

příspěvky

Jiří Fiala
Michal Polák
Radek Schuster
Lada Hanzelínová
Ondřej Chvojka
Marie Benediktová Větrovcová
Jana Černá
Radim Kočandrle
Martina Kastnerová
Kateřina Sládek Antalovská
Zdeněk Šimek
Miloš Kratochvíl
Jan Mikeš
Michaela Havelková

Jiří Fiala

Filosofické pozadí Grassmannovy Ausdehnungslehre

Nicht der Sieg der Wissenschaft ist das, was unser 19tes Jahrhundert auszeichnet, sondern der Sieg der wissenschaftlichen Methode über die Wissenschaft.

Friedrich Nietzsche¹

1. Úvod

Hermann Grassmann (15. dubna 1809 ve Štětíně – 26. září 1877 také ve Štětíně) byl jedním z nejvýznamnějších německých matematiků minulého století. Celý svůj život zápasil s nezájmem a odmítavým postojem matematiků té doby k jeho matematickým zkoumáním. Pocházel z velmi vzdělané a kulturní rodiny protestantského pastora. Svá studia začal teologií a filologií v Berlíně (1827–1830), kde byl velmi ovlivněn Schleiermacherem, pak pokračoval ve studiu samostatně. Matematiku nikdy nestudoval, teprve jako profesor na gymnáziu ve Štětíně se podrobil dodatečné zkoušce pro získání aprobační; k tomu napsal svou první práci o přílivech a odlivech. Od roku 1831 až do své smrti učil na gymnáziu ve Štětíně (s výjimkou dvou let 1834–1836, kdy učil na průmyslové škole v Berlíně) a nikdy se mu nepodařilo dosáhnout universitní kariéry, po níž velice toužil. Felix Klein napsal ve svých *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, že matematici, kteří působili v té době na univerzitách, pracovali v ostře konkurenčním

¹⁾ NIETZSCHE, Friedrich, 1980, s. 442. *Není to vítězství vědy, co vyznačuje naše devatenácté století, nýbrž vítězství vědecké metody nad vědou.*

prostředí, a že byli jako stromy v hustém lese, kde se každý snažil vyrůst co nejvýše, že však Grassmann, který stál osamocen, se mohl rozvinout do košatosti a dosáhnout tak harmonie a celistvosti svého díla.

Ve věku 53 let, zcela zklamán odmítavým postojem ke svému matematickému dílu, opustil matematiku a věnoval se sanskrtu, kde dosáhl světového uznání. Jeho slovník k *Rigvedě*² je dodnes používán.³

Jeho matematické dílo bylo oceněno až po jeho smrti díky řadě matematiků, kteří se nenechali odradit jeho temným způsobem psaní. Nejvýznamnější dílo, *Ausdehnungslehre*, věnované tzv. *geometrickému počtu* vyložil novým způsobem v r. 1888 italský matematik Giuseppe Peano⁴ a tento výklad se stal základem obecného vektorového počtu a teorie vektorových prostorů.⁵

Geometrický počet byl pak dále rozvíjen v italské matematické škole.⁶ Grassmann spolu s Hamiltonem a Boolem je nyní také pokládán za zakladatele moderní algebry. Ukázalo se, že metody vyvinuté Grassmannem jsou neobyčejně účinné v aplikacích analýzy na geometrii (Élie Cartan a jeho teorie vnějších forem), v algebraické geometrii (Grassmannovy variety), a tzv. Grassmannovy algebry jsou jedním z významných prostředků v kvantové fyzice. Grassmann byl také první, kdo přišel s pojmem prostoru s více dimensemi než třemi.

Zde se nebudeme zabývat vlastními historickými otázkami přijetí a dalšího rozvoje Grassmannových matematických myšlenek, ani jejich výkladem v současné podobě. Naše otázka je jiná: jaké byly příčiny onoho odmítavého postoje ke Grassmannovu dílu a dlouhého ignorování jeho díla. Soustředíme se na úvodní části Grassmannovy *Ausdehnungslehre* podle znění prvního vydání z r. 1844 (přetištěného pak s malými změnami v r. 1878) s plným názvem:

2) *Rig-Veda*, Brockhaus, Leipzig 1876.

3) *Obsáhlý životopis Hermanna Grassmanna tvoří závěrečný díl jeho Spisů: Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Drittes Bandes zweiter Theil: Grassmanns Leben geschildert von Friedrich Engel. Leipzig, B. G. Teubner, 1911.* – *Nová podrobná zpracování obsahují knihy Hans-Joachim Petschke: Hermann Grassmann – Biography, Birkhäuser 2009; Hermann Grassmann – Roots and Traces; Birkhäuser 2009.*

4) G. Peano: *Calcolo geometrico secondo d' "Ausdehnungslehre" di H. Grassmann, Torino 1888.*

5) *V naší literatuře k tomu je článek J. Bečváře: „Peanovo Calcolo geometrico“, Matematika praełomu XIX i XX wieku. Prace Naukowe Uniwersitetu Ślaskiego nr. 1253, Katowice 1992, s. 173–193.*

6) C. Burali-Forti: *Introduction à la géometrie différentielle suivat la méthode de H. Grassmann, Gauthier-Villars, Paris 1897.*

Die Wissenschaft der extensiven Grösse oder die Ausdehnungslehre eine neue mathematische Disciplin dargestellt und durch Anwendung erläutert von
Hermann Grassmann

Lehrer an der Friedrich-Wilhelm-Schule zu Stettin.

Erster Theil, die *lineale Ausdehnungslehre* enthaltend.

Die lineale Ausdehnungslehre,

ein neuer Zweig der Mathematik dargestellt und durch Anwendung auf die übrigen Zweige der Mathematik, wie auch auf die Statik, Mechanik, die Lehre vom Magnetismus und die Krystallonomie erläutert von

Hermann Grassmann.

Leipzig, 1844. Verlag von Otto Wigand.⁷

2. Důvod odmítnutí: filosofické pojetí

V poznámkách editora Grassmannových sebraných spisů Friedricha Engela⁸ čteme:

Es ist bekannt genug, dass die halbphilosophische Fassung der Ausdehnungslehre von 1844 die Ursache gewesen ist, dass diese merkwürdige Werk so lange Zeit nicht zu der ihm gebührenden Anerkennung hat kommen können.⁹

Opakuje se zde vzor, který často nacházíme v dějinách matematiky a vědy vůbec: filosofická pojetí, z nichž všechny nové velké teorie vznikají, jsou překážkou pro současníky v pochopení a přijetí těchto teorií. Je to vlastně samozřejmé: je-li nová teorie skutečně *nová*, pak nemůže být jen dalším rozvinutím teorií stávajících, nýbrž musí být založena i na nových principech a tyto principy jsou vždy povahy *filosofické*. Zpravidla pak následuje jedna ze dvou možností: buďto je nová teorie přijata včetně (později třeba nereflektovaných) filosofických předpokladů – to se označuje od dob Kuhnových termínem „vědecká revoluce“ (či „změna paradigmatu“), anebo jsou tyto filosofické předpoklady ignorovány a nová teorie je uzpůsobena a zúžena tak, aby vyhovovala paradigmatu stávajícímu, což je – jak bych chtěl prokázat – případ Grassmannův. Jeho případ je dosti podobný případu

7) *Obsaženo v Grassmannových sebraných spisech: Hermann Grassmanns Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Herausgegeben von Friedrich Engel. Ersten Bandes erster Theil: Die Ausdehnungslehre von 1844 und Die geometrische Analyse. B. G. Teubner, Leipzig 1894. V dalším je celý tento díl sebraných spisů citován prostě jako Ausdehnungslehre.*

8) *Ausdehnungslehre, s. 404.*

9) *Je dobře známo, že napůl filosofické pojetí Ausdehnungslehre z r. 1844 bylo příčinou toho, že toto pozoruhodné dílo se po tak dlouhou dobu nemohlo dočkat toho uznání, které si zasloužilo.*

Gottloba Fregeho, jehož dílo bylo stejným způsobem ignorováno. V předmluvě k *Die Grundgesetze der Arithmetik* si Frege stěžuje na nezáměr a nepochopení jeho myšlenek: když mé knihy dostanou do ruky matematici, zvolají *Metaphysica sunt, non leguntur* a knihu zahodí. Když pak padnou do rukou filosofům, zvolají tito: *Mathematica sunt, non leguntur* a knížka skončí také v koši na odpadky. Frege se stal zakladatelem matematické logiky, ale jeho myšlenky filosofické byly zvláštním způsobem překrouceny. Stačí připomenout jeden těžko pochopitelný případ, který hraničí až s ironií: jako „Fregeho princip kompozicionality“ se označuje princip, podle něž je význam věty určen významy jednotlivých slov a strukturou oné věty, představující způsob, jímž jsou významy jednotlivých složek spojovány do celkového významu věty. Frege však postuluje explicitně (jako jeden ze tří základních principů, na nichž je celé jeho dílo budováno!) princip přesně opačný: Na význam jednotlivých slov se nelze ptát v jejich izolaci, nýbrž vždy jen v souvislosti celé věty.¹⁰

Chtěl bych zde ukázat na rozboru úvodních paragrafů *Ausdehnungslehre*, že 1) *Ausdehnungslehre* není naukou *geometrickou*, nýbrž naukou o *myšlení, myšlenkových formách*.

2) Že toto platí pro celou čistou matematiku a že se tedy Grassmannova filosofie matematiky pronikavě liší nejen od tehdejšího, nýbrž i od převládajícího pojetí dnešního, což jej naopak sblíží s tím, čemu se říká „nové směry ve filosofii matematiky“ (odklon od eukleidovského paradigmatu).

3) Že výklad Grassmanna počínaje Peanem je uzpůsobením jeho díla stávajícímu paradigmatu (odtud mj. také jeho úspěšnost v rámci tohoto paradigmatu) avšak za cenu ignorování toho, co představovalo to nehlubší a nejpodstatnější v Grassmannově myšlení a díky čemu celý jeho geometrický kalkulus vůbec vznikl.

Úkol je to o to obtížnější, že bude třeba toto vše vykázat nejen vůči myšlení doby Grassmannovy, ale především vůči převládajícímu paradigmatu matematiky doby nynější.

10) *Nach der Bedeutung der Wörter muss im Satzzusammenhang, nicht in ihrer Vereinzelung gefragt werden, in: Die Grundlagen der Arithmetik, Hildesheim 1884, s. X.*

Abychom mohli takovou analýzu úspěšně provést, bude nutné se přidržovat velmi těsně vlastního Grassmannova textu a především jeho terminologie. Nahradíme-li totiž Grassmannovu terminologii zdánlivě shodnou terminologií současnou, zatáhneme spolu s touto terminologií do úvah i všechny předpoklady (konotace...) této terminologie a znemožníme pochopení skutečného Grassmannova myšlení. (To je také případ Peana a jeho následovníků.) Je to vlastně aplikace skutečného Fregeova principu „kontextuality“: nemůžeme přebírat slova z jednoho kontextu a přesazovat je do kontextu jiného, neboť smysl těchto slov je právě dán celým kontextem. A protože toto pojednání je v češtině, bude nutné volit také opatrně české překlady klíčových slov u Grassmanna.

Napřed se musíme vypořádat se slovem *Ausdehnung*. Bývá zvykem ponechávat v jiných jazycích toto slovo v němčině; tak např. onen Peanův spis z r. 1844 nese název *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann* a začíná kapitolou *Delle operazioni della logica deduttiva*.¹¹ Slovo *Ausdehnung* znamená něco, co má rozlohu, rozsah, co je protaženo, co se šíří; roztaženost, rozsáhlost.¹² Jak uvidíme, není to však něco, co je už protaženo, co je rozsahem už daným, nýbrž co je protahováno, co vzniká a vytváří se. Ve shodě s názvem Grassmannova díla (Věda o extenzivních veličinách...) by bylo možno uvažovat o slovu *extenze*: natahování, rozpětí, rozprostranění, šíření.¹³

Slovo „extenze“ nese ale s sebou řadu konotací, které by mohly být zavádějící. Existuje však slovo *extenzita*, v němčině *Extensität* (řidčeji *Extensivität*, extenzivita), u něž např. Wahrigův slovník uvádí přímo jako německý ekvivalent *Ausdehnung*. A toto slovo se pro svou poměrnou neutralitu zdá být slovem vhodným i pro český překlad „*Ausdehnung*“. *Ausdehnungslehre* budeme tedy překládat jako „nauku o extenzitách“. Překlady ostatních klíčových slov navrhneme, až když na ně v našem výkladu narazíme. A nyní už ke Grassmannovu textu samému: V předmluvě k prvnímu vydání¹⁴ píše:

11) *Všimněte si, že už v tomto názvu je naznačeno uzpůsobení, které Peano provede: pojme Ausdehnungslehre jako nauku deduktivní, tj. v rámci paradigmatu eukleidovského, tedy opačně než je celé pojetí Grassmannovo. To ale není všechno: podobně zřejmě postupuje Peano i s Grassmannovými myšlenkami ve svých Arithmetices principia nova methodo exposita, kde se explicitně odvolává na Grassmannovu učebnici aritmetiky pro gymnázia (Lehrbuch der Arithmetik, Berlin 1861).*

12) *Wahrigův slovník uvádí: „die Ausdehnung: das Ausdehnende; räuml. Erstreckung: <math.> de Haupteigenschaft des Raumes, Dimension; <phys.> Vergrößerung des Volumens od. der Länge infolge Erwärmung.“ Překlad „dimenze“ nebo „rozměr“ by byl lákavý (už proto, že to byl právě Grassmann, který mezi prvními uvažoval o n-rozměrných „prostorch“), jenže toto slovo je už obsazeno významem poněkud jiným.*

13) *Odtud také označení extenze pro populární přednášku. Extensio pochází z extendere s participiem extensus; od ex- a tendere – natahovat.*

14) *Vorrede zur ersten Auflage, Ausdehnung, s. 15.*

In der That ist es bei der Darstellung einer neuen Wissenschaft, damit ihre Stellung und ihre Bedeutung recht erkannt werde, unumgänglich nothwendig, sogleich ihre Anwendung und ihre Beziehung zu verwandten Gegenständen zu zeigen.¹⁵

Čteme-li to dnešními běžnými očima, budeme mít sklon rozumět tomu tak, že se zde bude obhajovat nová věda jejími možnými aplikacemi a souvislostmi s jinými oblastmi stávající vědy. Text ale pokračuje:

Hieru soll auch zugleich die Einleitung dienen. Diese ist der Natur der Sache nach mehr philosophischer Natur, und, wenn ich dieselbe aus dem Zusammenhange des ganzen Werkes heraussonderte, so geschah dies, um die Mathematiker nicht sogleich durch die philosophische Form zurückzuschrecken.¹⁶

Toto je také jeden z důvodů, proč Grassmann píše v dalším o geometrii, ačkoli by chtěl psát o vlastní nové vědě. Tak na straně 46, kde začíná vlastní výklad nauky o extenzitách, píše:

Der rein wissenschaftliche Weg, die Ausdehnungslehre zu behandeln, würde der sein, dass wir nach der Art, wie es in der Einleitung versucht ist, von den Begriffen aus, welche dieser Wissenschaft zu Grunde liegen, alles einzelne entwickeln. Allein um den Leser nicht durch fortgesetzte Abstraktionen zu ermüden, und um ihn zugleich dadurch, dass wir an Bekanntes anknüpfen, in den Stand zu setzen, sich mit grösserer Freiheit und Selbständigkeit zu bewegen, knüpfe ich überall bei der Ableitung neuer Begriffe an die Geometrie an, deren Basis unsere Wissenschaft bildet. Indem ich aber bei der Ableitung der

15) Aby se při výkladu nové vědy správně pochopilo její postavení a její význam, je nevyhnutelně nutné ukázat hned i její použití a její vztah k příbuzným předmětům.

16) Tomu má také sloužit Úvod. Ten je z povahy věci spíše filosofické povahy a jestliže toto vyčleňuji ze souvislosti celého díla, pak se tak děje proto, abych matematiky hned neodstrašil filosofickou formou.

Wahrheiten, welche den Inhalt dieser Wissenschaft bilden, jedesmal den abstrakten Begriff zu Grunde lege, ohne mich dabei je auf irgend eine in der Geometrie bewiesene Wahrheit zu stützen, so erhalte ich dennoch die Wissenschaft ihrem Inhalte nach gänzlich rein und unabhängig von der Geometrie.¹⁷

Zde také máme doklad toho, že nová věda o extenzitách není součástí geometrie, nýbrž naopak se má stát jejím základem. To si však vyžádá přesnější rozbor toho, co Grassmann geometrii rozumí a také toho, jak máme rozumět tomu, že se tato věda má stát základem geometrie. Současně zde ale nacházíme i obavu, jak budou matematici reagovat na výklad svou povahou filosofický. V *Předmluvě* pak Grassmann pokračuje na toto téma:

Es herrscht nämlich noch immer unter den Mathematikern und zum Theil nicht mit Unrecht eine gewisse Scheu vor philosophischen Erörterungen mathematischer und physikalischer Gegenstände; und in der That leiden die meisten Untersuchungen dieser Art, wie sie namentlich von Hegel und seiner Schule geführt sind, an einer Unklarheit und Willkühr, welche alle Frucht solcher Untersuchungen vernichtet.¹⁸

Jaká by tedy měla být podle Grassmanna vhodná filosofická metoda v matematice? Jaká je jeho filosofie matematiky, použijeme-li tohoto zavádějícího pojmu?¹⁹

17) Čistě vědecká cesta k pojednání nauky o extenzitách by byla ta, že bychom způsobem, o jaký jsme se pokoušeli v úvodu, vyvodili z pojmů, ležících v základech této vědy, vše jednotlivě. Jen proto, abychom čtenáře neunavovali pokračujícími abstrakcemi a současně i tím, že se přidržíme známého, jej uvedli do stavu, kde se může pohybovat volněji a samostatněji, přidržuji se všude při odvozování nových pojmů geometrie, jejíž základ tvoří naše věda. Tím však, že při odvozování pravd, tvořících obsah této vědy beru vždy za základ abstraktní pojem, aniž bych se přitom opíral o pravdy dokázané v geometrii, dostanu obsah této vědy zcela čistě a nezávisle na geometrii.

18) Mezi matematiky panuje totiž stále ještě – zčásti nikoli neprávem – určitý ostych [zde asi přiměřenější by bylo: určité váhání, nebo ještě lépe určitá obava, nejlépe pak asi určitý odpor] před filosofickým pojednáváním matematických a fyzikálních předmětů; a skuteku trpí většina zkoumání tohoto druhu, tak jak jsou jmenovitě prováděny Hegelem a jeho školou, nejasností a libovůlí, které ničí všechny plody těchto zkoumání.

19) Filosofie matematiky je označením spíše krize v základech matematiky, tak jak se objevily v cestě protikladné Grassmannovu pojetí. Filosofie a matematika patřily až do 19. století k sobě takřka neodlučně; označení 'filosofie matematiky' vzniká až po nešťastném odloučení, které bylo a je ke škodě obou stran.

O tom Grassmann píše v Úvodu (s. 30):

Das Eigenthümliche der philosophischen Methode ist, dass sie in Gegensätzen fortschreitet, und so vom Allgemeinen zum Besonderen gelangt; die mathematische Methode hingegen schreitet von den einfachsten Begriffen zu den zusammengesetzteren fort, und gewinnt so durch Verknüpfung des Besonderen neue und allgemeinere Begriffe.²⁰

Ve filosofii je podle Grassmanna jednota idejí tím původním a zvláštní tím odvozeným, zatímco v matematice je zvláštní původním a idea tím posledním. To je ovšem radikální odvrát od platonského pojetí matematiky. Matematika není naukou o předem daných a hotových idejích, nýbrž tyto ideje jsou výtvorem lidského myšlení. Matematika není o skutečném a reálném (ve smyslu metafysického realismu), nýbrž o lidském myšlení.

Protože však podle Grassmanna jsou jak matematika, tak filosofie vědami v nejpřísnějším slova smyslu, musí mít metody v nich používané něco společného, totiž to, co je činí vědeckými. A pak je zde druhý požadavek, totiž aby v každém okamžiku byl směr dalšího postupu a vývoje přehledný [übersichtlich].

Die Unerlässlichkeit der ersten Forderung, nämlich der wissenschaftlichen Strenge, wird jeder zugeben. Was das zweite betrifft, so ist dies noch immer ein Punkt, der von den meisten Mathematikern noch nicht gehörig beachtet wird. Es kommen oft Beweise vor, bei denen man zuerst, wenn nicht der Satz oben an stände, gar nicht wissen könnte, wohin sie führen sollen, und durch die man dann, nachdem man eine ganze Zeitlang blind und aufs Gerathewohl hin jeden Schritt nachgemacht hat, endlich, ehe man es sich versieht, plötzlich zu der erweisenden Wahrheit gelangt.²¹

20) Zvláštností filosofické metody je, že postupuje od protikladů a tak dospívá od obecného ke zvláštnímu; matematická metoda naproti tomu postupuje od nejjednodušších pojmů ke složeným a získává tak spojováním zvláštního nové a obecnější pojmy.

21) Ausdehnungslehre, s. 30. Nezbytnost prvního požadavku, totiž vědecké přísnosti, uzná každý. Co se týče druhého, je to stále bod, kterému většina matematiků ještě nevěnuje náležitou pozornost. Často se vyskytují důkazy, při nichž zprvu ten, kdo nestojí nad větou, vůbec nemůže vědět, kam mají vést, a když pak sleduje celou dobu slepě a nazdařbůh každý krok těchto důkazů, dospěje než se naděje najednou k dokazované pravdě.

Lze pokládat takovou posloupnost kroků za důkaz v tom smyslu, že nás má o něčem přesvědčit? Nepožadujeme od důkazu ještě něco navíc? Tato otázka se vrátí po šedesáti letech s naléhavostí u Poincarého a pak znovu u Wittgensteina a nakonec se vynoří v souvislosti s počítačovým dokazováním vět a počítačovým ověřováním důkazů. Sídli-li pravdy matematiky v nějaké „třetí říši“, sídlí tam s nimi i důkazy ve smyslu řetězců elementárních kroků a otázka, jak se dozvídáme o pravdivosti matematických vět (jak se dostáváme do tohoto třetího světa) spolu s odpovědí, že se tak děje pomocí důkazů, se stává otázkou, jak se dozvídáme o pravdivosti důkazů, které rovněž sídlí v oné třetí říši. V počítačovém ověřování důkazů se tento problém objeví v plné naléhavosti v případě záporném: když počítač odpoví, že „tato posloupnost kroků není důkazem předložené věty“. Taková informace je totiž bezcenná, neboť neříká nejen nic o pravdivosti či nepravdivosti věty samé, ale hlavně neříká nic o důkazu samém, který může být „nesprávný“ z důvodů třeba jednoho překlepu anebo proto, že je to celé nesmysl, třeba náhodná posloupnost znaků. Grassmann označí takovéto pojetí důkazů za *nevědecké* už proto, že vědu chápe jako něco, co souvisí s *věděním*:

Ein solcher Beweis kann vielleicht an Strenge nichts zu wünschen übrig lassen, aber wissenschaftlich ist er nicht; es fehlt ihm das zweite Erfordernis, die Uebersichtlichkeit. Wer daher einem solchen Beweise nachgeht, gelangt nicht zu einer freien Erkenntnis der Wahrheit, sondern bleibt, wenn er sich nicht nachher jenen Ueberblick selbst schafft, in gänzlicher Abhängigkeit von der besonderen Weise, in der die Wahrheit gefunden war; und dies Gefühl der Unfreiheit, was in solchem Falle wenigstens während der Recipiens entsteht, ist für den, der gewohnt ist, frei und selbständig zu denken, und alles was er aufnimmt, selbständig und lebendig sich anzueignen, ein höchst drückendes.²²

22) (Pokrač. předch. citace.) Takový důkaz snad usiluje neponechat stranou nic, co přísnost týče, vědecký však není; chybí mu totiž druhý požadavek, přehlednost. Kdo takový důkaz napodobuje a sleduje, nedospívá ke svobodnému poznávání pravdy, nýbrž zůstává, pokud si sám onen přehled neopatří, v naprosté závislosti na zvláštním způsobu, jímž byla tato pravda nalezena; a tento pocit nesvobody, který v tomto případě přinejmenším při přijímání vzniká, je velmi tísnivý pro toho, kdo si zvykl myslet svobodně a samostatně a živě si osvojovat vše, co přijímá.

Důležitým pojmem je zde „Uebersichtlichkeit“,²³ související s tím, že máme-li něco skutečně poznat a vědět, musíme se dostat do stavu, pozice, místa, z něž jsme to poznávané schopni přehlédnout jako *celek*, nikoli jako hromadu.²⁴

Hume někde říká, že porozumět např. nějaké filosofické knize znamená nalézt takové místo, do něž když se dostaneme, nemusíme tuto knihu už číst. Toho se ovšem zpravidla dosahuje právě čtením té knihy, jenže nikoli jen tím. Grassmann říká něco podobného:

Ist hingegen der Leser in jedem Punkt der Entwicklung in den Stand gesetzt, zu sehen, wohin er geht, so bleibt er Herrscher über den Stoff, er ist an die besondere Form der Darstellung nicht mehr gebunden, und die Aneignung wird eine wahre Reproduktion.²⁵

Další vývoj v daném bodě je určován podstatně vůdčí ideou, která není ničím jiným než tušenou analogií s příbuznými a už známými větvemi vědění (tedy kontextem) anebo je to v nejlepším případě přímé tušení pravdy. Tušení [die Ahnung] se zdá být čistým vědám cizí, zvláště pak vědám matematickým. Avšak:

Allein ohne sie ist es unmöglich, irgend eine neue Wahrheit aufzufinden; durch blinde Kombination der gewonnen Resultate gelangt man nicht dazu. [...] Es ist daher diese Ahnung auf dem wissenschaftlichen Gebiet etwas unentbehrliches.²⁶

23) To je také jeden z centrálních pojmů ve Wittgensteinových *Poznámkách k základům matematiky*.

24) To zase souvisí s rozlišováním pojmu *Begriff* a *Inbegriff* u Fregeho v jeho kritice Husserlova raného pojetí aritmetiky; k tomu např. J. Fiala: *Husserl a Frege ve sborníku prostějovské konference o Husserlovi (1991) a také ve SciPhi 3*.

25) (Dokončení citátu ze s. 30–31.) Jestliže naproti tomu je čtenář v každém bodě vývoje s to vidět kam kráčí, pak zůstává pánem nad látkou, není už vázán na nějakou zvláštní podobu výkladu a osvojení se stává pravou reprodukcí.

26) Zcela bez něj však není vůbec možné nalézt nějakou novou pravdu; slepými kombinacemi získaných výsledků se to nezdaří. [...] Tušení je tedy ve vědecké oblasti něčím nezbytným.

Vědu nelze dělat pouze způsobem, který bychom mohli označit s použitím lingvistické terminologie jako *synchronní*; výsledky lze ovšem takto prezentovat, ale to je právě to, co Grassmann označuje jako nevědecké. Nezbytná je druhá dimenze, dimenze *diachronní*; tu si v případě čistě synchronním musí udělat čtenář sám, neboť jinak se nestane „pánem nad látkou“, čili sdílené si ani neosvojí a ani se mu nestane vlastním. Grassmann píše (pokračujeme stále v citacích z oddílu *Form der Darstellung* z Úvodu):

Es ist in der Mathematik schon lange, und Euklid selbst hat darin das Vorbild gegeben, Sitte gewesen, nur die eine Entwicklungsreihe, welche den eigentlichen Inhalt bildet, hervortreten zu lassen, in Bezug auf die andere aber es dem Leser zu überlassen, sie zwischen den Zeilen herauszulesen.²⁷

To, co je zde napadeno, je „Eukleidovské paradigma“ – a je to, co Grassmanna spojuje s „novými směry“ v dnešní filosofii matematiky, které reprezentují radikální odklon od tohoto paradigmatu.²⁸

Grassmann končí tuto část výkladů pasáží, týkající se vyučování matematiky, z níž vybíráme:

Allein wie vollendet auch die Anordnung und Darstellung jener Entwicklungsreihe sein mag: so ist es doch unmöglich, dadurch demjenigen, der die Wissenschaft erst kennen lernen soll, schon auf jedem Punkte der Entwicklung die Uebersicht gegenwärtig zu erhalten, und ihm in Stand zu setzen, selbsthätig und frei weiter fortzuschreiten. Dazu ist vielmehr nöthig, dass der Leser möglichst in denjenigen Zustand versetzt wird, in welchem der Entdecker der Wahrheit im günstigen Falle sich befinden müsste.²⁹

27) V matematice se už dávno stalo mravem, a Euklid sám k tomu dal vzor, upřednostňovat pouze jednu vývojovou linii, a co se druhé linie týče, ponechat na čtenáři, aby si ji vyčetl mezi řádky.

28) K tomu např. knihy Morris Kline, *Mathematics: The Loss of Certainty*, nebo Tymoczkův sborník *New directions in the philosophy of mathematics*.

29) Ať už je uspořádání i výklad oné první vývojové řady jakkoli dokonalý, je přesto nemožné, aby ten, kdo se této vědě má teprve naučit, v každém bodě získal současně přehled a byl s to samostatně a obdobně pokračovat dál. K tomu je třeba spíše toho, aby se čtenář dostal jak jen možno do toho stavu, v němž by se v nejpříznivějším případě musel nacházet objevitel oné pravdy sám.

3. Grassmannovo pojetí čisté matematiky

Grassmann dělí vědy na *reálné* a *formální*. Reálné vědy se vyznačují tím, že

... das Sein, als das dem Denken selbstständig gegenüber tretende, im Denken abbilden, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung des Denkens mit jenem Sein;³⁰

zatímco vědy formální

das durch das Denken selbst gesetzte zum Gegenstande haben, und ihre Wahrheit haben in der Uebereinstimmung der Denkprozesse unter sich.³¹

A ještě jinými slovy:

Denken ist nur in Bezug auf ein Sein, was ihm gegenübertritt und durch das Denken abgebildet wird; aber dies Sein ist bei den realen Wissenschaften ein selbstständiges, ausserhalb des Denkens für sich bestehendes, bei den formalen hingegen ein durch das Denken selbst gesetztes, was nun wieder einem zweiten Denkakte als Sein sich gegenüberstellt.³²

Ve formálních vědách se tedy bytí ustavuje *prvním myšlenkovým aktem* a pravdivost spočívá (jako u věd reálných) v souladu s bytím, v tomto případě však s bytím ustanoveným prvním myšlenkovým aktem, přičemž shoda obojího probíhá v *druhém myšlenkovém aktu*. Důležité je zde to, že ve vědách formálních není toto ustanovené bytí nějakým bytím v jiné říši; vědy formální jsou vědami o aktech myšlení, o formách myšlení. To lze vyčíst i z pokračování našeho citátu:

30) *Ausdehnungslehre*, s. 22 ... bytí, jakožto to, co myšlení samo překračuje, zobrazují v myšlení a jejich pravdivost spočívá v souladu myšlení s oním bytím;

31) *Ausdehnungslehre*, s. 22; mají za předmět to, co je ustaveno myšlením samým a jejich pravdivost spočívá ve vzájemném souladu myšlenkových procesů.

32) *Ausdehnungslehre*, s. 22. Myšlení je jen ve vztahu k nějakému bytí, které jej přesahuje a které je myšlením zobrazováno; avšak bytí je v reálných vědách samostatným, vně myšlení o sobě existujícím, u formálních však naproti tomu je tím, co je myšlením samo ustanoveno a co se znovu konfrontuje s druhým myšlenkovým aktem.

Der Beweis in den formalen Wissenschaften geht daher nicht über das Denken selbst hinaus in eine andere Sphäre über, sondern verharrt rein in der Kombination der verschiedenen Denkakte. Daher dürfen die formalen Wissenschaften nicht von Grundsätzen ausgehen, wie die realen; sondern ihre Grundlage bilden die Definitionen.³³ Grassmann v poznámce pod čarou to upřesňuje: pokud by někdo chtěl např. v aritmetice hovořit o základních principech (přesně to udělá Peano i v názvu svého pojednání *Arithmetices principia*), pak je to třeba vidět jako zneužití. Protože je totiž čistá matematika – a tudíž i aritmetika -- o myšlenkových aktech, nemůže mít nějaké principy, které by se týkaly jiného bytí, než bytí ustaveného myšlenkovými akty samými.

Formální vědy se pak zabývají buďto obecnými zákony myšlení (pak jde o dialektiku čili logiku) anebo zvláštním [Besondere], které je ustaveno myšlením – a to je pak *čistá matematika*. Dialektika (logika) je podle Grassmanna filosofická věda, hledající jednotu ve všem myšlení. Matematika jde směrem obráceným: každé jednotlivě myšlené chápe jako zvláštní.

Die reine Mathematik ist daher die Wissenschaft des *besonderen* Seins als eines durch das Denken *gewordenen*.³⁴

A toto zvláštní bytí, povstávající v myšlení, nazývá Grassmann *Denkform* (myšlenková forma) anebo prostě *Form*. Matematika je tudíž *Formenlehre*, nauka o formách (myšlení). Označení *Größenlehre*, nauka o veličinách, velikosti, se na celou aritmetiku nehodí. V aritmetice je pojem velikosti [Grösse] zastoupen počtem [Anzahl], nehodí se však pro čísla sama. Na rozdíl od češtiny rozlišuje němčina velmi dobře mezi dvojicí „vermeindern – vermehren“, která se vztahuje na čísla, a dvojicí „verkleinern – vergrössern“, hodící se pro velikosti, počty.

33) Důkaz ve formálních vědách nevychází tudíž mimo myšlení samo do nějaké jiné sféry, nýbrž spočívá čistě v kombinacích rozličných myšlenkových aktů. Proto nemohou vycházet formální vědy z principů, jak je tomu u věd reálných, nýbrž jejich základ je tvořen definicemi.

34) *Ausdehnungslehre*, s. 23. Čistá matematika je tudíž vědou o zvláštním bytí, totiž o tom, které povstává myšlením.

4. Geometrie a nauka o prostoru

Pro Grassmanna je geometrie *naukou o prostoru* [Raumlehre], rozumí se o prostoru reálném. Proto také odmítá započítat geometrii k vědám formálním. Geometrie, podobně jako mechanika, se týká *reálného* bytí. Prostor nemůže být nijak vytvořen myšlením. Kdyby totiž myšlením byl vytvořen, pak bychom museli umět dokázat, že je nutně třírozměrný. Pro další výklad je třeba si zvláště jasně uvědomit, že Grassmann slovo prostor používá výhradně pro prostor reálný a jen o něm je geometrie. Proto také nenajdeme nikde u Grassmanna pojem „*n*-rozměrný prostor“, namísto toho hovoří o oblasti [Gebiet]. A dále: už odtud musí být jasné, že jeho nauka o extenzitách, Ausdehnungslehre, která je vědou formální, není vědou o prostoru, a tudíž není ani o geometrii. Poslechněme si zase Grassmanna:

Die Stellung der Geometrie zur Formenlehre hängt von dem Verhältniss ab, in welchem die Anschauung des Raumes zum reinen Denken steht. Wenngleich wir nun sagten, es trete jene Anschauung dem Denken als selbstständig gegebenes gegenüber, so ist damit doch nicht behauptet, dass die Anschauung des Raumes uns ernst aus der Betrachtung der räumlichen Dinge würde; sondern sie ist eine Grundanschauung, die mit dem Geöffnetsein unseres Sinnes für die sinnliche Welt uns mitgegeben ist, und die uns eben so ursprünglich anhaftet, wie der Leib der Seele. Auf gleiche Weise verhält es sich mit der Zeit und mit der auf die Anschauungen der Zeit und des Raumes gegründeten Bewegung, weshalb man auch die reine Bewegungslehre (Phorometrie) mit gleichem Rechte wie die Geometrie den mathematischen Wissenschaften beigezählt hat. Aus der Anschauung der Bewegung fließt mittelst des Gegensatzes von Ursache und Wirkung der Begriff der bewegenden Kraft, so dass also Geometrie, Phoronomie und Mechanik als Anwendungen der Formenlehre auf die Grundanschauungen der sinnlichen Welt erscheinen.³⁵

35) Ausdehnungslehre, s. 24. Vztah geometrie k nauce o formách závisí na vztahu, v němž se nachází názor prostoru k čistému myšlení. I když řekneme, že tento názor stojí proti myšlení jako něco samostatně daného, netvrdí se tím, že by názor prostoru nám byl dán teprve z pojednávání prostorových věcí. Nýbrž je to základní názor (intuice), který je nám dán spolu s otevřeností našich smyslů vůči smyslovému světu a je s námi tak spoután jako tělo s duší. Stejně je tomu i s časem a pohybem, na názoru času a pohybu založeným, protože lze stejným právem započítat i čistou nauku o pohybu (forometrii) podobně jako geometrii k matematickým vědám. Z názoru pohybu vyplývá prostřednictvím protikladu příčiny a účinku pojem pohybující síly, takže se tedy geometrie, forometrie a mechanika jeví jako použití nauky o formách na základní názory smyslového světa.

Grassmann se zde přidržuje Kantova pojetí prostoru a času a současně předjímá řešení Poincarého, podle nějž je třeba od sebe odlišit geometrii jakožto nauku matematickou od geometrie reálného prostoru. Při takovém odlišení geometrie a nauky o prostoru lze ovšem započítat geometrii k vědám formálním.

5. Základní pojmy nauky o extenzitách

To, co vzniká myšlením, může vznikat dvojím způsobem:

jednoduchým aktem vytvoření [des Erzeugens]
dvojitým aktem ustavení a spojení [des Setzens und Verknüpfens].

Prvním způsobem vzniká *spojitá forma* [stetige Form] čili veličina v užším smyslu, druhým pak *diskrétní nebo spojovací forma* [diskrete oder Verknüpfungsform]. To, jak se z daného stává diskrétní forma je pouhé spolomyšlení [blosses Zusammendenken]. Pojem spojitého povstávání [Werdens] uchopíme naproti tomu nejsnáze tak, že vyjdeme z analogie s diskrétním vznikáním:

Nämlich da bei der stetigen Erzeugung des jedesmal gewordene festhalten, und das neu entstehende sogleich in dem Momente seines Entstehens mit jenem zusammengedacht wird: so kann man der Analogie wegen auch für die stetige Form dem *Begriffe* nach einem zwiefachen Akt des Setzens und Verknüpfens unterscheiden, aber beides hier zu Einem Akte vereinigt, und somit in eine unzertrennliche Einheit zusammengehend; nämlich von den beiden Gliedern der Verknüpfung (wenn wir diesen Ausdruck der Analogie wegen für einen Augenblick festhalten) ist das eine das schon gewordene, das andere hingegen das in dem Momente des Verknüpfens selbst neu entstehende, also nicht ein vor dem Verknüpfen schon fertiges.³⁶

36) Ausdehnungslehre, s. 24. Při spojitém vyvážení totiž podržet to, co už jednou vzniklo a nově vznikající myslet spolu hned v okamžiku jeho vzniku: tak lze kvůli analogii rozlišovat i u spojitě formy po způsobu dvojího aktu ustavení a spojení, obojí je zde však spojeno v jeden akt a tím do nerozložitelné jednoty; z obou členů spojení (když kvůli analogii podržíme na chvíli i tento výraz) je totiž jeden tím, co už vzniklo a druhý naproti tomu tím, co v okamžiku spojení samo nově vzniká, tedy nikoli spojením už hotových.

Oba akty, ustavení a spojení, vyjdou nastejno, takže nelze spojit, co ještě nebylo ustaveno a nelze ustavit, co nebylo spojeno. Pro spojitě tedy platí, že:

das was neu entsteht, entsteht eben nur an dem schon gewordenen, ist also ein Moment des Werdens selbst, was hier in seinem weiteren Verlauf als Wachsen erscheint.³⁷

Toto je pasáž klíčová a proto si vyžádá delší komentář. Protože se jedná o nauku formální, zabýváme se zde formami myšlení. Ty však nejsou *dány*, nýbrž *povstávají, vznikají a jsou vytvářeny*. Diskrétní formy vznikají pouhým spolomyšlením toho, co už bylo vytvořeno, ustaveno. Základním aktem je zde vytvoření a jím vzniká *spojitá forma*. Spojitá forma -- a jak uvidíme později i spojitá změna -- je zde pojmem základním, primitivním, teprve od něj se bude odvozovat „spojitost“ toho, co bylo vytvořeno. Tak dráha (úsečka) *vzniká* spojitým pohybem bodu. V nynějším běžném pojetí není přece nic takového, jako je *pohyb* bodu. Pohyb se totiž popisuje jako sled (funkce) *bodů*, totiž každému časovému okamžiku z daného intervalu, okamžiku, který je ztotožněn s nějakým reálným číslem, je přiřazen nějaký bod, pokaždé *jiný* a celé je to dáno naráz, hotové, strnulé. Každá dráha je už předem možná (v degradovém slova smyslu „možnosti“) jako množina bodů předem existujících. Nebo jiný příklad, který s tím ale souvisí: když se mluví o možných strukturách času, výklad začíná: mějme nějakou množinu, jejíž prvky nazveme časovými okamžiky, a na ní relaci, splňující ty a ty podmínky, kterou budeme chápat jako vztah *dříve*. Absurdní je zde to, že máme *předem* dánu množinu všech časových okamžiků, tedy včetně 'budoucnosti' (pokud vůbec se neodmítne o něčem takovém, jako je přítomnost minulost, budoucnost mluvit a nezařadí se to do oblasti fikcí; což je ovšem jen důsledek tohoto pojetí). Zde se setkáváme s pojetím naprosto odlišným: nic z toho není dáno předem, všechno se teprve vytváří. S tímto momentem se setkáme ještě v dalším výkladu. To, co udělali Peano a další s Grassmannovým dílem je právě to, že toto, co se mi jeví jako nejpodstatnější a neoriginálnější, vyloučili: uzavřeli, fixovali a dostali tak statický obraz, statickou atemporální geometrii, proti tomu oč usiloval Grassmann: o novou nauku, která by byla dynamická a *temporální*. Svět, do nějž zahrnuli Grassmannovu nauku o extenzitách, ona „třetí říše“, je totiž říší statickou, mrtvou, nečasovou, nic tam nevzniká ani nezániká a dokonce se už ani nespojuje a nerozděluje, neboť všechno je už spojeno i rozděleno, vše je hotové, dokonané a strnulé.

37) *Ausdehnungslehre*, s. 25; to, co nově vzniká, vzniká jen na už vzniklém, a tedy to, co je v dalším průběhu jeví jako růst, je okamžikem stávání se samým.

Protiklad spojitého a diskrétního je plynulý, neboť diskrétní lze pokládat za spojitě a obráceně:

Das Diskrete wird als Stetiges betrachtet, wenn das Verknüpfte selbst wieder als Gewordenes und der Akt des Verknüpfens als ein Moment des Werdens aufgefasst wird. Und das Stetige wird als diskret betrachtet, wenn einzelne Momente des Werdens als blosse Verknüpfungsakte aufgefasst, und das so verknüpfte für die Verknüpfung als Gegebenes betrachtet wird.³⁸

Každé *zvláštní* se takovým stává pomocí pojmů *různého* a *stejného*. Různé klade zvláštní vedle jiného zvláštního a stejné podřazuje spolu s jiným zvláštním pod totéž obecné. To, co vznikne ze stejného, nazývá Grassmann *algebraickou formou*, co z různého *kombinatorickou formou*. Rozdíl mezi stejným a různým je ovšem také plynulý.

Z protikladu spojitého a diskrétního se dostanou *čtyři větve nauky o formách*:

1. Nauka o číslech [Zahlenlehre]: číslo je algebraická diskrétní forma (rovnost, diskrétní).
2. Nauka o kombinacích [Kombinationslehre]: kombinace je kombinatoricky diskrétní forma (různost, diskrétní);
3. Nauka o intenzivních veličinách: algebraická spojitá forma (rovnost, spojitost);
4. Nauka o extenzivních veličinách: kombinatorická spojitá forma (různost, spojitost).

Die intensive Grösse ist also durch Erzeugung des Gleichen geworden, die extensive Grösse oder die *Ausdehnung* ist das durch das durch Erzeugung des Verschiedenen geworden.³⁹

Intenzivní veličiny tvoří základ nauky o funkcích, diferenciálního a integrálního počtu. Extenzivní veličiny, extenzity pak jsou základem nauky o extenzitách.

38) *Ausdehnungslehre*, s. 25. Diskrétní se pojednává jako spojitě, když to, co je samo spojeno se chápe jako vzniklé a akt spojení se chápe jako okamžik vzniku. A spojitě se pojednává jako diskrétní, když chápeme jednotlivé okamžiky stávání se jako prosté akty spojování a to, co je takto spojeno jako dané pro spojování.

39) *Ausdehnungslehre*, s. 26–27. Intenzivní veličina je tedy to, co vznikne vytvářením stejných, extenzivní veličina nebo extenzita je to, co povstává vytvářením různých.

Wie in der Zahl die Einigung hervortritt, in der Kombination die Sonderung des Zusammengedachten, so auch in der intensiven Grösse die Einigung der Elemente, welche ihrem Begriff nach zwar noch gesondert sind, aber nur in ihrem wesentlichen sich gleich sein die intensive Grösse bilden, hingegen in der extensiven Grösse die Sonderung der Elemente, welche zwar, sofern sie Eine Grösse bilden, vereinigt sind, aber welche eben nur in ihrer Trennung von einander die Grösse konstituieren.⁴⁰

Intenzivní veličina je plynule povstávajícím číslem, extenzivní veličina je plynule povstávající kombinací. Zatímco u intenzivních veličin je tomu tak, že vytváření dává spojitou řadu *stejných* stavů (a kvantita této řady je právě tou intenzivní veličinou), je u extenzivních veličin podstatná proměnlivost různých stavů, jejichž souhrn je pak oblastí extenzivní veličiny. Příkladem extenzivní veličiny je úsečka, kde prvky vycházejí jeden z druhého a tím konstituují úsečku jako extenzitu. Ale zase: každou reálnou veličinu lze nahlížet dvojím způsobem: jako veličinu intenzivní i jako veličinu extenzivní:

Nämlich auch die Linie wird als intensive Grösse angeschaut, wenn man von der Art, wie ihre Elemente aus einander sind, absieht, und bloss die Quantität der Elemente auffasst, und eben so kann der mit einer Kraft begabte Punkt als extensive Grösse gedacht werden, indem man sich die Kraft in Form einer Linie vorstellt.⁴¹

6. Spojitá změna

Spojitě povstávání rozložené na okamžiky se jeví jako spojitě vznikání spolu se zachováním toho, co už povstalo. V nauce o extenzitách se chápe nově vznikající jako odlišné; když přitom nezachováváme už vzniklé, dostaneme pojem *spojité změny* [stetige Aenderung]. Přitom to, co se mění, co zakouší proměnu, je *vytvářející prvek* [erzeugende Element]. Vytvářející prvek podléhá spojitě změně a dostává se do nějakého *stavu*; prvek v tomto stavu je pak prvkem spojitě formy.

40) Tak jako u čísel vystupuje jednocení, v kombinaci ozvláštňení společně myšleného, tak i v intenzivních vystupuje jednocení prvků, které podle svého pojmu ještě nejsou ozvláštňeny, nýbrž jen v podstatném jsou si rovny, vytvářejí intenzivní veličiny. Naproti tomu u extenzivních veličin vystupuje ozvláštňení prvků, které sice, pokud tvoří jednu veličinu, jsou spojeny, které však právě ve svém vzájemném oddělení konstituují veličinu.

41) Ausdehnungslehre, s. 27. A tak se dá nahlížet i na linii jako na intenzivní veličinu, odhlédneme-li od způsobu, jak vycházejí její elementy vzájemně ze sebe a uchopujeme-li pouhou kvantitu elementů. A právě tak lze bod opatřený silou pokládat za extenzivní veličinu tím, že si tuto sílu představujeme ve tvaru linie.

Der Begriff der stetigen Aenderung des Elements kann nur bei der Ausdehnungsgrösse hervortreten; bei der intensiven Grösse würde bei Aufhebung des jedesmal gewordenen nur der stetige Ansatz zum Werden als ein vollkommen leeres zurückbleiben.⁴²

Pojem spojitě změny a vytvářejícího prvku jsou pojmy klíčové. Jejich výklad je u Grassmanna dosti temný. Především se zde mluví o prvcích, elementech, nikoli bodech, takže jde o formy myšlení a zkoumání těchto forem, které teprve pak budou „aplikovány“ na body a na geometrii. A dále: jsme nyní zvyklí popisovat *pohyb* bodu křivkou, tj. sledem bodů – míst, které námi uvažovaný bod procházel. Takže se vlastně žádný bod *nepohybuje*, máme zde jen hotovou, fixovanou dráhu. V Grassmannově nauce o extenzitách je tomu naopak: pohybuje se bod (tedy element), totiž v tom smyslu, že se jedná stále o jeden a týž element, ale nacházející se postupně v různých *stavech*. Tyto stavy jsou však teprve vytvářeny. A tyto změny jsou spojitě, přičemž spojitost je zde pojem primární (neříká se vůči čemu). Má-li však výsledek těchto změn vést k něčemu určitému, pak musí tyto změny podléhat nějakému jedinému zákonu:

Das Verschiedene muss nach einem Gesetze sich entwickeln, wenn das Erzeugnis sein bestimmtes sein soll. [...] Die *einfache* Ausdehnungsform ist also die Form, welche durch eine nach demselben Gesetze erfolgende Aenderung dem erzeugenden Elements entsteht: die Gesamtheit aller nach demselben Gesetz erzeugbaren Elemente nennen wir ein *System* oder ein *Gebiet*.⁴³

Mluví se zde o vytvářejícím prvku (elementu) a pak o souhrnu všech elementů; v tomto druhém použití slova „element“ jde – jak se domnívám – o „element + stav“. To co vznikne je jednoduchá extenzivní forma, systém, oblast; jednoduchá v tom smyslu, že je „jedno-rozměrná“, má jednu extenzi. Ale můžeme jít do „rozměrů vyšších“, zde je ono místo, kde se zavádějí „vícerozměrné oblasti“. Grassmann nemluví ovšem o „rozměrech“, nýbrž o *stupních*. Když totiž použijeme dva různé zákony změny současně, dostaneme *systém druhého stupně*, atd. Vezmeme-li za příklad nauku o prostoru, dostaneme tak rovinu i celý nekonečný prostor, ale:

42) Ausdehnungslehre, s. 28. Pojem spojitě změny prvku může se vyskytovat jen u extenzivních veličin; u veličin intenzivních by při zanechání už jedno povstalého zůstal jen spojitý náběh k povstávání jako zcela prázdný.

43) Ausdehnungslehre, s. 28. Rozdílné se musí vyvíjet podle nějakého zákona, má-li být výsledek určitým. Jednoduchá extenzivní forma je tedy forma, která vzniká změnou podle téhož zákona vytvářejícího prvku; souhrn všech elementů, vytvořitelných podle téhož zákona nazýváme systémem nebo oblast.

weiter als bis drei unabhängigen Richtungen (Aenderungsgesetzen) kann man hier nicht kommen, während sich in der reinen Ausdehnungslehre die Anzahl derselben bis ins Unendliche steigern kann.⁴⁴

7. Obecná nauka o formách

Obecná nauka o formách [allgemeine Formenlehre] je řadou pravd, které se vztahují na všechny větve matematiky stejnou měrou. Předpokládá jen obecné pojmy rovnosti [Gleichheit] a různosti [Verschiedenheit], spojení [Verknüpfung] a ozvláštňení [Sonderung]. Mluvíme-li o rovnosti, pak je třeba si uvědomit, že rovnost a různost musíme vždy chápat v kontextu. Při povrchním pohledu by se mohlo zdát, že bychom měli mít různé vztahy rovnosti a různosti. Např. u úseček bychom mohli porovnávat jejich délky, ale i směry, polohy atd. *Tyto vztahy ale nepřísluší pojmu rovnosti samému, nýbrž předmětům, na něž se rovnost použije.* Tak nemůžeme říci, že dvě úsečky jsou si rovny, nýbrž jen to, že jejich délky jsou si rovny.

Jsou-li dvě veličiny nebo formy spojovány, pak o nich hovoříme jako o členech [Glieder] a to co vznikne, se nazývá výsledek spojení [Ergebniss der Verknüpfung]. Grassmann používá označení pro první člen spojení „přední člen“ [Vorderglied] a „zadní člen“ [Hinterglied]. Spojení pak označuje symbolem \cap . Tento symbol, jakož i symbol U od něj přejímá Peano a od něj pak přechází do nynějšího běžného použití; u Grassmanna mají však tyto symboly jiný, obecnější smysl. Takže spojení a a b označuje Grassmann $a \cap b$. Závorky zde vyznačují to, že výsledek je jednotou. Výsledky lze pak opět spojovat. Výraz $((a \cap b) \cap c)$ se zkracuje na $a \cap b \cap c$.

Grassmann pak formuluje to, čemu dnes říkáme asociativita a komutativita spojování. Spojení, které je asociativní a komutativní se nazývá *jednoduché* [einfache].

Čteme-li toto vše opět našima dnešními očima, mohli bychom mít dojem, že se tady právě definovala pologrupa (anebo aspoň volná pologrupa). Nic takového: *není dána žádná množina* a na ní operace spojování („násobení“). Všechno se vytváří, není uzavřené. To je třeba mít na mysli i při dalším výkladu. Proto se také budeme držet Grassmannovy terminologie, protože „překlad“ do jiné terminologie by mohl svádět k chybnému pochopení Grassmannových myšlenek.

Analytický postup [analytische Verfahren] spočívá v tom, že k danému výsledku spojení a jednomu z jeho členů hledáme člen druhý. Jde tedy o *dva* postupy: jeden pro přední a druhý pro zadní člen. Analytický postup lze pokládat také ze spojení. Máme tedy jednak spojení původní (tomu říká Grassmann *syntetické*) a pak spojení analytické, tedy „řešící“. Pro analytické spojení používá Grassmann znak obrácený, tj. U .

⁴⁴ *Ausdehnungslehre*, s. 29; *dále než ke třem nezávislým směrům (zákonům změny) zde jít nejde, zatímco v čisté nauce o extenzitách lze počet těchto směrů stupňovat do nekonečna*

Výraz $a U b$ označuje tedy tu formu, která spojena synteticky s b dá a : $[a U b \cap b = a]$. $a U b U c$ znamená tu formu, která synteticky spojena s c a pak s b dá a , čili také tu formu, která spojena synteticky s $b \cap c$ dá a : $[a U b U c = a U c U b = a U (b \cap c)]$.

Můžeme si to představit prostě jako inverzní operaci, tedy přepsat do běžnějšího zápisu: $a \cap b$ (syntetické spojení): $a \cdot b$, $a U b$ (analytické spojení): $a \cdot b^{-1}$ – a ovšem za předpokladu, že to budeme stále chápat jako operace s myšlenkovými formami, nikoli tady jako *předem dané operace na předem dané množině*.

Výsledek analytické spojení nemusí být jednoznačný. Pokud tomu tak je, pak $[a \cap b U b = a]$.

Je-li splněn předpoklad jednoznačnosti, pak forma $a U a$ nezávisí na hodnotě a a tato forma se nazývá formou *indiferentní*. Grassmann pro ni zavádí speciální znak – ležatý s . A používá pak označení U a \cap (vynechán je znak pro indiferentní formu).

Toto spojování lze chápat jako abstraktní sečítání. Grassmann pak píše:

Wir haben bisher den Begriff der Addition rein formell gefasst, indem wir ihn durch das Gelten gewisser Verknüpfungsgesetze bestimmen. Dieser formale Begriff bleibt auch immer der einzige allgemeine. Doch ist dies nicht die Art, wie wir in den einzelnen Zweigen der Mathematik zu diesem Begriffe gelangen. Vielmehr ergibt sich in ihnen aus der Erzeugung der Grössen selbst eine eigenthümliche Verknüpfungsweise, welche sich dann dadurch, dass jene formellen Gesetze auf sie anwendbar sind, als Addition in dem eben angegebenen allgemeinen Sinne darstellt.⁴⁵

Je tomu tedy tak, že v jednotlivých větvích matematiky se veličiny *vytvářejí*, a to podle určitých zákonů a tyto zákony pak teprve umožňují spojování veličin. Dvě veličiny (formy), postupující podle téhož vytvářejícího způsobu, tedy vytvářené ve „stejném smyslu“, můžeme řadit za sebou tak, že vytvářejí celek *a tento celek je také vytvářen „v témže smyslu“*. Pak je takové spojení sečítáním, tj. je jednoduché a jeho analýza je jednoznačná. Negativní veličiny jsou vytvářeny v opačném smyslu, jsou to však veličiny téhož druhu.

Tak je tomu nejen v nauce o extenzivních veličinách („geometrii“), ale především v oblasti čísel: přirozená čísla jsou *vytvářena* podle téhož zákona (prostého řazení)

⁴⁵ *Ausdehnungslehre*, s. 40. *Dosud jsme pojímali pojem sečítání čistě formálně tím, že jsme jej stanovili skrze platnost určitých zákonů spojování. Tento formální pojem zůstává nadále jediným obecným. Přesto však to není způsob, jímž se v různých větvích matematiky k tomuto pojmu dospívá. Spíše se dostává v těchto odvětvích z vytváření veličin samých vlastní způsob spojování, který se pak tím, že se na něj dají použít ony formální zákony, jeví jako sečítání v právě uvedeném obecném smyslu.*

a když vytvoříme jedno číslo a pak druhé, bude výsledek opět vytvářen podle téhož způsobu; bude to tedy součet obou čísel.

Grassmann pak uvažuje případ dvou různých spojování a jejich kombinování; formuluje to, čemu říkáme dnes „distributivní zákon“ (opět se stejnou výhradou). Tím pak zavádí pojem *spojování vyšších stupňů* (násobení, umocňování). Násobení není obecně komutativní; opět se ale předpokládá, že formálnímu pojmu násobení musí odpovídat násobení reálné, které je dáno *povahou* veličin, které se mají spojovat.

Pojmy spojování jsou pak použity na vytvoření vlastní nauky o extenzivních veličinách, tj. k tomu, čemu se pak říkalo geometrický kalkulus. To už zde dále sledovat nebudeme. Cílem bylo ukázat i na těchto pojmech, jak odlišné bylo Grassmannovo pojetí od pojetí množinového, které pro následující století se stalo pojetím převládajícím. Grassmann tak představuje druhou vývojovou linii, potlačenou sice, ale dnes se znovu hlásící o slovo ve filosofii matematiky.

Literatura

- BEČVÁŘ, Jindřich (1992): Peanovo Calcolo geometrico. In: Matematika przełomu XIX i XX wieku. Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego nr. 1253, Katowice, s. 173–193.
- BURALI-FORTI, Cesare (1897): Introduction à la géométrie différentielle suivat la méthode de H. Grassmann. Paris. Gauthier-Villars.
- FREGE, Gottlob (1884): Die Grundgesetze der Arithmetik Hildesheim.
- GRASSMANN, Hermann (1894): Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Band 1. Theil 1. Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner.
- GRASSMANN, Hermann (1911): Gesammelte mathematische und physikalische Werke. Dritten Bandes Zweiter Theil, Grassmanns Leben. Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner.
- KLEIN, Felix (1926): Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Berlin. Verlag von Julius Springer.
- KLINE, Morris (1982): Mathematics: The Loss of Certainty. Oxford University Press.
- NIETZSCHE, Friedrich (1980): Kritische Studienausgabe. Band 13, München.
- PEANO, Giuseppe (1888): Calcolo geometrico secondo d' "Ausdehnungslehre" di H. Grassmann. Torino.
- PEANO, Giuseppe (1989): Arithmetices principia: Nova methodo exposita. Kessinger Publishing. 2010.
- PETSCHKE, Hans-Joachim (2009): Hermann Grassmann – Biography. Birkhäuser.
- PETSCHKE, Hans-Joachim (2009): Hermann Grassmann – Roots and Traces. Birkhäuser.
- Scientia & Philosophia 3 (1991). Praha. Hrničerství a nakladatelství Michal Jůza & Eva Jůzová.
- TYMOCZKO, Thomas, ed. (1998): New directions in the philosophy of mathematics. Princeton University Press.
- WITTGENSTEIN, Ludwig (1992): Poznámky o základech matematiky. In: Scientia & Philosophia 5. Praha. Hrničerství a nakladatelství Michal Jůza & Eva Jůzová.

Práce vznikla díky podpoře grantu GA ČR P401/10/0690 Prameny evropské matematiky.

Michal Polák

Elementární báze poznání: protokolární věty

Abstract

The paper deals with protocol sentences as a basis for elementary knowledge of our world. There is a striking difference between two approaches to the protocol sentences: from Carnap's point of view, protocol sentences are non-revisable basic sentences, so they must be accepted as a convention without possibility of falsification. While from Neurath's point of view, protocol sentences are not basis of our knowledge for they are still open to revisions. This paper tries to articulate only selected aspects of these differences and is not intended to offer complex view to the problem of protocol sentences.

Keywords: protocol sentence, Otto Neurath, Rudolf Carnap

Klíčová slova: protokolární věty, Otto Neurath, Rudolf Carnap

V této stati se budu zabývat problematikou protokolárních vět u Otty Neuratha a Rudolfa Carnapa. Rozdílná stanoviska obou autorů v této problematice představují klíč k přesnějšímu vymezení protokolárních vět. Stěžejní články tohoto sporu byly publikovány v časopise *Erkenntnis III*, 1932–1933. Představím zde obě pojetí, poukážu na jejich odlišnosti a naznačím, jaké jsou jejich výhody a nevýhody. Přitom nezamýšlím vytvořit vyčerpávající pojednání o protokolárních větách, ale soustředím se jen na vybrané aspekty této problematiky.

Carnap píše ve stati *Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft*, že „věda je systém vět, které jsou sestaveny podle zkušenosti [Erfahrung,