

Posudek oponenta na bakalářskou práci Kristýny Velkové

„Spektrální vlastnosti grafů“

Předložená bakalářská práce se zabývá vztahem mezi spektry grafových matic (matice sousednosti, Laplaceova matice) a parametry grafů jako je tuhost. První tři kapitoly shrnují základní definice a fakta a jsou logicky členěny (vlastní čísla matic, grafové matice, základní grafové parametry a třídy). První část čtvrté kapitoly podává přehled o souvislosti spektra Laplaceovy matice a tuhosti a je založena zejména na publikacích

- [23] Xiaofeng Gu a Willem H. Haemers, Graph toughness from Laplacian eigenvalues, *Algebraic Combinatorics* **5** (2022), 53–61,
- [24] Willem H. Haemers, Interlacing eigenvalues and graphs, *Linear Algebra and its Applications*, **226–228** (1995), 593–616.

Detailně je (v části 4.2) prezentován zejména důkaz nerovností, které souvisí s hypotézou W. H. Haemera o vztahu tuhosti a vlastních čísel Laplaceovy matice z roku 2020.

V části 4.3 autorka představuje vlastní výsledek (Tvzení 4.3.2), které je zesílením uvedených nerovností pro parametr hranová tuhost grafu. Přestože odvození nevyžaduje žádnou zásadně novou metodu nebo ideu, kombinatorické úvahy, které k tomuto výsledku vedou, jsou netriviální.

Práce je psána matematicky i jazykově kultivovanou formou. Přesto se najde řada drobných a několik podstatnějších námětů na upřesnění nebo zlepšení, což lze samozřejmě na úrovni bakalářské práce očekávat. Vybírám z nich následující poznámky, které při obhajobě není nezbytné detailně diskutovat:

- str. 2, Definice 1.1.2: spektrální poloměr nemusí být vlastním číslem
- str. 11, definice souvislosti: bylo by lépe předřadit definice 3.1.1 a 3.1.2 a vyhnout se vágnímu zavedení tohoto základního pojmu
- str. 13: použití adjektiv ‘hluboký’, ‘důležité’, ‘komplexní’ zde působí poněkud neskromně
- str. 15: k pojmu Problém obchodního cestujícího by bylo vhodné uvést citaci
- str. 16: Definice 3.1.9 je nepřesná, množina S by měla probíhat jen separující množiny, chybí definice pro úplný graf
- úvahy, proč je graf ‘oblíbený’ (Petersenův graf, str. 16; úplný graf, str. 22) působí povrchně

- formulace ‘Chvátalova hypotéza naznačuje, že by všechny dostatečně tuhé grafy měly obsahovat. . .’ (str. 17) působí vyhýbavě, lépe je psát ‘Chvátalova hypotéza tvrdí, že všechny dostatečně tuhé grafy obsahují. . .’; obdobně na str. 17 dole nebo na str. 21 (‘Dalo by se říci, že jsou Katonova a Chvátalova [hypotéza] ekvivalentní.’)
- str. 17: autory publikace [12] jsou H. Enomoto, B. Jackson, P. Katerinis a A. Saito, nelze tedy psát ‘Enomoto dokázal’ nebo ‘Enomotových závěrů’
- str. 18: překlep ve jméně ‘Broersma’
- str. 18: tvrzení ‘neexistuje obecný postup, jak tento důkaz provést’ je v rozporu například s tvrzením 3.1.1
- str. 18 dole: označení komponent K_1, \dots, K_c je provedeno poněkud nešťastně; symbol Y na tomto místě technicky vzato nemá určený smysl, symbol K_i se bez dalšího objevuje např. v definici 3.1.13 nebo důkazu věty 3.1.5 atd.
- str. 19 nad definicí 3.1.12: namísto teorie množin bychom uvedené pojmy spíše hledali v topologii
- str. 20: argument začínající slovy ‘Stěžejním krokem’ by měl být nějak označen pro pozdější referenci; navíc je formulován nesrozumitelně (místo ‘vrchol, který je disjunktní s hranicí této komponenty’ má být ‘vrchol, který není obsažený v žádné z množin $\text{bd}_{G-X}(K_i)$ ’, místo ‘v žádné z komponent’ má být ‘v některé z komponent’, atd.)
- str. 26: důsledek pod větou 4.1.1 je formulován nedbale, není jasný význam odstavce pod větou 4.1.2
- str. 26 dole a str. 29 uprostřed: chyby ve slovech ‘Fiedlerovi’ a ‘Haemersovy’
- str. 27: pro tuhost grafu G se jinde v práci používá symbol $\tau(G)$, zde $t(G)$
- str. 27 uprostřed: λ nemusí být vlastní číslo, pokud $-\lambda_n > \lambda_2$
- str. 28: v důkazu je několik chyb (Θ má být $-\frac{1}{2}(\mu_n + \mu_2)$), v poslední nerovnici chybí druhá mocnina
- str. 28: vzhledem k tomu, že proplétání (interlacing) je v tomto důkazu klíčovým nástrojem, bylo by vhodné ho předem alespoň stručně představit a ilustrovat na příkladech
- str. 32: první část tvrzení 4.2.5 byla již dříve uvedena jako tvrzení 4.2.2
- str. 33, nad větou 4.2.6: nejedná se o sjednocení grafů
- str. 33: ‘z důkazu věty 4.2.1 plyne. . .’: bylo by vhodné říci jak

- str. 33 dole: místo $(G - I)$ má být $V(G) - I$
- str. 36: na začátku podkapitoly 4.3 by měla být důkladně popsána výchozí situace a definovány symboly G, X, Y, K_i
- str. 36: množina A byla dříve označena \mathcal{A}
- str. 40: v seznamu literatury lze najít více nedostatků, např. u publikací [20] a [22] chybí název, publikace [10] a disertace [29] by měla být citována přesněji, atd.; dále se domnívám, že údaj DOI resp. URL by bylo lépe uvádět konzistentně nebo vůbec, a že u časopiseckých publikací je vhodné neuvádět slovo ‘In.’

Uvedené poznámky (třebaže jsou četné) nijak nesnižují fakt, že autorka detailně prostudovala literaturu k obtížnému tématu, dokázala vstřebat informace ze specializovaných vědeckých článků a text napsala s patřičnou péčí. Vzhledem k náročnosti a novosti studovaného materiálu, a vzhledem k tomu, že se jedná o bakalářskou práci, jsem se rozhodl nenavrhovat sníženou známku. **Doporučuji přijetí práce k obhajobě a její hodnocení stupněm výborně.**

V Plzni dne 8. června 2024.

prof. RNDr. Tomáš Kaiser, DSc.
Katedra matematiky
Západočeská univerzita v Plzni