom platí $\chi(G) \le \gamma(G)$.*

Důkaz: Pokud G je úplný a rovinný graf, potom $\omega(G) = \Delta(G) + 1$ a po dosazení do nerovnosti $\chi(G) \le \gamma(G)$ získáme $\chi(G) \le \lceil \omega(G) \rceil$, což platí, jelikož v úplném grafu platí, že $\chi(G) = \omega(G)$. Dále tedy uvažujme, že graf G není úplný.

Případ 1 $\omega(G) = 2$.

Potom $\Delta(G) \ge 2$, jelikož G není úplný. Po dosazení $\Delta(G) = 2$ do nerovnosti $\chi(G) \le \gamma(G)$ získáme

$$\chi(G) \le \left\lceil \frac{2+2+1}{2} \right\rceil = 3,$$

což platí na základě Grötzschovy věty ([10]) (každý rovinný, K_3-free graf je 3-obarvitelný).

Případ 2 $\omega(G) \ge 3$.

Potom platí, že $\Delta(G) \ge 3$, jelikož G není úplný. Po dosazení $\omega(G) = 3$ a $\Delta(G) = 3$ do nerovnosti $\chi(G) \le \gamma(G)$ získáme

$$\chi(G) \le \left\lceil \frac{3+3+1}{2} \right\rceil = 4,$$

což platí na základě věty o čtyřech barvách ([1]) (každý rovinný graf je 4-obarvitelný). ■

Gernert a Rabern ([9]) dokázali, že Hypotéza 1 platí jak pro rovinné grafy, tak pro toroidní grafy, tedy grafy, které lze zakreslit na torus tak, že se neprotínají hrany.

King a kol. ([12]) dokázali, že Hypotéza 1 platí pro hranové grafy. G je *hranový graf*, pokud existuje graf H takový, že graf G vznikne z H tak, že vrcholy v G odpovídají hranám v H a vrcholy x, y z G tvoří hranu právě tehdy, když mají k nim odpovídající hrany v H společný vrchol.

King a kol. ([12]) dále dokázali platnost Hypotézy 1 pro hranové grafy *multigrafů*, tedy neorientovaných grafů, kde navíc vrcholy mohou být spojeny více než jednou hranou a mohou existovat *smyčky*, tedy hrany, které spojují vrchol se sebou samým.

Věta 2 ([12])**.** *Nechť G je hranovým grafem multigrafu. Potom $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

King a Reed ([11]) později ukázali, že Hypotéza 1 platí pro kvazi-hranové grafy, jež tvoří nadtřídu hranových grafů a pro tuto práci nejsou důležité.

Rabern ([14]) ukázal, že Hypotéza 1 platí pro join dvou neprázdných grafů.

Věta A ([14])**.** *Mějme libovolné vrcholově disjunktní grafy G_1 a G_2. Pokud platí, že $G \cong G_1 + G_2$, potom $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

King ([12]) dále ukázal platnost Hypotézy 1 pro třídu $Claw$-free grafů, jež tvoří nadtřídu hranových grafů podle Beinekeho věty ([3]) (třída hranových grafů je dána devíti zakázanými podgrafy, z nichž jeden je $Claw$).

Věta 3 ([12])**.** *Nechť G je $Claw$-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Aravind a kol. ([2]) ukázali, že úplná expanze liché díry je podtřídou $Claw$-free grafů a tudíž splňuje Hypotézu 1.

Věta B ([2])**.** *Je-li G úplnou expanzí liché díry, potom $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Graf G je *perfektní*, pokud pro každý indukovaný podgraf $H \sqsubseteq G$ platí $\chi(H) = \omega(H)$. Ukažme nyní, že Hypotéza 1 platí pro třídu perfektních grafů.

Věta 4. *Nechť G je perfektní graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Důkaz: Pro každý indukovaný podgraf H grafu G platí, že $\chi(H) = \omega(H)$. Platí tedy $\chi(G) = \omega(G)$. Po dosazení do nerovnosti $\chi(G) \leq \gamma(G)$ získáme

$$\omega(G) \leq \frac{\omega(G) + \Delta(G) + 1}{2} \leq \left\lceil \frac{\omega(G) + \Delta(G) + 1}{2} \right\rceil$$

$$2\omega(G) \leq \omega(G) + \Delta(G) + 1$$

$$\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$$

což triviálně platí. ■

Aravind a kol. ([2]) dále ukázali, že perfektní grafy tvoří podtřídu *odd-hole-free* grafů (neobsahující lichou díru jako indukovaný podgraf) podle silné věty o perfektních grafech ([6]) (graf G je perfektní právě tehdy, když neobsahuje lichou díru, ani doplněk liché díry jako indukovaný podgraf). Sami pak ukázali platnost Hypotézy 1 pro odd-hole-free grafy.

Věta C ([2])**.** *Nechť G je odd-hole free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Hypotéza 1 byla dále studována pro třídy grafů, které jsou dány množinou zakázaných podgrafů. Gernert a Rabern ([8]) ukázali, že $\{C_4, 2K_2\}$-free grafy splňují Hypotézu 1.

Věta 5 ([8])**.** *Nechť G je $\{C_4, 2K_2\}$-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Seinsche ([17]) ukázal, že pokud graf G neobsahuje P_4 jako indukovaný podgraf, potom $\chi(G) = \omega(G)$. Po dosazení do $\chi(G) \leq \gamma(G)$ získáme $\omega(G) \leq \Delta(G) + 1$, což triviálně platí a třída P_4-free grafů tedy splňuje Hypotézu 1.

Věta 6 ([17])**.** *Nechť G je P_4-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Pro třídu P_5-free grafů zůstává Hypotéza 1 otevřeným problémem. Uveďme proto nyní několik výsledků z oblasti P_5-free grafů.

Uvažujme množinu $\mathcal{F} = \{Claw, Paw, Diamond, Dart, Gem, Cricket\}$. Grafy množiny $\mathcal{F}$ jsou znázorněny na Obrázku 2.2. Schiermeyer ([16]) ukázal, že pokud G je souvislý, $\{P_5, H\}$-free graf, kde $H \in \mathcal{F}$, a klikovost $\omega(G)$ splňuje určitá omezení, potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$ a graf G tedy splňuje Hypotézu 1.

Věta 7 ([16])**.** *Mějme množinu $\mathcal{F} = \{Claw, Paw, Diamond, Dart, Gem, Cricket\}$. Nechť G je souvislý $\{P_5, H\}$-free graf na n vrcholech, kde $H \in \mathcal{F}$. Pokud navíc*

$$2 \leq \omega(G) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{1}{3}},$$

potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Schiermeyer ([16]) dále ukázal, že třída $\{K_1 + (K_1 \cup C_6), K_1 + (K_1 \cup P_6^C)\}$-free grafů splňuje Hypotézu 1.

Věta 8. *Nechť G je $\{K_1 + (K_1 \cup C_6), K_1 + (K_1 \cup P_6^C)\}$-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Aravind a kol. ([2]) ukázali platnost Hypotézy 1 pro další tři třídy grafů, které jsou uvedeny v následující větě.

Věta 9. *Nechť G je graf, který náleží jedné z následujících tříd grafů.*

- $\{P_5, (P_2 \cup P_3)^C, House, Dart\}$*-free*
- $\{P_5, Kite, Bull, (K_3 \cup K_1) + K_1\}$*-free*
- $\{P_5, C_4\}$*-free*

Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Aravind a kol. [2] dále ukázali, že třída $\{Chair, House, Bull, K_1{+}C_4\}$-free grafů a třída $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafů splňují Hypotézu 1. V Kapitole 4 na tyto výsledky navážeme. Uveďme proto důkaz pro tyto třídy grafů.

Věta 10 ([2])**.** *Nechť G je $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free graf, obsahující lichou díru C jako indukovaný podgraf. Potom G je buď izomorfní s úplnou expanzí liché díry, nebo je izomorfní s $G_1 + G_2$, kde G_1 a G_2 jsou neprázdné grafy.*

Důkaz: Vrcholy liché díry označme jako $C = [v_1, v_2, v_3, ..., v_{2k+1}] \cong C_{2k+1}$, kde $k \geq 2$. Nechť $N_i = \{y \in V(G) \setminus V(C) : \mathrm{dist}(y, V(C)) = i\}$, pro $i \geq 1$. Nejprve dokážeme několik pomocných tvrzení.

Tvrzení 10.1. Pokud $x \in N_1$, potom buď x sousedí s právě třemi po sobě jdoucími vrcholy z C, nebo x sousedí s každým vrcholem z C, tedy $[N(X) \cap V(C)] \cong P_3$, nebo C_{2k+1}.

Důkaz: Nejprve předpokládejme, že $k = 2$. Sporem předpokládejme, že vrchol $x \in N_1$ sousedí s právě jedním vrcholem z C, nebo s právě dvěma vrcholy z C, které nejsou po sobě jdoucí, například v_1, nebo $\{v_1, v_3\}$. Potom $[v_1, v_2, v_4, v_5, x] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. Dále sporem předpokládejme, že $x \in N_1$ sousedí s právě dvěma po sobě jdoucími vrcholy z C, například $\{v_1, v_2\}$. Potom $[v_1, v_2, v_3, v_5, x] \cong Bull \sqsubseteq G$, což je spor. Dále sporem předpokládejme, že vrchol $x \in N_1$ sousedí s právě třemi vrcholy z C, které nejsou po sobě jdoucí, nebo s právě čtyřmi vrcholy z C, například $\{v_1, v_3, v_4\}$, nebo $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, potom $[v_1, v_2, v_4, v_5, x] \cong House \sqsubseteq G$, což je spor. Tyto spory se zakázanými podgrafy ukazují, že Tvrzení 10.1 platí, pro $k = 2$.

Nyní předpokládejme, že $k \geq 3$. Nejprve dokážeme, že $x \in N_1$ je sousední se dvěma vrcholy z C, které jsou po sobě jdoucí. Sporem předpokládejme, že vrchol $x \in N_1$ nesousedí se dvěma po sobě jdoucími vrcholy z C a bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $xv_1 \in E(G)$ a tedy $xv_2, xv_{2k+1} \notin E(G)$. Potom $xv_3, xv_{2k} \in E(G)$, jelikož pro $xv_3 \notin E(G)$ platí, že $[v_1, v_2, v_3, v_{2k+1}, x] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor a pro $xv_{2k} \notin E(G)$ platí, že $[v_1, v_2, v_{2k}, v_{2k+1}, x] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. Z předpokladu potom $xv_4, xv_{2k-1} \notin E(G)$. Potom ale $[v_1, v_3, v_4, v_{2k}, x] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. Vrchol x je tedy sousední se dvěma po sobě jdoucími vrcholy z C.

Bez újmy na obecnosti tedy předpokládejme, že $xv_1, xv_2 \in E(G)$. Zřejmě platí, že vrchol x musí sousedit buď s vrcholem v_3, nebo v_{2k+1}, protože jinak $[v_1, v_2, v_3, v_{2k+1}] \cong Bull \sqsubseteq G$. Důkaz dále rozdělíme na tři případy.

Případ 1 $xv_{2k+1} \notin E(G)$ a $xv_3 \in E(G)$.

Potom platí, že $xv_{2k} \notin E(G)$, protože v opačném případě $[v_1, v_2, v_{2k}, v_{2k+1}, x] \cong House \sqsubseteq G$. Dále platí, že $xv_j \notin E(G)$, pro všechna $j \in \{4, 5, ..., 2k-1\}$, protože v opačném případě $[v_1, v_2, v_j, v_{2k+1}, x] \cong Bull \sqsubseteq G$. Platí tedy, že $N(x) \cap V(C) = \{v_1, v_2, v_3\}$.

Případ 2 $xv_{2k+1} \in E(G)$ a $xv_3 \notin E(G)$.

Potom platí, že $xv_4 \notin E(G)$, protože jinak $[v_1, v_2, v_3, v_4, x] \cong House \sqsubseteq G$. Dále $xv_j \notin E(G)$, pro všechna $j \in \{5, 6, ..., 2k\}$, protože jinak $[v_1, v_2, v_3, v_j, x] \cong Bull \sqsubseteq G$. Platí tedy, že $N(x) \cap V(C) = \{v_{2k+1}, v_1, v_2\}$.

Případ 3 $xv_{2k+1} \in E(G)$ a $xv_3 \in E(G)$.

Potom platí, že $xv_4 \in E(G)$, protože v opačném případě $[v_2, v_3, v_4, v_{2k+1}, x] \cong Bull \sqsubseteq G$. Dále platí $xv_j \in E(G)$, pro všechna $j \in \{5, 6, ..., 2k\}$, protože jinak $[v_1, v_{j-2}, v_{j-1}, v_j, x] \cong Bull \sqsubseteq G$. Platí tedy, že $N(x) \cap V(C) = V(C)$. $\square$

S využitím Tvrzení 10.1 rozložme množinu $N_1 \cup V(C)$ následovně. Mějme $1 \leq i \leq 2k+1$, kde kvůli korektnímu indexování uvažujeme $i \mod 2k+1$. Množina A_i obsahuje vrchol v_i a takové vrcholy $x \in N_1$, jejichž sousedé na C jsou právě vrcholy v_{i-1}, v_i a v_{i+1}, tedy $A_i = \{v_i\} \cup \{x \in N_1 : N(x) \cap V(C) = \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}\}$. Pro jednoduchost označme $A = \bigcup_{i=1}^{2k+1} A_i$. Množina B je potom v souladu s Definicí 1 množina všech vrcholů $x \in N_1$, které sousedí s každým vrcholem liché díry C, tj. $[N(x) \cap V(C)] \cong C$. Potom zřejmě $V(C) \cup N_1 = A \cup B$.

Tvrzení 10.2. $[A]$ je izomorfní s úplnou expanzí C_{2k+1}, tedy $[A] \cong \mathbb{K}[C]$.

Důkaz: Důkaz provedeme v několika krocích.

Nejprve sporem předpokládejme, že graf $[A_i]$ není úplný. Potom existují vrcholy $x, y \in A_i$ takové, že $xy \notin E(G)$. Zřejmě vrcholy $x, y \notin V(C)$. Potom $[v_{i+1}, v_{i+2}, v_{i+3}, x, y] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. Graf $[A_i]$ je tedy úplný.

Dále sporem předpokládejme, že množina $[A_i, A_{i+1}]$ není úplná. Potom existují vrcholy $x \in A_i$ a $y \in A_{i+1}$ takové, že $xy \notin E(G)$. Zřejmě $x, y \notin V(C)$. Potom $[v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, x, y] \cong Bull \sqsubseteq G$, což je spor. Množina $[A_i, A_{i+1}]$ je tedy úplná.

Dále sporem předpokládejme, že pro všechna $j \neq i, i-1, i+1$ platí, že $[A_i, A_j] \neq \emptyset$. Potom existují vrcholy $x \in A_i$ a $y \in A_j$ takové, že $xy \in E(G)$. Potom ale $[v_{i-2}, v_{i-1}, v_i, y, x] \cong Bull \sqsubseteq G$, což je spor. Pro všechna $j \neq i, i-1, i+1$ tedy platí, že $[A_i, A_j] = \emptyset$.

Platí tedy, že $[A]$ je izomorfní s úplnou expanzí C_{2k+1}.

□

Tvrzení 10.3. Graf $[B]$ je úplný.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že existují vrcholy $x, y \in B$ takové, že $xy \notin E(G)$. Potom $[v_1, v_2, v_3, x, y] \cong K_1 + C_4 \sqsubseteq G$, což je spor.

□

Tvrzení 10.4. Množina $[A, B]$ je úplná.

Důkaz: Stačí dokázat, že množina $[A_i, B]$ je úplná. Sporem předpokládejme, že existují vrcholy $x \in A_i$ a $y \in B$ takové, že $xy \notin E(G)$. Potom $[v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, x, y] \cong House \sqsubseteq G$, což je spor. $\square$

Tvrzení 10.5. Pokud $x \in A_i$, potom x nesousedí s žádným vrcholem z množiny N_2, tedy $N(x) \cap N_2 = \emptyset$.

Důkaz: Předpokládejme, že vrchol $x \in A_i$ a sporem předpokládejme, že $y \in N(x) \cap N_2 \neq \emptyset$. Potom $[v_{i-1}, v_{i+1}, v_{i+2}, x, y] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. $\square$

Z Tvrzení 10.5 plyne, že pokud $B = \emptyset$, potom $N_2 = \emptyset$. Podle Tvrzení 10.2 potom platí, že G je izomorfní s úplnou expanzí C, tj. $G \cong \mathbb{K}[C]$.

Dále tedy uvažujme, že $B \neq \emptyset$.

Tvrzení 10.6. $N_j = \emptyset$, pro všechna $j \geq 3$.

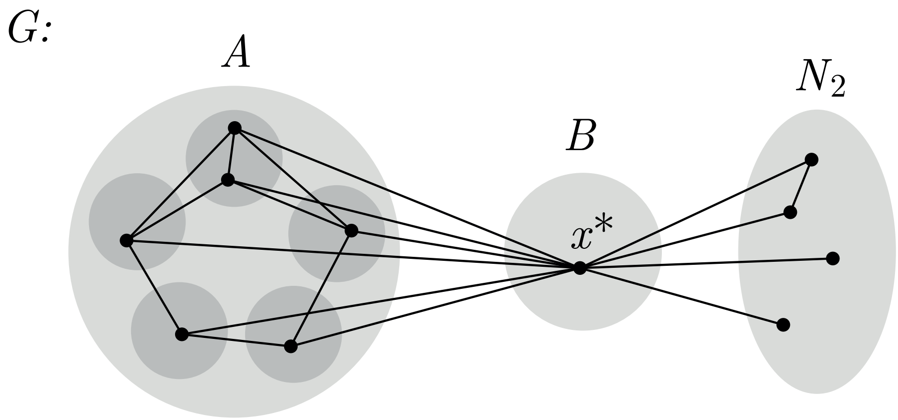
Důkaz: Stačí dokázat, že $N_3 = \emptyset$. Sporem předpokládejme, že existuje vrchol $y \in N_3$. Potom existují vrcholy $x \in N_2$ a $b \in B$ takové, že $xy, bx \in E(G)$. Potom $[v_1, v_3, b, x, y] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. $\square$

Z Tvrzení 10.6 plyne, že pokud $N_2 = \emptyset$, potom $G \cong [A] + [B]$, jelikož každý vrchol z množiny B sousedí s každým vrcholem z množiny A.

Dále tedy uvažujme, že $N_2 \neq \emptyset$.

Tvrzení 10.7. Existuje vrchol $x^* \in B$ takový, že $N_2 \subset N(x^*)$.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že takový vrchol x^* neexistuje. Potom existují vrcholy $x, x' \in B$ a $y, y' \in N_2$ takové, že $xy, x'y' \in E(G)$ a $x'y, xy' \notin E(G)$. Podle Tvrzení 10.3 platí, že $xx' \in E(G)$. Jestliže $yy' \in E(G)$, potom $[v_1, x, x', y, y'] \cong House \sqsubseteq G$, což je spor. Jestliže $yy' \notin E(G)$, potom $[v_1, x, x', y, y'] \cong Bull \sqsubseteq G$, což je spor. $\square$



Obrázek 3.1: Znázornění struktury grafu G.

Struktura grafu G je znázorněna na Obrázku 3.1, kde je ilustračně zvoleno $[A] \cong \mathbb{K}[C_5](2,1,1,1,1)$, $[B] \cong K_1$ a $[N_2] \cong K_2 \cup 2K_1$. Množiny A, B a N_2 jsou vyznačeny světle šedě, zatímco množiny A_i jsou pouze naznačeny tmavě šedou barvou.

Podle Tvrzení 10.4 vrchol x^* sousedí s každým vrcholem množiny A. Podle Tvrzení 10.3 vrchol x^* sousedí s každým vrcholem množiny B a podle Tvrzení 10.7 vrchol x^* sousedí s každým vrcholem množiny N_2. Platí tedy, že vrchol x^* sousedí s každým vrcholem grafu G a lze tedy psát, že graf $G \cong G_1 + G_2$, kde $G_1 \cong [\{x^*\}]$ a $G_2 \cong G - x^*$.

■

Věta 11 ([2])**.** *Pokud G je $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Důkaz: Pokud G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom podle Věty C platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$. Předpokládejme tedy, že G obsahuje lichou díru, jako indukovaný podgraf. Podle Věty 10 potom nastává jeden z následujících případů.

Jestliže G je izomorfní s úplnou expanzí liché díry, potom podle Věty B platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Jestliže $G \cong G_1 + G_2$, kde G_1 a G_2 jsou neprázdné grafy, potom podle Věty A platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$. ∎

Poznamenejme, že zakázaný podgraf $K_1 + C_4$ se v důkazu Věty 10 vyskytuje pouze ve Tvrzení 10.3, kde jej využíváme k dokázání toho, že množina B grafu G indukuje úplný graf. Toto pozorování nás vedlo ke snaze o odstranění požadavku na zakázaný podgraf K_1+C_4. Naše vlastní výsledky jsou potom uvedeny v Kapitole 4.

Věta 12 ([2]). *Nechť G je $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free graf, obsahující lichou díru C jako indukovaný podgraf. Potom G je buď izomorfní s úplnou expanzí liché díry, nebo je izomorfní s joinem expanze liché díry a grafem indukovaným množinou B grafu G, tj $G \cong \mathbb{K}[C] + [B]$.*

Důkaz: Důkaz je podobný jako v případě důkazu Věty 10, kde navíc platí, že $N_2 = \emptyset$, jinak pro $x \in B$ a $y \in N_2$ platí, že $[v_1, v_2, v_3, x, y] \cong Dart \sqsubseteq G$, což je spor. ∎

Věta 13 ([2]). *Pokud G je $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free graf. Potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Důkaz: Pokud G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom podle Věty C platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$. Předpokládejme tedy, že G obsahuje lichou díru, jako indukovaný podgraf. Podle Věty 12 potom nastává jeden z následujících případů.

Jestliže G je izomorfní s úplnou expanzí liché díry, potom podle Věty B platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Jestliže $G \cong \mathbb{K}[C] + [B]$, potom podle Věty A platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$. ∎

Poznamenejme, že zakázaný podgraf *Dart* v důkazu Věty 12 zaručuje, že vzdálenost vrcholů od liché díry je maximálně 1. Struktura těchto grafů se tak v porovnání s grafy splňující Větu 10 zjednodušuje.

Dále poznamenejme, že důkaz Věty 12 nezaručuje, že u grafů které tuto větu splňují množina B indukuje úplný podgraf. V Kapitole 4 nicméně ukážeme, že pokud tyto grafy obsahují dostatečně velkou lichou díru jako indukovaný podgraf, potom je množina B těchto grafů prázdná.

Kapitola 4

Vlastní výsledky

V této kapitole navážeme na výsledky z [2]. Konkrétně navážeme na platnost Hypotézy 1 pro třídu $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free grafů a využijeme faktu, že v důkazu Věty 10 se zakázaný podgraf $K_1 + C_4$ nepoužívá pro dokázání většiny tvrzení. Odstraníme tedy požadavek na zakázaný podgraf $K_1 + C_4$ a nahradíme ho slabším požadavkem. Konkrétně požadujeme, aby v $\{Chair, House, Bull\}$-free grafu G byla množina B buď prázdná, nebo aby graf $[B]$ byl izomorfní se sjednocením úplných grafů stejného řádu. Následně ukážeme, že takto definovaná třída grafů tvoří nadtřídu $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free grafů a nadtřídu $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafů s výjimkou případu kdy grafy, které jsou $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free, obsahují pouze lichou díru délky 5. Výsledky uvedené v této kapitole jsou tak zobecněním výsledků z [2].

Věta 14. *Nechť G je $\{Chair, House, Bull\} - free$ graf. Pokud množina B grafu G je buď prázdná nebo $[B]$ je sjednocením úplných grafů stejného řádu, potom platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.*

Důkaz: Pokud graf G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom množina B grafu G je prázdná a podle Věty C platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Dále tedy uvažujme, že graf G obsahuje lichou díru C jako indukovaný podgraf. Stejně jako v důkazu Věty 10 označme $C = [v_1, v_2, v_3, ..., v_{2k+1}] \cong C_{2k+1}$, kde $k \geq 2$ a definujme množiny N_i jako $N_i = \{y \in V(G) : \text{dist}(y, V(C)) = i\}$, pro $i \geq 1$. Nyní lze využít všechna tvrzení z důkazu Věty 10, kromě Tvrzení 10.3 a Tvrzení 10.7, k jejichž dokázání je zapotřebí zakázaného podgrafu $K_1 + C_4$. K dokázání ostatních tvrzení je zapotřebí pouze zakázaných podgrafů *Chair*, *House* a *Bull*.

S využitím Tvrzení 10.1 tedy lze, stejně jako v důkazu Věty 10, rozložit množinu $N_1 \cup V(C)$ na množiny A a B, kde $A = \bigcup_{i=1}^{2k+1} A_i$ a množiny A_i jsou definované jako $A_i = \{v_i\} \cup \{x \in N_1 : N(x) \cap V(C) = \{v_{i-1}, v_i, v_{i+1}\}\}$.

Z Tvrzení 10.5 plyne, že pokud $B = \emptyset$, potom $N_2 = \emptyset$. Pokud tedy $B = \emptyset$, potom podle Tvrzení 10.2 platí, že $G \cong \mathbb{K}[C]$ a podle Věty B platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Dále tedy uvažujme, že množina B není prázdná. Potom graf $[B]$ je sjednocením úplných grafů stejného řádu. Platí tedy, že graf $[B] = \bigcup_{i=1}^{n} [H_i]$, kde $[H_i] \cong K_m$ a $m, n \geq 1$. Zřejmě množiny H_i tvoří rozklad množiny B.

Z Tvrzení 10.6 plyne, že pokud $N_2 = \emptyset$, potom $G \cong \mathbb{K}[C] + [B]$ a podle Věty A platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Dále tedy uvažujme $N_2 \neq \emptyset$ a rozdělme důkaz do dvou případů.

Případ 1 $n = 1$, tedy $[B] \cong K_m$.

Nyní lze využít Tvrzení 10.7 v jehož důkazu namísto Tvrzení 10.3 využijeme skutečnost, že graf $[B]$ již je úplný. Potom existuje vrchol $x^* \in B$ takový, že $N_2 \subset N(x^*)$. Navíc podle Tvrzení 10.2 vrchol x^* sousedí s každým vrcholem množiny A a jelikož graf $[B]$ je úplný, vrchol x^* sousedí s každým vrcholem množiny B.

Platí tedy, že $G \cong G_1 + G_2$, kde $G_1 \cong [\{x^*\}]$ a $G_2 \cong G - x^*$ a podle Věty A platí, že $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

Případ 2 $n \geq 2$ a platí $[B] \cong \bigcup_{i=1}^{n} [H_i]$.

Pokud $y \in N_2$ sousedí s množinou $H_k, k \in \{1, ..., n\}$, potom sousedí s každým vrcholem této množiny. Bez újmy na obecnosti uvažujme $k = 1$. Sporem předpokládejme, že existují vrcholy $x, x' \in H_1$ takové, že $xy \in E(G)$ a $x'y \notin E(G)$. Graf $[H_1]$ je úplný a tedy $xx' \in E(G)$. Platí, že $n \geq 2$, existuje tedy vrchol $x'' \in H_2$. Pokud $x''y \in E(G)$, potom $[v_1, x, x', x'', y] \cong House \sqsubseteq G$, což je spor. Pokud $x''y \notin E(G)$, potom $[v_1, x, x', x'', y] \cong Bull \sqsubseteq G$, což je spor.

Vrchol $y \in N_2$ buď y sousedí s $H_i, i = 1, ..., n$, nebo existuje právě jedna množina $H_k, k \in \{1, ..., n\}$ se kterou vrchol y nesousedí. Bez újmy na obecnosti sporem předpokládejme, že vrchol $y \in N_2$ nesousedí s množinami H_1 a H_2. Potom existuje vrchol $x \in B \setminus (H_1 \cup H_2)$ takový, že $xy \in E(G)$. Množiny H_1 a H_2 jsou neprázdné, existují tedy vrcholy $x' \in H_1$ a $x'' \in H_2$. Potom $[v_1, x, x', x'', y] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor.

Vrchol $y \in N_2$ tedy buď sousedí s každým vrcholem množiny B, tj. $N(y) \cap B = B$, nebo existuje právě jedna množina H_k, $k \in \{1, ..., n\}$, taková, že vrchol y sousedí s každým vrcholem množiny B, kromě vrcholů množiny H_k, tj. $N(y) \cap B = B \setminus H_k$.

Množinu N_2 tedy lze rozložit do následujících podmnožin. Množina M_0 obsahuje všechny vrcholy $y \in N_2$, které sousedí s každým vrcholem z množiny B, tj. $N(y) \cap B = B$ a pro $i = 1, ..., n$ definujme M_i jako množinu všech vrcholů $y \in N_2$ takových, že y nesousedí právě s množinou H_i, tj. $(N(y) \cap H_i) = B \setminus H_i$. Zřejmě $N_2 = \bigcup_{i=0}^{n} M_i$.

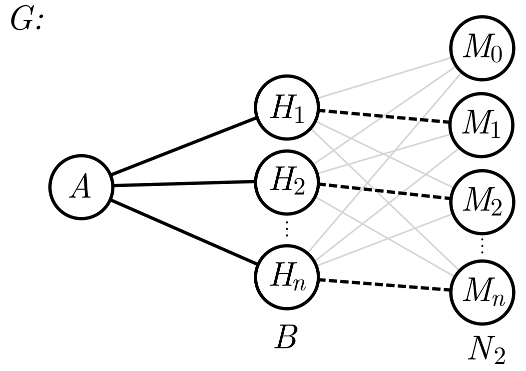
Nyní ukážeme, že $[M_i]$,$i = 1, ..., n$, jsou úplné grafy. Bez újmy na obecnosti sporem předpokládejme, že graf $[M_1]$ není úplný. Potom existují vrcholy $y, y' \in M_1$ takové, že $yy' \notin E(G)$. Zvolme nyní libovolný vrchol $x' \in H_1$. Z definice M_1 plyne, že $x'y, x'y' \notin E(G)$. Jelikož $n \geq 2$, existuje vrchol $x \in H_2$ takový, že $xy, xy' \in E(G)$. Potom $[v_1, x, x', y, y'] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor. Poznamenejme, že graf $[M_0]$ nemusí být úplný.

Dále ukážeme, že pro všechna $i, j = 0, ..., n$, $i \neq j$, jsou grafy $[M_i]$ a $[M_j]$ disjunktní.

Nejprve ukážeme, že pro $i = 1, ..., n$ jsou grafy $[M_0]$ a $[M_i]$ disjunktní. Bez újmy na obecnosti sporem předpokládejme, že grafy $[M_0]$ a $[M_1]$ nejsou disjunktní. Potom existují vrcholy $y \in M_1$ a $y' \in M_0$ takové, že $yy' \in E(G)$. Zvolme nyní libovolný vrchol $x \in H_1$. Z definice množiny M_1 plyne, že $xy \notin E(G)$. Z definice množiny M_0 plyne, že $xy' \in E(G)$. Potom $[v_1, v_3, x, y, y'] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor.

Zbývá ukázat, že pro všechna $i, j = 1, ..., n$, $i \neq j$, jsou grafy $[M_i]$ a $[M_j]$ disjunktní. Bez újmy na obecnosti sporem předpokládejme, že grafy $[M_1]$ a $[M_2]$ nejsou disjunktní. Potom existují vrcholy $y \in M_1$

a $y' \in M_2$ takové, že $yy' \in E(G)$. Zvolme libovolný vrchol $x \in H_1$. Z definice množiny M_1 plyne, že $xy \notin E(G)$. Z definice M_2 plyne, že $xy' \in E(G)$. Potom $[v_1, v_3, x, y, y'] \cong Chair \sqsubseteq G$, což je spor.



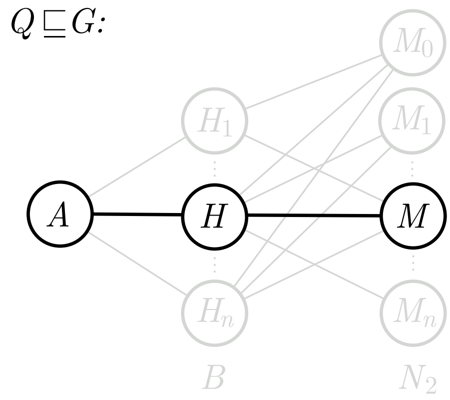
Obrázek 4.1: Znázornění struktury grafu G.

Platí tedy, že $[N_2] = \bigcup_{i=0}^{n}[M_i]$, kde $[M_i]$, $i = 1, ..., n$ jsou úplné grafy, které obecně mohou mít různý počet vrcholů. Struktura grafu G je znázorněna na Obrázku 4.1, kde plné čáry spojující množiny značí, že každý vrchol z jedné množiny sousedí s každým vrcholem z druhé množiny a čárkované čáry slouží ke zdůraznění toho, že vrcholy množin spolu nesousedí.

Nechť M je taková množina M_i, pro kterou platí, že graf indukovaný touto množinou má největší chromatické číslo ze všech grafů $[M_i]$, tj.

$$\chi([M]) \geq \chi([M_i]), i = 0, ..., n.$$

Dále zvolme množinu H následovně. Pokud $M = M_0$, potom H lze zvolit jako libovolnou množinu H_i, $i = 1, ..., n$. Pokud $M = M_k$, kde $k \in \{1, ..., n\}$, potom zvolme $H = H_l$, kde $l \in \{1, ..., n\}, l \neq k$. Připomeňme, že pro takto zvolené množiny M a H potom platí, že množina $[H, M]$ je úplná. Dále definujme indukovaný podgraf Q grafu G jako $Q \cong [A \cup H \cup M]$.



Obrázek 4.2: Znázornění struktury podgrafu Q grafu G.

Struktura grafu Q je znázorněna na Obrázku 4.2, kde plné čáry spojující množiny značí, že každý vrchol z jedné množiny sousedí s každým vrcholem z druhé množiny.

Nyní ukážeme, že $\chi(Q) = \chi(G)$. Označme $t := \max\{\chi([A]), \chi([M])\}$ a obarvěme graf Q následovně. Minimální počet barev nutný na obarvení $[A \cup M]$ je t, jelikož $[A, M] = \emptyset$. Na obarvení $[A]$ a $[M]$ tedy lze použít stejné barvy. Minimální počet barev nutný na obarvení $[H]$ je m, jelikož $[H] \cong K_m$. Barvy použité na obarvení $[H]$ jsou různé od barev použitých na $[A \cup M]$, jelikož každý vrchol z H sousedí s každým vrcholem z A a M. Platí tedy $\chi(Q) = t + m$. Rozšiřme nyní toto obarvení na celé G. Na obarvení celého $[B]$ lze použít stejné barvy jako na obarvení $[H]$, jelikož $[B]$ je sjednocením úplných grafů $[H_i], i = 1, ..., n$ a na každý ze zbývajících grafů $[H_i]$ tak lze použít stejné barvy jako na $[H]$. Na obarvení $[N_2]$ lze použít stejné barvy jako na obarvení $[M]$, jelikož $[N_2] = \bigcup_{i=0}^{n} [M_i]$ a $\chi([M_i]) \leq \chi([M]), i = 0, ..., n$. Platí tedy $\chi(G) = \chi(Q)$.

Množina $[H, A \cup M]$ je úplná, platí tedy, že $Q \cong [A \cup M] + [H]$ a podle Věty A, $\chi(Q) \leq \gamma(Q)$.

Jelikož $Q \sqsubseteq G$ tak platí, že $\Delta(Q) \leq \Delta(G)$ a $\omega(Q) \leq \omega(G)$. Potom

$$\left\lceil \frac{(\omega(Q) + \Delta(Q) + 1)}{2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{(\omega(G) + \Delta(G) + 1)}{2} \right\rceil$$

a tedy $\gamma(Q) \leq \gamma(G)$. Celkem tedy platí, že

$$\chi(G) = \chi(Q) \leq \gamma(Q) \leq \gamma(G)$$

a tedy $\chi(G) \leq \gamma(G)$.

■

V důkazu Věty 15 ukážeme, že třída grafů splňující Větu 14 je nadtřídou grafů které splňují Větu 11. Dále v důkazu Věty 16 ukážeme, že až na případ kdy $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafy obsahují pouze lichou díru C_5 jako indukovaný podgraf, je třída grafů splňující Větu 14 rovněž nadtřídou grafů které splňují Větu 11 a výsledky uvedené v této kapitole tak zobecňují výsledky uvedené v [2].

Věta 15. *Každý $\{Chair, House, Bull, K_1{+}C_4\}$-free graf je $\{Chair, House, Bull\}$-free graf, jehož množina B je buď prázdná nebo $[B]$ je sjednocením úplných grafů stejného řádu.*

Důkaz: Nechť G je $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free graf. Pokud G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom množina B grafu G je prázdná a G je $\{Chair, House, Bull\}$-free.

Dále tedy uvažujme, že G obsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf. Pokud množina B grafu G je prázdná, potom stejně jako v předchozím případě G je $\{Chair, House, Bull\}$-free. Pokud množina B grafu G není prázdná, potom podle důkazu Tvrzení 10.3 platí, že $[B]$ je úplný graf, což je speciální případ toho, že $[B]$ je sjednocením úplných grafů stejného řádu a G je $\{Chair, House, Bull\}$-free. ■

Věta 16. *Každý* $\{Chair, House, Bull, Dart\}$*-free graf, který neobsahuje* C_5 *jako indukovaný podgraf je* $\{Chair, House, Bull\}$*-free graf jehož množina* B *je prázdná.*

Důkaz: Nechť G je $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free graf, který neobsahuje lichou díru C_5 jako indukovaný podgraf. Pokud G neobsahuje lichou díru jako indukovaný podgraf, potom je množina B grafu G prázdná a graf G je $\{Chair, House, Bull\}$-free.

Pokud G obsahuje lichou díru C jako indukovaný podgraf, potom je tato lichá díra délky alespoň 7, tj. $C \cong C_{2k+1}$, kde $k \geq 3$. Dále označme $C = [v_1, v_2, ..., v_{2k+1}]$. Nejprve předpokládejme, že množina B grafu G není prázdná. Existuje tedy vrchol $x \in B$. Potom ale $[v_1, v_2, v_3, v_5, x] \cong Dart \sqsubseteq G$, což je spor. Množina B grafu G je tedy prázdná a G je $\{Chair, House, Bull\}$-free. ■

Poznamenejme, že u třídy $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafů, které obsahují C_5 jako indukovaný podgraf obecně neplatí, že pokud je množina B neprázdná, potom $[B]$ je sjednocení úplných grafů stejného řádu. Příkladem je graf $C_5 + P_3$, který je $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free ale jeho množina B indukuje cestu P_3.

Kapitola 5

Závěr

V této práci jsme nejprve uvedli základní pojmy z oblasti teorie grafů, které jsou použité v této práci a přiblížili jsme problematiku vrcholového barvení grafů. Dále jsme uvedli základní výsledky z oblasti barvení grafů a uvedli jsme dvě hypotézy, které dávají horní odhad na chromatické číslo grafu.

Jednou z těchto hypotéz je Reedova hypotéza ([15]), pro níž jsme v Kapitole 3.1 uvedli doposud známé výsledky. Zejména jsme se zaměřili na třídy grafů, které jsou dány zakázanými podgrafy a splňují Reedovu hypotézu. Jeden z těchto výsledků uvedl Aravind a kol. v [2], kde ukázali platnost Reedovy hypotézy pro třídu $\{Chair, House, Bull, K_1 + C_4\}$-free grafů a třídu $\{Chair, House, Bull, Dart\}$-free grafů. Za účelem oslabení požadavku na počet zakázaných podgrafů jsme v Kapitole 4 ukázali, že třída $\{Chair, House, Bull\}$-free grafů, jejichž množina B je buď prázdná nebo $[B]$ je sjednocením úplných grafů stejného řádu splňuje Reedovu hypotézu a navíc tato třída grafů zobecňuje výsledky z [2].

Podnětem k dalšímu zkoumání by mohlo být další oslabení požadavku na množinu B v $\{Chair, House, Bull\}$-free grafech například tak, že $[B]$ je sjednocením úplných grafů, které mohou mít různý počet vrcholů, případně $[B]$ je pouze souvislý graf. Dokázání těchto oslabení by bylo užitečné ve snaze o dokázání platnosti Reedovy hypotézy pro třídu $\{Chair, House, Bull\}$-free grafů. Dalším podnětem by mohla být snaha o zobecnění výsledků uvedených v [2] z oblasti grafů, kde P_5 je jedním ze zakázaných podgrafů. Tyto poznatky by mohly vést k dokázání Reedovy hypotézy pro třídu P_5-free grafů.

Literatura

[1] K. Appel, W. Haken, and J. Koch. Every planar map is four colorable. part ii: Reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21(3):491–567, 1977.

[2] N.R. Aravind, T. Karthick, and C.R. Subramanian. Bounding χ in terms of ω and Δ for some classes of graphs. *Discrete Mathematics*, 311(12):911–920, 2011.

[3] L. W. Beineke. Characterizations of derived graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 9(2):129–135, 1970.

[4] O.V. Borodin and A.V. Kostochka. On an upper bound of a graph's chromatic number, depending on the graph's degree and density. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 23(2):247–250, 1977.

[5] R. L. Brooks. On colouring the nodes of a network. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 37(2):194–197, 1941.

[6] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. The strong perfect graph theorem. *Annals of Mathematics*, 164(1):51–229, 2006.

[7] R. Diestel. *Graph Theory.* Electronic library of mathematics. Springer, 2005.

[8] D. Gernert and L. Rabern. A knowledge-based system for graph theory, demonstrated by partial proofs for graph-colouring problems. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem*, 58(2):445–460, 2007.

[9] D. Gernet and L. Rabern. A computerized system for graph theory, illustrated by partial proofs for graph-coloring problems. *Graph Theory Notes of New York LV*, pages 14–24, 2008.

[10] H. Grötzsch. Ein dreifarbensatz fur dreikreisfreie netze auf der kugel. *Wiss. Z. Martin Luther Univ. Halle-Wittenberg, Math. Nat. Reihe*, 8:109–120, 1959.

[11] A.D. King and B.A. Reed. Bounding χ in terms of ω and δ for quasi-line graphs. *Journal of Graph Theory*, 59(3):215–228, 2008.

[12] A.D. King, B.A. Reed, and A. Vetta. An upper bound for the chromatic number of line graphs. *European Journal of Combinatorics*, 28(8):2182–2187, 2007. EuroComb '05 - Combinatorics, Graph Theory and Applications.

[13] A. Kohl and I. Schiermeyer. Some results on reed's conjecture about ω, Δ, and χ with respect to α. *Discrete Mathematics*, 310(9):1429–1438, 2010. Cycles and Colourings 2008.

[14] L. Rabern. A note on reed's conjecture. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 22(2):820–827, 2008.

[15] B. Reed. ω, Δ, and χ. *Journal of Graph Theory*, 27(4):177–212, 1998.

[16] I. Schiermeyer. Chromatic number of P_5-free graphs: Reed's conjecture. *Discrete Mathematics*, 339(7):1940–1943, 2016. 7th Cracow Conference on Graph Theory, Rytro 2014.

[17] D. Seinsche. On a property of the class of n-colorable graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 16(2):191–193, 1974.