

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Bakalářská práce

**Neautonomní dynamické systémy a jejich
aplikace**

Plzeň 2024

Jaroslav Mužík

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA V PLZNI

Fakulta aplikovaných věd
Akademický rok: 2023/2024

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

(projektu, uměleckého díla, uměleckého výkonu)

Jméno a příjmení: **Jaroslav MUŽÍK**
Osobní číslo: **A21B0041P**
Studijní program: **B0541A170006 Matematika a finanční studia**
Téma práce: **Neautonomní dynamické systémy a jejich aplikace**
Zadávací katedra: **Katedra matematiky**

Zásady pro vypracování

1. Seznamte se s literaturou týkající se použití neautonomních dynamických systémů. Prostudujte zejména motivace z aplikací a základní teoretické aspekty.
2. Srovnajte na jednoduchých modelech vybrané neautonomní rovnice s vybranými odpovídajícími autonomními verzemi.
3. Formulujte a analyzujte vhodný vlastní model, který může sloužit jako neautonomní alternativa v růstových parametrech ke standardním autonomním přístupům kombinujícím růstové faktory s predací nebo odlovem.
4. Ilustrujte své teoretické výsledky pomocí vhodných vizualizací a doplňte případně numerickými výpočty.



Rozsah bakalářské práce: **20-50 stran**
Rozsah grafických prací: **dle potřeby**
Forma zpracování bakalářské práce: **tištěná**

Seznam doporučené literatury:

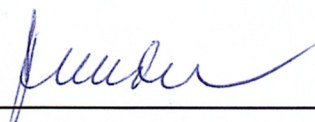
- L. J. S. Allen. An Introduction to Mathematical Biology. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- M. Fan and K. Wang. Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients. Mathematical Biosciences, 152(2):165 178, Sept. 1998.
- W. G. Kelley and A. C. Peterson. The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative. Universitext. Springer, New York, 2nd ed edition, 2010.
- S. H. Strogatz. Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering. Westview Press, a member of the Perseus Books Group, Boulder, CO, second edition, 2015.

Vedoucí bakalářské práce: **Doc. RNDr. Petr Stehlík, Ph.D.**
Katedra matematiky

Datum zadání bakalářské práce: **2. října 2023**
Termín odevzdání bakalářské práce: **22. května 2024**



Doc. Ing. Miloš Železný, Ph.D.
děkan



Doc. Ing. Marek Brandner, Ph.D.
vedoucí katedry

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem samostatně vypracoval tuto práci a všechny použité prameny, které jsou v práci citovány, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

V Plzni dne 22. 5. 2024

.....
Jaroslav Mužík

Poděkování

Rád bych poděkoval především vedoucímu práce doc. RNDr. Petru Stehlíkovi Ph.D. za cenné rady a připomínky k práci, ochotu k pravidelným přínosným konzultacím a pomoc s formální stránkou práce.

Dále patří můj dík rodině za poskytnutí zázemí a příležitosti ke studiu a v neposlední řadě i kolegům spolužákům z oboru Matematika a finanční studia, se kterými jsme stáli bok po boku během celého studia.

Abstrakt

Tato práce se věnuje problematice neautonomních růstových modelů. Nejprve je nad příklady neautonomních jevů rozebráno, proč a za jakých podmínek může být přínosné uvažovat růstový model s parametry závislými na čase. Dále je v práci stručně představen Verhulstův model logistického růstu a jsou zavedeny dvě jeho neautonomní obdoby. První ze zavedených modelů se liší od standardního logistického růstu v neautonomním růstovém parametru. Druhý se liší v neautonomním parametru nosné kapacity prostředí. V práci je zkoumán vliv časové závislosti jednotlivých parametrů a kvalitativní i kvantitativní vlastnosti obou variant standardního modelu. Jednotlivé neautonomní modely jsou následně srovnány s jejich autonomní předlohou. Na závěr jsou diskutovány alternativní přístupy k problematice modelování neautonomních jevů společně s nedostatky, možnostmi pokračování a prostorem k vylepšení této práce.

Klíčová slova: dynamické systémy, neautonomní systémy, obyčejné diferenciální rovnice, růstové modely, populační modely, matematická analýza

Abstract

This thesis targets the topic of non-autonomous growth models. Firstly, with consideration of several examples of non-autonomous phenomena, it is explained why and under what circumstances it could be beneficial to consider a growth model with time-dependent parameters. Additionally, Verhulst's model of logistic growth is briefly introduced along with its two analogous non-autonomous variants. First of these variants differs from standard logistic growth in non-autonomous growth parameter. Second variant differs in non-autonomous environmental carrying capacity parameter. The thesis looks into the influence of time-dependence of individual parameters. It also examines qualitative and quantitative aspects of both variants of the standard model. Individual models are then compared with their autonomous counterpart. Lastly, alternative approaches to the topic of modelling non-autonomous phenomena are discussed along with the thesis' drawbacks and possibilities for further directions and improvement.

Keywords: dynamic systems, non-autonomous systems, ordinary differential equations, growth models, population models, mathematical analysis

Obsah

1	Úvod	1
2	Zavedení modelů a značení	2
2.1	Použité značení	2
2.2	Analyzované modely	3
3	Analýza modelů a jejich chování	3
3.1	Neautonomní logistický růst v růstovém parametru	3
3.2	Příklad s periodickým neautonomním růstovým parametrem	6
3.3	Neautonomní logistický růst v kapacitě prostředí	8
3.4	Analýza příkladu se specifickou neautonomní kapacitou	9
3.4.1	Nalezení nestacionárního řešení	9
3.4.2	Zavedení limitní funkce $\xi(t)$	10
3.4.3	Průměrná hodnota $\bar{\xi}$ limitní funkce $\xi(t)$	14
3.4.4	Dosažení kapacity prostředí	18
4	Simulace a hypotézy	21
4.1	Srovnání $\bar{\xi}$ a κ	21
4.2	Závislost $\bar{\xi}$ na α	21
5	Závěr	25
5.1	Shrnutí modelu s neautonomním růstovým parametrem	25
5.2	Shrnutí modelu s neautonomní kapacitou prostředí	25
5.3	Nedostatky práce	25
5.4	Alternativní způsoby modelování	26
5.5	Bistabilní růst	26
5.6	Růst populace i kapacity prostředí	26

1 Úvod

Tato práce je zaměřena na analýzu neautonomních růstových modelů ve spojitém čase. V práci je zkoumán logistický model růstu, jenž byl poprvé popsán v devatenáctém století P. F. Verhulstem [1]. V logistickém modelu figurují dva autonomní parametry. Růstový parametr, reprezentující rychlost růstu sledované veličiny a parametr reprezentující nosnou kapacitu prostředí. V práci jsou zavedeny a analyzovány dvě neautonomní období tohoto standardního modelu, které mají každá právě jeden z výše zmíněných parametrů nahrazen jeho obdobou, která je nekonstantní v čase. Porovnávají jsou kvalitativní a kvantitativní vlastnosti jednotlivých modelů. V jednotlivých sekcích jsou ilustrovány a diskutovány rozdíly mezi autonomními řešeními a jim odpovídajícími neautonomními variantami.

Hlavní důvody výběru problematiky neautonomních modelů růstu byly dva. Prvním byl relativní nedostatek literatury věnující se neautonomním růstovým modelům (v porovnání s texty zaměřenými na autonomní růstové modely). Druhým důvodem byla snaha o věrnější modelování růstu veličin, jejichž parametry růstu a kapacity mají spíše neautonomní charakter. Neautonomní modely mají díky zohlednění časové závislosti parametrů potenciál popisovat sledovanou veličinu přesněji, ale na druhou stranu jejich nevýhodou je obtížnější hledání řešení a manipulace s ním.

Příkladem systému s parametry závislými na čase může být např. populace kura bankivského (předka moderního kura domácího), jehož reprodukce je úzce navázána na životní cyklus specifického druhu bambusu (*melocanna baccifera*). Tento druh bambusu se vysemení pouze jednou za několik desítek let a živočichům živícím se jeho plody, mezi nimiž je i kur bankivský, náhle prudce naroste kapacita prostředí a s ní i velikost jejich populace [2]. Při opětovném poklesu kapacity dochází k úhynu či migraci jedinců z důvodu nedostatku potravy. Je možné, že právě tento fenomén vedl k domestikaci kura. Výzkum jeho genomu totiž poukazuje na jedinou skokovou domestikaci [2]. Jiný druh, schopný rychle se rozmnožit, navázaný na tento cyklus bambusu je krysa obecná. Ta pravidelně po úbytku semen způsobuje škody na úrodě místním obyvatelům [4]. Podobný vztah jako má bambus a kur lze nalézt i v Severní Americe u populace dubu červeného a veverky popelavé [8]. V obou těchto případech rostlina volí taktiku přesycení predátora svých semen v periodicky se odehrávajících výjimečných okamžicích a vyhladovění predátora v mezích. Tímto způsobem si rostlina zajistí, že se alespoň část jejích semen uchytí. Populace rostliny tak má neautonomní růstový parametr, zatímco populace predátorů semen neautonomní parametr kapacity a v jeho důsledku i růstový. Příkladem, kde je neautonomní hlavně kapacita prostředí by pak mohla být populace zebry stepní na jednom specifickém území na africké savaně. Zde se pravidelně střídá období dešťů a období sucha, což ovlivňuje množství potravy zeber. Ty, v reakci na snížení kapacity, migrují jinam a tudíž dochází k poklesu jejich populace na zmíněném území [6].

Dalším příkladem, nyní již z oblasti matematické ekonomie, může být prodej sezónního zboží jako jsou zimní pneumatiky, plavky nebo lyžařské brýle apod. V tomto případě lze kapacitu prostředí interpretovat jako poptávku po zboží. K pravidelným změnám poptávky pak dochází vždy mezi létem a zimou. Dává pak smysl, aby na cyklické změny kapacity (tj. poptávky) byly navázány cyklické změny růstu produkce (tj. nabídky). Příkladem skokového růstu kapacity pak může být rozšíření výrobního závodu na nový trh nebo rozšíření repertoáru výrobků [7].

Přesnějším modelováním situace s rostlinami a predátory jejich semen by se dalo lépe

a s předstihem připravit na budoucí vlny škůdců. V případě situace s prodejem zboží lze přemýšlet nad otázkami, kolik zboží vyrábět, aby nedošlo k nadprodukcí. Nakonec, v případě rozšiřování podniku na nový trh lze odhadnout za jak dlouho (případně zda vůbec) bude schopen podnik nově navýšenou kapacitu zaplnit.

V kapitole 2 je nejprve popsáno a vysvětleno značení používané v práci. Dále jsou zavedeny tři výše zmíněné analyzované modely – standardní autonomní logistický růst, obdoba logistického růstu s neautonomním růstovým parametrem a obdoba logistického růstu s neautonomním parametrem kapacity prostředí. V kapitole 3 jsou jednotlivé neautonomní modely analyzovány a porovnány s autonomním modelem. Následně, v kapitole 4, jsou popsány simulace vlastností modelů, které zatím nebyly analyticky dokázány. Na závěr jsou v kapitole 5 shrnuty výsledky analýz a diskutovány nedostatky a možné pokračování práce. K porozumění práci jsou předpokládány základní znalosti z oblasti matematické analýzy, diferenciálních rovnic a dynamických systémů (popsány např. v publikacích [5] a [10]).

2 Zavedení modelů a značení

Níže je nejprve popsáno použité značení používané v celé práci a následně jsou zavedeny jednotlivé modely, které jsou v dalších kapitolách analyzovány.

2.1 Použité značení

- **Čas t** je nezávislou spojitou proměnnou ve všech modelech v této práci.
- **Sledovaná veličina $x(t)$** je veličina, jejíž růst v čase t je v jednotlivých modelech popisován. V závislosti na kontextu se může jednat např. o počet jedinců v populaci, množství podnikem prodaného zboží či hodnotu cenného papíru na trhu.
- **Autonomní růstový parametr α** reprezentuje rychlost růstu sledované veličiny. Kladná hodnota α představuje růst veličiny a záporná (resp. nulová) hodnota α pak značí nikoliv růst, ale pokles (resp. stagnaci) veličiny. V závislosti na kontextu může α představovat porodnost živočichů, rychlost šíření informace o novém produktu či růst tržní hodnoty cenného papíru. Obecně sice platí $\alpha \in \mathbb{R}$, ale dále v práci je uvažována pouze $\alpha > 0$, což odpovídá růstu, který je u logistických modelů přirozeně předpokládán.
- **Neautonomní růstový parametr $a(t)$** je v čase nekonstantní obdobou parametru α . V této práci je za obdobný růstový parametr považované takové periodické $a(t)$, které na své periodě $[t_1, t_2]$ splňuje podmínky $a(t) > 0$ a

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt = \alpha.$$

- **Autonomní kapacita prostředí x** reprezentuje maximální dlouhodobě udržitelnou hodnotu sledované veličiny. V této práci je uvažována $x > 0$ a lze si ji v závislosti na kontextu představit jako nosnou kapacitu prostředí, kde populace živočichů sídlí, velikost cílové skupiny zákazníků, na niž je produkt směřován či maximální dosažitelnou tržní hodnotu cenného papíru.

- **Neautonomní kapacita prostředí** $k(t)$ je v čase nekonstantní obdobou parametru κ . Za obdobný parametr kapacity prostředí je (podobně jako u růstového parametru) považováno takové periodické $k(t)$, které na své periodě $[t_1, t_2]$ splňuje podmínky $k(t) > 0$ a

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} k(t) dt = \kappa.$$

2.2 Analyzované modely

Prvním modelem je již výše zmíněný Verhulstův autonomní model logistického růstu. Ten lze popsat počáteční úlohou

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{\kappa}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{A})$$

Úloha je označena (A), protože se jedná o autonomní úlohu. Její nestacionární řešení je v této práci vždy značeno $x_A(t)$.

Ve druhém zkoumaném modelu dochází k výměně autonomního růstového parametru α za neautonomní $a(t)$. Počáteční úloha popisující tento již neautonomní model je

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{\kappa}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{R})$$

Úloha je označena (R), protože je neautonomní v růstovém parametru. Její nestacionární řešení je v této práci vždy značeno $x_R(t)$.

Posledním zkoumaným modelem je ten, u něhož dochází k výměně autonomního parametru kapacity prostředí κ za neautonomní $k(t)$. Počáteční úloha popisující tento druhý neautonomní model je

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k(t)}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (\text{K})$$

Úloha je označena (K), protože je neautonomní v parametru kapacity prostředí. Její nestacionární řešení je v této práci vždy značeno $x_K(t)$.

3 Analýza modelů a jejich chování

3.1 Neautonomní logistický růst v růstovém parametru

V této sekci jsou srovnávány dvě počáteční úlohy. První z nich je (A), která má za podmínky, že $\kappa \neq 0$, dvě stacionární řešení

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = \kappa$$

a nestacionární řešení získané metodou separace proměnných [9]

$$x_A(t) = \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{at})^{-1}}. \quad (1)$$

Řešení počáteční úlohy (A) za předpokladu, že $x_0 \neq \varkappa \neq 0$ splňuje

$$C = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa}{x_0}}. \quad (2)$$

Druhou počáteční úlohou je (R). Stacionární řešení má úloha (R) stejná jako úloha (A). Jelikož je diferenciální rovnice z úlohy (R) také separovatelná, lze ji vyřešit obdobně jako rovnici z úlohy (A). Nestacionárním řešením úlohy (R) tak je

$$x_R(t) = \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{A(t)})^{-1}}, \quad (3)$$

kde

$$A(t) = \int a(t) dt.$$

Jelikož je takovýchto $A(t)$ nekonečně mnoho, bude zvoleno takové, aby $A(0) = 0$, podobně jako u řešení (1). Tudíž bude i zde platit

$$C = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa}{x_0}}.$$

Pro trajektorie nestacionárních řešení úloh (A) i (R) s $x_0 > \varkappa > 0$ (resp. $0 < x_0 < \varkappa$) je $C > 0$ (resp. $C < 0$).

Lemma 1. Pokud je $x_0 > 0$, pak pro trajektorie úloh (A) a (R) platí:

- I. existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) = \alpha T$, pak $x_R(T) = x_A(T)$.
- II. Je-li $x_0 < \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) > \alpha T$, pak $x_R(T) > x_A(T)$.
- III. Je-li $x_0 > \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) > \alpha T$, pak $x_R(T) < x_A(T)$.
- IV. Je-li $x_0 < \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) < \alpha T$, pak $x_R(T) < x_A(T)$.
- V. Je-li $x_0 > \varkappa$ a existuje-li takové $T > 0$, že $A(T) < \alpha T$, pak $x_R(T) > x_A(T)$.

Důkaz. Důkaz je proveden přímo pro každou část lemmatu 1 zvlášť.

- I. Protože $A(T) = \alpha T$, pak musí po dosazení $A(T)$ do předpisu (3) platit

$$x_R(T) = \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{\alpha T})^{-1}}.$$

Hodnota $x_A(T)$ je po dosazení T do předpisu (1)

$$x_A(T) = \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{\alpha T})^{-1}}$$

a tudíž $x_R(T) = x_A(T)$.

II. Protože $A(T) > \alpha T$, pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že

$$A(T) = \alpha T + \varepsilon.$$

Po dosazení do vztahu (3) dostáváme

$$x_R(T) = \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{\alpha T + \varepsilon})^{-1}}.$$

Ze vztahu

$$1 < e^\varepsilon$$

plyne (protože $C < 0$)

$$Ce^{\alpha T} > Ce^{\alpha T + \varepsilon},$$

nebo ekvivaletně

$$-Ce^{\alpha T + \varepsilon} > -Ce^{\alpha T}.$$

Po převrácení a přičtení jedničky dostáváme

$$1 - (Ce^{\alpha T + \varepsilon})^{-1} < 1 - (Ce^{\alpha T})^{-1}.$$

Po převrácení a přenásobení $\varkappa > 0$ získáváme

$$\frac{\varkappa}{1 - (Ce^{\alpha T + \varepsilon})^{-1}} > \frac{\varkappa}{1 - (Ce^{\alpha T})^{-1}},$$

a tedy $x_R(T) > x_A(T)$.

III. Třetí část je dokázána podobně jako druhá. Při použití stejných úprav nerovnice $1 < e^\varepsilon$ díky $C > 0$ ukážeme, že $x_R(T) < x_A(T)$.

IV. Čtvrtá část je dokázána podobně jako druhá. Tentokrát, jelikož $A(T) < \alpha T$, pak musí existovat $\varepsilon > 0$ takové, že

$$A(T) = \alpha T - \varepsilon.$$

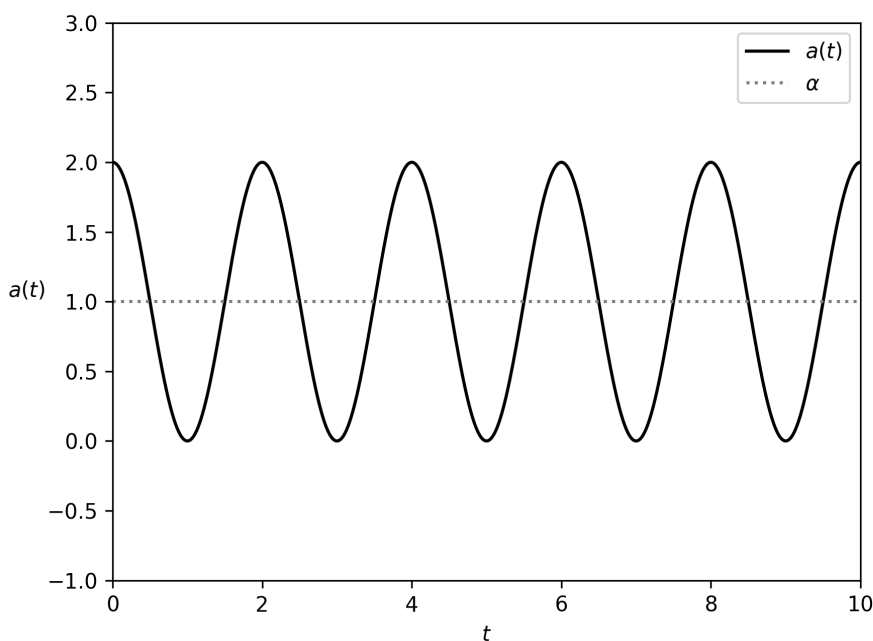
Dále pokračujeme stejnými úpravami nerovnice $1 < e^\varepsilon$ a díky $C < 0$ ukážeme, že $x_R(T) < x_A(T)$.

V. Vyjdeme-li z druhé a čtvrté části tohoto důkazu, lze zde z nerovnice $1 < e^\varepsilon$ díky $C > 0$ ukázat, že $x_R(T) > x_A(T)$.

□

Z lemmatu 1 plyne, že pokud je možné určit hodnotu $A(T)$, pak lze pro libovolné $t \geq 0$ rozhodnout, zda pro něj bude hodnota neautonomního modelu $x_R(T)$ větší, menší nebo rovna hodnotě autonomního modelu $x_A(T)$.

Lemma 2. Pokud je $0 < x_0 < \varkappa$, pak bude pro všechna $t \geq 0$ platit $x_R(t) < \varkappa$.



Obrázek 1: Neautonomní růstový parametr $a(t)$ podle předpisu (4) a jeho autonomní alternativa α .

Důkaz. Díky $x_0 < \kappa$ víme, že $C < 0$ (viz zavedení C u řešení (3)). Vyjděme ze vztahu $0 < 1$. Po jeho vydělení výrazem $Ce^{A(t)} < 0$ (protože $e^{A(t)} > 0$) dostáváme

$$0 > (Ce^{A(t)})^{-1}.$$

Po přičtení jedničky a odečtení výrazu na pravé straně nerovnice získáme

$$1 - (Ce^{A(t)})^{-1} > 1.$$

Výraz na levé straně nerovnice je kladný. Po převrácení výrazů na obou stranách nerovnice a vynásobení $\kappa > 0$ musí platit

$$\frac{\kappa}{1 - (Ce^{A(t)})^{-1}} < \kappa$$

a tedy $x_R(t) < \kappa$ pro $x_0 < \kappa$.

□

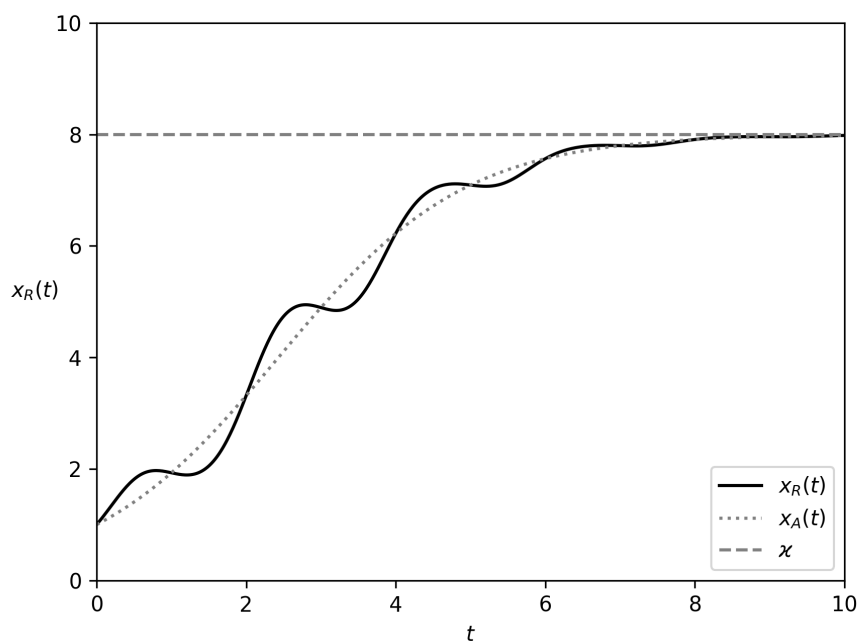
3.2 Příklad s periodickým neautonomním růstovým parametrem

Uvažujme $\alpha = 0.8$, $\kappa = 8$, $x_0 = 1$ a periodicky se měnící růstový parametr (viz obrázek 1)

$$a(t) = \cos(\pi t) + \alpha. \quad (4)$$

Lze jednoduše určit a zvolit takové $A(t)$, aby $A(0) = 0$:

$$A(t) = \frac{1}{\pi} \sin(\pi t) + \alpha t.$$



Obrázek 2: Neautonomní řešení $x_R(t)$ podle předpisu (5) a jeho autonomní alternativa $x_A(t)$ podle předpisu (1).

Funkce $x_R(t)$ pak má tvar:

$$x_R(t) = \frac{\kappa}{1 - \left(C e^{\frac{1}{\pi} \sin(\pi t) + \alpha t} \right)^{-1}}. \quad (5)$$

Na obrázku 2 ilustrujeme lemmata 1 a 2. Pro všechny body splňující podmínku I. lemmatu 1 jsou hodnoty $x_R(t)$ a $x_A(t)$ stejné a pro všechny body splňující podmínku II. (resp. III.) lemmatu 1 jsou hodnoty $x_R(t)$ vyšší (resp. nižší) než hodnoty $x_A(t)$. Dále se celý průběh řešení navzdory výraznému počátečnímu vlnění postupně uklidňuje a (podle lemmatu 2) nepřekračuje hodnotu kapacity prostředí, viz obrázek 2.

3.3 Neautonomní logistický růst v kapacitě prostředí

V této sekci je srovnávána úloha (A) s úlohou (K), která má parametr kapacity prostředí nekonstantní v čase. Za předpokladu, že $k(t) \neq 0$, má úloha (K) stacionární řešení

$$x^*(t) = 0. \quad (6)$$

Diferenciální rovnice z úlohy (K) není separovatelná a nalezení jejího nestacionárního řešení je obtížnější než u úlohy (R). Proto, narozdíl od kapitoly 3.1, je zde postup nalezení tohoto řešení popsán (v tomto postupu je předpokládáno, že $k(t) \neq 0$ a $x(t) \neq 0$). Nejprve přepíšeme rovnici z úlohy (K) na tvar

$$\frac{dx}{dt} - \alpha x = -\frac{\alpha x^2}{k(t)}.$$

Celou rovnici vydělíme výrazem $(-x^2)$ a získáme tvar rovnice

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{-x^2} + \frac{\alpha}{x} = \frac{\alpha}{k(t)},$$

který dále upravíme zavedením substituce $v(t) = \frac{1}{x(t)}$ na

$$\frac{dv}{dt} + \alpha v = \frac{\alpha}{k(t)}.$$

Po přenásobení obou stran rovnice výrazem $e^{\alpha t}$ a nahrazení výrazu $\alpha e^{\alpha t} v$ výrazem $v \frac{d}{dt} e^{\alpha t}$ získáme

$$e^{\alpha t} \frac{dv}{dt} + v \frac{d}{dt} e^{\alpha t} = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{k(t)}.$$

Pro levou stranu rovnice použijeme vztah pro derivaci součinu funkcí

$$\frac{d}{dt} (e^{\alpha t} v) = \frac{\alpha e^{\alpha t}}{k(t)}.$$

Nyní obě strany rovnice zintegrujeme podle t na

$$e^{\alpha t} v = \alpha \int \frac{e^{\alpha t}}{k(t)} dt.$$

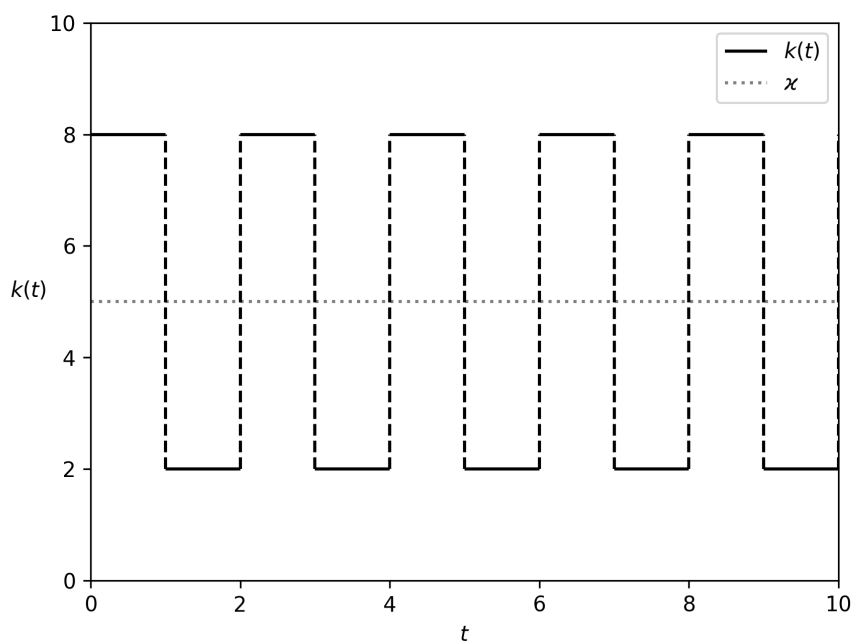
Obě strany nyní vydělíme výrazem $e^{\alpha t}$ a získáme

$$v = e^{-\alpha t} \left(\alpha \int \frac{e^{\alpha t}}{k(t)} dt \right).$$

Nakonec vrátíme substituci $v(t) = \frac{1}{x(t)}$ a dostáváme nestacionární řešení úlohy (K)

$$x_K(t) = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha \int \frac{e^{\alpha t}}{k(t)} dt}. \quad (7)$$

Z důvodu neexistence explicitního tvaru řešení (7) (v obecném případě) zde nejsou rozebrány obecné vlastnosti tohoto řešení v porovnání s autonomním řešením $x_A(t)$ dle (1),



Obrázek 3: Neautonomní parametr kapacity prostředí $k(t)$ podle předpisu (8) a jeho autonomní alternativa x .

jako tomu bylo v odstavcích 3.1 a 3.2. Namísto toho se bude zbytek této části věnovat analýze jednoho specifického a jednoduchého příkladu úlohy s neautonomní kapacitou prostředí.

3.4 Analýza příkladu se specifickou neautonomní kapacitou

Uvažujme $k(t)$ z úlohy (K) jako po částech konstantní funkci s předpisem

$$k(t) = \begin{cases} x + \varepsilon, & t \in [2n, 2n + 1), \\ x - \varepsilon, & t \in [2n + 1, 2n + 2), \end{cases} \quad (8)$$

kde $\varepsilon > 0$ reprezentuje rozdíl kapacit prostředí od průměru v jednotlivých obdobích, viz obrázek 3. V závislosti na kontextu se může jednat např. o rozdíl disponibilní potravy mezi obdobími dešťů a obdobími sucha na savaně či rozdíl v poptávce po sezónním zboží.

3.4.1 Nalezení nestacionárního řešení

Jelikož $x + \varepsilon$ i $x - \varepsilon$ jsou konstanty, bude možné určit nestacionární řešení $x_K(t)$ po částech na jednotlivých intervalech podobně jako řešení (1) úlohy (A). Je třeba zdůraznit, že takovéto řešení nebude klasické, protože pravá strana rovnice (K) bude nespojitá v čase díky nespojitosti funkce $k(t)$ dané (8). Pravá strana

$$f(t, x) = \alpha x \left(1 - \frac{x}{k(t)} \right)$$

bude ale splňovat tzv. carathéodoryovskou podmínku [3, kapitola I.5.] protože

- $f(t, x)$ je spojitá v x pro každé $t \in \mathbb{R}$,
- $f(t, x)$ je měřitelná (zde po částech spojitá) v t pro každé pevné $x \in \mathbb{R}$,
- $f(t, x)$ je omezená na každé kompaktní (omezené a uzavřené) podmnožině \mathbb{R}^2 , což plyne z jednoduché definice funkce $k(t)$ pomocí 8.

Budeme mluvit o tzv. Carathéodoryovském řešení, pro které lze rozšířit základní koncepty (Peanova věta, Picardova-Lindelöfova věta, spojitá závislost a maximální interval existence), viz [3, kapitola I.5.]. Ve spočetně mnoha bodech nebude existovat derivace tohoto řešení. Z důvodu spojitého navazování jednotlivých částí $x_K(t)$ na sebe bude třeba (místo jedné konstanty C pro celé řešení) zavést posloupnost konstant C_i , kde $i \in \mathbb{N}_0$. Každé jednotlivé části $x_K(t)$ pak přiřadíme příslušný člen C_i . Takto sestavené nestacionární řešení tedy bude mít tvar

$$x_K(t) = \begin{cases} \frac{\varkappa + \varepsilon}{1 - (C_{2n} e^{\alpha(t-2n)})^{-1}}, & t \in [2n, 2n + 1), \\ \frac{\varkappa - \varepsilon}{1 - (C_{2n+1} e^{\alpha(t-(2n+1))})^{-1}}, & t \in [2n + 1, 2n + 2), \end{cases} \quad (9)$$

kde $n \in \mathbb{N}_0$ a C_i je rekurentně určená posloupnost

$$C_0 = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa + \varepsilon}{x_0}},$$

$$C_i = \begin{cases} \frac{-C_{i-1}(\varkappa + \varepsilon)}{-e^{-\alpha}(\varkappa + \varepsilon) + 2C_{i-1}\varepsilon}, & i = 2n, \\ \frac{C_{i-1}(\varkappa + \varepsilon)}{e^{-\alpha}(\varkappa - \varepsilon) + 2C_{i-1}\varepsilon}, & i = 2n + 1. \end{cases}$$

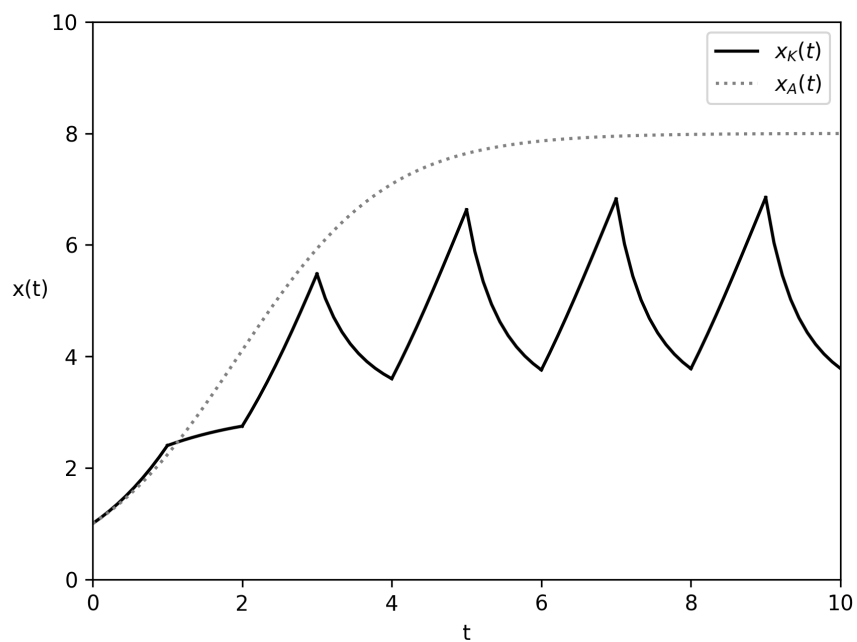
Na obrázcích 4 – 7 je vidět, že v závislosti na parametrech $\alpha, \varkappa, \varepsilon$ a x_0 může mít řešení $x_K(t)$ svůj průběh kvalitativně odlišný od průběhu řešení $x_A(t)$. Zejména na obrázcích 4 a 6 se zdá, že průběhy $x_K(t)$ oscilují kolem hodnot nižších než \varkappa a na rozdíl od jim odpovídajícím průběhům $x_A(t)$ k průměrné kapacitě prostředí \varkappa nekonvergují.

3.4.2 Zavedení limitní funkce $\xi(t)$

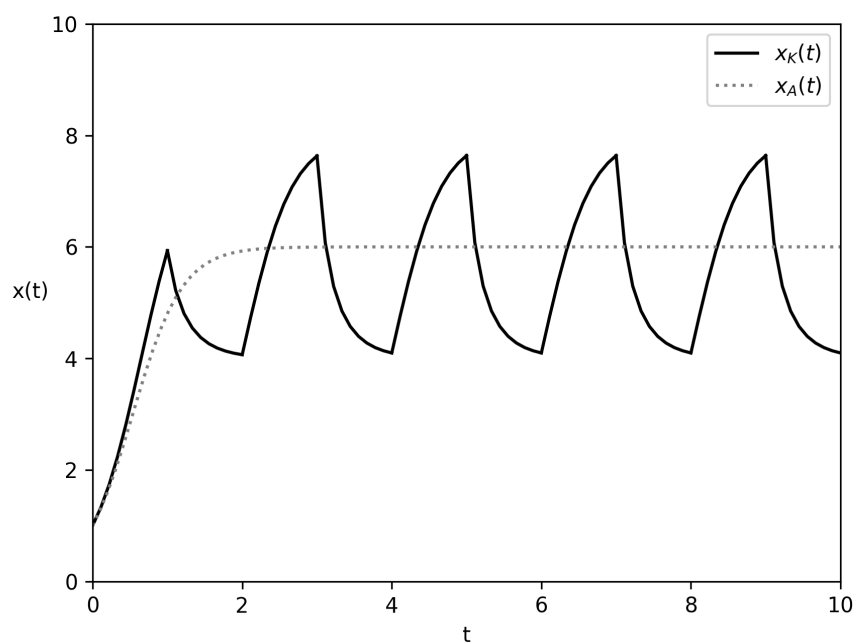
Abychom lépe porozuměli oscilujícímu chování řešení $x_K(t)$, pokusme se nalézt limitní funkci $\xi(t)$, ke které $x_K(t)$ pro $t \rightarrow \infty$ konverguje. Nejprve přepíšeme posloupnost C_i tak, aby byly její jednotlivé členy vyjádřeny pomocí $(i - 2)$ -hého členu:

$$C_0 = \frac{1}{1 - \frac{\varkappa + \varepsilon}{x_0}},$$

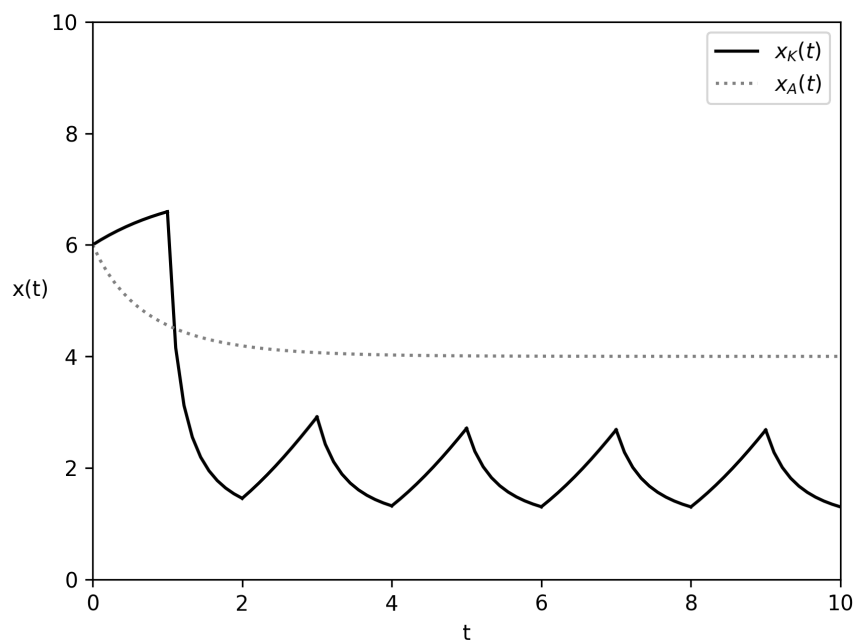
$$C_1 = \frac{C_0(\varkappa + \varepsilon)}{e^{-\alpha}(\varkappa - \varepsilon) + 2C_0\varepsilon},$$



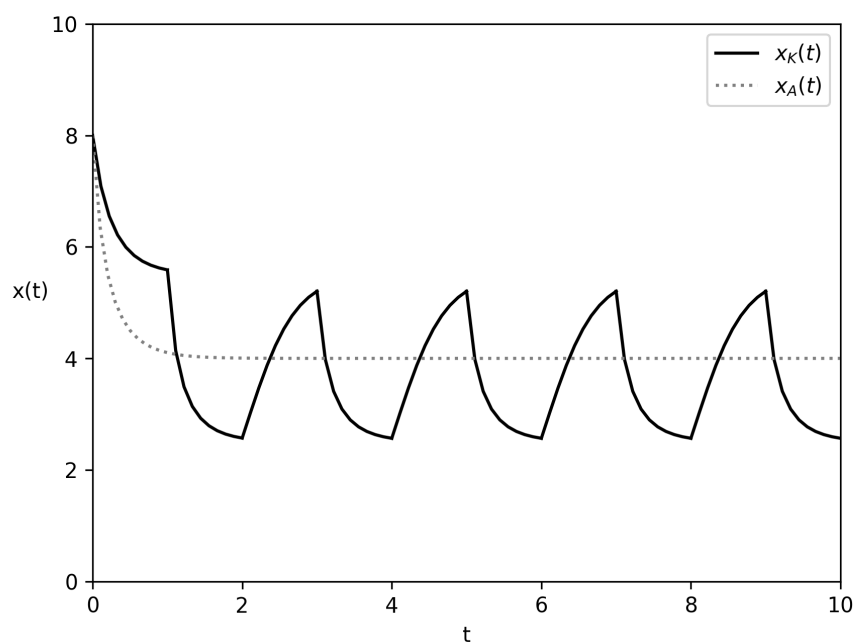
Obrázek 4: Průběh autonomního řešení $x_A(t)$ podle předpisu (1) a jeho neautonomní alternativy $x_K(t)$ podle předpisu (9) s hodnotami parametrů $\alpha = 1, \chi = 8, \varepsilon = 5, x_0 = 1$.



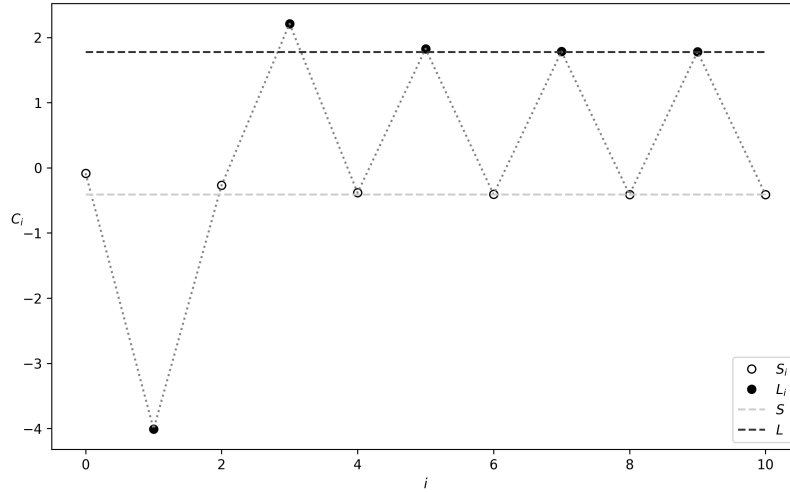
Obrázek 5: Průběh autonomního řešení $x_A(t)$ podle předpisu (1) a jeho neautonomní alternativy $x_K(t)$ podle předpisu (9) s hodnotami parametrů $\alpha = 3, \chi = 6, \varepsilon = 2, x_0 = 1$.



Obrázek 6: Průběh autonomního řešení $x_A(t)$ podle předpisu (1) a jeho neautonomní alternativy $x_K(t)$ podle předpisu (9) s hodnotami parametrů $\alpha = 1, \chi = 4, \varepsilon = 3, x_0 = 6$.



Obrázek 7: Průběh autonomního řešení $x_A(t)$ podle předpisu (1) a jeho neautonomní alternativy $x_K(t)$ podle předpisu (9) s hodnotami parametrů $\alpha = 3, \chi = 4, \varepsilon = 1.5, x_0 = 8$.



Obrázek 8: Posloupnost C_i náležící řešení $x_K(t)$ z obrázku 4. Hodnoty parametrů jsou $\alpha = 1, \kappa = 8, \varepsilon = 5, x_0 = 1$.

$$C_i = \begin{cases} \frac{C_{i-2}e^{2\alpha}(\varepsilon + \kappa)}{\varepsilon + \kappa + 2C_{i-2}\varepsilon e^\alpha(e^\alpha - 1)}, & i = 2n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{C_{i-2}e^{2\alpha}(\varepsilon - \kappa)}{\varepsilon - \kappa + 2C_{i-2}\varepsilon e^\alpha(e^\alpha - 1)}, & i = 2n + 1, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Takto určenou posloupnost C_i lze rozdělit na podposloupnosti S_i a L_i . Zavedme je následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} S_i &= C_{2i}, \\ L_i &= C_{2i+1}. \end{aligned}$$

Posloupnost S_i tedy obsahuje pouze prvky C_i na sudých indexech a posloupnost L_i naopak pouze prvky C_i na lichých indexech. Za podmínky, že $\alpha > 0$, je limitou posloupnosti S_i pro $i \rightarrow \infty$

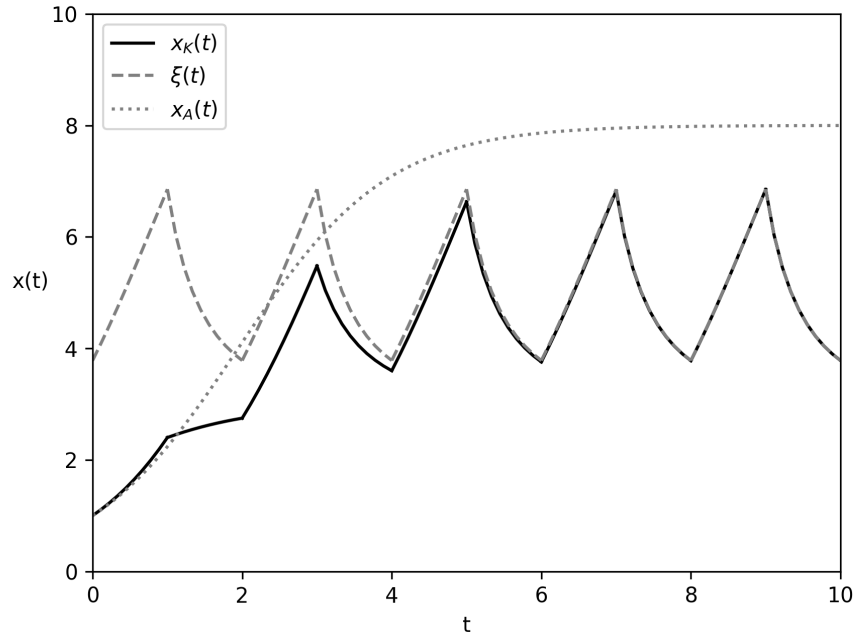
$$S := \lim_{i \rightarrow \infty} S_i = -\frac{(1 + e^{-\alpha})(\kappa - \varepsilon)}{2\varepsilon} < 0. \quad (10)$$

a limitou posloupnosti L_i pro $i \rightarrow \infty$

$$L := \lim_{i \rightarrow \infty} L_i = \frac{(1 + e^{-\alpha})(\kappa + \varepsilon)}{2\varepsilon} > 0. \quad (11)$$

Na obrázku 8 je zobrazena posloupnost C_i s pevně určenými parametry $\alpha, \kappa, \varepsilon, x_0$ a konvergence podposloupnosti S_i k S (resp. L_i k L).

Z existence limit posloupností S_i a L_i plyne existence periodické limitní funkce $\xi(t)$ s předpisem



Obrázek 9: Konvergence řešení $x_K(t)$ z obrázku 4 k jeho příslušné limitní funkci $\xi(t)$ spolu s jím v parametrech odpovídajícím průběhem řešení $x_A(t)$. Hodnoty parametrů jsou $\alpha = 1, \chi = 8, \varepsilon = 5, x_0 = 1$.

$$\xi(t) = \begin{cases} \frac{\chi + \varepsilon}{1 - (S e^{\alpha(t-2n)})^{-1}}, & t \in [2n, 2n + 1), \\ \frac{\chi - \varepsilon}{1 - (L e^{\alpha(t-(2n+1))})^{-1}}, & t \in [2n + 1, 2n + 2), \end{cases} \quad (12)$$

která splňuje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |x_K(t) - \xi(t)| = 0.$$

Obrázek 9 ilustruje konvergenci řešení $x_K(t)$ k této limitní funkci $\xi(t)$.

3.4.3 Průměrná hodnota $\bar{\xi}$ limitní funkce $\xi(t)$

Integrální průměr $\xi(t)$ na intervalu $[2n, 2n + 1)$ bude

$$\int_{2n}^{2n+1} \frac{\chi + \varepsilon}{1 - (S e^{\alpha(t-2n)})^{-1}} dt.$$

Na intervalu $[2n + 1, 2n + 2)$ pak bude integrální průměr $\xi(t)$

$$\int_{2n+1}^{2n+2} \frac{\chi - \varepsilon}{1 - (L e^{\alpha(t-(2n+1))})^{-1}} dt.$$

Nyní můžeme definovat průměrnou hodnotu $\bar{\xi}$ limitní funkce ξ jako aritmetický průměr výše uvedených integrálních průměrů, tedy

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \left(\int_{2n}^{2n+1} \frac{\varkappa + \varepsilon}{1 - (Se^{\alpha(t-2n)})^{-1}} dt + \int_{2n+1}^{2n+2} \frac{\varkappa - \varepsilon}{1 - (L^{\alpha(t-(2n+1))})^{-1}} dt \right),$$

což lze upravit na výraz

$$\bar{\xi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\varkappa + \varepsilon}{\alpha} \ln \left(\frac{Se^{\alpha} - 1}{S - 1} \right) - \frac{\varkappa - \varepsilon}{\alpha} \ln \left(\frac{L - 1}{Le^{\alpha} - 1} \right) \right)$$

a dále na:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\alpha, \varkappa, \varepsilon) = \frac{1}{2} \ln \left(\left(\frac{Se^{\alpha} - 1}{S - 1} \right)^{\frac{\varkappa + \varepsilon}{\alpha}} \left(\frac{L - 1}{Le^{\alpha} - 1} \right)^{-\frac{\varkappa - \varepsilon}{\alpha}} \right). \quad (13)$$

Lemma 3. Průměrná hodnota limitní funkce $\bar{\xi}(\alpha, \varkappa, \varepsilon)$ je v závislosti na parametru \varkappa rostoucí.

Důkaz. Důkaz bude proveden přímo analýzou jednotlivých částí výrazu (13).

Hodnota S dle předpisu (10) je vždy záporná a s rostoucím parametrem \varkappa dále klesá. Hodnota výrazu

$$\frac{Se^{\alpha} - 1}{S - 1}$$

s klesajícím $S < 0$ (díky $\alpha > 0$) roste. Po umocnění na $\frac{\varkappa + \varepsilon}{\alpha} > 0$ tato hodnota dále roste.

Hodnota L dle předpisu (11) je vždy větší než 1 (díky $\varkappa > \varepsilon$) a s rostoucím parametrem \varkappa roste. Hodnota výrazu

$$\frac{L - 1}{Le^{\alpha} - 1}$$

je s rostoucím $L > 1$ rostoucí a (díky $\alpha > 0$) zůstává v intervalu $(0, 1)$. Po umocnění na $-\frac{\varkappa - \varepsilon}{\alpha} < 0$ tato hodnota bude také růst.

Jelikož s rostoucím parametrem \varkappa roste součin v argumentu logaritmu z výrazu (13), hodnota $\bar{\xi}$ tedy musí také růst. \square

Lemma 3 je ilustrována dále v kapitole 4.1 na obrázcích 13 a 14.

Abychom ukázali, že pro $\varepsilon \rightarrow \varkappa^-$ klesá hodnota $\bar{\xi}$ k nule, dokažme nejprve dvě pomocná lemmata.

Lemma 4. Pro $\varepsilon \rightarrow \varkappa^-$ platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varkappa^-} \left(\frac{Se^{\alpha} - 1}{S - 1} \right)^{\frac{\varkappa + \varepsilon}{\alpha}} = 1.$$

Důkaz. Díky výrazu $\varkappa - \varepsilon$ platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \varkappa^-} S = \lim_{\varepsilon \rightarrow \varkappa^-} -\frac{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa - \varepsilon)}{2\varepsilon} = 0.$$

Z toho vyplývá, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \frac{Se^\alpha - 1}{S - 1} = 1$$

a tím pádem musí být

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \left(\frac{Se^\alpha - 1}{S - 1} \right)^{\frac{\kappa + \varepsilon}{\alpha}} = 1.$$

□

Lemma 5. Pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$ platí

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \left(\frac{L - 1}{Le^\alpha - 1} \right)^{-\frac{\kappa - \varepsilon}{\alpha}} = 1.$$

Důkaz. Výraz $\kappa + \varepsilon$ v čitateli vyjádření L a výraz 2ε ve jmenovateli vyjádření L se oba pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$ blíží 2κ . Díky tomu bude

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} L = \lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \frac{(1 + e^{-\alpha})(\kappa + \varepsilon)}{2\varepsilon} = 1 + e^{-\alpha}.$$

Z toho vyplývá, že

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \frac{L - 1}{Le^\alpha - 1} = e^{-2\alpha}.$$

Nakonec, díky výrazu $\kappa - \varepsilon$, který se pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$ blíží nule, musí platit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \left(\frac{L - 1}{Le^\alpha - 1} \right)^{-\frac{\kappa - \varepsilon}{\alpha}} = 1.$$

□

Nyní již lze formulovat lemma popisující chování $\bar{\xi}$ pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$.

Lemma 6. Pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$ platí

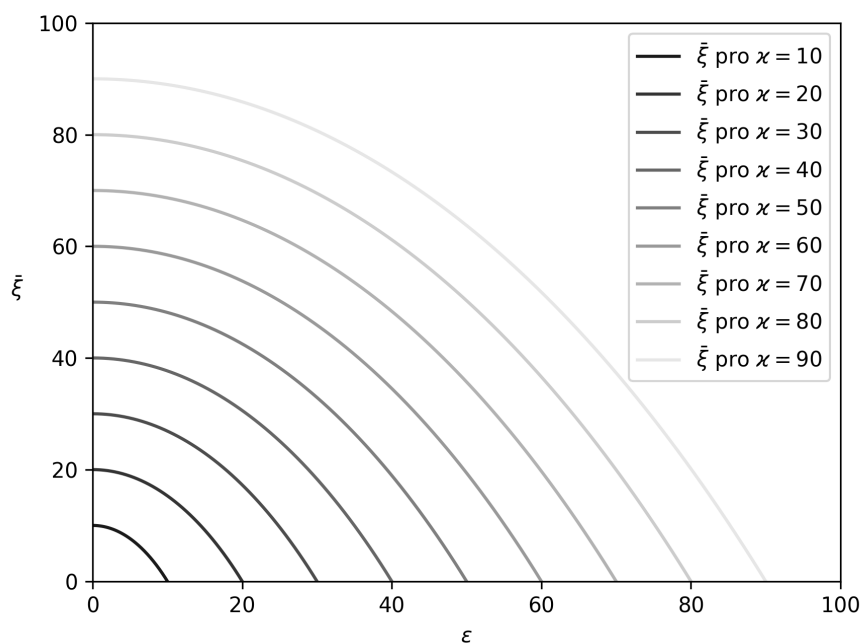
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \bar{\xi}(\alpha, \kappa, \varepsilon) = 0.$$

Důkaz. Díky lemmatům 4 a 5 víme, že limita $\bar{\xi}(\alpha, \kappa, \varepsilon)$ (dle předpisu (13)) pro $\varepsilon \rightarrow \kappa^-$ musí být

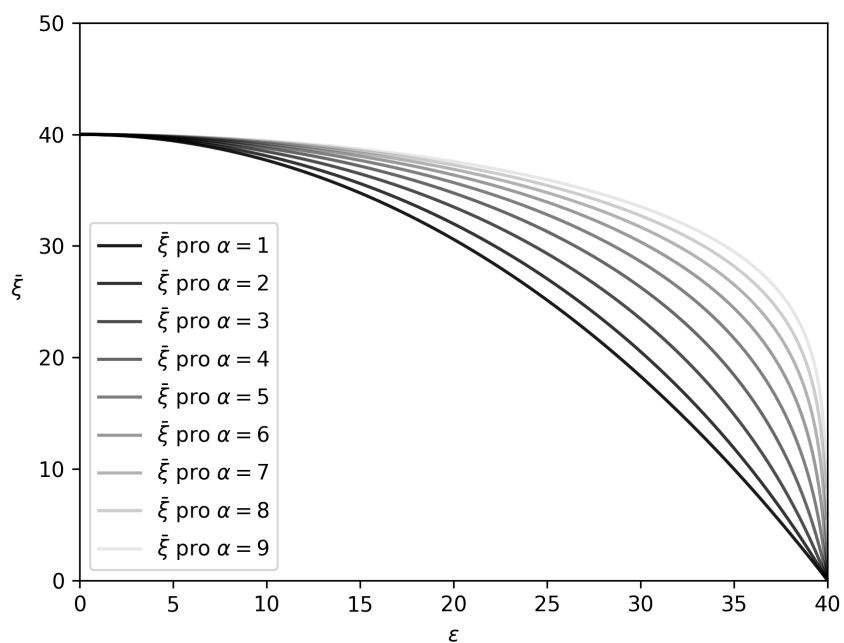
$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \kappa^-} \bar{\xi} = \left(\frac{1}{2} \ln(1 \cdot 1) \right) = 0$$

□

Na obrázku 10 (resp. 11) je ilustrována simulace závislosti $\bar{\xi}(\alpha, \kappa, \varepsilon)$ na ε při pevné hodnotě parametru α (resp. κ). Je vidět, že ve všech simulovaných případech je $\bar{\xi}$ vzhledem k κ klesající a pro $\varepsilon \rightarrow \kappa$ se blíží k nule.



Obrázek 10: Závislost $\bar{\xi}$ na ϵ s pevným $\alpha = 2$ a různými hodnotami χ .



Obrázek 11: Závislost $\bar{\xi}$ na ϵ s pevným $\chi = 40$ a různými hodnotami α .

3.4.4 Dosažení kapacity prostředí

Vraťme se nyní k obrázkům 4 – 7, na kterých je vidět, že v závislosti na parametrech α , \varkappa a ε může řešení $x_K(t)$ krátkodobě vystoupat nad kapacitu prostředí.

Lemma 7. Limitní funkce $\xi(t)$ dle předpisu (12) nabývá svého lokálního maxima pro $t = 2n + 1$ (při $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz. Důkaz je proveden přímo. Jak již bylo zmíněno v sekci s neautonomním růstem, pro autonomní řešení $x_A(t)$ platí, že pro $x_0 < \varkappa$ je jeho průběh ostře rostoucí a C dle předpisu (2) je záporné. Pro $\varkappa < x_0$ je pak průběh $x_A(t)$ ostře klesající a $C > 0$.

Řešení $\xi(t)$ dle předpisu (12) je systémem částí autonomních řešení, kde se střídají hodnoty kapacity a konstant S a L . Jak je zmíněno v kapitole 3.4.2, S je pro námi uvažované hodnoty parametrů α , \varkappa , ε vždy záporné a L vždy kladné. Tím pádem musí nutně $\xi(t)$ ostře růst na intervalu $[2n, 2n + 1)$ a ostře klesat na intervalu $[2n + 1, 2n + 2)$.

Pokud je část $\xi(t)$ na $[2n, 2n + 1)$ rostoucí a v $t = 2n + 1$ spojitě navazuje na klesající část $\xi(t)$ na $[2n + 1, 2n + 2)$ bude hodnota $\xi(2n + 1)$ z definice lokálním maximem $\xi(t)$ na intervalu $[2n, 2n + 2)$. \square

Lemma 8. Limitní funkce $\xi(t)$ dle předpisu (12) v $t = 2n$ nabývá svého lokálního minima (při $n \in \mathbb{N}$) a platí $\xi(2n) < \varkappa$.

Důkaz. Skutečnost, že $\xi(2n)$ je lokálním minimem lze dokázat podobně jako u důkazu lemmatu 7. Řešení $\xi(t)$ dle předpisu (12) je systémem částí autonomních řešení, kde se střídají hodnoty kapacity a konstant S a L . Jak je zmíněno v kapitole 3.4.2, S je pro námi uvažované hodnoty parametrů α , \varkappa , ε vždy záporné a L vždy kladné. Tím pádem musí nutně $\xi(t)$ ostře klesat na intervalu $[2n - 1, 2n)$ a ostře růst na intervalu $[2n, 2n + 1)$.

Pokud je část $\xi(t)$ na $[2n - 1, 2n)$ klesající a v $t = 2n$ spojitě navazuje na rostoucí část $\xi(t)$ na $[2n, 2n + 1)$ bude hodnota $\xi(2n)$ z definice lokálním minimem $\xi(t)$ na intervalu $[2n - 1, 2n + 1)$.

Abychom dokázali druhou část lemmatu, vyjděme z nerovnice $\xi(2n) < \varkappa$, kterou lze (dosazením do předpisu (12) a nahrazením S jeho vyjádřením dle (10)) přepsat na

$$\frac{\varkappa + \varepsilon}{1 - \frac{1}{\frac{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa - \varepsilon)}{2\varepsilon}}} < \varkappa. \quad (14)$$

Výraz ve jmenovateli na levé straně nerovnice (14) lze upravit na

$$1 + \frac{2\varepsilon}{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa - \varepsilon)}. \quad (15)$$

Výraz (15) je kladný, protože všechny jeho jednotlivé členy jsou kladné (pro námi uvažované hodnoty parametrů). Po vynásobení nerovnice (14) výrazem (15) získáme

$$\varkappa + \varepsilon < \varkappa + \frac{2\varkappa\varepsilon}{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa - \varepsilon)}.$$

Rozšířením zlomku z pravé strany této nerovnice výrazem e^α a následnými úpravami dostaneme

$$\kappa + \varepsilon < \frac{\kappa(\kappa + \kappa e^\alpha - \varepsilon + \varepsilon e^\alpha)}{(e^\alpha + 1)(\kappa - \varepsilon)}.$$

Přenosobením výrazem $(e^\alpha + 1)(\kappa - \varepsilon) > 0$ pak lze upravit nerovnici na

$$(e^\alpha + 1)(\kappa - \varepsilon)(\kappa + \varepsilon) < \kappa(\kappa + \kappa e^\alpha - \varepsilon + \varepsilon e^\alpha).$$

Po dalších úpravách výrazů na obou stranách nerovnice dostaneme

$$\kappa^2(e^\alpha + 1) - \varepsilon^2(e^\alpha + 1) < \kappa^2(e^\alpha + 1) + \kappa\varepsilon(e^\alpha - 1),$$

což dále zjednodušíme na

$$0 < \varepsilon^2(e^\alpha + 1) + \kappa\varepsilon(e^\alpha - 1).$$

Oba členy výrazu na pravé straně nerovnice jsou kladné a jejich součet tedy musí být také kladný. \square

Lemma 9. Pokud je $\xi(2n + 1) > \kappa$, pak existuje interval (τ_1, τ_2) na kterém platí $\xi(t) > \kappa$ (pro $n \in \mathbb{N}$).

Důkaz. Z lemmatu 8 víme, že $\xi(2n) < \kappa$. Z Bolzanovy věty poté vyplývá, že na intervalu $(2n, 2n + 1)$ (resp. $(2n + 1, 2n + 2)$) musí existovat τ_1 (resp. τ_2) takové, že $\xi(\tau_1) = \kappa$ (resp. $\xi(\tau_2) = \kappa$). \square

Pokud je splněna podmínka lemmatu 9, pak lze (pro $n \in \mathbb{N}$) dosazením do rovnice $\xi(t) = \kappa$ na intervalu $[2n, 2n + 1)$ vyjádřit τ_1 jako

$$\tau_1 = \frac{\alpha \cdot 2n - \ln\left(-\frac{S\varepsilon}{\kappa}\right)}{\alpha}$$

a dosazením do rovnice $\xi(t) = \kappa$ na intervalu $[2n + 1, 2n + 2)$ vyjádřit τ_2 jako

$$\tau_2 = \frac{\alpha \cdot (2n + 1) - \ln\left(\frac{L\varepsilon}{\kappa}\right)}{\alpha}.$$

Lemma 10. Pro $x_0 < \kappa$ existuje interval (τ_1, τ_2) , na kterém platí $\xi(t) > \kappa$, pokud je splněna nerovnost

$$\frac{\kappa}{\varepsilon} > \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}. \quad (*)$$

Důkaz. Dle lemmatu 7 nabývá limitní funkce $\xi(t)$ svého lokálního maxima pro $t = 2n + 1$. Vyděme z nerovnice $\xi(2n + 1) > \kappa$, kterou lze (dosazením do předpisu (12) a nahrazením L jeho vyjádřením dle (11)) přepsat na

$$\frac{\kappa - \varepsilon}{1 - \frac{1}{(1 + e^{-\alpha})(\kappa + \varepsilon)}} > \kappa. \quad (16)$$

Výraz ve jmenovateli na levé straně nerovnice (16) lze upravit na

$$1 - \frac{2\varepsilon}{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa + \varepsilon)}. \quad (17)$$

Výraz (17) je kladný, protože díky $(\varkappa + \varepsilon) > 2\varepsilon$ je zlomek $\frac{2\varepsilon}{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa + \varepsilon)}$ menší než 1. Po vynásobení nerovnice (16) výrazem (17) získáme

$$\varkappa - \varepsilon > \varkappa - \frac{2\varkappa\varepsilon}{(1 + e^{-\alpha})(\varkappa + \varepsilon)}.$$

Rozšířením zlomku z pravé strany této nerovnice výrazem e^α a následnými úpravami dostaneme

$$\varkappa - \varepsilon > \frac{\varkappa(\varkappa + \varkappa e^\alpha + \varepsilon - \varepsilon e^\alpha)}{(e^\alpha + 1)(\varkappa + \varepsilon)}.$$

Přemnožením výrazem $(e^\alpha + 1)(\varkappa + \varepsilon) > 0$ pak lze upravit nerovnici na

$$(e^\alpha + 1)(\varkappa + \varepsilon)(\varkappa - \varepsilon) > \varkappa(\varkappa + \varkappa e^\alpha + \varepsilon - \varepsilon e^\alpha).$$

Po dalších úpravách výrazů na obou stranách nerovnice dostaneme

$$\varkappa^2(e^\alpha + 1) - \varepsilon^2(e^\alpha + 1) > \varkappa^2(e^\alpha + 1) - \varkappa\varepsilon(e^\alpha - 1),$$

což dále zjednodušíme na

$$\varkappa\varepsilon(e^\alpha - 1) > \varepsilon^2(e^\alpha + 1).$$

Po vydělení nerovnice výrazem $\varepsilon^2(e^\alpha - 1) > 0$ již získáme nerovnost (*) z lemmatu 10

$$\frac{\varkappa}{\varepsilon} > \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}.$$

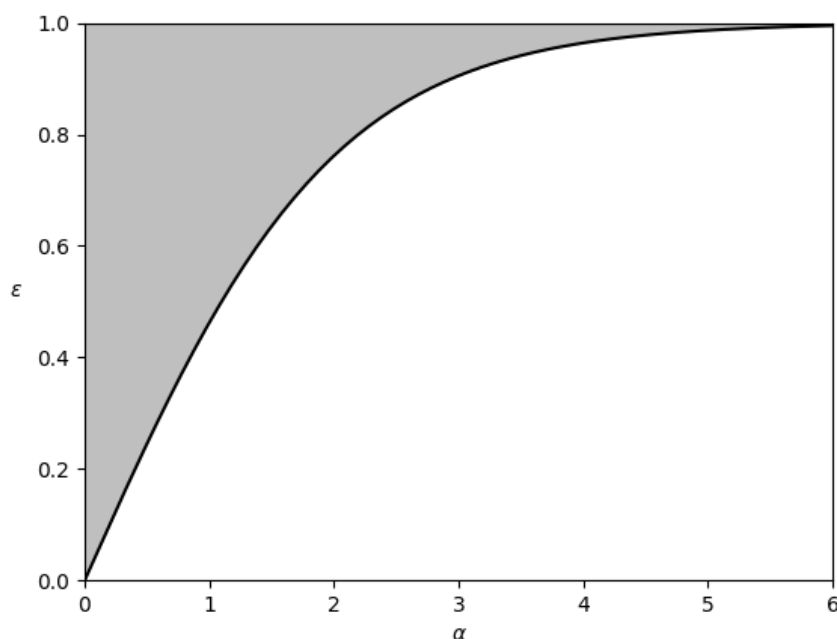
Ukázali jsme, že nerovnice z lemmatu 10 je ekvivalentní s nerovnicí $\xi(2n + 1) > \varkappa$. Dle lemmatu 9 pak musí existovat interval (τ_1, τ_2) , na kterém platí $\xi(t) > \varkappa$. □

Na obrázku 12 je zobrazeno, které dvojice parametrů α a ε splňují podmínku lemmatu 10 (vyznačeny šedě) při pevně dané hodnotě $\varkappa = 1$. Zdá se, že obecně je pro překročení průměrné kapacity prostředí vhodná kombinace vyšší hodnoty ε a nižší hodnoty α .

Lemma 11. Interval (t_1, t_2) , na kterém platí $x_K(t) > \varkappa$ existuje, pokud je splněna nerovnost

$$\frac{\varkappa}{\varepsilon} > \frac{e^\alpha + 1}{e^\alpha - 1}.$$

Důkaz. Z lemmatu 10 plyne existence intervalu (τ_1, τ_2) , na kterém je $\xi(t) > \varkappa$. Pro $x_K(t)$ a $\xi(t)$ platí, že $\lim_{t \rightarrow \infty} |x_K(t) - \xi(t)| = 0$. Proto pro dostatečně velké t musí existovat taková $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, že $t_1 = \tau_1 + d_1$ a $t_2 = \tau_2 + d_2$. □



Obrázek 12: Ilustrace dvojic hodnot parametrů α a ε , splňujících podmínku (*) lemmatu 10 pro $\varkappa = 1$.

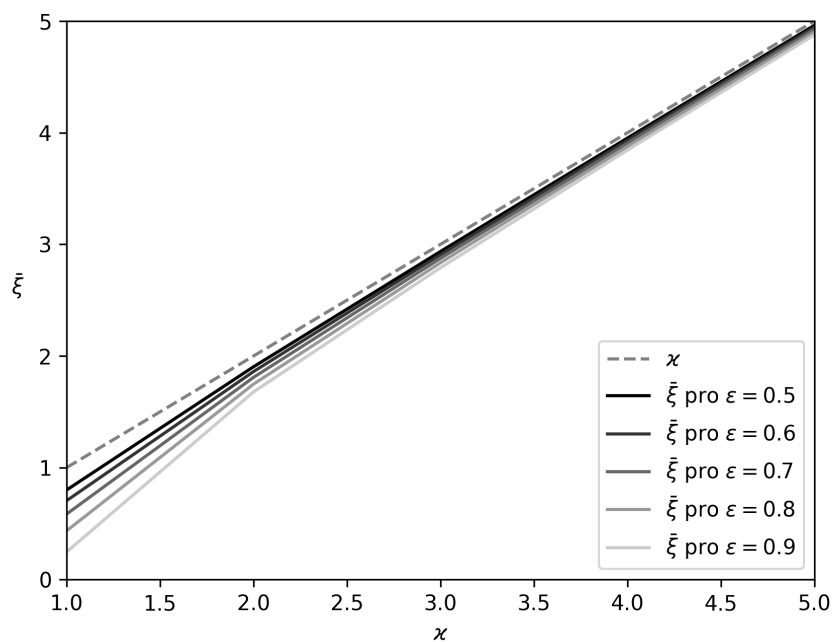
4 Simulace a hypotézy

4.1 Srovnání $\bar{\xi}$ a \varkappa

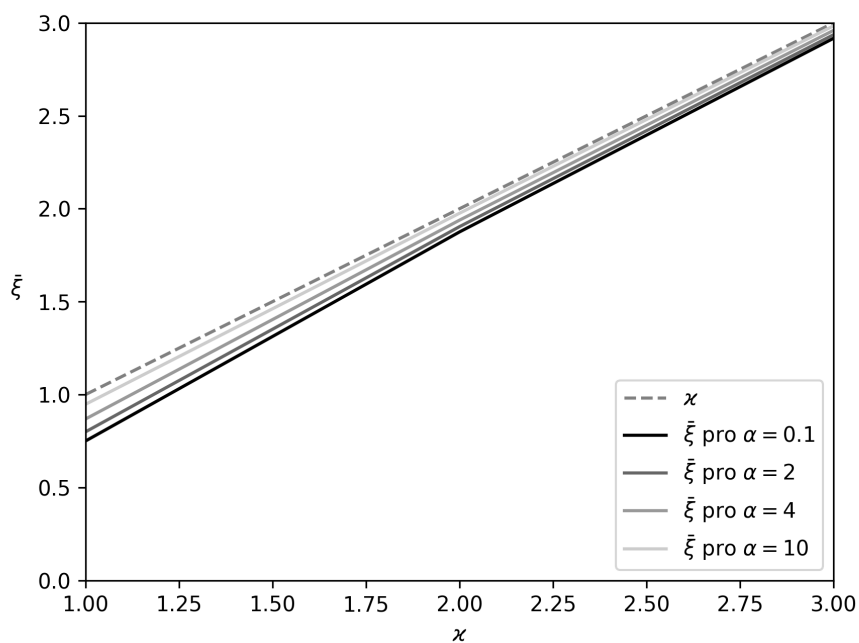
Pro srovnání hodnot $\bar{\xi}$ s \varkappa jsou provedeny dvě simulace. První z nich je ilustrována na obrázku 13. V ní je zafixována hodnota $\alpha = 2$ a následně jsou vykresleny hodnoty $\bar{\xi}$ v závislosti na \varkappa s různými hodnotami ε . Ve druhé simulaci (ilustrované na obrázku 14) je zafixovaný parametr $\varepsilon = 0.5$ a následně vykresleny hodnoty $\bar{\xi}$ v závislosti na \varkappa s různými hodnotami α . V obou simulacích je závislost $\bar{\xi}$ na \varkappa zobrazena od $\varkappa = 1$, aby bylo možné zahrnout parametr ε (v práci je uvažováno $\varepsilon < \varkappa$). Z obrázků 13 a 14 se zdá, že $\varkappa > \bar{\xi}$. Na obrázku 15 jsou srovnány hodnoty $\bar{\xi}$ na \varkappa ze simulace na obrázku 13. Na obrázku 16 jsou srovnány hodnoty $\bar{\xi}$ na \varkappa ze simulace na obrázku 14. Kladné hodnoty rozdílu $\varkappa - \bar{\xi}$ (na obrázcích 15a a 16a) a hodnoty podílu $\frac{\varkappa}{\bar{\xi}}$ menší než 1 (na obrázcích 15b a 16b) podporují hypotézu, že $\varkappa > \bar{\xi}$.

4.2 Závislost $\bar{\xi}$ na α

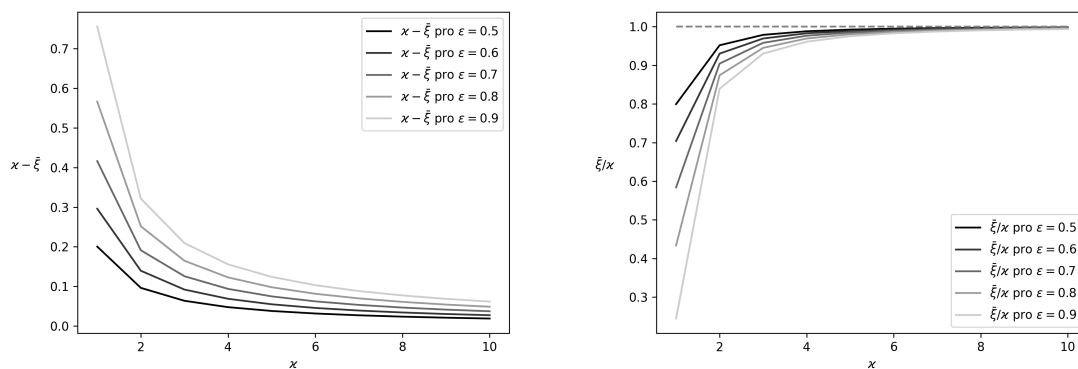
Pro ilustraci závislosti $\bar{\xi}$ na α jsou provedeny dvě simulace. První z nich je ilustrována na obrázku 17. V ní je zafixována hodnota $\varkappa = 12$ a následně jsou vykresleny hodnoty $\bar{\xi}$ v závislosti na α s různými hodnotami ε . Ve druhé simulaci (ilustrované na obrázku 18) je zafixovaný parametr $\varepsilon = 0.5$ a následně vykresleny hodnoty $\bar{\xi}$ v závislosti na α s různými hodnotami \varkappa . Z obrázků 17 a 18 se zdá, že $\bar{\xi}$ je v závislosti na α rostoucí a (pro pevnou hodnotu \varkappa) se blíží \varkappa . Zároveň se (podobně jako z obrázků 13 a 14) zdá, že i v simulacích z obrázků 17 a 18 platí $\varkappa > \bar{\xi}$.



Obrázek 13: Závislost $\bar{\xi}$ na χ s pevným $\alpha = 2$ a různými hodnotami ε .

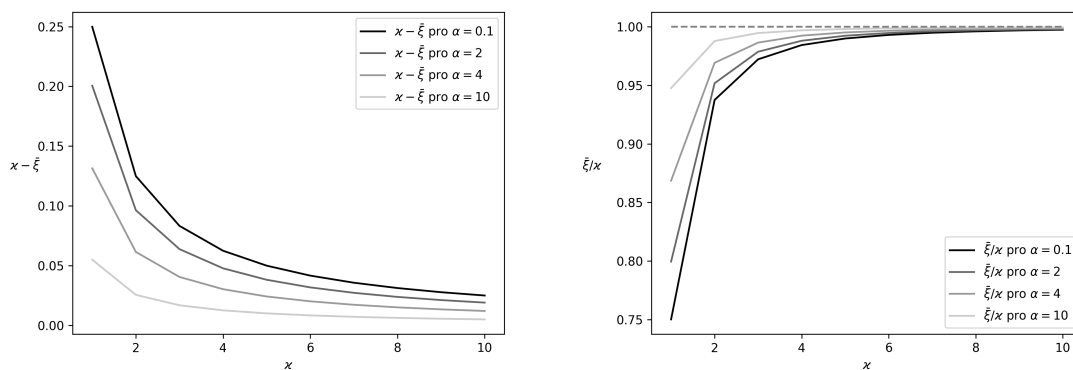


Obrázek 14: Závislost $\bar{\xi}$ na χ s pevným $\varepsilon = 0.5$ a různými hodnotami α .



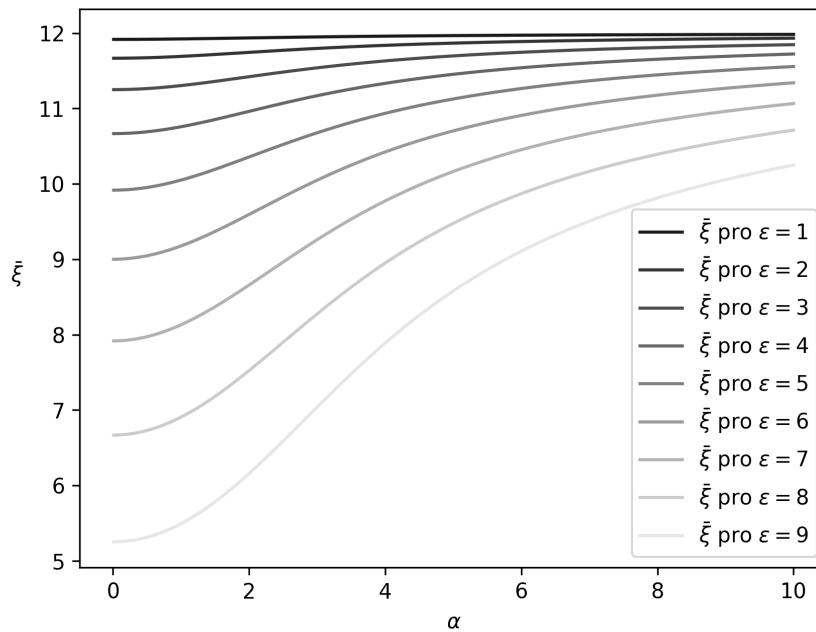
a Rozdíl hodnot x a $\bar{\xi}$ ze simulace ilustrované na obrázku 13. **b** Podíl hodnot $\bar{\xi}$ a x ze simulace ilustrované na obrázku 13.

Obrázek 15: Srovnání hodnot x a $\bar{\xi}$ ze simulace z obrázku 13.

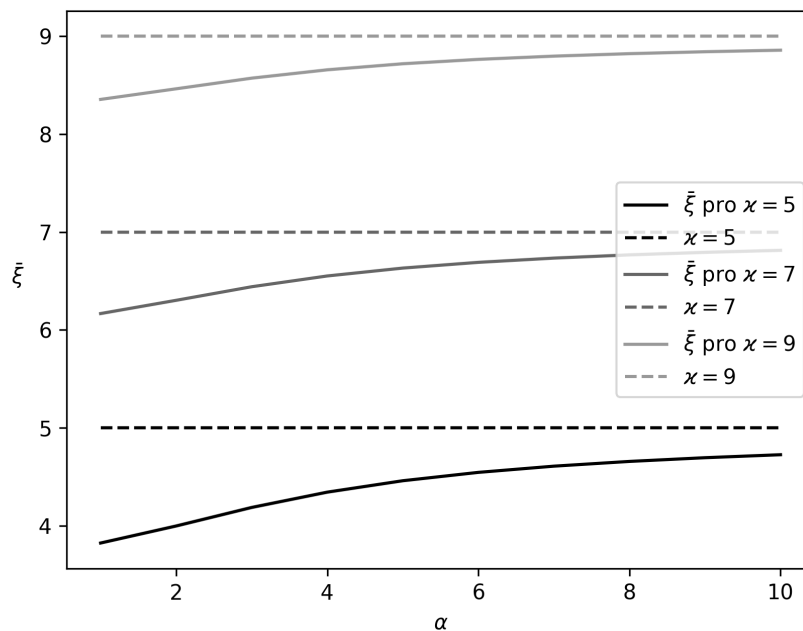


a Rozdíl hodnot x a $\bar{\xi}$ ze simulace ilustrované na obrázku 14. **b** Podíl hodnot x a $\bar{\xi}$ ze simulace ilustrované na obrázku 14.

Obrázek 16: Srovnání hodnot x a $\bar{\xi}$ ze simulace z obrázku 14.



Obrázek 17: Závislost $\bar{\xi}$ na α s pevným $\chi = 12$ a různými hodnotami ϵ .



Obrázek 18: Závislost $\bar{\xi}$ na α s pevným $\epsilon = 2.5$ a různými hodnotami χ .

5 Závěr

5.1 Shrnutí modelu s neautonomním růstovým parametrem

Díky separovatelnosti proměnných v rovnici z úlohy (R) bylo možné nalézt obecný tvar řešení $x_R(t)$. Pokud existuje explicitní vyjádření primitivní funkce $A(t)$ k neautonomnímu růstovému parametru $a(t)$, lze získat i explicitní vyjádření samotného $x_R(t)$.

Ze znalosti $a(t)$ je díky lemmatu 1 možné určit, zda je pro dané $t > 0$ hodnota $x_R(t)$ vyšší, nižší nebo stejná jako hodnota jí odpovídající $x_A(t)$. Lemma 1 sice platí pouze pro $x_0 > 0$, ale z hlediska interpretace ve vztahu k příkladům z úvodu $x_0 < 0$ nedávají smysl. Pro $x_0 = 0$ je interpretace sice jednoduchá, ale z hlediska zkoumání růstu nezajímavá, protože tato počáteční podmínka vede na stacionární řešení $x_1^* = 0$. Díky lemmatu 2 víme, že hodnoty $x_R(t)$ nikdy nepřesáhnou kapacitu prostředí.

5.2 Shrnutí modelu s neautonomní kapacitou prostředí

Přestože rovnice v úloze (K) není separovatelná, je možné nalézt obecné řešení $x_K(t)$. Explicitní tvar $x_K(t)$ ale na rozdíl od $x_A(t)$ a $x_R(t)$ nemusí existovat. Z tohoto důvodu byl dále analyzován (a zde rozebírán) pouze model s kapacitou prostředí po částech konstantní (dle předpisu (8)), u kterého lze explicitní řešení určit po částech jako (9).

Průběh takto určeného $x_K(t)$ se od $x_A(t)$ kvalitativně odlišuje v několika směrech. Prvním rozdílem je, že při splnění podmínky z lemmatu 11 existují $t > 0$, pro něž přesáhne hodnota $x_K(t)$ průměrnou kapacitu prostředí. Dále, zatímco $x_A(t)$ konverguje ke konstantě κ , $x_K(t)$ konverguje k limitní funkci $\xi(t)$ popsané předpisem (12).

Průměrná hodnota $\bar{\xi}$ limitní funkce $\xi(t)$ je podle lemmatu 3 v závislosti na parametru κ rostoucí. Pro parametr ε blízký se κ se pak hodnota $\bar{\xi}$ podle lemmatu 6 limitně blíží nule. Nakonec, simulace z kapitoly 4 naznačují, že je $\bar{\xi}$ v závislosti na parametru α rostoucí s limitou pro $\alpha \rightarrow \infty$ v κ a že $\kappa > \bar{\xi}$.

5.3 Nedostatky práce

Samotné modely (R) a (K) jsou stále značným zjednodušením skutečných popisovaných jevů. Použijme jako příklad opět populaci kura a bambusu. Jak již bylo zmíněno v úvodu, z pohledu kura se periodicky mění kapacita (vysemenění bambusu), ale i růstový parametr kura samotného. Z pohledu bambusu pak lze argumentovat, že se také mění oba parametry (změna růstového je zřejmá a za změnu kapacity lze považovat úbytek predátorů jeho semen v mezích vysemenění). Bylo by proto vhodné formulovat a studovat počáteční úlohu, kde jsou neautonomní parametry růstu i kapacity. Vzhledem k neseparovatelnosti takovéto úlohy je pravděpodobné, že (podobně jako v případě úlohy (K)) nebude existovat obecný explicitní tvar řešení.

U příkladu s $x_K(t)$ dle předpisu (9) se zatím podařilo ukázat vliv parametru α na $\bar{\xi}$ pouze simulačně a nikoliv analyticky jako tomu je u parametrů κ a ε v lemmatech 3 a 6. Stejně tak se zatím nepodařilo analyticky ověřit, zda je skutečně hodnota $\kappa > \bar{\xi}$ bez ohledu na (v práci uvažované) hodnoty parametrů α , κ a ε , jak tomu naznačují simulace v kapitole 4.

5.4 Alternativní způsoby modelování

V práci se věnujeme modelování neautonomních jevů (týkajících se logistického růstu) z úvodní motivace pomocí diferenciálních rovnic a spojitého času. Ovšem to není jediný způsob, kterým lze tyto jevy modelovat. Alternativou by mohly být např. diferenční rovnice, kde je čas uvažován diskrétně. V případě bambusu a kura by tak bylo možné uvažovat difference velikosti populace kura v mezičasech vysemenění bambusu za blízké nule, diferenci během vysemenění bambusu kladnou a vysokou a difference v několika málo následujících obdobích za záporné. Další vhodnou metodou modelování by byly stochastické modely množení a zániku založené na Markovských řetězcích (existují opět diskrétní i spojitě varianty). Ty by umožnily lepší modelování náhodnosti (epidemie, extrémně úrodný či neúrodný rok apod.), která je s přírodními jevy často spjata.

5.5 Bistabilní růst

Pokud bychom dále zůstávali v problematice modelování populací pomocí diferenciálních rovnic, stojí za zvážení, zda nepoužít pro věrnější popis některých populací bistabilní model růstu, který navíc reprezentuje i Alleeho efekt [1]. Podobně jako u logistického modelu v této práci, by bylo možné formulovat neautonomní varianty bistabilního modelu a ty analyzovat. Kromě otázek řešených u modelů (R) a (K), jako je překročení průměrné kapacity prostředí, existence limitní funkce nebo srovnání s autonomní variantou, vyvstává několik nových. Bistabilní model popsaný úlohou

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha x(\kappa - x)(\nu - x), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

má tři stacionární stavy. Dva z nich jsou stejné jako u logistického modelu $x_1^* = 0$ a $x_2^* = \kappa$ a třetím je konstanta životaschopnosti $x_3^* = \nu$, kde $0 < \nu < \kappa$. V bistabilním modelu hodnota sledované veličiny při hodnotách nižších než $x_3^* = \nu$ klesá a blíží se nule. Jelikož jsme u řešení $x_K(t)$ dle předpisu (9) pozorovali při ε blízkém κ nízké hodnoty ξ , bylo by zajímavé zjistit, zda by k podobnému jevu docházelo i v případě bistabilního růstu s neautonomní kapacitou. Pokud ano, mohlo by to implikovat existenci ε^* takového, že pro $\varepsilon > \varepsilon^*$ by (v autonomní variantě rostoucí) sledovaná veličina klesla pod $x_3^* = \nu$ a limitně by se blížila k nule.

5.6 Růst populace i kapacity prostředí

Zajímavou situací k modelování může být růst sledované veličiny se zároveň rostoucí kapacitou této veličiny popsaný úlohou

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) \left(1 - \frac{x(t)}{k(t)}\right), & t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

V předchozích sekcích práce je vždy předpokládáno, že kapacita je konstantní nebo má alespoň konstantní průměr. Existují ale případy, kdy i sama kapacita může růst. Představme si dubový les, sloužící populaci veverky jako kapacita prostředí. Počet veverek díky

životnímu cyklu dubu kolísá, ale jelikož se les samotný může v dlouhodobém časovém horizontu rozrůstat a zvětšovat, narůstá tím kapacita prostředí veverce. Její populace tak má příležitost se v dalším cyklu vysemenění dubu rozrůst více. Je téměř jisté, že i samotný les má svou vlastní kapacitu prostředí a nabízí se tedy otázky zda a kdy jí les dosáhne a jak růst lesa ovlivní růst populace veverky.

Reference

- [1] L. J. S. Allen. *An Introduction to Mathematical Biology*. Pearson/Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- [2] A. Fumihito, T. Miyake, S.-I. Sumi, M. Takada, S. Ohno, and N. Kondo. One subspecies of the red junglefowl (*Gallus gallus gallus*) suffices as the matriarchic ancestor of all domestic breeds. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 91(26):12505 – 12509, 1994.
- [3] J. K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Number 21 in Pure and Applied Mathematics. Krieger, Malabar, Fla, 2. ed edition, 1980.
- [4] S. Jeeva, S. Kiruba, H. Lalhruitluanga, P. Mnv, and R. Rao. Flowering of melocanna baccifera (bambusaceae) in northeastern India. *Curr. Sci.*, 82, 05 2009.
- [5] W. Kelley and A. Peterson. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative*. Universitext. Springer New York, 2010.
- [6] R. Naidoo, M. Chase, P. Beytell, P. Du Preez, K. Landen, G. Stuart-Hill, and R. Taylor. A newly discovered wildlife migration in Namibia and Botswana is the longest in Africa. *Oryx*, 50:1–9, 05 2014.
- [7] R. M. Oliver. A bayesian model to predict saturation and logistic growth. *Journal of the Operational Research Society*, 38(1):49–56, 1987.
- [8] M. A. Steele and X. Yi. Squirrel-seed interactions: The evolutionary strategies and impact of squirrels as both seed predators and seed dispersers. *Frontiers in Ecology and Evolution*, 8, 2020.
- [9] P. Stehlík and J. Volek. *Obyčejné diferenciální rovnice*. KMA, ZČU, 2019.
- [10] S. H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. Westview Press, second edition, 2015.