



Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd

Hamiltonovské vlastnosti v iterovaných hranových grafech

Bakalářská práce

Autor: Zuzana Kulhánková
Vedoucí práce: RNDr. Jan Ekstein, Ph.D.
Studijní program: B0541A170007 Matematika a její aplikace
Osobní číslo: A21B0062P

2024

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: Zuzana KULHÁNKOVÁ
Osobní číslo: A21B0062P
Studijní program: B0541A170007 Matematika a její aplikace
Téma práce: Hamiltonovské vlastnosti v iterovaných hranových grafech
Zadávací katedra: Katedra matematiky

Zásady pro vypracování

Chartrand v roce 1968 zavedl pojem n -tého iterovaného hranového grafu $L^n(G)$ grafu G a definoval hamiltonovský index grafu $h(G)$ jako minimální číslo n takové, že $L^n(G)$ je hamiltonovský. V současné době existuje spousta výsledků jak k určení hamiltonovského indexu speciálních tříd grafů, tak k určení horních a dolních mezí hamiltonovského indexu pro co nejobecnější grafy. Podobné výsledky pro existenci hamiltonovských cest v iterovaných hranových grafech publikované žádné nejsou.

1. Shrňte doposud známé výsledky týkající se existence hamiltonovských kružnic a cest v iterovaných grafech.
2. Pokuste se některé výsledky $h(G)$ použít k získání podobných výsledků pro hamiltonovské cesty v $L^n(G)$.

Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

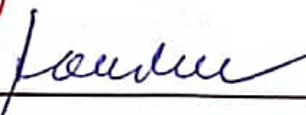
- G. Chartrand; On hamiltonian line graphs; Trans. Amer. Math. Soc. 134 (1968), 559-566;
- L. Xiong, Z. Liu; Hamiltonian iterated line graphs; Discrete Mathematics 256 (2002), 407-422.

Vedoucí bakalářské práce: **RNDr. Jan Ekstein, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

V Plzni dne 2. října 2023

Prohlášení

Prohlašuji, že svou bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího bakalářské práce a s použitím odborné literatury, která je citována v práci a uvedena v seznamu literatury na konci práce.

V Plzni dne _____

_____ podpis

Poděkování

Chtěla bych velmi poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce RNDr. Janu Eksteinovi, Ph.D. za cenné rady, pomoc, trpělivost a ochotu při konzultacích a vypracování bakalářské práce.

Abstrakt

Nechť G je graf a $k \geq 0$. Potom k -tý iterovaný hranový graf je $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$, kde $L^0(G) = G$ a $L^1(G) = L(G)$. Nejmenší přirozené číslo k takové, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ má hamiltonovskou kružnici, respektive cestu, se nazývá hamiltonovský index, respektive hamiltonovský cestový index.

Tato bakalářská práce shrnuje doposud známé výsledky existence hamiltonovských kružnic v iterovaných hranových grafech. Výsledky pro hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech zatím publikované nejsou a v této práci se podařilo ukázat, že hamiltonovský cestový index existuje pro všechny grafy G a podařilo se určit jeho přesnou hodnotu pro stromy.

Klíčová slova

Hamiltonovská cesta, hamiltonovská kružnice, hamiltonovský cestový index, hamiltonovský index, iterovaný hranový graf.

Abstract

Let G be a graph and $k \geq 0$. The k -iterated line graph of a graph G is $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$, where $L^0(G) = G$ and $L^1(G) = L(G)$. The minimum number k such that iterated line graph $L^k(G)$ has hamiltonian cycle, path is called hamiltonian index, hamiltonian path index, respectively.

This bachelor's thesis summarizes known results of the existence of hamiltonian cycles in iterated line graphs. The results for hamiltonian paths in iterated line graphs have not been published yet and in this work we also focus on hamiltonian path index and we show that hamiltonian path index exists for all graphs and determine its exact value for trees.

Keywords

Hamiltonian cycle, hamiltonian index, hamiltonian path, hamiltonian path index, iterated line graph.

Obsah

1	Úvod	2
2	Základní pojmy	4
3	Iterované hranové grafy	8
3.1	Hamiltonovské kružnice v iterovaných hranových grafech	9
3.1.1	Přesné hodnoty hamiltonovského indexu	9
3.1.2	Odhady hamiltonovského indexu	14
4	Hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech	22
5	Závěr	27

Kapitola 1

Úvod

Známou úlohou z teorie grafu je hledání hamiltonovské kružnice, tedy takové, která prochází každým vrcholem grafu právě jednou. Graf, ve kterém lze najít hamiltonovskou kružnici, se nazývá hamiltonovský. Obecně rozhodnout o tom, zda v daném grafu existuje hamiltonovská kružnice, je velmi obtížné. V praxi se tato úloha uvádí například jako problém obchodního cestujícího, který má za úkol navštívit všechna města, vrátit se do výchozího města a přitom nacestovat co nejkratší vzdálenost.

Chartrand zavedl pojem k -tého iterovaného grafu $L^k(G)$ a definoval hamiltonovský index $h(G)$ jako nejmenší přirozené číslo k takové, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ je hamiltonovský. Ukázal, že $h(G)$ existuje pro každý souvislý graf, který není cesta.

Cílem této bakalářské práce je shrnout doposud známé výsledky, které se týkají hamiltonovských kružnic a hamiltonovských cest v iterovaných hranových grafech, a pokusit se některé výsledky hamiltonovského indexu použít k získání podobných výsledků pro hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech, což je hlavním obsahem třetí a čtvrté kapitoly.

Ve druhé kapitole uvedeme přehled základních pojmů, které budou v práci použity.

V Kapitole 3 představíme charakterizaci grafů, které mají hamiltonovské iterované grafy pro $k \geq 1$, a ukážeme metodu Xionga a Liua, pomocí které lze určit hamiltonovský index grafu. V dnešní době existuje mnoho výsledků jak k určení přesné hodnoty hamiltonovského indexu pro speciální třídy grafů, tak k určení horních a dolních odhadů hamiltonovského indexu pro obecné grafy. Tyto výsledky ukážeme také v Kapitole 3.

Jako je pojem hamiltonovský index pro hamiltonovské kružnice, lze přirozeně zavést pojem hamiltonovský cestový index pro hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech. Protože žádné podobné výsledky pro určení hamiltonovského cestového indexu dosud publikované nejsou, pokusíme se je v Kapitole 4 získat pro určitý typ grafů, kterým jsou stromy.

Kapitola 2

Základní pojmy

Nechť $G = (V(G), H(G))$ je **graf**, kde $V(G)$ je neprázdná množina vrcholů a $H(G)$ je množina hran. Pokud $H(G) \subseteq (V(G) \times V(G))$, hovoříme o orientovaném grafu, pokud $H(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$, jde o neorientovaný graf. V této práci se budeme zabývat pouze neorientovanými grafy s konečným počtem vrcholů.

Poznamenejme, že pokud mezi dvěma vrcholy grafu G existuje více než jedna hrana nebo graf G obsahuje hranu vedoucí z vrcholu do téhož vrcholu, jedná se o **multigraf**.

Nechť G je graf s n vrcholy takový, že každé dva vrcholy grafu G jsou spojeny hranou, tedy $H(G) = \binom{V(G)}{2}$. Pak se graf G nazývá **úplný** a značí se K_n .

Nechť G je graf. Pokud lze množinu vrcholů grafu G rozdělit na dvě množiny tak, že hranou jsou spojeny pouze vrcholy, které nejsou ve stejné množině, nazývá se tento graf **bipartitní**. Pokud každý vrchol z jedné množiny je spojen hranou s každým vrcholem druhé množiny, nazývá se tento graf **úplný bipartitní** a značí se $K_{m,n}$, kde m a n je počet vrcholů jednotlivých množin.

Dva grafy G_1 a G_2 jsou **izomorfní**, pokud existuje bijekce $\phi : V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ taková, že dva vrcholy $v_1, v_2 \in V(G_1)$ jsou spojeny hranou právě tehdy, když jsou spojeny hranou vrcholy $\phi(v_1)$ a $\phi(v_2)$. Zobrazení ϕ se nazývá **izomorfismus**.

Nechť G je graf a $u, v \in V(G)$. Říkáme, že vrcholy u a v jsou **incidentní**, pokud mají společnou hranu $e = \{u, v\} \in H(G)$. **Stupeň vrcholu** u grafu G , značíme jej $d_G(u)$, je počet vrcholů, se kterými je daný vrchol incidentní. Nejmenší stupeň vrcholu v grafu G se nazývá **minimální stupeň** grafu G a značí se $\delta(G)$. Největší stupeň vrcholu v grafu G se nazývá **maximální stupeň** grafu G a značí se $\Delta(G)$.

Nechť G je graf a $u, v \in V(G)$. Řekneme, že G' je **podgraf** grafu G , značíme $G' \subseteq G$, jestliže $V(G') \subseteq V(G)$ a $H(G') \subseteq \binom{V(G')}{2} \cap H(G)$. Podgraf G' se nazývá **indukovaný**, pokud $V(G') \subseteq V(G)$ a $H(G') = \binom{V(G')}{2} \cap H(G)$. Nechť \mathcal{H} je množina grafů H . Graf G nazveme **bez \mathcal{H}** , pokud neobsahuje žádný graf $H \in \mathcal{H}$ jako indukovaný podgraf. Každý graf $H \in \mathcal{H}$ nazveme **zakázaný podgraf**. Pokud $\mathcal{H} = \{H\}$, zjednodušeně řekneme, že graf G je bez H .

Nechť G je graf, $S \subseteq H(G)$ a $T \subseteq V(G)$. Označíme $G - S$ podgraf grafu G , který má množinu vrcholů $V(G - S) = V(G)$ a množinu hran $H(G - S) = H(G) \setminus S$. Pokud $S = \{e\}$, píšeme zkráceně $G - e$. Označíme $G - T$ podgraf grafu G , který má množinu vrcholů $V(G - T) = V(G) \setminus T$ a množina hran je množina $H(G)$ bez hran, které obsahují alespoň jeden vrchol z T . Pokud $T = \{v\}$, píšeme zkráceně $G - v$. Pro dva grafy $G_1, G_2, G_2 \subseteq G_1$, definujeme $G_1 - G_2$ jako graf, jehož množina vrcholů je $V(G_1 - G_2) = V(G_1) \setminus V(G_2)$ a množina hran $H(G_1 - G_2) = H(G_1) \setminus H(G_2)$ bez hran, které obsahují alespoň jeden vrchol z $V(G_2)$.

Nechť G_1, G_2, \dots, G_k jsou grafy. Sjednocením $G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k$ rozumíme graf s množinou vrcholů $V(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k) = V(G_1) \cup V(G_2) \cup \dots \cup V(G_k)$ a množinou hran $H(G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_k) = H(G_1) \cup H(G_2) \cup \dots \cup H(G_k)$. Sjednocení grafů G_1, G_2, \dots, G_k je **disjunktní**, pokud platí, že $V(G_i) \cap V(G_j) = \emptyset$, pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ taková, že $i \neq j$. Sjednocení grafů G_1, G_2, \dots, G_k je **hranově disjunktní**, pokud platí, že $H(G_i) \cap H(G_j) = \emptyset$, pro všechna $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$ taková, že $i \neq j$. Zřejmě každé disjunktní sjednocení grafů G_1, G_2, \dots, G_k je hranově disjunktní sjednocení, ale naopak to neplatí.

Graf P_n se nazývá **cesta**, pokud množina vrcholů je $V(P_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množina hran je $H(P_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\}, i = 1, 2, \dots, n - 1\}, n \geq 1$. Takovou cestu budeme nazývat $v_1 v_n$ -**cesta**. Graf P_1 nazveme **triviální cesta**. **Délka cesty** je počet jejích hran. Vrcholy v_1 a v_n se nazývají **koncové vrcholy**, ostatní vrcholy, pokud existují, se nazývají **vnitřní vrcholy** cesty. Pokud graf G obsahuje jako podgraf cestu P na všech jeho vrcholech, nazývá se cesta P **hamiltonovská cesta**.

Graf C_n je **kružnice**, pokud množina vrcholů je $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ a množina hran je $H(C_n) = H(P_n) \cup \{v_n, v_1\}$, $n \geq 3$. **Délka kružnice** je počet jejích hran. Graf G je **hamiltonovský**, pokud obsahuje jako podgraf kružnici C na všech vrcholech grafu G . Kružnice C se nazývá **hamiltonovská**.

Sled v grafu G je posloupnost vrcholů a hran $v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k$ taková, že $v_i \in V(G)$ a $e_i = \{v_{i-1}, v_i\} \in H(G)$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, k$. **Tah** v grafu G je sled, ve kterém se každá hrana vyskytuje nejvýše jednou. Tah, ve kterém platí, že $v_0 = v_k$, se nazývá **uzavřený tah**. Tah T je **dominantní**, pokud pro každou hranu $\{u, v\}$ grafu G platí, že u nebo v je vrchol tahu T . Poznamenejme, že tah, ve kterém se každý vrchol vyskytuje nejvýše jednou, se nazývá cesta. To znamená, že na pojem cesta se dá nahlížet dvěma způsoby: jako na typ grafu nebo jako na typ tahu.

Vzdálenost dvou vrcholů $u, v \in V(G)$, značíme ji $d_G(u, v)$, je nejmenší počet hran uv-cesty v grafu G . **Vzdálenost** dvou podgrafů G_1, G_2 grafu G je nejmenší vzdálenost dvou vrcholů u, v takových, že $u \in V(G_1)$ a $v \in V(G_2)$, a značí se $d_G(G_1, G_2)$. **Excentricita** vrcholu u , značí se $\text{ecc}(u)$, je definována jako $\text{ecc}(u) = \max\{d_G(u, v) | v \in V(G)\}$. Pomocí excentricity můžeme definovat **průměr** grafu G , značí se $\text{diam}(G)$, jako $\text{diam}(G) = \max\{\text{ecc}(u) | u \in V(G)\}$ a **radius** grafu G , značí se $\text{rad}(G)$, jako $\text{rad}(G) = \min\{\text{ecc}(u) | u \in V(G)\}$.

Pokud pro každé dva vrcholy u a v grafu G existuje uv-cesta v grafu G , je graf G **souvislý**. V opačném případě graf není souvislý. Nechť množina $T \subseteq V(G)$ a $k \in \mathbb{N}$. Graf G se nazývá **k-souvislý**, pokud graf $G - T$ je souvislý pro každou množinu T takovou, že $|T| < k$. Poznamenejme, že místo 1-souvislý graf říkáme pouze souvislý graf. Maximální souvislý podgraf (co do počtu vrcholů i hran) grafu G se nazývá **komponta** grafu.

Souvislý graf T , který neobsahuje žádnou kružnici jako podgraf, se nazývá **strom**. Vrchol stupně 1 ve stromu T se nazývá **list**. Strom T , který je zároveň bipartitním grafem $K_{1,n}$ se nazývá **hvězda** pro $n \geq 0$. Pokud $n = 0$, T se nazývá **triviální hvězda**. Vrchol stupně n nazýváme **střed hvězdy**.

Nechť G je souvislý graf. **Mostem** nazveme hranu e grafu G takovou, že graf $G - e$ není souvislý. Podobně vrchol v grafu G , pro který graf $G - v$ není souvislý, se nazývá **artikulace**.

Blok grafu G je maximální souvislý podgraf (co do počtu vrcholů i hran), který nemá artikulace. Pokud blok obsahuje pouze jednu hranu grafu G , nazývá se **acyklický blok**, v opačném případě jde o **cyklický blok**.

Nechť graf G má alespoň jednu hranu. Potom **hranový graf** $L(G)$ grafu G je takový graf, jehož množina vrcholů odpovídá množině hran grafu G a dva vrcholy grafu $L(G)$ jsou spojeny hranou, pokud příslušné hrany grafu G obsahují stejný vrchol. Zřejmě platí, že pokud graf G je souvislý a má alespoň jednu hranu, jeho hranový graf $L(G)$ je také souvislý.

Nechť G je graf a $i \in \mathbb{N}$. Označíme $V_i(G) = \{v \in V(G) : d_G(v) = i\}$. Podgraf b grafu G , který je cesta, jejíž koncové vrcholy nejsou ve $V_2(G)$, ale vnitřní vrcholy, pokud existují, jsou ve $V_2(G)$, se nazývá **větev**. Množinu větví b grafu G označíme $B(G)$ a definujeme $B_1(G)$ jako množinu větví $b \in B(G)$, které mají alespoň jeden koncový vrchol ležící ve $V_1(G)$. Množinu větví, jejichž každá hrana je mostem grafu G , označíme $CB(G)$. Definujeme $CB_1(G) = B_1(G)$. Počet hran větve je **délka větve**.

Pro každou podmnožinu S' množiny $B(G)$ označíme $G - S'$ podgraf grafu G , jehož množina vrcholů je $V(G - S') = V(G) \setminus (V(S') \cap V_2(G))$ a množina hran je $H(G - S') = H(G) \setminus H(S')$. Množina S' se nazývá **větvový řez**, pokud $G - S'$ má více komponent než graf G . Větvový řez grafu G , který má minimální počet větví, se nazývá **svazek větví**. Množinu svazků větví grafu G označíme $BB(G)$. Svazek větví je **lichý**, pokud obsahuje lichý počet větví. **Délka svazku větví** $S \in BB(G)$, označíme ji $l(S)$, je délka nejkratší větve v S .

Nechť G je graf a $p \in \mathbb{N}$. Potom p -**tou mocninou** grafu G , značíme G^p , rozumíme graf s množinou vrcholů $V(G^p) = V(G)$, hrana $\{u, v\}$ je hrana grafu G^p , pokud v grafu G existuje uv -cesta délky nejvýše p .

Kapitola 3

Iterované hranové grafy

Pro $k \geq 0$ je **k -tý iterovaný hranový graf**, značíme $L^k(G)$, dán rekurzivně tak, že $L^k(G) = L(L^{k-1}(G))$, kde $L^0(G) = G$ a platí, že $L^1(G) = L(G)$. Tento pojem definoval Chartrand v [4].

Existují dvě třídy grafů, které mají snadno určitelné iterované hranové grafy, jde o kružnice C_n a cesty P_n . Iterovaný hranový graf $L^k(C_n)$ kružnice C_n je izomorfní s grafem C_n pro všechna $k \geq 0$. Hranový graf $L(P_n)$ cesty P_n , která má délku $n - 1$, je opět cesta, která má délku $n - 2$. Iterovaný hranový graf $L^{n-1}(P_n)$ obsahuje pouze jeden vrchol a $L^k(P_n)$ neexistuje pro $k \geq n$.

Vrchol w grafu $L(G)$ je artikulací, pokud odpovídá hraně $x = \{u, v\}$, která je mostem grafu G a vrcholy u a v grafu G mají stupeň větší než 1.

Hrana $x = \{u_1, u_2\}$ je mostem grafu $L(G)$, pokud hrany y_1 a y_2 grafu G odpovídající vrcholům u_1 a u_2 grafu $L(G)$ jsou mosty a mají společný vrchol stupně 2. Dále platí, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ obsahuje most, pokud graf G obsahuje cestu s $k + 1$ mosty, z nichž každé dva po sobě jdoucí mosty mají v grafu G společný vrchol stupně 2.

3.1 Hamiltonovské kružnice v iterovaných hranových grafech

Harary a Nash-Williams v [3] charakterizovali grafy G , pro které je hranový graf $L(G)$ hamiltonovský.

Věta 3.1. (Harary a Nash-Williams, [3]) *Nechť G je souvislý graf s aspoň třemi hranami. Potom hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský právě tehdy, když graf G má dominantní uzavřený tah.*

Z Věty 3.1 vyplývá, že hranový graf $L(G)$ hamiltonovského grafu G je hamiltonovský, protože na hamiltonovskou kružnici v grafu G lze nahlížet jako na speciální typ dominantního uzavřeného tahu. Z toho také plyne hamiltonovskost k -tého iterovaného hranového grafu pro libovolné k . To uvedl Chartrand ([4]) v následující Větě 3.2.

Věta 3.2. (Chartrand, [4]) *Pokud graf G je hamiltonovský, pak také jeho hranový graf $L(G)$ je hamiltonovský, tedy i iterovaný hranový graf $L^k(G)$ je hamiltonovský pro všechna k .*

Nejmenší přirozené číslo k (pokud existuje) takové, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ je hamiltonovský, se nazývá **hamiltonovský index** a značí se $h(G)$. Tento pojem opět zavedl Chartrand v [4] a v následující Větě 3.3 potvrdil existenci hamiltonovského iterovaného grafu pro každý souvislý graf, který není cesta.

Věta 3.3. (Chartrand, [4]) *Každý souvislý graf G , který není cesta, má hamiltonovský iterovaný hranový graf $L^k(G)$ pro nějaké $k \geq 0$. Dokonce pokud G má n vrcholů, potom $L^k(G)$ je hamiltonovský pro všechna $k \geq n - 3$.*

3.1.1 Přesné hodnoty hamiltonovského indexu

V této podkapitole uvedeme známé přesné hodnoty hamiltonovského indexu.

Nejprve v následující větě uvedeme výsledek Nebeského z [9], který ukázal, že hranový graf druhé mocniny grafu G už je hamiltonovský. To znamená, že buď $h(G^2) = 0$, takže G^2 je hamiltonovský a podle Věty 3.2 je i hranový graf $L(G^2)$ hamiltonovský, nebo $h(G^2) = 1$, takže podle Věty 3.1 má G^2 uzavřený dominantní tah.

Věta 3.4. (Nebeský, [9]) *Nechť G je souvislý graf s aspoň třemi hranami. Potom hranový graf $L(G^2)$ je hamiltonovský.*

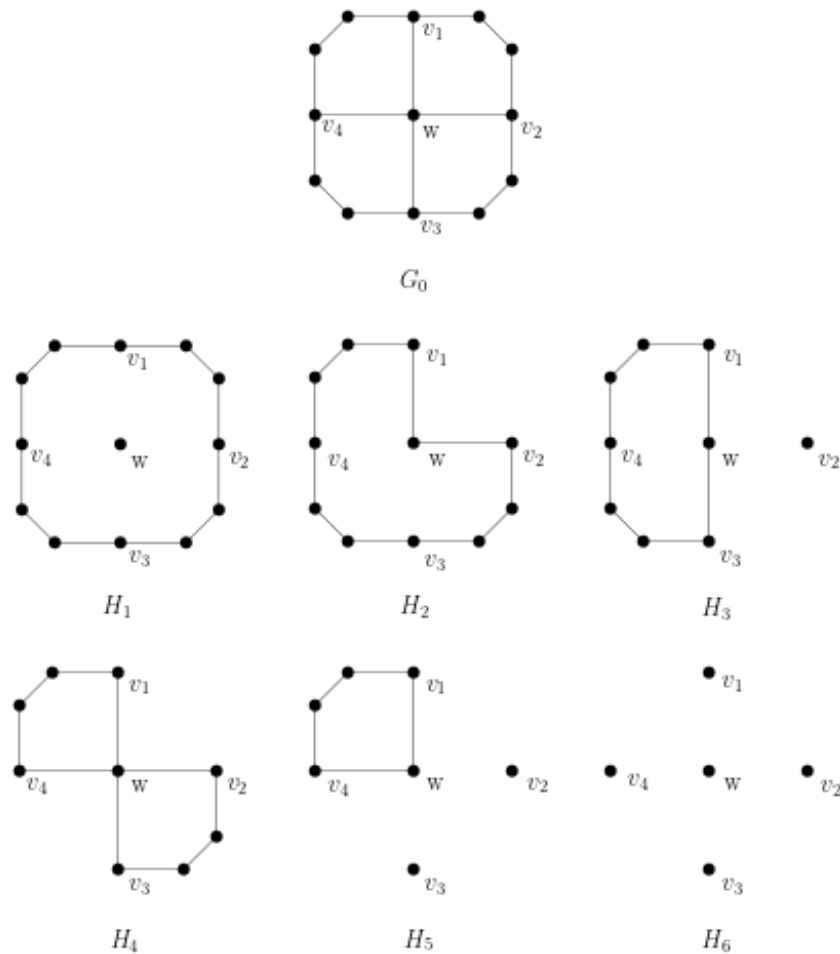
Zavedeme $EU_k(G)$ množinu podgrafů H grafu G , které splňují následující podmínky:

1. každý vrchol podgrafu H má sudý stupeň v H , izolovaný vrchol také bereme jako vrchol sudého stupně,
2. $V_0(H) \subseteq \bigcup_{i=3}^{\Delta(G)} V_i(G) \subseteq V(H)$,
3. $d_G(H_1, H - H_1) \leq k - 1$ pro každý podgraf H_1 grafu H ,
4. $|E(b)| \leq k + 1$ pro každou větev $b \in B(G)$, pro kterou $E(b) \cap E(H) = \emptyset$,
5. $|E(b)| \leq k$ pro každou větev $b \in B_1(G)$.

Následující Věta 3.5 dává charakterizaci grafů, které mají hamiltonovské k -té iterované hranové grafy pro $k \geq 2$.

Věta 3.5. (Xiong a Liu, [18]) *Nechť G je souvislý graf s aspoň třemi hranami a $k \geq 2$. Potom iterovaný hranový graf $L^k(G)$ je hamiltonovský právě tehdy, když $EU_k(G) \neq \emptyset$.*

Pro předchozí Větu 3.5 musí platit, že $k \geq 2$. Hranový graf $L(G)$ může být hamiltonovský, ale množina $EU_1(G)$ bude prázdná. Příklad takového grafu je na Obrázku 3.1. Mějme graf G_0 . Vzhledem k podmínkám 1. a 2. přichází v úvahu jako podgrafy v $EU_k(G_0)$ pouze H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 a H_6 (až na symetrii). Podgrafy se skládají z kružnice nebo izolovaných vrcholů, popřípadě z jejich kombinací. Aby podgraf H_i , $i = 1, 2, \dots, 6$, patřil do množiny $EU_1(G_0)$, musí splňovat všech pět podmínek. Pro podgrafy H_1, H_3, H_5 a H_6 nastává problém u 3. podmínky. Pokud vezmeme libovolný izolovaný vrchol jako podgraf H_0 podgrafu H_i , $i = 1, 3, 5, 6$, vzdálenost podgrafů H_0 a $H_i - H_0$ v grafu G_0 je 1, ale podle podmínky by měla být 0. To znamená, že pro $k = 1$ by měl být podgraf H_i , $i = 1, 3, 5, 6$, grafu G_0 spojitý, což není. Proto podgrafy H_i , $i = 1, 3, 5, 6$, nepatří do množiny $EU_1(G_0)$. Pro podgrafy H_2 a H_4 neplatí 4. podmínka, protože počet hran větve $b \in B(G_0)$, $E(b) \cap E(H_j) = \emptyset$, $j = 2, 4$, má být menší nebo rovno 2, ale z obrázku je vidět, že počet hran je 3. Kvůli nesplnění této podmínky ani podgrafy H_j , $j = 2, 4$, nepatří do množiny $EU_1(G_0)$. Množina $EU_1(G_0)$ je tedy prázdná. Hranový graf $L(G_0)$ je přesto hamiltonovský, protože z obrázku je vidět, že graf G_0 obsahuje kružnici (podgraf H_1 bez vrcholu w), která je uzavřeným dominantním tahem.



Obrázek 3.1: Graf G_0 a jeho podgrafy H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 a H_6 .

Pro uvedení dalších výsledků definujeme:

- $k(G) = 0$, pokud graf G je 2-souvislý,
- $k(G) = 1$, pokud graf G není 2-souvislý a $CB(G) = \emptyset$,
- $k(G) = \max\{\max\{|E(b)|+1 : b \in CB(G) \setminus CB_1(G)\}, \max\{|E(b)| : b \in CB_1(G)\}\}$ v ostatních případech.

Chartrand a Wall v [5] stanovili hamiltonovský index pro strom.

Věta 3.6. (*Chartrand a Wall, [5]*) *Nechť T je strom. Potom*

$$h(T) = k(T).$$

Strom T není 2-souvislý a nemůže být hamiltonovský, protože neobsahuje kružnici jako podgraf, tedy určitě $k(T) \neq 0$. Jelikož množina větví $CB(T)$ stromu není prázdná, protože každá hrana stromu je mostem, určí se hodnota $k(T)$ z délek větví stromu T .

Chartrand a Wall v [5] výsledek Věty 3.6 zobecnili na následující.

Věta 3.7. (*Chartrand a Wall, [5]*) *Pokud každý cyklický blok grafu G je hamiltonovský, potom*

$$h(G) = \max\{\max\{|E(b)| + 1 : b \in B(G) \setminus B_1(G)\}, \max\{|E(b)| : b \in B_1(G)\}\}.$$

Lai v [6] ale následujícím protipříkladem dokázal, že výsledek Věty 3.7 není správný. Mějme kružnici C_n a vytvořme graf G_n tak, že $V(G_n) = V(C_n) \cup \{w_1, w_2\}$ a $H(G_n) = H(C_n) \cup \{\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}\}$. Graf G_n má dva acyklické bloky K_2 a jeden hamiltonovský blok C_n . Maximální délka větve $b \in B_1(G_n)$ je 1 a maximální délka větve $b \in B(G_n) \setminus B_1(G_n)$ je $n - 1$. Použitím Věty 3.7 dostáváme: $h(G_n) = \max\{n, 1\} = n, n \geq 3$. Graf G_n má ale kružnici C_n , která je dominantním uzavřeným tahem, a proto podle Věty 3.1 platí, že $h(G_n) = 1$.

Saražin v [13] ukázal, že stačí Větu 3.7 přeformulovat na následující.

Věta 3.8. (*Saražin, [13]*) *Pokud každý cyklický blok grafu G je hamiltonovský, potom*

$$h(G) = k(G).$$

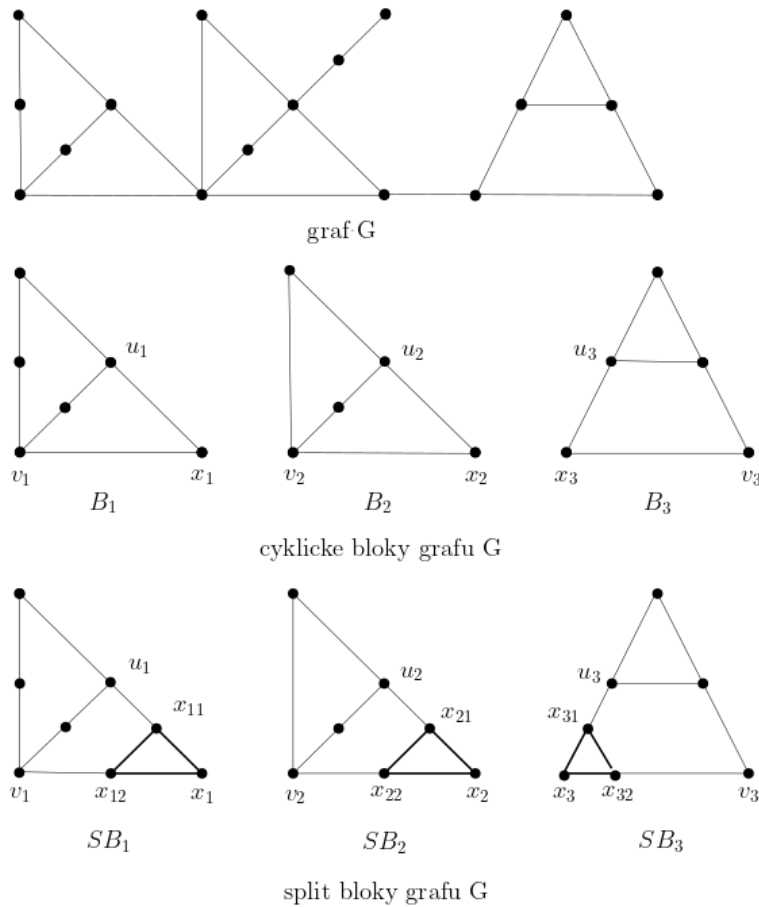
Rozdíl mezi Větou 3.7 a Větou 3.8 je, že ve Větě 3.7 se počítá s větvemi z $B(G)$, ale ve Větě 3.8 se maximum počítá ze všech větví z $CB(G)$.

Xiong a Liu v [18] ukázali metodu používající **split bloky** získané z cyklických bloků grafu G , pomocí které lze určit hamiltonovský index grafu. V každém cyklickém bloku B grafu G vybereme takové vrcholy x , které mají v bloku B

stupeň 2 a zároveň v grafu G mají stupeň alespoň 3. Každý vrchol x nahradíme kružnicí C_3 s množinou vrcholů $\{x, x_1, x_2\}$. Označíme u a v dva vrcholy incidentní s vrcholem x v B . Hranu $\{u, x\}$ nahradíme hranou $\{u, x_1\}$ a hranu $\{v, x\}$ nahradíme hranou $\{v, x_2\}$. Takto upravený cyklický blok nazveme split blok grafu G a označíme jej SB . Konstrukce ukázaná na příkladu je na Obrázku 3.2.

Věta 3.9. (Xiong a Liu, [18]) *Nechť G je souvislý graf a SB_1, SB_2, \dots, SB_t jsou všechny split bloky grafu G . Potom*

$$h(G) = \max\{h(SB_1), h(SB_2), \dots, h(SB_t), k(G)\}.$$



Obrázek 3.2: Konstrukce split bloků grafu G .

3.1.2 Odhady hamiltonovského indexu

Dále uvedeme známé odhady hamiltonovského indexu v závislosti na parametrech grafu.

Věta 3.10. (Chartrand a Wall, [5]) *Jestliže G je souvislý graf a má jako podgraf kružnici délky l , potom $h(G) \leq |V(G)| - l$.*

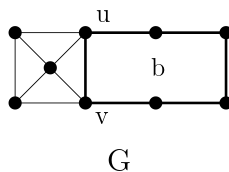
Označíme $l(G)$ maximální délku větve grafu G , kromě větve, jejíž vrcholy indukují graf K_3 .

Lai v [6] odhadl hamiltonovský index pomocí nejdelší větve grafu.

Věta 3.11. (Lai, [6]) *Nechť G je graf, který není cesta. Potom*

$$h(G) \leq l(G) + 1.$$

Pro každý souvislý graf G s maximálním stupněm alespoň 3 definujeme $B_0(G)$ jako množinu větví $b \in B(G)$, jejichž vrcholy indukují podgraf grafu G , který je kružnice; to znamená, že koncové vrcholy u a v větve b jsou spojeny hranou. Na Obrázku 3.3 ukážeme příklad grafu G , který má větev $b \in B_0(G)$ a kružnici, která vznikne přidáním hrany $\{u, v\}$ k větvi b .



Obrázek 3.3: Graf G s větví $b \in B_0(G)$.

Nyní můžeme uvést větu od Xionga a Liu ([18]).

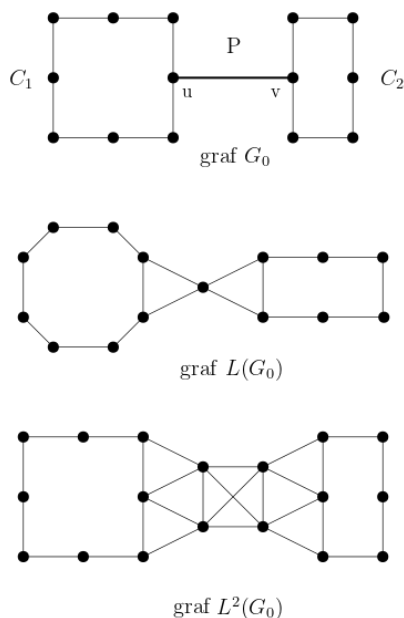
Věta 3.12. (Xiong a Liu, [18]) *Nechť G je souvislý graf, který není cesta. Potom*

$$h(G) \leq \max\{|E(b)| : b \in B(G) \setminus B_0(G)\} + 1.$$

Tento výsledek je silnější než výsledek Věty 3.11, protože do odhadu ve Větě 3.12 se nezahrnují větve z $B_0(G)$, které mohou mít velkou délku a mohou odhad ve Větě 3.11 zvýšit, ale podle Věty 3.12 nemají na $h(G)$ vliv. (Viz

Obrázek 3.4 později, kde například délka kružnice C_1 , a tedy větve z $B_0(G)$, může být libovolná, ale $h(G) = 2$.)

Na příkladu ukážeme, že horní mez Věty 3.12 již nelze zlepšit. Nechť P_{k+1} je uv -cesta délky k a C_1, C_2 jsou dvě libovolné kružnice. Sestrojíme graf G_0 tak, že pro dva koncové vrcholy u a v cesty P_{k+1} bude platit, že $u \in V(C_1)$ a $v \in V(C_2)$. Ukážeme, že $h(G) = k + 1$ tím, že množina $EU_k(G_0)$ je prázdná podle Věty 3.5. V grafu G_0 je jediná větev $b \in B(G) \setminus B_0(G)$ a je izomorfní s cestou P_{k+1} , a tedy podle Věty 3.12 je $h(G) \leq k + 1$. Aby byly splněny podmínky 1. a 2., podgrafem H může být pouze sjednocení podgrafů H_1 a H_2 , kde H_i je buď C_i nebo $H_i = \{u\}$, respektive $H_i = \{v\}$, pro $i = 1, 2$. Ve všech případech ale není splněna podmínka 3., protože vzdálenost vrcholů u a v by měla být menší nebo rovno než $k - 1$, ale cesta mezi vrcholy má délku k . Proto podgraf H nepatří do množiny $EU_k(G_0)$, ale zřejmě patří do množiny $EU_{k+1}(G_0)$. Pro ilustraci ukážeme na Obrázku 3.4 příklad grafu G_0 pro $k = 1$. Je vidět, že hranový graf $L(G_0)$ není hamiltonovský, protože obsahuje artikulaci. V iterovaném hranovém grafu $L^2(G_0)$ ale už určitě najdeme hamiltonovskou kružnici.



Obrázek 3.4: Příklad grafu G_0 a iterované grafy $L(G_0)$, $L^2(G_0)$.

Důsledkem Věty 3.12 je následující věta od Chartranda a Walla z [5], kteří odhadli hamiltonovský index grafu pomocí minimálního stupně grafu.

Věta 3.13. (Chartrand a Wall, [5]) *Nechť G je souvislý graf a $\delta(G) \geq 3$. Potom $h(G) \leq 2$.*

Jelikož minimální stupeň grafu G je alespoň 3, tak žádná větev v grafu G nemá vnitřní vrcholy, a proto délka větví je nejvýše 1. Dosazením do vztahu ve Větě 3.12 dostáváme: $h(G) \leq 2$.

Catlin a kol. v [2] odhadli hamiltonovský index pomocí průměru grafu.

Věta 3.14. (Catlin a kol., [2]) *Nechť G je souvislý graf, který není cesta. Potom*

$$h(G) \leq \text{diam}(G).$$

Zřejmě maximální délka větve z $B(G) \setminus B_0(G)$ je menší než průměr grafu G až na případ, kdy G je cesta, protože průměr grafu závisí i na délce větví z $B_0(G)$, které mohou mít velkou délku. Věta 3.12 právě předpokládá, že G není cesta, a tedy Věta 3.12 zlepšuje odhad předchozí Věty 3.14.

Xiong v [16] výsledek Věty 3.14 zlepšil o jedna a díky odhadu Xua v [21] $\text{diam}(G) - 1 \leq |V(G)| - \Delta(G)$ zlepšil i výsledek následující Věty 3.17.

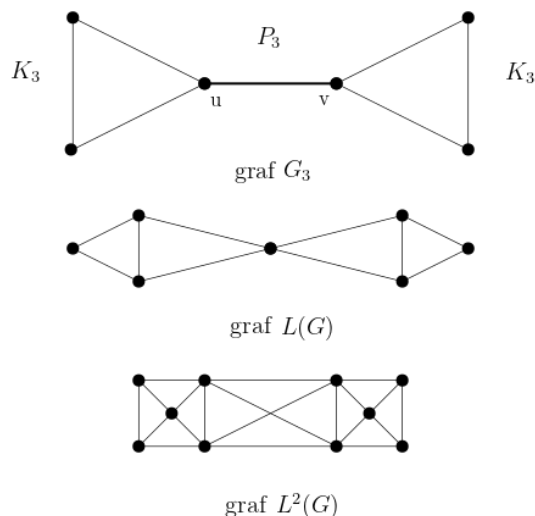
Věta 3.15. (Xiong, [16]) *Nechť G je souvislý graf, který není cesta. Potom*

$$h(G) \leq \text{diam}(G) - 1$$

a horní mez je ostrá.

Ukážeme, že mez $\text{diam}(G) - 1$ již nelze zlepšit. Pro $k \geq 3$ sestrojíme graf G_k následujícím způsobem. Nechť K_s , $s \geq 3$ a K_t , $t \geq 3$, jsou dva úplné grafy a P_k je uv -cesta délky $k - 2$ taková, že pro její koncové vrcholy u a v platí, že $u \in V(K_s)$ a $v \in V(K_t)$. Lze ukázat, že $h(G_k) \leq \text{diam}(G_k) - 1 = k - 1$. Průměr grafu G_k se rovná k , protože grafy K_s a K_t jsou úplné grafy, a proto vzdálenost každého vrcholu grafu K_s kromě u , respektive K_t kromě v , a koncového vrcholu u , respektive v , cesty P_k je 1. Lze ukázat podle Věty 3.5, že podgraf H grafu G_k s množinou vrcholů $V(H) = V(K_s) \cup V(K_t)$ a prázdnou množinou hran patří do množiny $EU_{k-1}(G_k)$, a tedy iterovaný hranový graf $L^{k-1}(G_k)$ je hamiltonovský; a že naopak množina $EU_{k-2}(G_k)$ je prázdná, a tedy iterovaný hranový graf $L^{k-2}(G_k)$ není

hamiltonovský. Tedy $h(G_k) = \text{diam}(G_k) - 1$. Pro lepší představu uvedeme příklad na Obrázku 3.5. Sestrojíme graf G_3 , který bude mít jako podgraf dva úplné grafy K_3 a cestu P_3 . Průměr grafu G_3 je 3, tedy $h(G_3) = 2$. Je vidět, že hranový graf $L(G_3)$ není hamiltonovský, protože obsahuje artikulaci, ale iterovaný hranový graf $L^2(G_3)$ už obsahuje hamiltonovskou kružnici.



Obrázek 3.5: Graf G_3 a jeho iterovaný hranový graf $L(G_3)$.

Dříve Veldman v [15] získal výsledek, který je nyní již důsledkem Věty 3.15.

Věta 3.16. (Veldman, [15]) *Nechť G je souvislý graf s minimálně třemi hranami a $\text{diam}(G) \leq 2$. Potom $L(G)$ je hamiltonovský, tj. $h(G) \leq 1$.*

Z Věty 3.15 platí vztah $h(G) \leq \text{diam}(G) - 1$. Ve Větě 3.16 máme předpoklad, že $\text{diam}(G) \leq 2$, tedy $h(G) \leq 2 - 1 = 1$ a tedy $L(G)$ je hamiltonovský.

Catlin v [1] vyvinul redukční metodu, pomocí které se dá určit, zda graf G má uzavřený tah na všech vrcholech. Tato metoda využívá kontrakci G/H grafu G . Kontrakce G/H vznikne z grafu G nahrazením podgrafu H grafu G vrcholem v_H a přidáním všech hran $\{v_H, v\}$, pokud nějaký vrchol z $V(H)$ je spojen hranou s vrcholem $v \in V(G) \setminus V(H)$ v grafu G . Detaily této metody nejsou předmětem naší práce, proto je nebudeme uvádět. Použitím této metody získal Saražin v [12] horní odhad hamiltonovského indexu.

Věta 3.17. (Saražin, [12]) *Nechť G je souvislý graf, který není cesta, a $\Delta(G) \geq 3$. Potom*

$$h(G) \leq |V(G)| - \Delta(G).$$

Xiong a Liu v [18] ukázali jiný, ale jednoduchý důkaz předchozí Věty 3.17. Nechť w je vrchol grafu G s maximálním stupněm. Definujeme podgraf H' grafu G , jehož množina vrcholů je $V(H') = \bigcup_{i=3}^{\Delta(G)} V_i(G)$ a množina hran je prázdná. Dále definujeme podgraf H'' grafu G , který je maximální podgraf co do počtu vrcholů takový, že jeho vrcholy mají sudý stupeň v H'' a obsahují vrchol w . Definujeme podgraf H , jehož množina vrcholů je $V(H) = V(H') \cup V(H'')$ a množina hran je $H(H) = H(H'')$. Lze ukázat, že podgraf H patří do množiny $EU_{|V(G)|-\Delta(G)}(G)$ a podle Věty 3.5 platí, že $h(G) \leq |V(G)| - \Delta(G)$.

Pro třídu 2-souvislých grafů Xiong a Wu v [19] našli lepší odhad hamiltonovského indexu než v předchozí Větě 3.17.

Věta 3.18. (Xiong a Wu, [19]) *Nechť G je 2-souvislý graf. Pokud $\Delta(G) \leq |V(G)| - 3$, potom*

$$h(G) \leq \frac{|V(G)| - \Delta(G)}{3},$$

pokud graf G není izomorfní s grafem, který vznikne hranovým sjednocením tří různých uv-cest délky $l = \frac{|V(G)|+1}{3} \geq 3$.

Pro další výsledek potřebujeme zavést pojem větvového grafu, který označíme $\mathcal{B}(G)$, a speciální typ vzdálenosti dvou vrcholů $H, H' \in V(\mathcal{B}(G))$. Tato definice je poměrně komplikovaná a není pro práci dále více potřeba, proto odkážeme čtenáře na článek od Saražina ([12]). Poznamenejme, že H, H' souvisí v grafu G s podgrafy, a proto vrcholy grafu $\mathcal{B}(G)$ značíme takto. Označme navíc $\overline{V}(\mathcal{B}(G))$ množinu vrcholů lichého stupně v grafu $\mathcal{B}(G)$. Pak definujeme

$$\omega(G) = \begin{cases} \max\{d(H, H') : H, H' \in \overline{V}(\mathcal{B}(G))\}, & \text{pokud } \overline{V}(\mathcal{B}(G)) \text{ není prázdná,} \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Věta 3.19. (Saražin, [12]) *Pro každý graf G platí, že $h(G) \leq \omega(G) + 1$.*

Pomocí větví grafu G a hodnoty $\omega(G)$ Saražin v [14] charakterizoval všechny grafy G , pro které $h(G) > \text{rad}(G)$. Pro všechny ostatní grafy G tedy platí, že $h(G) \leq \text{rad}(G)$.

Věta 3.20. (Saražin, [14]) *Nechť G je graf takový, že $h(G) > \text{rad}(G)$. Potom platí právě jedno z těchto tvrzení:*

1. *graf G obsahuje větev $b \in CB_1(G)$ délky $\omega(G)$ a $h(G) = \omega(G)$,*
2. *graf G obsahuje větev $b \in CB(G) \setminus CB_1(G)$ délky $\omega(G)$ a $h(G) = \omega(G) + 1$.*

Xiong a kol. v [17] uvedli dolní i horní odhad hamiltonovského indexu z vlastností svazků větví.

Definujeme $BB_1(G) = B_1(G)$, $BB_2(G) = \{S \in BB(G) : |S| = 1 \text{ a } b \in CB(G) \setminus CB_1(G)\}$ a $BB_3(G) = \{S \in BB(G) : |S| \geq 3 \text{ a } |S| \text{ je lichý}\}$. Poznamenejme, že množina $BB_1(G)$ je množina všech větví, které mají alespoň jeden koncový vrchol stupně 1; do množiny $BB_2(G)$ rovněž patří pouze všechny větve, jejichž hrany jsou mosty v grafu G a koncové vrcholy nemají stupeň 1; a do množiny $BB_3(G)$ patří svazky větví, které mají více než jednu větev a počet větví v tomto svazku je vždy lichý.

Dále definujeme

$$h_i(G) = \begin{cases} \max\{l(S) : S \in BB_i(G)\} & \text{pro } i \in \{1, 2, 3\}, \text{ pokud } BB_i(G) \\ & \text{není prázdná,} \\ 0 & \text{jindy.} \end{cases}$$

Pomocí délek svazků větví Xiong a kol. v [17] určili horní i dolní odhad hamiltonovského indexu.

Věta 3.21. (Xiong a kol., [17]) *Nechť G je souvislý graf a $h(G) \geq 1$. Potom*

$$h(G) \geq \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G) - 1\}.$$

Ukážeme, že pro $h(G) = 0$ odhad předchozí věty neplatí. Pokud $h(G) = 0$, tak graf G je hamiltonovský, tedy neobsahuje mosty, a tedy ani žádné větve z $BB_i(G)$ pro všechna $i \in \{1, 2, 3\}$. Proto $h_i(G) = 0$ a po dosazení do vztahu předchozí věty je $h(G) \geq \max\{0, 1, -1\} = 1$.

Věta 3.22. (Xiong a kol., [17]) *Nechť G je souvislý graf, který není cesta. Potom*

$$h(G) \leq \max\{h_1(G), h_2(G) + 1, h_3(G) + 1\}.$$

Xiong a kol. v [17] porovnali výsledek předchozí věty s výsledkem Věty 3.11, Věty 3.15 a Věty 3.17.

Zřejmě důsledkem předchozí Věty 3.22 je Věta 3.11, protože $h_i(G)$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$ je maximum z délek pouze některých větví a odhad Věty 3.11 používá maximum z délek všech větví.

Srovnáme výsledek Věty 3.22 s odhadem Věty 3.15. Zřejmě $h_i(G) \leq \text{diam}(G)$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$. Existuje graf, který má velký průměr, ale malé $h_3(G)$, například graf, který vznikne nahrazením každé hrany cesty lichým svazkem větví, který má nejméně tři větve. Pak výsledek Věty 3.15 může být horší než výsledek Věty 3.22. To ale neznamená, že odhad Věty 3.22 je vždy lepší. Uvažujme graf G_t získaný z grafu $K_{2,2t+1}$ tak, že každou hranu $K_{2,2t+1}$ nahradíme větví délky s . Zřejmě $h_3(G_t) = 2s = \text{diam}(G_t)$, a tedy výsledek Věty 3.22 může být i horší než výsledek Věty 3.15.

Dá se ukázat, že $h_i(G) \leq |V(G)| - \Delta(G)$ pro $i \in \{1, 2, 3\}$. Obecně tedy není Věta 3.17 důsledkem Věty 3.22.

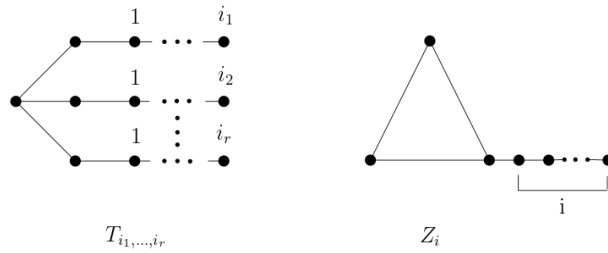
Nechť G je graf, $k \in \mathbb{N}$ a $P \subseteq G$ je cesta (uvažujeme i triviální cestu). Definujeme **stupeň cesty** P , označíme jej $d_G(P)$, jako součet stupňů všech vrcholů cesty P , tedy $d_G(P) = d_G(v_1) + d_G(v_2) + \dots + d_G(v_k)$. Dále definujeme $\sigma_k(G) = \min\{d_G(P) : |V(P)| = k\}$ a zřejmě $\delta(G) = \sigma_1(G)$.

Liu a Xiong v [8] určili horní mez pro hamiltonovský index souvislého grafu G použitím parametru $\sigma_k(G)$ následovně.

Věta 3.23. (Liu a Xiong, [8]) *Nechť $k \geq 3$ a G je graf s počtem vrcholů $n > k + 2$ a $\sigma_k(G) > n + k - 3$, potom $L^{k-1}(G)$ je hamiltonovský, tj. $h(G) \leq k - 1$.*

Operaci v grafu G nazveme **podrozdělení hrany** $\{u, v\}$, pokud hranu $\{u, v\}$ z grafu G odebereme a přidáme místo ní nový vrchol x a dvě hrany $\{u, x\}$ a $\{x, v\}$. Pro $r \geq 3$ a $i_1 \geq \dots \geq i_r \geq 0$ definujeme graf T_{i_1, \dots, i_r} , který vznikne z grafu $K_{1,r}$ postupným podrozdělením všech r hran $i_1 - 1, \dots, i_r - 1$ krát. Dále definujeme graf Z_i , který se skládá z grafu K_3 a cesty P_i , jejíž jeden koncový vrchol je ve $V(K_3)$. Na Obrázku 3.6 jsou příklady struktury zakázaných podgrafů T_{i_1, \dots, i_r} a Z_i .

Nechť \mathcal{H}_1 a \mathcal{H}_2 jsou dvě množiny souvislých grafů. Vztah $\mathcal{H}_1 \leq \mathcal{H}_2$ znamená, že ke každému grafu $H_2 \in \mathcal{H}_2$ existuje graf $H_1 \in \mathcal{H}_1$ takový, že H_1 je indukovaný podgraf grafu H_2 .



Obrázek 3.6: Zakázané podgrafy T_{i_1, \dots, i_r} a Z_i .

Závěrem této kapitoly uvedeme výsledek pro hamiltonovský index pro obecné grafy pomocí zakázaných podgrafů.

Liu a Xiong ([7]) v následující Větě 3.24 charakterizovali zakázané podgrafy z množiny \mathcal{H} , $|\mathcal{H}| = 1, 2$ tak, že pokud graf G je bez \mathcal{H} , potom $h(G) \leq k$ pro každé $k \geq 0$.

Věta 3.24. (Liu a Xiong, [7]) *Nechť G, H jsou grafy a $|\mathcal{H}| = 2$. Potom pro každé $k \geq 0$ platí:*

1. *pokud graf G je bez H , potom $h(G) \leq k$ právě tehdy, když H je indukovaný podgraf P_{k+3} ,*
2. *pokud graf G , který není cesta, je bez \mathcal{H} , potom $h(G) \leq k$, pro $k \geq 1$, právě tehdy, když $\mathcal{H} \leq \{Z_{k+1}, P_{k+4}\}$ nebo $\mathcal{H} \leq \{Z_{k+1}, T_{k+1,1,1}\}$.*

Poznamenejme, že existují i další výsledky týkající se zakázaných podgrafů pro různé formy souvislosti grafů. Ty zde ale již uvádět nebudeme.

Z článku Ryjáčka a kol. ([11]) jsme zjistili, že obecně problém rozhodnout, zda je hamiltonovský index daného grafu menší nebo roven dané konstantě, je NP-úplný, což znamená, že je to výpočetně velmi obtížné. Ryjáček a kol. rovněž v [11] ukázali, že některé známé horní a dolní meze hamiltonovského indexu lze vypočítat v polynomiálním čase.

Kapitola 4

Hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech

Přirozenou otázkou jako pro hamiltonovské kružnice je existence hamiltonovských cest v iterovaných hranových grafech. V této oblasti se prozatím nepodařilo najít žádné výsledky kromě stále nepublikovaného článku Nia a kol. ([10]) z roku 2020. Tento článek se zabývá analogií Věty 3.5. Zavádějí množinu $EUP_k(G)$ podgrafů H grafu G , které splňují podmínky 2.-4. jako pro množinu $EU_k(G)$, ale podmínky 1. a 5. jsou pozměněné. Uvádějí důkaz věty, která říká, že pokud graf G je souvislý graf s minimálně třemi hranami a $k \geq 2$, potom $L^k(G)$ má hamiltonovskou cestu právě tehdy, když $EUP_k(G) \neq \emptyset$. V tomto článku také zavedli označení $h_p(G)$ pro nejmenší přirozené číslo k takové, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ má hamiltonovskou cestu.

Podobně jako Věta 3.1 popisuje souvislost mezi uzavřeným dominantním tahem v grafu G a hamiltonovskou kružnicí v hranovém grafu $L(G)$, ukazuje následující Věta 4.1 vztah mezi dominantním tahem v grafu G a hamiltonovskou cestou v hranovém grafu $L(G)$.

Věta 4.1. *(Xiong a Zong, [20]) Nechť G je graf s minimálně jednou hranou. Potom hranový graf $L(G)$ obsahuje hamiltonovskou cestu právě tehdy, když graf G má dominantní tah.*

Z Věty 4.1 vyplývá, že pokud graf G má hamiltonovskou cestu, pak také hranový graf $L(G)$ má hamiltonovskou cestu, protože na hamiltonovskou cestu v grafu G lze nahlížet jako na speciální typ dominantního tahu. Z toho plyne, že i k -tý iterovaný hranový graf má hamiltonovskou cestu pro libovolné k . Pokud je graf G pouze cesta P_n , pak graf $L^k(G)$ má hamiltonovskou cestu pro $k \leq n - 1$, triviální cestu bereme jako hamiltonovskou cestu.

Použijeme stejné označení jako v článku Nia a kol. ([10]) a definujeme pojem hamiltonovský cestový index.

Definice 4.1. *Hamiltonovský cestový index grafu G , označíme $h_p(G)$, je nejmenší přirozené číslo k takové, že iterovaný hranový graf $L^k(G)$ má hamiltonovskou cestu.*

Odpověď na otázku, pro které grafy hamiltonovský cestový index existuje, je v následujícím tvrzení. Oproti Větě 3.3, o existenci hamiltonovského indexu, hamiltonovský cestový index existuje i pro grafy, které jsou cesty.

Tvrzení 4.1. *Hamiltonovský cestový index existuje pro každý souvislý graf G . Navíc, pokud graf G je cesta, potom $h_p(G) = 0$, pokud graf G není cesta, potom $h_p(G) \leq h(G)$.*

Důkaz. Pokud graf G je cesta, potom zřejmě $h_p(G) = 0$. Pokud graf G není cesta, podle Věty 3.3 je hamiltonovský index $h(G)$ konečný. Pokud graf G je hamiltonovský, potom obsahuje i hamiltonovskou cestu, která vznikne odebráním libovolné hrany z libovolné hamiltonovské kružnice grafu G . Proto hamiltonovský cestový index existuje a $h_p(G) \leq h(G)$. \square

Pokusíme se určit hamiltonovský cestový index základních typů grafu. Pro cesty již víme, že $h_p(G) = 0$. Pokud je graf kružnice, má jako podgraf hamiltonovskou cestu, a proto také $h_p(G) = 0$. Dalším základním typem grafu je strom, pro který již $h_p(G)$ není zřejmý. Použijeme proto výsledek Chartranda a Walla ([5]) z Věty 3.6, který udává hamiltonovský index stromu, a pokusíme se určit hamiltonovský cestový index tohoto základního typu grafu.

Chartrand ([5]) definoval parametr $k(G)$, my definujeme podobný parametr, ale pro každou větev stromu T .

$$k(b) = \begin{cases} |E(b)| + 1, & \text{pokud } b \in CB(T) \setminus CB_1(T), \\ |E(b)|, & \text{pokud } b \in CB_1(T). \end{cases}$$

Poznamenejme, že pro stromy je množina $B(T)$ stejná jako množina $CB(T)$.

Nechť T je strom a vrcholy u, v jsou listy stromu T . Jednoznačnou uv -cestu ve stromu T označíme jako **koncovou cestu**. Nechť b_1 a b_2 jsou dvě větve stromu T , pro které $k(b_1) + k(b_2)$ je maximální. Množinu všech koncových cest P , které obsahují větve b_1, b_2 jako podgraf, označíme \mathcal{P} a zřejmě $|\mathcal{P}| = 1$ právě tehdy, když b_1 i b_2 jsou z $CB_1(T)$. Každá cesta $P \in \mathcal{P}$ může obsahovat další větve stromu T jako podgraf kromě větví b_1, b_2 , proto označíme $B_P(T)$ množinu všech větví, které jsou obsaženy v P jako podgraf. Zřejmě $b_1, b_2 \in B_P(T)$.

Nyní můžeme uvést náš hlavní výsledek a jeho důkaz.

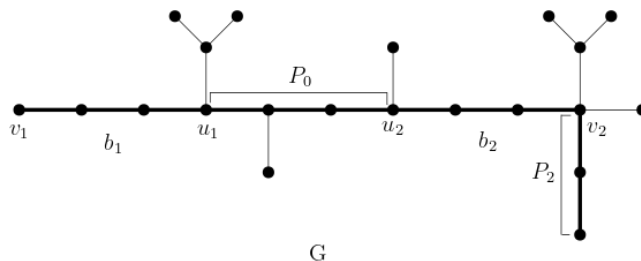
Tvrzení 4.2. *Nechť T je strom, potom*

$$h_p(T) = \min_{P \in \mathcal{P}} \{\max\{k(b), \text{ kde } b \in CB(T) \setminus B_P(T)\}\}.$$

Důkaz. Nejprve popíšeme koncové cesty obsahující co nejdelší větve stromu T pomocí parametru $k(b)$.

Nechť větev b_1 je u_1v_1 -cesta ve stromu T a větev b_2 je u_2v_2 -cesta ve stromu T tak, že $k(b_1) + k(b_2)$ je maximální a jednoznačná u_1u_2 -cesta P_0 v T neobsahuje žádný vnitřní vrchol větve b_1 ani b_2 . Potom každá koncová cesta P obsahující větve b_1, b_2 jako podgraf je hranově disjunktním sjednocením b_1, b_2, P_0 a nějaké v_1l_1 -cesty P_1 a v_2l_2 -cesty P_2 , kde l_1, l_2 jsou listy stromu T . Poznamenejme, že P_1 nebo P_2 nemusí existovat, pokud v_1 nebo v_2 jsou již listy T . Příklad jedné takové koncové cesty P dané větvemi b_1, b_2 je na Obrázku 4.1.

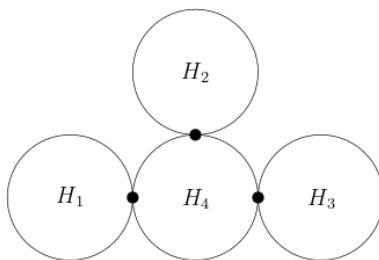
Nyní vybereme koncovou cestu $P' \in \mathcal{P}$ takovou, že maximální hodnota $k(b)$ pro všechny větve, které nejsou podgrafem P' , je minimální, a označíme $m = \min_{P \in \mathcal{P}} \{\max\{k(b), \text{ kde } b \in CB(T) \setminus B_P(T)\}\}$. Označíme $T_i, i = 1, 2, \dots, n$, komponenty grafu $T - H(P')$, které nejsou hvězdy se středem ležícím ve vrcholu cesty P' . Zřejmě T_i jsou opět stromy, kde pro každou větev $b \subseteq T_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$, je $k(b) \leq m$.



Obrázek 4.1: Koncová cesta P v grafu G , vyznačena tučně.

Nejprve ukážeme, že $h_p(T) \leq m$. Podle Věty 3.6 je $h(T_i) = k(T_i) \leq m$, a tedy iterovaný hranový graf $L^m(T_i)$ je hamiltonovský. (V tomto případě $k(T_i) = \max\{\max\{|E(b)| + 1 : b \in CB(T_i) \setminus CB_1(T_i)\}, \max\{|E(b)| : b \in CB_1(T_i)\}\}$.) Tudiž podle Věty 3.5 graf $L^{m-1}(T_i)$ má uzavřený dominantní tah, který označíme D_i . Poznamenejme, že hrany komponent grafu $T - H(P')$, které jsou netriviální hvězdy se středem ležícím ve vrcholu cesty P' , jsou dominovány vrcholy cesty P' . Označme $D = P' \cup \bigcup_{i=1}^m D_i$. Potom D je dominantní tah v $L^{m-1}(T)$, a tedy podle Věty 4.1 graf $L^m(T)$ má hamiltonovskou cestu a $h_p(T) \leq m$.

Nyní ukážeme, že $h_p(T) \geq m$. Označme b' větev z množiny $CB(T) \setminus B_P(T)$, pro kterou $k(b') = m$. Poznamenejme, že z definice b_1 a b_2 je $k(b_i) \geq m$ pro $i = 1, 2$. Tedy graf $L^{m-1}(T)$ má alespoň 3 artikulace, které vzniknou postupným iterováním b' , b'' a b''' , kde pro $i \in \{1, 2\}$ větev b'' je b_i a větev b''' je b_{3-i} nebo \tilde{b} , kde $\tilde{b} \in B_P(T) \setminus \{b_1, b_2\}$ a $k(\tilde{b}) \geq m$. Potom struktura grafu $L^{m-1}(T)$ je na Obrázku 4.2, kde H_1, H_2, H_3, H_4 jsou souvislé grafy, a zřejmě $L^{m-1}(T)$ nemůže obsahovat hamiltonovskou cestu, která by procházela všemi vrcholy grafů H_1, H_2, H_3 . Proto $h_p(T) \geq m$.



Obrázek 4.2: Struktura grafu $L^{m-1}(T)$ s grafy H_1, H_2, H_3, H_4 a vyznačenými artikulacemi.

Ukázali jsme tedy, že $h_p(T) \leq m$ a zároveň $h_p(T) \geq m$, a z toho vyplývá, že $h_p(T) = m = \min_{P \in \mathcal{P}} \{\max\{k(b), \text{kde } b \in CB(T) \setminus B_P(T)\}\}$.

□

Poznamenejme, že závěr druhé části důkazu je proveden pouze ilustrativně pomocí Obrázku 4.2. Pro pozdější možné publikování tohoto výsledku je třeba závěr důkazu formulovat více matematicky.

Kapitola 5

Závěr

Cílem této práce bylo shrnout dosud známé přesné výsledky a rovněž dolní a horní odhady hamiltonovského indexu grafu a pokusit se získat některé podobné výsledky pro hamiltonovské cesty v iterovaných hranových grafech, o kterých dosud nic publikováno není.

V Kapitole 3 jsme uvedli Větu 3.1 dávající charakterizaci grafů, které mají hamiltonovské k -té iterované hranové grafy pro $k = 1$, pro $k \geq 2$ máme charakterizaci grafů podle Věty 3.5. Dále jsme uvedli známé výsledky hamiltonovského indexu speciálních tříd grafů: stromů a grafů, které mají všechny cyklické bloky hamiltonovské. Ukázali jsme metodu používající split bloky, pomocí které lze hamiltonovský index grafu určit. Uvedli jsme také odhady hamiltonovského indexu, které závisejí na různých parametrech daného grafu, jako je minimální a maximální stupeň grafu, průměr grafu, nebo které využívají větve či svazky větví v grafu nebo zakázané podgrafy, zde pouze pro obecné grafy. (Další výsledky je možné do budoucna najít i pro různé formy souvislosti grafu.)

V Kapitole 4 jsme zavedli pojem hamiltonovský cestový index $h_p(G)$. Ukázali jsme, že $h_p(G)$ existuje i pro grafy, které jsou cesty a v porovnání s hamiltonovským indexem platí, že $h_p(G) \leq h(G)$. Pomocí výsledku Věty 3.6 a znalostí způsobů určování hamiltonovského indexu se nám v Kapitole 4 podařilo určit hodnotu hamiltonovského cestového indexu pro stromy. Tento výsledek je uveden v Tvzení 4.2. Jedná se o podobný výsledek, jako publikoval Chartrand pro hamiltonovský index.

Prostor pro budoucí práci je pokusit se určit hamiltonovský cestový index i pro další třídy grafů. Vzhledem k tomu, jak bylo v práci uvedeno, že nejsou publikované žádné výsledky, prakticky je možné uvažovat všechny podobné třídy grafů jako jsou uvažovány v Kapitole 3 pro hamiltonovský index, například grafy, které mají hamiltonovské cyklické bloky nebo závisí na různých parametrech grafu. Tato práce může také vyzývat k prozkoumání hamiltonovské souvislosti, tedy zda v iterovaném hranovém grafu existuje pro každé dva vrcholy uv-cesta, která je hamiltonovská, což lze očekávat, že bude daleko těžší dokonce než hledání hamiltonovských kružnic v iterovaných hranových grafech.

Literatura

- [1] P. A. Catlin, A reduction method to find spanning eulerian subgraphs, *J. Graph Theory* 12 (1988), 29-45.
- [2] P. A. Catlin, Iqbalunnisa, T.N. Janakirama, N.Srinivasan, Hamiltonian cycles and closed trails in iterated line graphs, *J. Graph Theory* 14 (1990), 347-364.
- [3] F. Harary, C. St. J. A. Nash-Williams, On eulerian and hamiltonian graphs and line graphs, *Canad. Math. Bull.* 8 (1965), 701-710.
- [4] G. Chartrand, On hamiltonian line graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.* 134 (1968), 559-566.
- [5] G. Chartrand, C.E. Wall, On the hamiltonian index of a graph, *Studia Sci. Math. Hungar.* 8 (1973), 43-48.
- [6] H. J. Lai, On the hamiltonian index, *Discrete Mathematics* 69 (1988), 43-53.
- [7] X. Liu, L. Xiong, Forbidden subgraphs on Hamiltonian index, *Discrete Mathematics* 343 (2020), 111841.
- [8] Z. Liu, L. Xiong, Degree sum conditions for hamiltonian index, *Applied Mathematics J. Chinese University* 36 (2021), 403-411.
- [9] L. Nebeský, On the line graph of the square and the square of the line graph of connected graph, *Časopis pro pěstování matematiky*, roč. 98 (1973), 285-287.
- [10] Z. Niu, L. Xiong, W. Yang, On traceable iterated line graph and hamiltonian path index.

- [11] Z. Ryjáček, G.J. Woeginger, L.Xiong, Hamiltonian index is NP-complete, *Discrete Applied Mathematics* 159 (2011), 246-250.
- [12] M. L. Saražin, A simple upper bound for the hamiltonian index of a graph, *Discrete Mathematics* 134 (1994), 85-91.
- [13] M. L. Saražin, On the hamiltonian index of a graph, *Discrete Mathematics* 122 (1993), 373-376.
- [14] M. L. Saražin, On the hamiltonian index and the radius of a graph, *Discrete Mathematics* 182 (1998), 197-202.
- [15] H. J. Veldman, A result on Hamiltonian line graphs involving restrictions on induced subgraphs, *J. Graph Theory* 12 (1988), 413-420.
- [16] L. Xiong, The hamiltonian index of a graph, *Graphs and Combinatorics* 17 (2001), 775-784.
- [17] L. Xiong, H.J. Broersma, X. Li, M. Li, The hamiltonian index of a graph and its branch-bonds, *Discrete Mathematics* 285 (2004), 279-288.
- [18] L. Xiong, Z. Liu, Hamiltonian iterated line graphs, *Discrete Mathematics* 256 (2002), 407-422.
- [19] L. Xiong, Q. Wu, The hamiltonian index of a 2-connected graph, *Discrete Mathematics* 308 (2008), 6373–6382.
- [20] L. Xiong, M. Zong, Traceability of line graphs, *Discrete Mathematics* 309 (2009), 3779–3785.
- [21] S. Xu, Relations between parameters of a graph, *Discrete Mathematics* 89 (1991), 65-88.