

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

Katedra matematiky

# Bifurkace v nespojitých dynamických systémech

## BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

**Vedoucí práce**  
Ing. Petr Nečesal, Ph.D.

**Vypracoval**  
Tomáš Roubal

květen 2013

# Čestné prohlášení

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne . . . . .

. . . . .

podpis

# Poděkování

Chtěl bych poděkovat svému vedoucímu bakalářské práce Ing. Petrovi Nečesalovi, Ph.D. za odborné vedení, vstřícný přístup, cenné rady a hlavně za trpělivost.

# Abstrakt

Tato práce je věnována dynamickým systémům s hladkou a po částech hladkou pravou stranou. Jsou popsány rozdíly postačujících podmínek existence řešení počáteční úlohy těchto systémů. Dále jsou zmíněny bifurkace v systémech s hladkou pravou stranou a ve spojitéch systémech s po částech hladkou pravou stranou. Dále práce obsahuje popis dvou matematických modelů hračky datel na tyči. Poté je představen algoritmus, který dokáže nakreslit bifurkační diagram periodického řešení složitějšího modelu datla na tyči. Dále je sepsán krátký seznam periodických řešení vyskytujících se v systému.

**Klíčová slova:** dynamické systémy, Filippovy systémy, datel na tyči, bifurkace

# Abstract

This thesis is devoted to dynamic systems with smooth and piecewise smooth right-hand side. The differences between conditions for the existence of solutions of initial value problems of the systems are shown. After that, bifurcations in systems with smooth right-hand side and bifurcations in continuous systems with piecewise-smooth right-hand side are mentioned. The thesis also contains a description of two mathematical models of the Woodpecker toy. Furthermore, an algorithm which is able to draw a bifurcation diagram of periodic solutions of a more complex woodpecker model is presented. And finally, a short list of periodic solutions occurring in the system is provided.

**Keywords:** dynamical systems, Filippov systems, the Woodpecker toy, bifurcation

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Dynamické systémy</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Nehladké systémy</b>	<b>9</b>
3.1	Mnohoznačná funkce . . . . .	10
3.2	Filippovovy systémy . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Stacionární bifurkace hladkých systémů</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Nespojité bifurkace ve spojitých po částech hladkých systémech</b>	<b>23</b>
<b>6</b>	<b>Matematický model hračky datel na tyči</b>	<b>29</b>
6.1	Systém bez tření se zahrnutím nárazů . . . . .	31
6.2	Systém se třením a nárazy . . . . .	33
6.3	Periodické chování . . . . .	37
6.4	Numerická implementace . . . . .	37
<b>7</b>	<b>Závěr</b>	<b>45</b>
<b>8</b>	<b>Příloha</b>	<b>47</b>

# Kapitola 1

## Úvod

První část této práce je věnována existenci řešení počáteční úlohy pro dynamické systémy. Je dán důraz na rozdíl mezi systémy se spojitou a po částech spojitou pravou stranou. Je zmíněna pokročilá teorie mnohoznačných funkcí, která nám pomůže při ověření existence řešení systému s po částech pravou stranou. Dále jsou popsány základní bifurkace, které se vyskytují v systémech s hladkou pravou stranou a poté je představena analýza bifurkací v systémech se spojitou po částech hladkou pravou stranou.

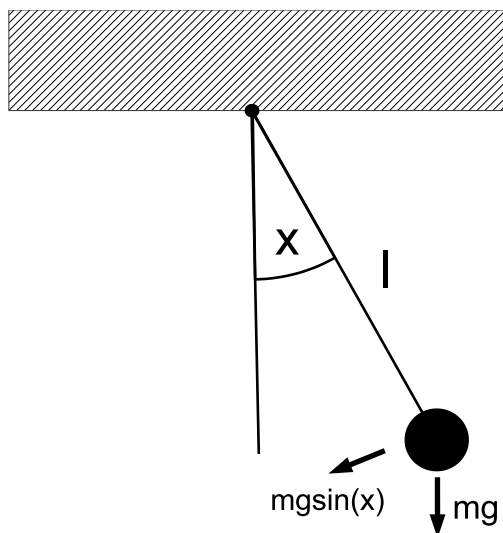
Druhá část práce je věnována dvěma systémům pohybových rovnic datla na tyči. Budeme se zabývat periodickým chováním řešení, složitějšího systému, ve kterém se vyskytuje klouzavý pohyb. Nakonec vytvoříme bifurkační diagram periodického řešení pomocí Poincarého zobrazení.

# Kapitola 2

## Dynamické systémy

V této kapitole představíme typy dynamických systémů, kterým se budeme věnovat v následujících kapitolách této práce. Systémy představíme na konkrétních jednoduchých modelech. Půjde o dynamické systémy s hladkou pravou stranou, spjité systémy s po částech hladkou pravou stranou, systémy s po částech spojitou pravou stranou.

Jedním z velmi známých modelů je matematické kyvadlo. Model matematického kyvadla se skládá z hmotného bodu o hmotnosti  $m$ [kg] a závěsu. Schéma je na obr. 2.1. Model matematického kyvadla napíšeme ve tvaru dynamického systému (tj.  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$ ),



Obrázek 2.1: Matematické kyvadlo

tedy systém má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}\sin x_1, \end{aligned} \tag{2.1}$$

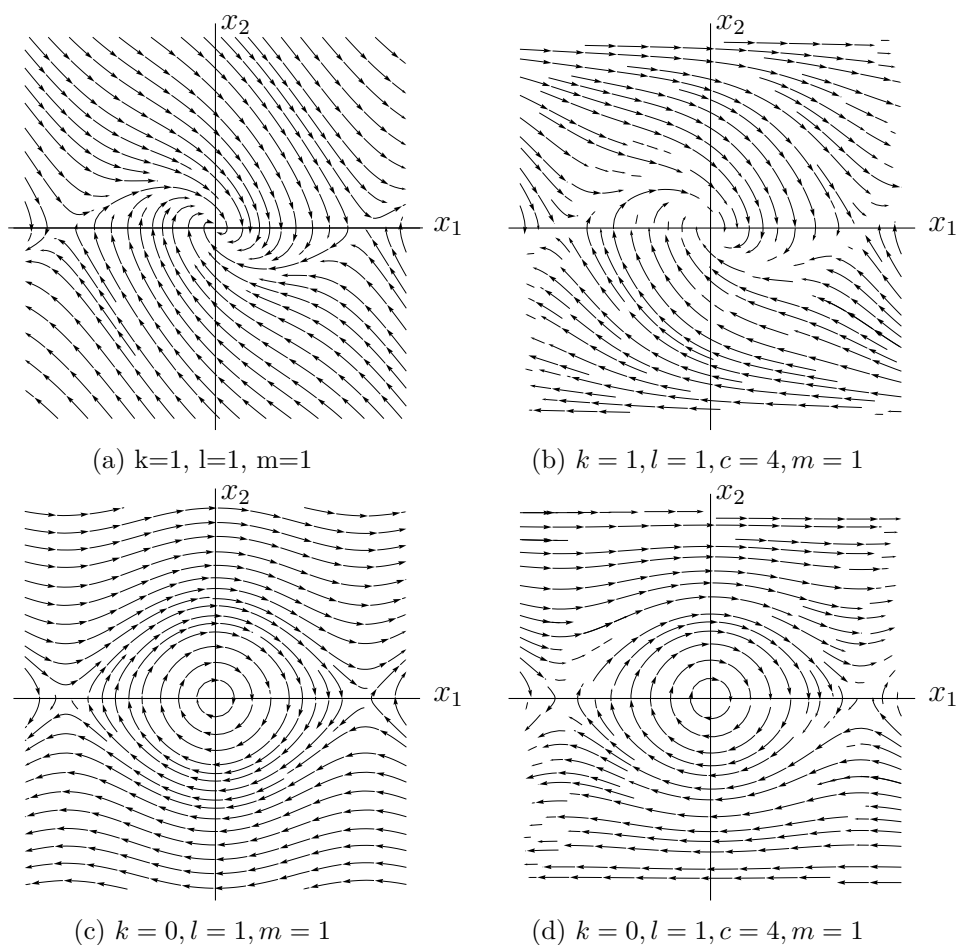
kde  $g$ [ $m/s^2$ ] je gravitační konstanta,  $l$ [ $m$ ] je délka závěsu, na kterém je pověšen hmotný bod a  $k$  je koeficient tření. Model matematického kyvadla je odvozen ze zákonů klasické mechaniky, ale pokud bychom uvažovali, že se matematické kyvadlo pohybuje rychlostí blízké rychlosti světla, má smysl do odvození modelu zahrnout speciální teorii relativity.

Potom má model tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \left( \sqrt{1 - \frac{(lx_2)^2}{c^2}} \right)^3 \sin x_1 - \frac{k}{m} x_2 \left( \sqrt{1 - \frac{(lx_2)^2}{c^2}} \right)^3, \end{aligned} \quad (2.2)$$

kde  $l, g, k$  mají stejný význam jako v systému (2.1) a  $c$  je hodnota rychlosti světla ve vakuu. Reálnější fyzikální smysl tohoto modelu je pohyb elektrostatického náboje po kružnici.

Hlavním rozdílem mezi systémy (2.1) a (2.2) je takový, že hodnota  $x_2$  v (2.2) může nabývat hodnot takových, že  $-\frac{c}{l} \leq x_2 \leq \frac{c}{l}$ . V případě, že  $lx_2 \ll c$ , tak můžeme  $c \rightarrow \infty$ , potom rovnice v (2.1) přejdou limitně k rovnicím v (2.1). Na obr. 2.2 jsou zobrazeny fázové portréty obou systémů. Konstanta je zvolena  $c = 4$  pro zvýraznění rozdílů mezi systémy.



Obrázek 2.2: Fázové portréty pro systémy (2.1) (část (a) (c)), Fázové portréty pro systém (2.2) (část (b) (d))

Z fázových portrétů na obr. 2.2 pro kyvadlo se speciální teorií relativity, lze vidět, že při počáteční podmínce  $x_2(0) = \frac{c}{l}$  zůstává rychlost konstantní a výchylka roste lineárně. Pak analytické řešení pro tuto počáteční úlohu má tvar

$$x_1(t) = \frac{c}{l}t + x_1(0).$$

Existenci řešení počátečních úloh, výše zmíněných systémů nám zaručuje následující věta.



**Věta 2.1** (Existence a jednoznačnost řešení spojitého systému). *Uvažujme  $n$ -dimenzionální dynamický systém  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$  se spojitou pravou stranou  $f$  a bod  $(t_0, \mathbf{x}_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Pak platí následující:*

1. *Existuje řešení systému na otevřeném intervalu  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ , pro  $\delta > 0$ .*
2. *Je-li  $f(t, \mathbf{x})$  lineárně omezená, tj. pokud existují kladné konstanty  $K$  a  $C$  takové, že pro pravou stranu systému platí*

$$\|f(t, \mathbf{x})\|_2 \leq K\|\mathbf{x}\|_2 + C, \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

*potom existuje řešení pro  $t \in (-\infty, \infty)$ , takové, že  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .*

3. *Je-li  $f(t, \mathbf{x})$  je lipschitzovská, tj. existuje konstanta  $L$  taková, že platí*

$$\|f(t, \mathbf{x}) - f(t, \mathbf{y})\|_2 \leq L\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (2.4)$$

*potom existuje jednoznačné řešení systém pro  $t \in (-\infty, \infty)$ , takové, že  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .*

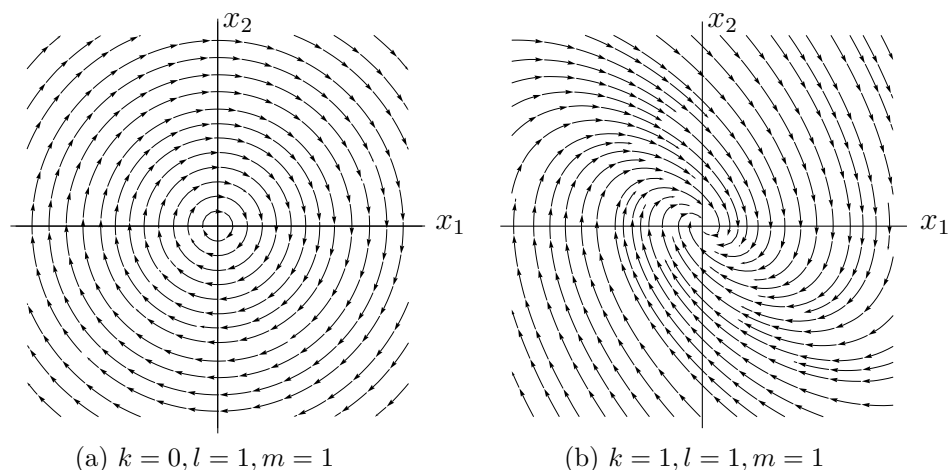
Díky větě 2.1 můžeme říci, že pro systémy (2.1) a (2.2) existuje řešení počáteční úlohy.

Tyto systémy mají pravé strany nelineární a pro většinu takových systémů nejsme schopni nalézt analytické řešení. Proto pravé strany zlinealizujeme, abychom byli schopni získat analytické řešení alespoň zlinealizovaného systému.

Zlinealizovaná verze systémů (2.1) a (2.2) má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_2 - \frac{g}{l}x_1. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Systém (2.5) popisuje pohyb lineárního harmonického oscilátoru. Jeho fázové portréty jsou zobrazeny na obr. 2.3. Při analýze stability stacionárních řešení v hladkých systémech se



Obrázek 2.3: (a) Fázový portrét systému (2.5) (b) Fázový portrét systému (2.5)

využívá Jacobiho matice, která má obecný tvar

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

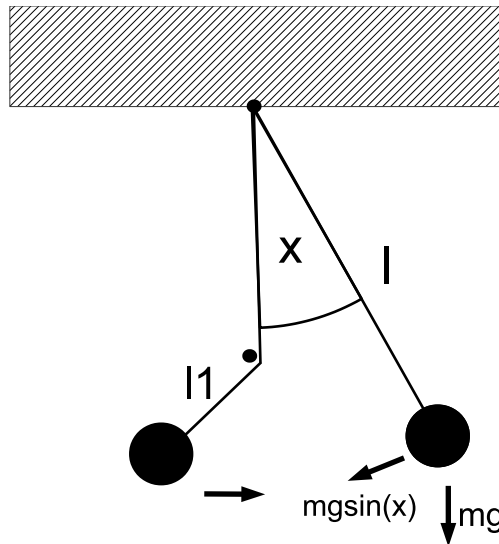
a pak její vlastní čísla určují stabilitu stacionárního řešení, viz kapitola 4. Například Jacobiho matice pro systém (2.1) má tvar

$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} \cos x_1 & k \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Pokud do modelu matematického kyvadla přidáme zarážku, viz obr. 2.4, potom pohyb kyvadla popisuje systém

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l_1} \sin^+ x_1 + \frac{g}{l} \sin^- x_1 - \frac{k}{m} x_2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

kde  $\sin^+ x = \max\{\sin x, 0\}$  a  $\sin^- x = \max\{-\sin x, 0\}$ . Z rovnic v systému (2.8) je jasné, že pravá strana systému (2.4) není hladká, ale jen spojitá a po částech hladká funkce. Pokud by nás zajímala existence a jednoznačnost řešení počáteční úlohy, lze na tento systém využít větu 2.1, ve které je v předpokladech pouze spojitost pravé strany systému a nikoliv hladkost.



Obrázek 2.4: Matematické kyvadlo se zarážkou

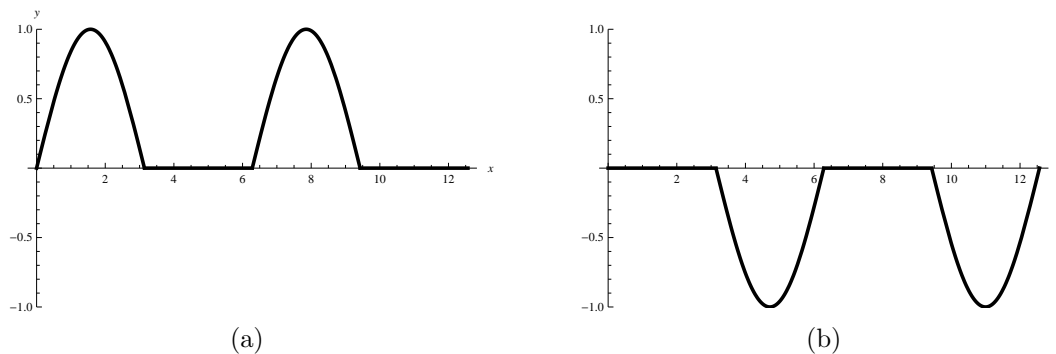
Verze systému (2.4) s po částech lineární pravou stranou má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l_1} x_1^+ + \frac{g}{l} x_1^- - \frac{k}{m} x_2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

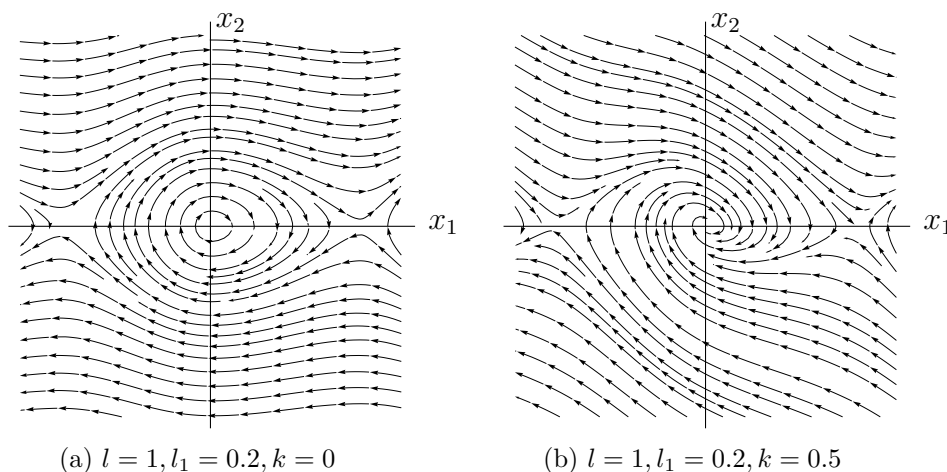
Vytvoření Jacobiho matice po částech hladkému systému se budeme zabývat v následující kapitole.

Nyní představíme systém s po částech spojitou pravou stranou modelu matematického kyvadla s kombinovaným suchým (Coulombovo) třením a viskózním třením a tedy systém má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m} \operatorname{sgn}(x_2) \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2 \end{aligned} \quad (2.10)$$



Obrázek 2.5: (a) Graf funkce  $y = \sin^+(x)$  (b) Graf funkce  $y = -\sin^-(x)$



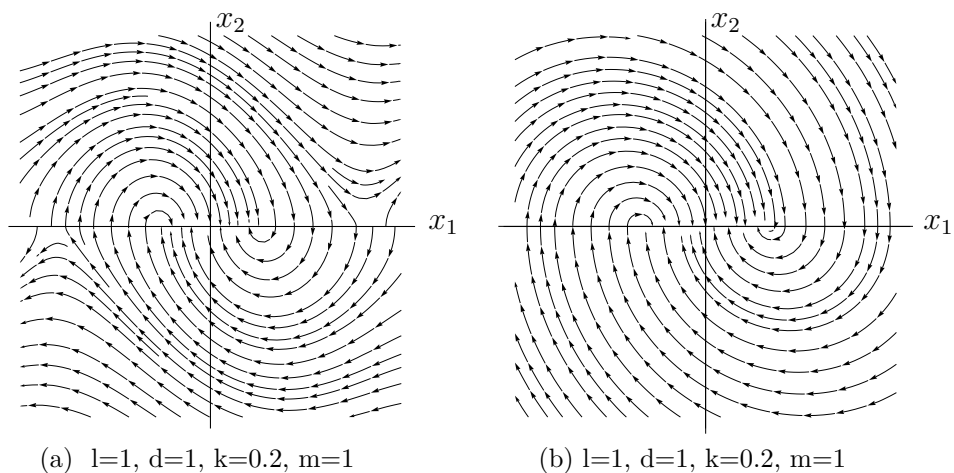
Obrázek 2.6: (a) Fázový portrét systému (2.8) (b) Fázový portrét systému (2.8)

a jeho částečně linearizovanou verzi, v podobě harmonického oscilátoru se suchým třením a systém má tvar

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l}x_1 - \frac{d}{m}\operatorname{sgn}(x_2) - \frac{k}{m}x_2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kde  $d$  je koeficient suchého tření a  $k$  koeficient viskozního tření. Povšimněme si, že pravé strany systémů (2.10) a (2.11) nejsou spojité na definičním oboru, ale jsou jen po částech spojité. Tedy podle věty 2.1 nemůžeme říct nic o existenci a jednoznačnosti řešení počáteční úlohy takových systémů. Abychom mohli říci, jestli existuje řešení počáteční úlohy systému, jehož pravá strana je po částech spojitá, potom bude potřeba zavést pokročilou teorii mnohoznačných funkcí. Existenci řešení systému s po částech spojitou pravou stranou se budeme věnovat v následující kapitole.

Významným rozdílem proti viskozním třením je takový, že pohyb hmotných bodů se zastaví v konečném čase, viz obr. 2.7.



(a)  $l=1, d=1, k=0.2, m=1$

(b)  $l=1, d=1, k=0.2, m=1$

Obrázek 2.7: (a) Fázový portrét systému (2.10) (b) Fázový portrét systému (2.11)

# Kapitola 3

## Nehladké systémy

V této kapitole představíme základní teorii pro mnohoznačné funkce. Tato teorie nám pomůže k zavedení řešení počáteční úlohy po částech spojitého systému.

Nyní se vrátíme ke kyvadlu se suchým třením a budeme studovat existenci řešení počáteční úlohy. Tento systém má tvar

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m} \operatorname{sgn}(x_2) \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Systém (3.1) můžeme rozdělit na dva systémy s hladkou pravou stranou

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m} \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2, \text{ pro } x_2 > 0,\end{aligned}\tag{3.2}$$

a

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 + \frac{d}{m} \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2, \text{ pro } x_2 < 0.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Označíme funkci  $h(x_1, x_2) = x_2$ , která pro  $h(x_1, x_2) > 0$  popisuje množinu, na níž je uvažována rovnice (3.2) a pro  $h(x_1, x_2) < 0$  množinu, kde je uvažován systém (3.3). Množina  $h(x_1, x_2) = 0$ , popisuje nespojitost vektorového pole systému (3.1). Taková funkce se v literatuře nazývá indikátorová funkce.

**Definice 3.1** (Indikátorová funkce). Hladkou funkci  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  nazveme indikátorou funkcí, pokud

$$\operatorname{grad}(h(\mathbf{x})) \neq \mathbf{0},\tag{3.4}$$

a označíme

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{\mathbf{x} \in D(f(\mathbf{x}, t)) : h(\mathbf{x}) = 0\}, \\ V_+ &= \{\mathbf{x} \in D(f(\mathbf{x}, t)) : h(\mathbf{x}) > 0\}, \\ V_- &= \{\mathbf{x} \in D(f(\mathbf{x}, t)) : h(\mathbf{x}) < 0\}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Pro systémy (3.3) a (3.2) lze říci, díky větě 2.1, že existuje řešení jejich počáteční úlohy a to řešení je jednoznačné na celém reálném oboru. Proto můžeme říct, že systém (3.1) má jednoznačné řešení na množinách  $h(x_1, x_2) > 0$  a  $h(x_1, x_2) < 0$ . Problémem s existencí řešení nastává na množině  $h(x_1, x_2) = 0$ , kde pravá strana systému není spojitá.

Abychom mohli vytvořit teorii o existenci řešení systému s po částech spojitou pravou stranou, zavedeme teorii mnohoznačných funkcí.

### 3.1 Mnohoznačná funkce

V této kapitole zadefinujeme mnohoznačnou funkci, která úzce souvisí s pojmy v následující podkapitole věnované Filippovovým systémům. Pojem spojený s mnohoznačnou funkcí je Filippovova konvexní metoda a ta nám pomůže rozhodnout o existenci řešení systému s po částech spojitou pravou stranou. Tato metoda převede pravou stranu po částech spojitého systému právě na mnohoznačnou funkci.

Následující definice lze najít v [4].

**Definice 3.2** (Mnohoznačná funkce). Mnohoznačná funkce  $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$  je zobrazení, které každému  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  přiřadí množinu  $F(\mathbf{x}) \subset \mathbb{R}^n$ . Obor hodnot funkce je množina

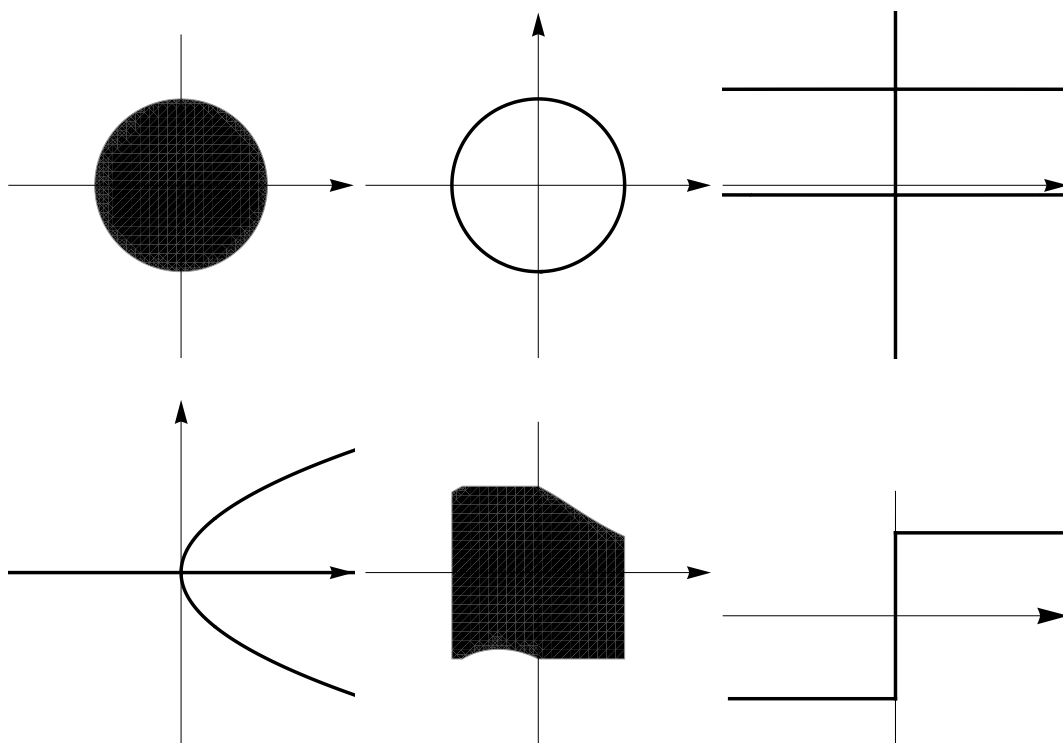
$$\text{Rge}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})\}. \quad (3.6)$$

a graf mnohoznačné funkce je množina

$$\text{Graph}(\mathbf{F}) = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})\}. \quad (3.7)$$

Pak  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je obraz  $\mathbf{F}$  v  $\mathbf{x}$  a pokud existuje alespoň jedno  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  takové, že  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je neprázdná, potom  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je netriviální. Definiční obor  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  budeme značit  $\text{Dom}(\mathbf{F})$  a je podmnožinou prvků z  $\mathbb{R}^n$  takových, že platí

$$\text{Dom}(\mathbf{F}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq \emptyset\}. \quad (3.8)$$



Obrázek 3.1: Příklady mnohoznačných funkcí zobrazujících z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$

Uvažujme prostor  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ , neprázdnou množinu  $K \subset \mathbb{R}^n$  a definujme vzdálenost prvku  $\mathbf{x}$  od této množiny jako

$$d(\mathbf{x}, K) = \inf_{\mathbf{y} \in K} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad (3.9)$$

Dále definujeme kouli s poloměrem  $r > 0$  okolo množiny  $K$  z  $\mathbb{R}^n$ . Koule má tvar

$$B(K, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, K) \leq r\}. \quad (3.10)$$

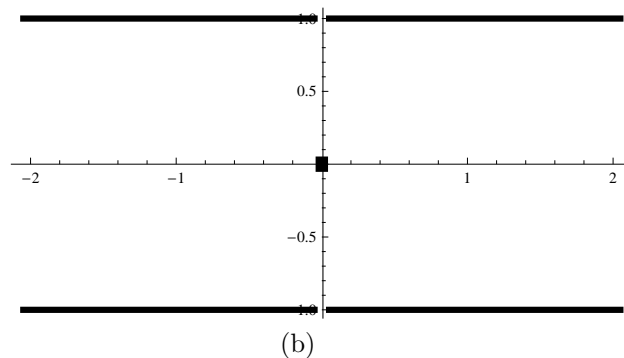
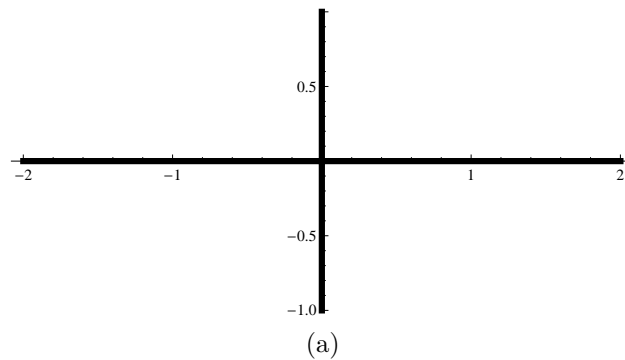
**Definice 3.3** (Spojitost). Mnohoznačnou funkci  $\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^m$  nazveme

1. polospojitou shora v  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , pokud pro každé okolí  $U$  funkční hodnoty  $\mathbf{F}(\mathbf{x}_0)$  platí

$$\exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{x}_0, \delta) : \mathbf{F}(\mathbf{x}) \subset U. \quad (3.11)$$

Mnohoznačná funkce  $\mathbf{F}$  je polospojitá shora, pokud je polospojitá shora v každém bodě  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ .

2. polospojitou zdola v  $\mathbf{x} \in \text{Dom}(\mathbf{F})$ , pokud pro všechna  $\mathbf{y} \in \mathbf{F}(\mathbf{x})$  a pro všechny posloupnosti  $\mathbf{x}_n \in \text{Dom}(\mathbf{F})$  konvergující k  $\mathbf{x}$ , existují posloupnosti  $\mathbf{y}_n \in \mathbf{F}(\mathbf{x}_n)$  konvergující k  $\mathbf{y}$ . Mnohoznačná funkce  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  je polospojitá zdola, právě tehdy pokud je polospojitá zdola v každém bodě  $\mathbf{x} \in \text{Dom}(\mathbf{F})$ .
3. spojitou v  $\mathbf{x} \in \text{Dom}(\mathbf{F})$ , pokud  $\mathbf{F}$  je polospojitá zdola i shora v  $\mathbf{x}$ . Mnohoznačná funkce  $\mathbf{F}$  je spojitá, pokud je spojitá v každém bodě  $\mathbf{x} \in \text{Dom}(\mathbf{F})$ .



Obrázek 3.2: (a) Nespojitá, shora polospojitá mnohoznačná funkce (b) Nespojitá, zdola polospojitá mnohoznačná funkce

**Definice 3.4** (Omezenost a uzavřenost mnohoznačné funkce). Řekneme, že  $\mathbf{F}$  je omezená mnohoznačná funkce, pokud existuje  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  a  $r > 0$  takové, že platí

$$d(\mathbf{x}, \text{Rge } \mathbf{F}) < r. \quad (3.12)$$

Řekneme, že mnohoznačná funkce je uzavřená, pokud  $\text{Graph}(\mathbf{F})$  je uzavřená množina.

Nyní se vraťme k otázce z předchozí kapitoly, jak vytvořit Jacobiho matici pro systém se spojitou po částech hladkou pravou stranou.

**Definice 3.5** (Zobecněná Jacobiho matice). Nechť  $f$  je spojitá po částech hladká pravá strana dynamického systému a nechť  $h$  je indikátorová funkce, kde množina  $h = 0$  popisuje nehladkou množinu systému,  $\mathbf{J}_-$  je Jacobiho matice pro  $h < 0$  a  $\mathbf{J}_+$  je Jacobiho matice pro  $h > 0$ . Potom množinu

$$\tilde{\mathbf{J}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{J}_+, & \text{pro } \mathbf{x} \in V_+, \\ \overline{\text{co}}(\mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+), & \text{pro } \mathbf{x} \in \Sigma, \\ \mathbf{J}_-, & \text{pro } \mathbf{x} \in V_-, \end{cases} \quad (3.13)$$

nazveme zobecněnou Jacobiho maticí, kde  $\overline{\text{co}}(\mathbf{J}_-, \mathbf{J}_+) = \{(1 - q)\mathbf{J}_- + q\mathbf{J}_+, q \in \langle 0, 1 \rangle\}$ .  $\overline{\text{co}}(A)$  je nejmenší uzavřená konvexní množina obsahující  $A$ .

**Příklad 1.** Nalezněte zobecněnou Jacobiho matici systému

$$\dot{x} = |x|. \quad (3.14)$$

S indikátorovou funkcí  $h(x) = x$ .

Funkce  $|x|$  není hladká v bodě  $x = 0$  a pro  $x \neq 0$  je hladká. Pak Jacobiho matice  $\mathbf{J}^+ = 1$  a  $\mathbf{J}^- = -1$ . Pak zobecněná Jacobiho matice má tvar

$$\tilde{\mathbf{J}}(0) = \{q - (1 - q), q \in \langle 0, 1 \rangle\} = \langle -1, 1 \rangle,$$

tedy

$$\tilde{\mathbf{J}}(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{pro } x < 0, \\ \langle -1, 1 \rangle, & \text{pro } x = 0, \\ \{1\}, & \text{pro } x > 0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Tuto mnohoznačnou funkci  $\tilde{\mathbf{J}}(x)$  (3.15) budeme značit  $\text{Sgn}(x)$ .

## 3.2 Filippovy systémy

V této podkapitole zavedeme teorii pro existenci řešení počáteční úlohy po částech spojitěho systému. Využijeme k tomu teorii mnohoznačné funkce popsanou v předchozí kapitole.

Nyní se vraťme k existenci řešení počáteční úlohy systému (3.1), který je podle následující definice po částech spojitý systém.

**Definice 3.6** (Po částech spojitý systém). Mějme dynamický systém  $\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x})$  a indikátorovou funkci  $h = h(\mathbf{x})$ . Systém má tvar

$$\dot{\mathbf{x}} = f(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} f_+(t, \mathbf{x}), & \text{pro } \mathbf{x} \in V_+ \\ f_-(t, \mathbf{x}), & \text{pro } \mathbf{x} \in V_- \end{cases} \quad (3.16)$$

Systém (3.16) nazveme po částech spojitý systém<sup>1</sup>, je-li  $f_+(t, \cdot) \in C^1(V_+ \cup \Sigma)$  a  $f_-(t, \cdot) \in C^1(V_- \cup \Sigma)$ .

<sup>1</sup>Pravá strana systému je nespojitá na množině  $\Sigma$



Uvažujme systém (3.16), pokud funkce  $f_+$  lineárně omezená pro  $h(\mathbf{x}) \geq 0$  a  $f_-$  je lineárně omezená funkce pro  $h(\mathbf{x}) \leq 0$ , pak můžeme pravou stranu systému rozšířit na následující mnohoznačnou funkci

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \begin{cases} f_+(t, \mathbf{x}), & \text{pro } \mathbf{x} \in V_+, \\ \overline{\text{co}}\{f_-(t, \mathbf{x}), f_+(t, \mathbf{x})\}, & \text{pro } \mathbf{x} \in \Sigma, \\ f_-(t, \mathbf{x}), & \text{pro } \mathbf{x} \in V_-. \end{cases} \quad (3.17)$$

Potom přepíšeme systém (3.16) na diferenciální inkluzi

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(t, \mathbf{x}). \quad (3.18)$$

Rozšíření (3.17) po částech spojitého systému na konvexní diferenciální inkluzi se v literatuře nazývá *Filippovova konvexní metoda*.

Nyní použijeme Filippovovu konvexní metodu na systém (3.1). Tedy

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{cases} \left[ x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1 - \cos x_1 - kx_2 \right]^T, & \text{pro } x_2 > 0, \\ \overline{\text{co}}\{f_-(x, \dot{x}), f_+(x, \dot{x})\}, & \text{pro } x_2 = 0, \\ \left[ x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1 + \cos x_1 - kx_2 \right]^T, & \text{pro } x_2 < 0. \end{cases} \quad (3.19)$$

Pak dostaneme

$$\mathbf{F}(x_1, x) = \left[ x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m} \text{Sgn } x_2 \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2 \right]^T \quad (3.20)$$

a přepíšeme systém (3.1) na

$$[\dot{x}_1, \dot{x}_2]^T \in \left[ x_2, -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{d}{m} \text{Sgn } x_2 \cos x_1 - \frac{k}{m} x_2 \right]^T. \quad (3.21)$$

Převodli jsme nespojitou pravou stranu systému na mnohoznačnou funkci a tedy místo soustavy diferenciálních rovnic uvažujeme soustavu diferenciálních inkluzí. Nyní zformulujeme větu o existenci řešení počáteční úlohy pro systém diferenciálních inkluzí.

**Věta 3.1** (Existence řešení diferenciální inkluze). *Nechť  $\mathbf{F}$  je shora polospojité, uzavřená, konvexní a omezená mnohoznačná funkce pro  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Pak pro každé  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  existuje  $\tau > 0$  a absolutně spojitá funkce  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  definovaná na  $\langle 0, \tau \rangle$ , která je řešením počáteční úlohy*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Díky Filippovově konvexní metodě a větě o existenci řešení diferenciální inkluze jsme schopni zavést řešení počáteční úlohy ve Filippovově smyslu.

**Definice 3.7** (Řešení ve Filippovově smyslu). Řekneme, že absolutně spojitá funkce  $\mathbf{x} : \langle 0, \tau \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$  je řešením (3.16) ve Filippovově smyslu, pokud pro skoro všechna  $t \in \langle 0, \tau \rangle$ , platí

$$\dot{\mathbf{x}} \in \mathbf{F}(t, \mathbf{x}), \quad (3.23)$$

kde  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  je uzavřená, konvexní mnohoznačná funkce.

Pokud platí, že  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  je lineárně omezená, tj. existují kladné konstanty  $K$  a  $C$  takové, že

$$\|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})\|_2 \leq K\|\mathbf{x}\|_2 + C, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0, \quad (3.24)$$

potom existuje řešení systému (3.17) pro  $t \in \langle 0, +\infty \rangle$ .

**Příklad 2.** Nalezněte analytické řešení počáteční úlohy

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) + \operatorname{sgn}(\dot{x}(t)) = 0, & t > 0, \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \quad (3.25)$$

Analytické řešení zkonstruujeme po částech tak, že úlohu (3.25) rozdělíme na několik počátečních úloh v závislosti na změně znaménka indikátorové funkce  $h(\dot{x}, x) = \dot{x}$ . Pro počáteční podmínky v (3.25) indikátorová funkce  $h(1, 1) = 1 > 0$ , proto nejprve uvažujme úlohu

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) + 1 = 0, & t > 0, \\ x(0) = 1, \dot{x}(0) = 1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Řešení počáteční úlohy (3.26) je ve tvaru

$$x_+(t) = 2 \cos t + \sin t - 1.$$

Najdeme změnu znaménka indikátorové funkce tak, že učíme nejmenší kladný kořen funkce  $y = h(\dot{x}(t), x(t))$ , tedy

$$\frac{dx_+(t)}{dt} = \cos t - 2 \sin t = 0.$$

Pro  $t > 0$  dostaneme kořeny  $t = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}$ . Nejmenší kladný kořen je  $t_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$  pro  $n = 0$  a tedy nová počáteční úloha má tvar

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + x(t) - 1 = 0, & t > t_1, \\ x(t_1) = 2 \cos(t_1) + \sin(t_1) - 1, \\ \dot{x}(t_1) = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Řešení počáteční úlohy (3.27) je tvar ve tvaru

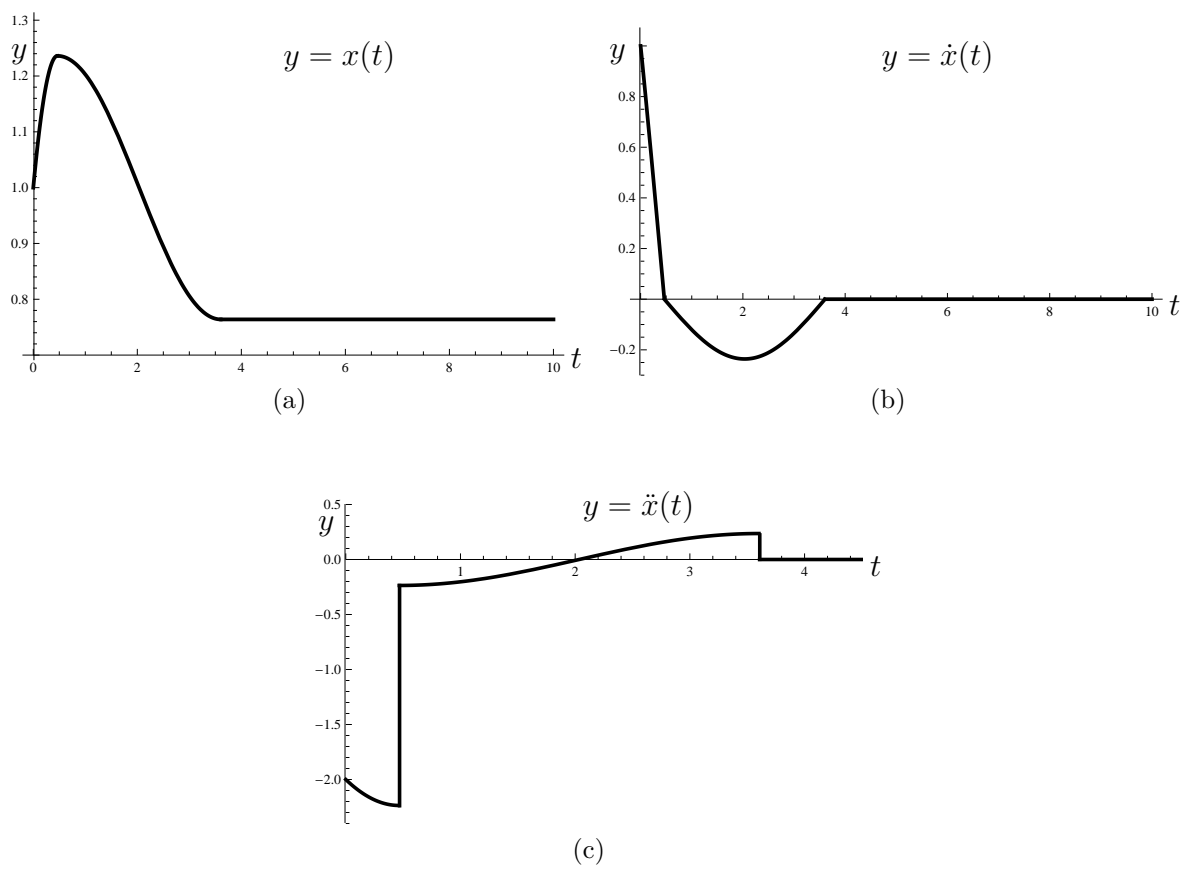
$$x_-(t) = 1 + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \cos t + \sin t - \frac{2 \sin t}{\sqrt{5}}.$$

Další bod, ve kterém se mění znaménko indikátorové funkce je  $t_2 = 2\pi - 2 \operatorname{arctg}(2 + \sqrt{5})$ , ale v tomto bodě se řešení úlohy (3.25) dosáhne pseudostacionárního bodu ve fázovém prostoru a proto od tohoto bodu zůstane řešení konstantní.

Analytické řešení počáteční úlohy (3.25) má tvar

$$x(t) = \begin{cases} -1 + 2 \cos x + \sin x, & 0 \leq t \leq t_1, \\ 1 + \left(2 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right) \cos t + \sin t - \frac{2 \sin t}{\sqrt{5}}, & t_1 < t \leq t_2, \\ 3 - \sqrt{5}, & t > t_2. \end{cases} \quad (3.28)$$

Graf tohoto řešení (3.28) vykreslen na obr. 3.3a.



Obrázek 3.3: (a) Graf řešení (3.28) (b) Graf první derivace řešení (3.28) (c) Graf druhé derivace řešení (3.28).

# Kapitola 4

## Stacionární bifurkace hladkých systémů

V této kapitole se budeme zabývat kvalitativním chováním řešení systému s hladkou pravou stranou v okolí stacionárních bodů ve fázovém prostoru. Zásadní roli bude hrát změna chování dynamického systému v závislosti na změně jednoho reálného parametru. Pokud se zásadně změní chování systému v závislosti na reálném parametru, pak takovou změnu nazveme bifurkace. Pojem bifurkace má několik různých definic ale pro nás bude bifurkace znamenat změnu počtu stacionárních bodů nebo vytvoření limitního cyklu. Následující definice jsou převzaty z [5]. Terminologii použitou v této kapitole, lze nalézt např. v knize [9].

Uvažujme autonomní dynamický systém s hladkou pravou stranou závislý na reálném parametru  $\lambda$

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \lambda). \quad (4.1)$$

Stabilitu definujeme pomocí chování řešení systému v okolí stacionárních bodů. Pokud se všechny řešení v okolí přibližují nebo zůstávají v okolí stacionárního řešení mluvíme o stabilním stacionárním řešení. Pokud nějaké řešení se vzdaluje od stacionárního řešení, pak mluvíme o nestabilitě.

**Věta 4.1** (Lineární stabilita). *Nechť  $f(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  je autonomní dynamický systém. Potom je stabilita stacionárního řešení určena vlastními čísly Jacobiho matice funkce  $f(\mathbf{x})$  ve stacionárním bodě takto:*

1.  $Re(\lambda_k) < 0$  pro všechny  $k$ , implikuje asymptotickou stabilitu stacionárního řešení,
2.  $Re(\lambda_k) > 0$  pro alespoň jedno  $k$ , implikuje nestabilitu.

Nyní definujeme základní typy stacionárních bodů, tedy lokální chování systému v okolí stacionárního řešení. Ukážeme se základní planární případy.

**Definice 4.1** (Stacionární body). Stacionární bod  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  dvou dimenzionálního autonomního dynamického systému, nazveme

1. asymptoticky stabilní uzel, pokud obě vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  jsou různá, reálná a záporná,
2. nestabilní sedlo, pokud jedno vlastní číslo matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je reálné a kladné a druhé vlastní číslo je reálné a záporné,
3. nestabilní uzel, pokud obě vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  jsou reálná a kladná,

4. asymptoticky stabilní ohnisko, pokud obě vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  jsou komplexně sdružená a mají zápornou reálnou část a nenulovou imaginární část,
5. stabilní střed, pokud obě vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  jsou komplexně sdružená a mají nulovou reálnou část a nenulovou imaginární část,
6. nestabilní ohnisko, pokud obě vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  jsou komplexně sdružená a mají kladnou reálnou část a nenulovou imaginární část,
7. pokud alespoň jedno vlastní číslo je nulové potom nejsme schopni rozhodnout o stabilitě ani typu stacionárního bodu pomocí věty 4.1.

**Příklad 3.** Nalezněte stacionární body a určete jejich typ pro následující systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{1}{2}(1 - x_1^2), \\ \dot{x}_2 &= -x_2.\end{aligned}\tag{4.2}$$

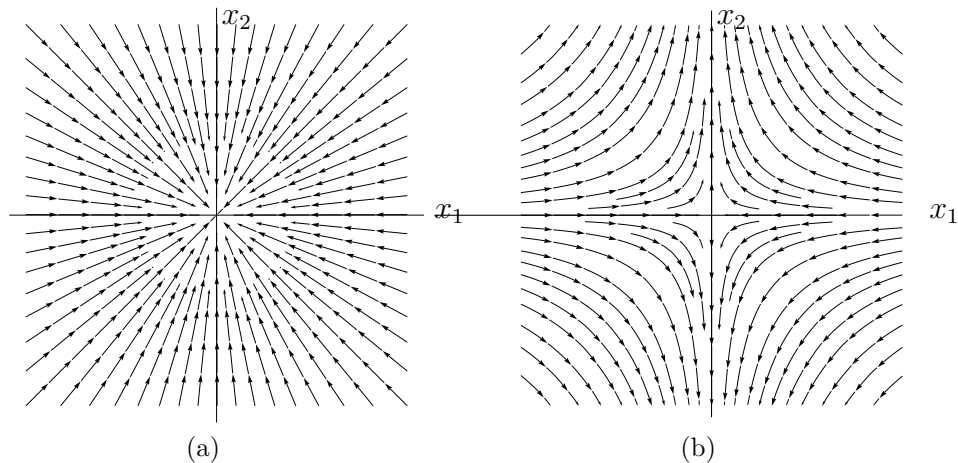
Stacionární řešení nalezneme, takže pravou stranu položíme rovnou nulovému vektoru a nalezneme body, které řešení algebraickou soustavu rovnic

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(1 - x_1^2) &= 0, \\ -x_2 &= 0,\end{aligned}$$

tedy systém má dva stacionární body  $(1, 0)$  a  $(-1, 0)$ . Dále vytvoříme Jacobiho matici

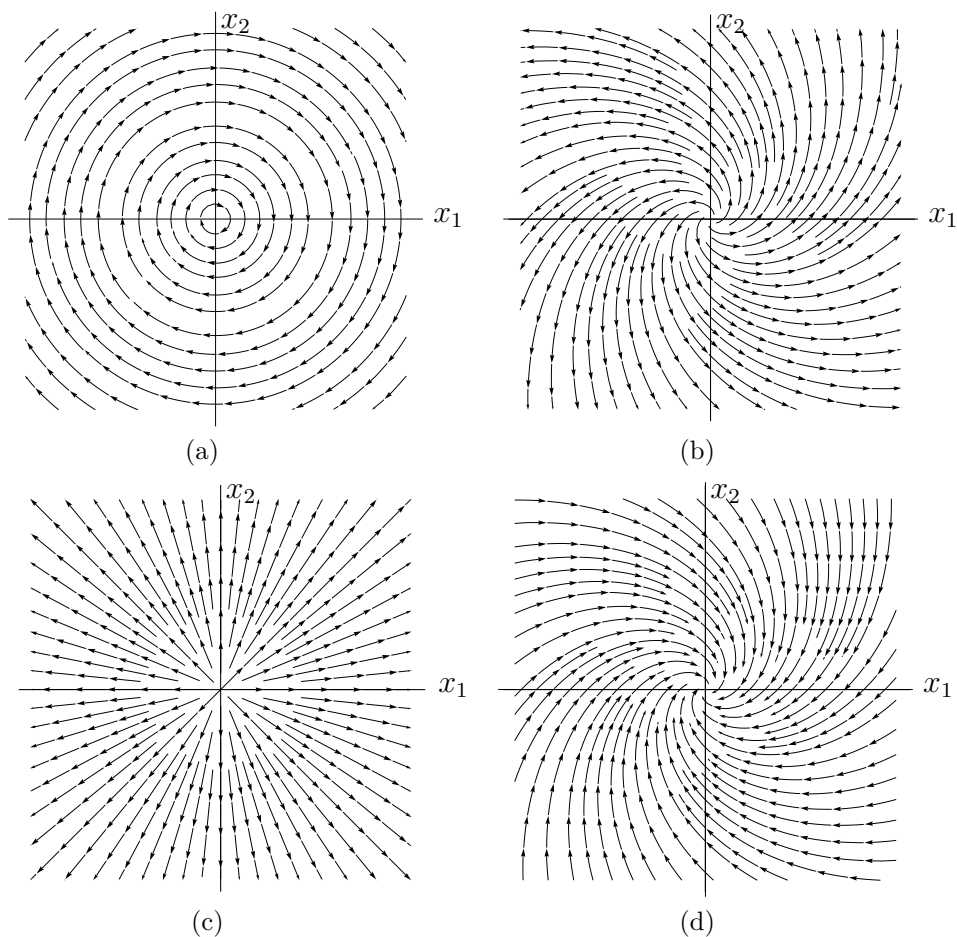
$$\mathbf{J}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Potom vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(-1, 0)$  jsou  $-1$  a  $-1$ , tedy bod  $(-1, 0)$  je asymptoticky stabilní uzel a vlastní čísla matice  $\mathbf{J}(1, 0)$  jsou  $1$  a  $-1$ , tedy bod  $(1, 0)$  je nestabilní sedlo. Příklady asymptoticky stabilního uzlu a nestabilního sedla jsou zobrazeny na obr. 4.1.



Obrázek 4.1: Stacionární body lineárních systémů 1: (a) Asymptoticky stabilní uzel, (b) Nestabilní sedlo

**Definice 4.2** (Bifurkační bod). Bifurkační bod  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je řešením pravé strany dynamického systému  $f(\mathbf{x}, \lambda) = 0$ , kde se mění počet řešení  $f(\mathbf{x}, \lambda) = 0$  nebo periodických řešení při přechodu hodnot  $\lambda$  přes  $\lambda_s$ .



Obrázek 4.2: Stacionární body lineárních systémů 2: (a) Stabilní střed, (b) Nestabilní ohnisko, (c) Nestabilní uzel, (d) Asymptoticky stabilní ohnisko

**Definice 4.3** (Sedlový bifurkační bod). Řekneme, že  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je sedlový stacionární bod, pokud platí všechny následující podmínky:

1.  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je stacionární bod,
2.  $\dim(\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)) = n-1$ ,  $n$  je řád matice,
3.  $f_\lambda(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  nepatří do oboru hodnot  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$ ,
4. existuje parametrizace  $\mathbf{x}(s), \lambda(s)$ , tak že  $\mathbf{x}(s_0) = \mathbf{x}_0$ ,  $\lambda(s_0) = \lambda_0$  a  $\frac{d^2\lambda(s_0)}{ds^2} \neq 0$ .

Nyní předvedeme jednoduchý příklad systému, ve kterém je sedlový bifurkační bod.

**Příklad 4.** Ověřte, že se v následujícím systému vyskytuje sedlový bifurkační bod.

$$\ddot{x} = -\lambda + \dot{x} + x^2. \quad (4.3)$$

Rovnici druhého řádu přepíšeme na soustavu dvou rovnic prvního řádu.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\lambda + x_2 + x_1^2. \end{aligned}$$

Potom nalezneme stacionární body, nalezením řešení algebraické rovnice

$$0 = -\lambda + x_1^2.$$

Řešení rovnice je  $x_1 = \pm\sqrt{\lambda}$ , tedy všechny body  $(x_1, \lambda_1) = (t, \pm\sqrt{t})$  pro  $t \geq 0$  splňují bod (1) v definici 4.3. Pak Jacobiho matice má tvar

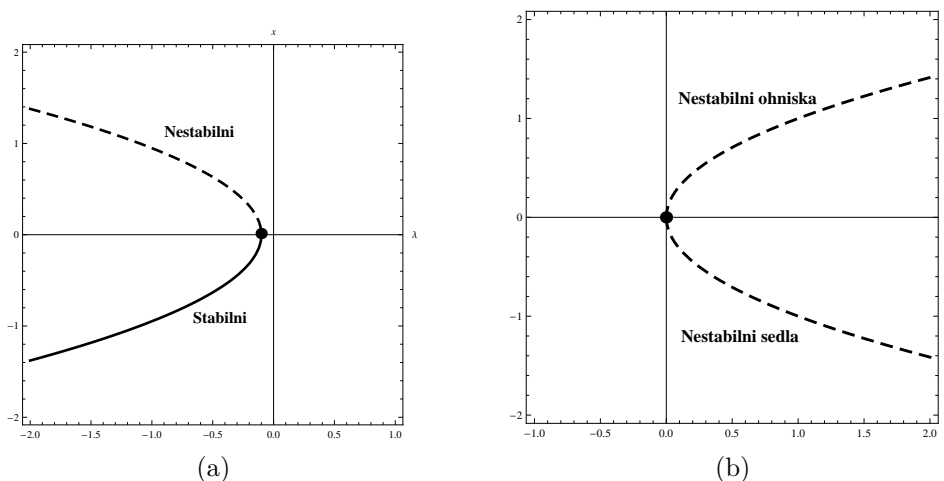
$$\mathbf{J}(\pm\sqrt{\lambda}, 0, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \pm 2\sqrt{\lambda} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Protože pro  $\lambda = 0$  má matice (6.3) hodnotu 1, tedy bod  $(0, 0)$  splňuje bod (2). Ověření bodu (3) v definici 4.3 pro bod  $(0, 0)$  je triviální, proto toto ověření necháme na čtenáři.

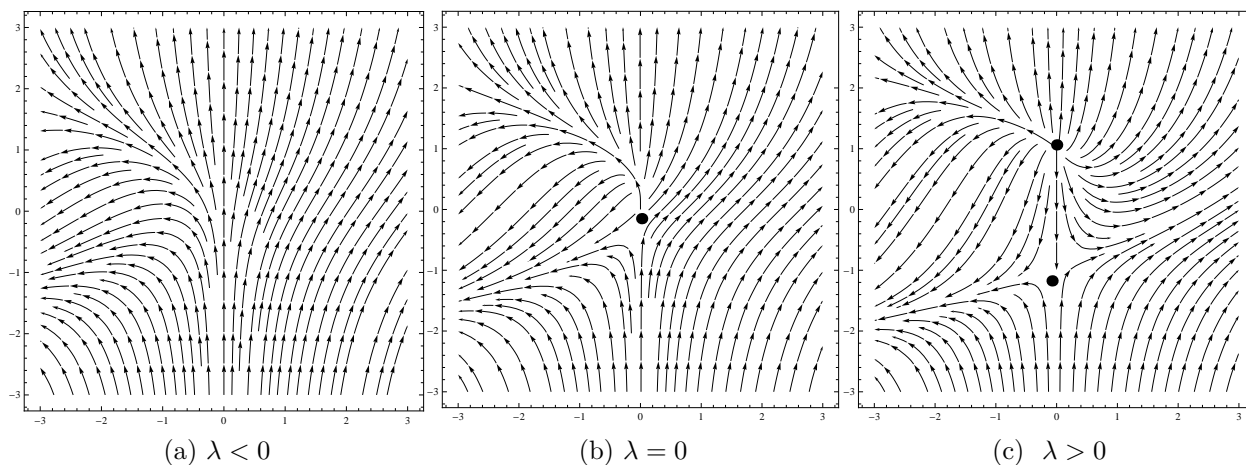
Pro bod (4) vytvoříme parametrizaci a ta má tvar

$$x_1(s) = s, x_2(s) = 0, \lambda(s) = s^2,$$

kde pro hodnotu parametru  $s_0 = 0$ , dosáhneme bodu  $(0, 0)$  a  $\frac{d^2\lambda(0)}{ds^2} = 1$ , potom bod  $(0, 0)$  je sedlovým bodem a bifurkační diagram systému (4.3) je zobrazen na obr. 4.3b.



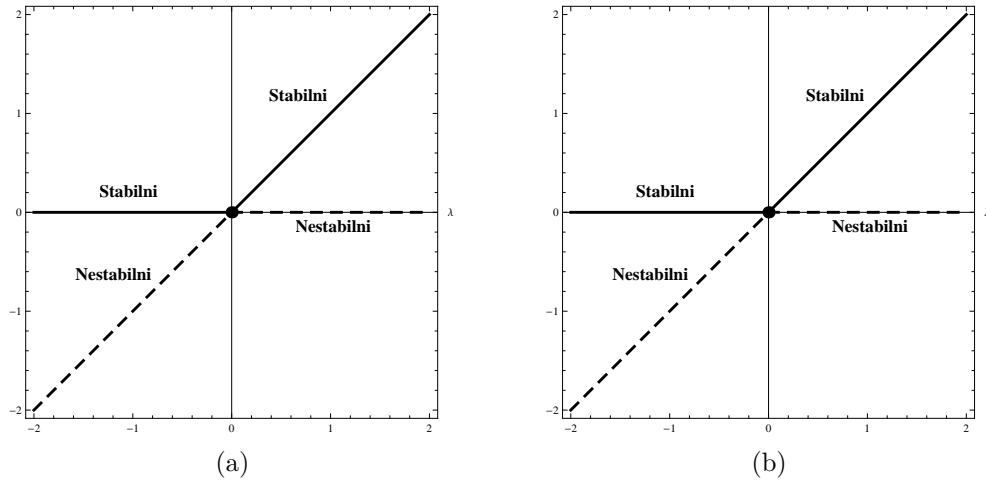
Obrázek 4.3: Příklady sedlových bifurkačních bodů.



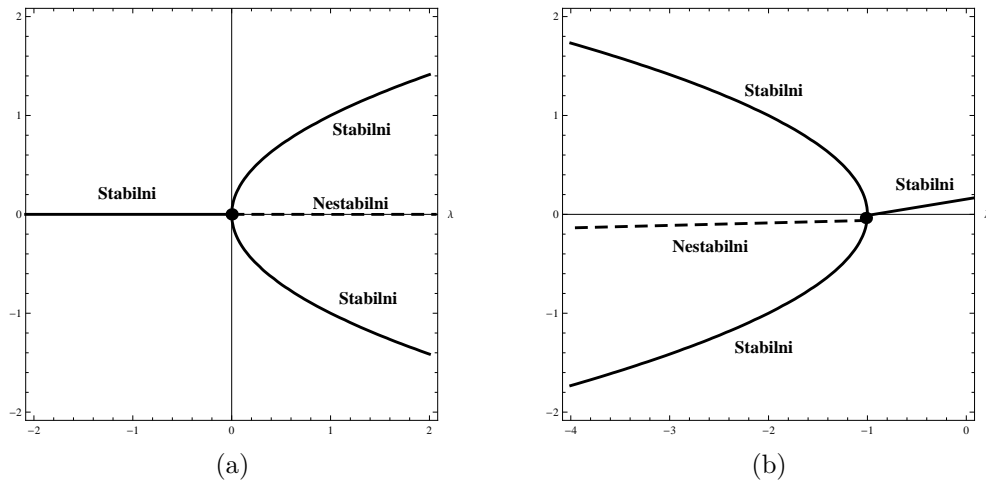
Obrázek 4.4: Fázové portréty pro příklad 4

**Definice 4.4** (Jednoduchý stacionární bifurkační bod). Řekneme, že  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  je jednoduchý stacionární bifurkační bod pokud platí všechny následující podmínky:

1.  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je stacionární bod,
2.  $\dim([\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0) | f_\lambda(\mathbf{x}_0, \lambda_0)]) = n - 1$ ,
3. právě dvě větve stacionárních řešení protíná bod  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  pod dvěma různými úhly.



Obrázek 4.5: Příklady transkritických bifurkací.



Obrázek 4.6: Příklady superkritických bifurkací.

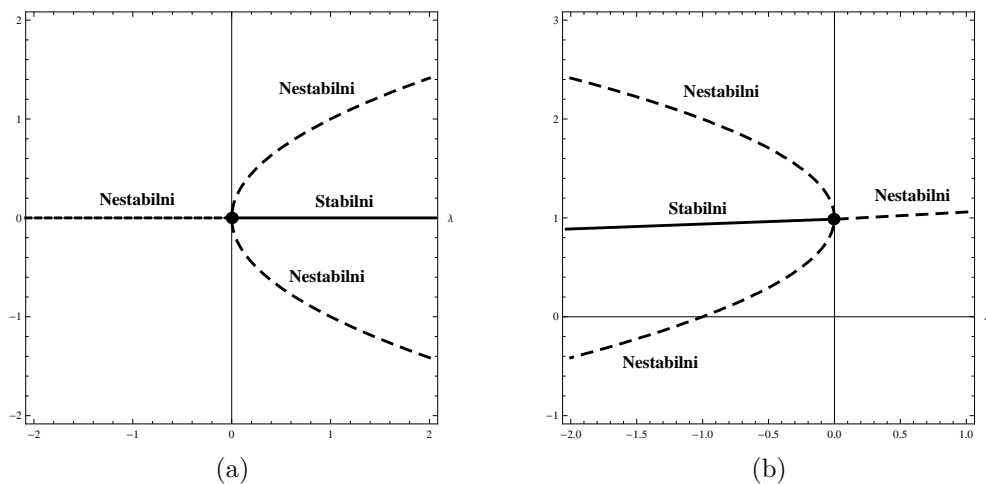
Uvedeme definice základních typů bifurkací.

**Definice 4.5** (Transkritická bifurkace). Nechť  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je jednoduchý stacionární bifurkační bod, pokud pro  $\lambda < \lambda_0$  existuje stabilní a nestabilní větev stacionárních řešení, které se v  $\lambda_0$  protnou a pro  $\lambda > \lambda_0$  obě větve mají opačný typ stability, pak takový jev nazveme **transkritická bifurkace**.

Příklad transkritické bifurkace je zobrazen na obr. 4.5.

**Definice 4.6** (Supercritická bifurkace). Nechť  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je jednoduchý stacionární bifurkační bod, pokud pro  $\lambda < \lambda_0$  (resp.  $\lambda > \lambda_0$ ) existuje pouze jedna stabilní větev stacionárních řešení a při průchodu  $\lambda_0$  se vytvoří dvě nové stabilní větve a původní větev ztratí stabilitu, pak takový jev nazveme **supercritická bifurkace**.





Obrázek 4.7: Příklady subkritických bifurkací.

Příklad supekritické bifurkace je zobrazen na obr. 4.6.

**Definice 4.7** (Subkritická bifurkace). Necht'  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je jednoduchý stacionární bifurkační bod, pokud pro  $\lambda < \lambda_0$  (resp.  $\lambda > \lambda_0$ ) existuje pouze jedna nestabilní větev stacionárních řešení a při průchodu  $\lambda_0$  se vytvoří dvě nové nestabilní větve a původní větev získá stabilitu, pak takový jev nazveme **subkritická bifurkace**.

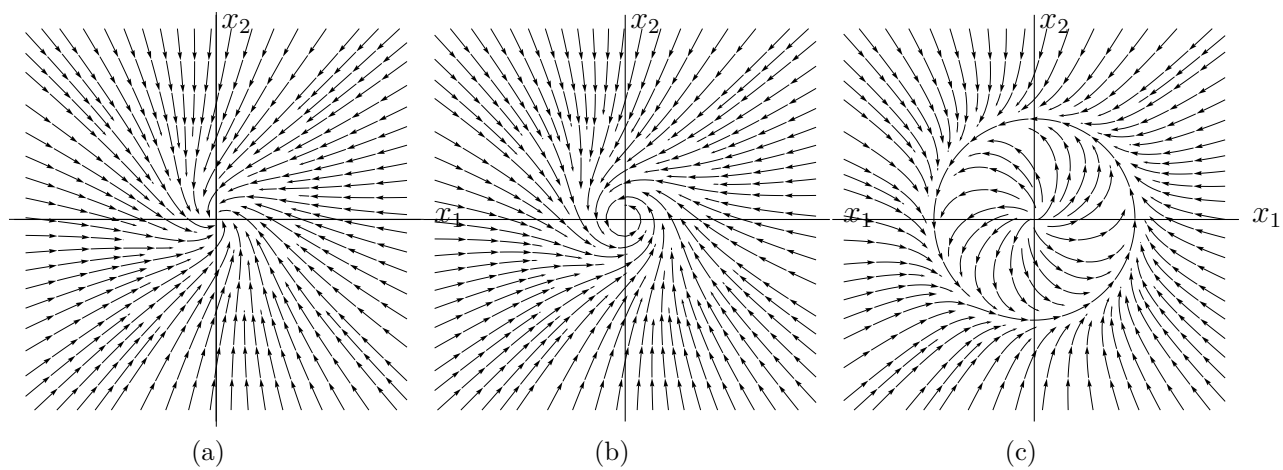
Příklad subkritické bifurkace je zobrazen na obr. 4.7.

**Definice 4.8** (Hopfova bifurkace). Pokud se při změně  $\lambda$  změní větev stacionárních řešení na větev limitních cyklů, pak takovouto bifurkaci nazveme Hopfova bifurkace. Fázové prostory systému s Hopfovou bifurkací jsou na obr. ??.

**Věta 4.2** (Postačující podmínka Hopfovy bifurkace). *Necht' pravá strana dynamického systému  $f(\mathbf{x}, \lambda) \in C^2$  a platí*

1.  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je stacionární bod,
2.  $\mathbf{J}(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  má dvojici ryze imaginárních vlastních čísel  $\mu(\lambda_0) = \pm i\beta$  a ostatní vlastní čísla mají nenulovou reálnou část,
3.  $\frac{d\text{Re}(\mu(\lambda_0))}{d\lambda} \neq 0$ ,

*potom v bodě  $(\mathbf{x}_0, \lambda_0)$  je bifurkační bod Hopfovy bifurkace a počáteční perioda limitních cyklů je  $T = \frac{2\pi}{\beta}$ .*



Obrázek 4.8: Fázové portréty systému s Hopfovou bifurkací

# Kapitola 5

## Nespojité bifurkace ve spojitých po částech hladkých systémech

V této podkapitole se blíže podíváme bifurkace objevující se ve spojitých po částech hladkých systémech. Takové bifurkace budeme nazývat nespojité bifurkace. Pro analýzu těchto bifurkací využijeme teoretický aparát o mnohoznačných funkcích z kapitoly 3. Důležitým objektem pro tuto analýzu bude zobecněná Jacobiho matice, protože její vlastní čísla hrají důležitou roli v chování systémů. Mnohoznačná vlastní čísla zobecněné Jacobiho matice vytvářejí "skok" mezi jednoznačnými vlastními čísly v komplexní rovině. Takové "skoky" ve vlastních číslech se v hladkých systémech nevyskytují a jsou nutnou podmínkou pro vznik nespojité bifurkace.

Výše zmíněná nutná podmínka pro existenci nespojité bifurkace není zatím matematicky podložena, ale podle diskuze v [1] je vhodné používat přístup analýzy stacionárních bodů, ve kterých jsou vlastní čísla mnohoznačná. Nyní definuje nespojitou bifurkaci a poté ukážeme několik příkladů analýzy bifurkačních jevů.

**Definice 5.1** (Nespojitá bifurkace). Bifurkační bod podle definice 4.2, nazveme bod nespojité bifurkace, pokud vlastní čísla zobecněné Jacobiho matice v tomto bodě jsou mnohoznačná a obsahují hodnotu, která leží na imaginární ose komplexní roviny.

Někoho by mohlo napadnout, že větve nespojité bifurkace budou obsahovat nějaké body nespojitosti rozdělené oproti bifurkacím v systémech s hladkou pravou stranou ale název nespojitá bifurkace vychází z nespojitosti ve vlastních číslech, respektive ve "skoku" hodnot vlastních čísel v komplexní rovině.

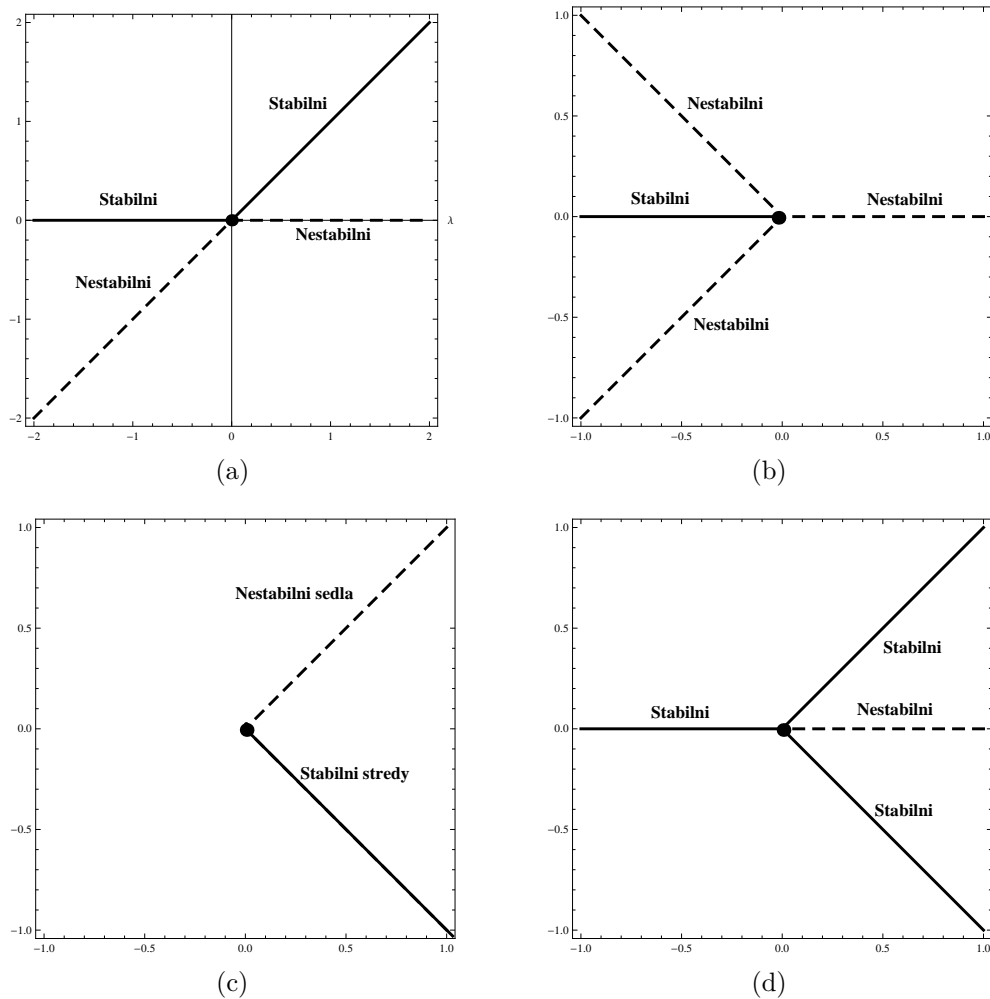
Při analýze spojitých po částech hladkých systémů se budeme setkávat s mnohoznačnými vlastními čísly a budeme používat jejich lineární aproximaci.

Například hodnotu  $\beta \operatorname{Sgn}(0)$ , kde  $\beta$  je reálné číslo aproximujeme lineárním výrazem  $\beta(2q - 1)$ , pro  $q \in \langle 0, 1 \rangle$ .

Podstatnou roli v nespojitých bifurkacích hrají násobné průsečíky "skoků" ve vlastních číslech s imaginární osou v komplexní rovině. Díky násobným průsečíkům s imaginární osou se mohou různě kombinovat typy stacionárních bodů nebo dokonce limitních cyklů v jednotlivých větvích stacionárních řešení. Pokud v nespojitých bifurkacích je jen jednonásobný průsečík ve vlastních číslech, pak tyto bifurkace jsou podobné bifurkacím v systémech s hladkou pravou stranou. Uvedeme několik příkladů nespojitých bifurkací podobných hladkým bifurkacím a jejich analýzu stability.

**Příklad 5.** Analyzujte stabilitu a typ bifurkace v systému

$$\dot{x} = \left| \frac{1}{2}\lambda \right| - \left| x - \frac{1}{2}\lambda \right|.$$



Obrázek 5.1: Příklady nespojitých bifurkací: (a) Transkritická bifurkace, (b) Subkritická bifurkace, (c) Sedlová bifurkace, (d) Superkritická bifurkace

Větve stacionárních bodů systému jsou řešení rovnice

$$0 = \left| \frac{1}{2}\lambda \right| - \left| x - \frac{1}{2}\lambda \right|.$$

Větve stacionárních bodů jsou

$$[0, \lambda] \text{ a } [\lambda, \lambda].$$

Zobecněná Jacobiho matice má tvar

$$\tilde{\mathbf{J}}(x, \lambda) = -\text{Sgn}\left(x - \frac{1}{2}\lambda\right). \quad (5.1)$$

Vlastní čísla matice (5.1) jsou

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}(\lambda, \lambda) &= 1, \lambda > 0, \\ \tilde{\mathbf{J}}(\lambda, \lambda) &= -1, \lambda < 0, \\ \tilde{\mathbf{J}}(0, \lambda) &= 1, \lambda > 0, \\ \tilde{\mathbf{J}}(0, \lambda) &= -1, \lambda < 0, \\ \tilde{\mathbf{J}}(0, 0) &= \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Kladná vlastní čísla implikují nestabilní části větve a záporná implikují stabilní části větve. V bodě  $[0, 0]$  dostáváme mnohozačné vlastní číslo, které jedenkrát protíná imaginární osu v komplexní rovině. Tedy bod  $[0, 0]$  je bod nespojitě bifurkace.

Ověříme, jestli bod  $[0, 0]$  je podle definice 4.4 jednoduchý stacionární bifurkační bod. Body (1) a (3) v definici 4.4 jsou již ověřeny, tedy ověříme bod (2). Funkce  $f_\lambda$  má tvar

$$f_\lambda(x, \lambda) = \frac{1}{2} \operatorname{Sgn} \left( \frac{1}{2} \lambda \right) + \frac{1}{2} \operatorname{Sgn} \left( x - \frac{1}{2} \lambda \right),$$

pak

$$[\tilde{\mathbf{J}}(0, 0)|f_\lambda(0, 0)] = \left[ -\operatorname{Sgn}(0), \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(0) + \frac{1}{2} \operatorname{Sgn}(0) \right].$$

Množinu  $\operatorname{Sgn}(0)$  lineárně aproximujeme, tedy dostaneme

$$\left[ -(2q - 1), \frac{1}{2}(2q_1 - 1) + \frac{1}{2}(2q - 1) \right]. \quad (5.2)$$

Pro  $q = \frac{1}{2}$  a  $q_1 = \frac{1}{2}$  má matice (5.2) hodnotu 0 a proto je ověřen bod (2). Tedy v bodě  $[0, 0]$  je nespojitá transkritická bifurkace.

V předchozím příkladě byl uvažován pouze jednodimenzionální systém, a proto ukážeme analýzu ve více dimenzionálním případě.

**Příklad 6.** Analyzujte stabilitu a typ bifurkace v systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + |x_1 + \frac{1}{2}\lambda| - |x_1 - \frac{1}{2}\lambda|. \end{aligned}$$

Větve stacionárních bodů systémů jsou řešením soustavy

$$\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= x_1 + |x_1 + \frac{1}{2}\lambda| - |x_1 - \frac{1}{2}\lambda|. \end{aligned}$$

Větve stacionárních bodů jsou

$$\begin{aligned} [0, 0, \lambda], \lambda \in \mathbb{R}, \\ [\pm|\lambda|, 0, \lambda], \lambda < 0. \end{aligned}$$

Zobecněná Jacobiho matice má tvar

$$\tilde{\mathbf{J}}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 + \operatorname{Sgn}(x_1 + \frac{1}{2}\lambda) - \operatorname{Sgn}(x_1 - \frac{1}{2}\lambda) & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.3)$$

Potom její vlastní čísla jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{-\operatorname{Sgn}(x_1 - \frac{1}{2}\lambda) + \operatorname{Sgn}(x_1 + \frac{1}{2}\lambda) + 1}, \\ \lambda_2 &= \sqrt{-\operatorname{Sgn}(x_1 - \frac{1}{2}\lambda) + \operatorname{Sgn}(x_1 + \frac{1}{2}\lambda) + 1}. \end{aligned}$$

Vlastní čísla pro větve  $[\pm|\lambda|, 0, \lambda]$  mají tvar

$$\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \mp 1.$$

Větve  $[\pm|\lambda|, 0, \lambda]$  jsou nestabilní sedla a pro větev  $[0, 0, \lambda]$  vlastní čísla jsou

pro  $\lambda > 0$

$$\lambda_1 = -\sqrt{3}, \lambda_2 = \sqrt{3}$$

a pro  $\lambda < 0$

$$\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i.$$

Pro  $\lambda = 0$  dostaneme mnohoznačná vlastní čísla a lineárně je aproximujeme

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{-2q_1 + 1 + 2q_2} \\ \lambda_2 &= \sqrt{-2q_1 + 1 + 2q_2} \end{aligned}, q_1, q_2 \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Mnohoznačná vlastní čísla pro  $q_1 = 1$  a  $q_2 = 0$  jsou ryze imaginární čísla, tedy bod  $[0, 0, 0]$  je bodem nespojitě bifurkace. Ověříme, jestli bod  $[0, 0, 0]$  je bod jednoduché stacionární bifurkace podle definice 4.4. Body (1) a (3) jsou již ověřeny tedy ověříme bod (2). Funkce  $f_\lambda(x_1, x_2, \lambda)$  má tvar

$$f_\lambda(x_1, x_2, \lambda) = \left[0, \frac{1}{2} \text{Sgn}(x_1 + \frac{1}{2}\lambda) + \frac{1}{2} \text{Sgn}(x_1 - \frac{1}{2}\lambda)\right]^T. \quad (5.4)$$

Lineárně aproximujeme mnohoznačné hodnoty v (5.3) a (5.4), potom dostaneme

$$[\tilde{\mathbf{J}}(0, 0, 0)|f_\lambda(0, 0, 0)] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 + 2q_1 - 2q_2 & 0 & q_1 + q_2 - 1 \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

Matice (5.5) má hodnotu 1 pro  $q_1 = \frac{1}{4}$  a  $q_2 = \frac{3}{4}$ .

Tedy bod  $[0, 0, 0]$  je jednoduchý stacionární bifurkační bod a bodě je nespojitá subkritická bifurkace.

Nyní zanalyzujeme stabilitu systému, jehož mnohoznačná vlastní čísla v bifurkačním bodě násobně protínají imaginární osu.

**Příklad 7.** Analyzujte stabilitu a typ bifurkace v systému

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + |x_1 + \lambda| - |x_1 - \lambda| - |x_2 + \lambda| + |x_2 - \lambda|. \end{aligned}$$

Nalezneme stacionární body

$$\begin{aligned} 0 &= x_2, \\ 0 &= -x_1 - x_2 + |x_1 + \lambda| - |x_1 - \lambda| - |x_2 + \lambda| + |x_2 - \lambda|. \end{aligned}$$

Větvě stacionárních bodů jsou

$$\begin{aligned} [0, 0, \lambda], \lambda \in \mathbb{R}, \\ [\pm 2\lambda, 0, \lambda], \lambda \geq 0. \end{aligned}$$

Zobecněná Jacobiho matice má tvar

$$\tilde{\mathbf{J}}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \text{Sgn}(x_1 + \lambda) - \text{Sgn}(x_1 - \lambda) & -1 - \text{Sgn}(x_2 + \lambda) + \text{Sgn}(x_2 - \lambda) \end{bmatrix}.$$

Vlastní čísla matice  $\tilde{\mathbf{J}}(\pm 2\lambda, 0, \lambda)$  pro  $\lambda > 0$ , mají tvar

$$\lambda_1 \approx -0.5 - 0.866025i, \lambda_2 \approx -0.5 + 0.866025i.$$

Tedy větev  $[\pm 2\lambda, 0, \lambda]$  pro  $\lambda > 0$ , obsahuje stabilní ohniska.

Pro větev  $[0, 0, \lambda]$  dostaneme

$$\tilde{\mathbf{J}}(0, 0, \lambda) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 + \text{Sgn}(\lambda) - \text{Sgn}(-\lambda) & -1 - \text{Sgn}(\lambda) + \text{Sgn}(-\lambda) \end{bmatrix},$$

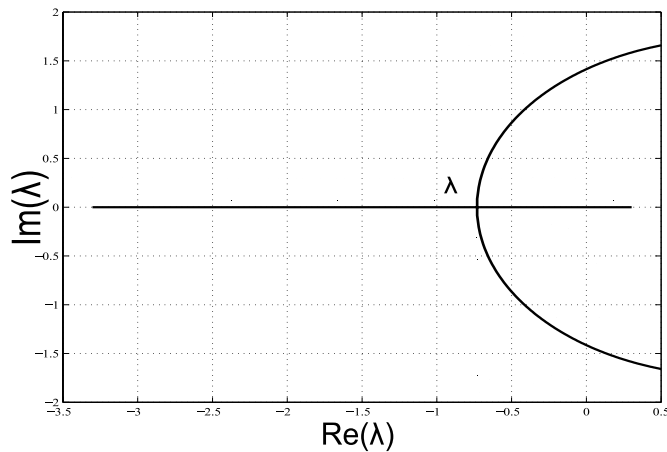
pak pro  $\lambda > 0$  dostaneme vlastní čísla

$$\lambda_1 \approx -3.30278, \lambda_2 \approx 0.302776,$$

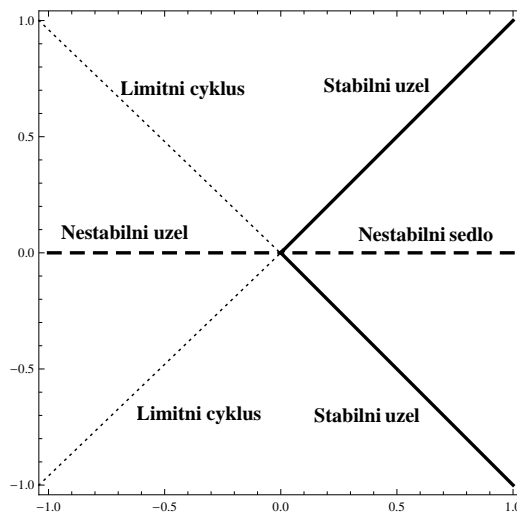
tedy část větve obsahuje nestabilní sedla a pro  $\lambda < 0$

$$\lambda_1 \approx 0.5 + 1.65831i, \lambda_2 \approx 0.5 - 1.65831i,$$

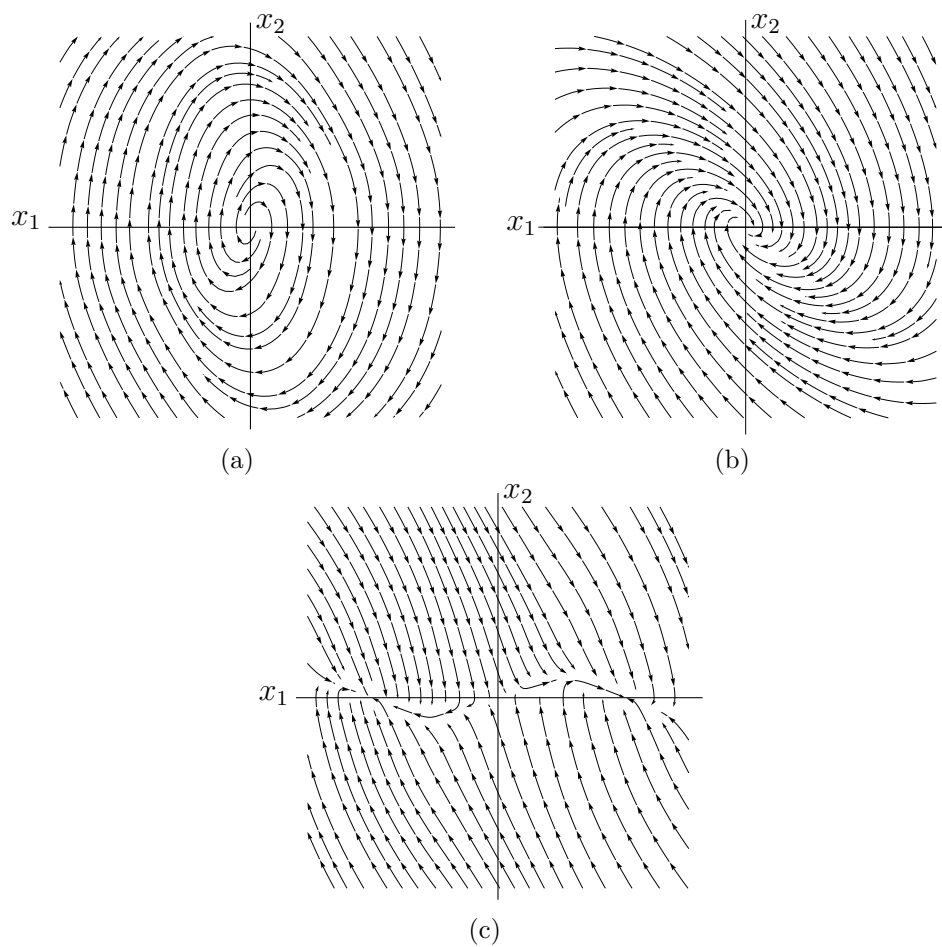
tedy část větve obsahuje nestabilní ohniska. Pro  $\lambda = 0$  dostáváme mnohoznačná čísla. Na obr. 5.2 vidíme, jak mnohoznačné číslo protínají třikrát imaginární osu, tedy bod  $[0, 0, 0]$  je nespojitá bifurkace a pokud se podíváme na obr. 5.4, tak zjistíme, že pro  $\lambda < 0$  vznikl limitní cyklus. Bifurkační diagram našeho systému je na obr. 5.3.



Obrázek 5.2: Vlastní čísla k příkladu 7.



Obrázek 5.3: Bifurkační diagram systému 7.



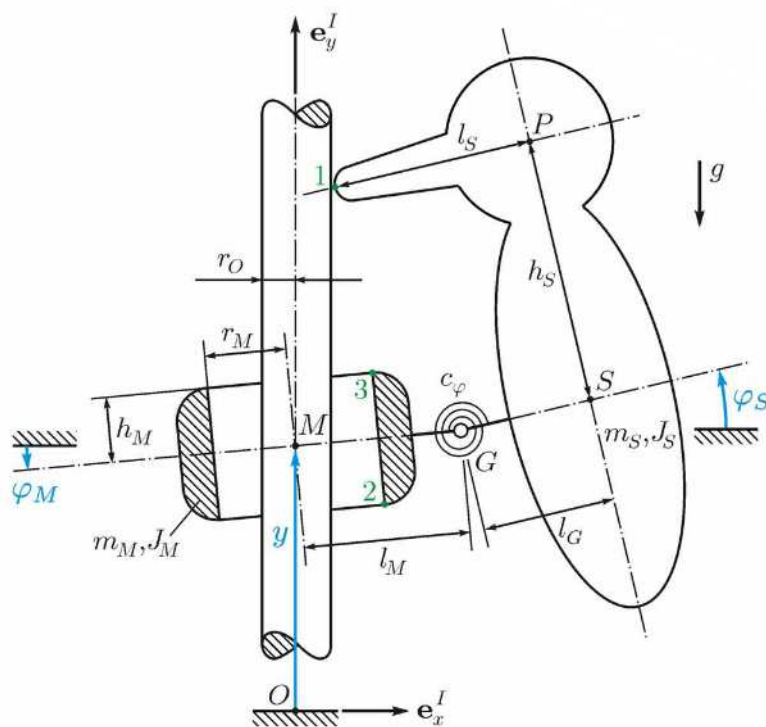
Obrázek 5.4: Fázový portrét k příkladu 7: (a)  $\lambda < 0$  (b)  $\lambda = 0$  (c)  $\lambda > 0$ .



# Kapitola 6

## Matematický model hračky datel na tyči

V této kapitole se budeme zabývat planárním případem modelu datla na tyči. Porovnáme dva systémy pohybových rovnic, jednodušší systém pohybových rovnic, který je uvažován bez přítomnosti tření během klouvnutí datla do tyče a složitější, ve kterém je uvažováno tření během klouvnutí datla a slip-stik efektu. Oba systémy jsou dány diferenciálně algebraickými rovnicemi, tj. rovnice, které obsahují derivace neznámých funkcí i algebraické proměnné. Datel na tyči se skládá ze čtyř částí: nekonečně dlouhá tyč, tělo datla, pohyblivý úchyt na tyči a pružina. Na obr. 6.1 je vykresleno schéma hračky datel na tyči.



Obrázek 6.1: Datel na tyči (převzato z [6]).

Pomocí Lagrangeových rovnic druhého řádu odvodíme základní lineární pohybové rovnice datla na tyči bez tření a bez klouvu během pohybu. Lagrangeova metoda druhého

parametry modelu	význam
$m_S$	hmotnost datla
$m_M$	hmotnost úchytu
$J_S$	moment hybnosti datla
$J_M$	moment hybnosti úchytu
$h_M$	polovina výšky úchytu
$h_S, l_S$	lokální poloha zobáku s počátkem v těžišti datla
$g$	gravitační konstanta,
$c_\varphi$	tuhost pružiny
$l_M$	vertikální vzdálenost mezi úchytem a osou otáčení pružiny
$l_G$	vertikální vzdálenost mezi těžištěm datla a osou otáčení pružiny
$r_0$	poloměr tyče
$r_M$	vnitřní poloměr úchytu
$M$	těžiště úchytu
$S$	těžiště těla datla
$O$	počátek vztažné soustavy
$y$	poloha úchytu v ose y
$\varphi_S$	výchylka datla vůči vodorovné poloze
$\varphi_M$	výchylka úchytu vůči vodorovné poloze.

Tabulka 6.1: Parametry modelu hračky datel na tyči.

řádu spočívá ve vytvoření Lagrangeovy funkce, kterou získáme rozdílem veškeré kinetické a potenciální energie soustavy hmotných bodů. Pro datla a úchyt uvažujeme rotační pohyb pro náklon vůči vodorovné poloze a translační pohyb těžišť v ose y, kde poloha těžiště datla je závislá na poloze úchytu. Potom systém má 3 stupně volnosti a označíme  $\mathbf{q} = [y, \varphi_M, \varphi_S]^T$ .

Poloha těžiště datla je

$$y_D = y + l_M \varphi_M + l_G \varphi_S = \begin{bmatrix} 1 & l_M & l_G \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y \\ \varphi_M \\ \varphi_S \end{bmatrix} = \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} 1 \\ l_M \\ l_G \end{bmatrix}.$$

Kinetická energie datla je

$$T_1 = \frac{1}{2} m_S \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} 1 \\ l_M \\ l_G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & l_M & l_G \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}_S^2 = \frac{1}{2} m_S \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} 1 & l_M & l_G \\ l_M & l_M^2 & l_M l_G \\ l_G & l_M l_G & l_G^2 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} J_S \dot{\varphi}_S^2,$$

a potenciální energie má tvar

$$V_1 = m_S g y_D = m_S g \mathbf{q}^T \begin{bmatrix} 1 \\ l_M \\ l_G \end{bmatrix}.$$

Kinetická energie úchytu je

$$T_2 = \frac{1}{2} m_M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J_M \dot{\varphi}_M^2,$$

a potenciální energie je

$$V_2 = g m_M y.$$

Potenciální energie pružiny má tvar

$$V_3 = \frac{1}{2}c_\varphi(\varphi_S - \varphi_M)^2.$$

Pak Lagrangeova funkce má tvar

$$\mathbf{L} = T_1 + T_2 - V_1 - V_2 - V_3 = \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} m_S + m_M & m_S l_M & m_S l_G \\ m_S l_M & m_S l_M^2 + J_M & m_S l_M l_G \\ m_S l_G & m_S l_M l_G & m_S l_G^2 + J_S \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} - V_1 - V_2 - V_3$$

Potom Lagrangeovu funkci  $\mathbf{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})$  dosadíme do Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathbf{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}_i} = 0, i = 1, 2, 3, \quad (6.1)$$

a dostaneme tak systém tří lineárních diferenciálních rovnic druhého řádu

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}, \quad (6.2)$$

kde

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_S + m_M & m_S l_M & m_S l_G \\ m_S l_M & m_S l_M^2 + J_M & m_S l_M l_G \\ m_S l_G & m_S l_M l_G & m_S l_G^2 + J_S \end{bmatrix}, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g \\ -c_\varphi(\varphi_M - \varphi_S) - m_S g l_M \\ -c_\varphi(\varphi_S - \varphi_M) - m_S g l_G \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Systém rovnic (6.2) popisuje pohyb modelu datla bez dotyku úchyty tyče a nárazů zobáku datla do tyče. Dotyky mezi tyčí a úchytem a nárazy do tyče zahrneme do našich úvah v následujících dvou podkapitolách.

## 6.1 Systém bez tření se zahrnutím nárazů

V této podkapitole sestavíme jednodušší systém popisující pohyb datla s klovnutím zobáku a dotyk úchyty s tyčí. Klovnutí je popisováno pomocí skoku v rychlosti  $\varphi_S$  násobené hodnotou  $-\varepsilon \in \langle -1, 0 \rangle$ . Dotyk je popsán pomocí dvou omezovacích sil  $\lambda_1$  a  $\lambda_2$ . Podobný systém lze nalézt v [8]. Model je rozdělen na čtyři stavy:

**Stav 1** popisuje pohyb datla a úchyty bez jakéhokoliv rušení nebo klovnutí, tedy když platí  $|\varphi_M| < \frac{r_M - r_0}{h_M}$  a zároveň  $\varphi_S < \frac{l_M + l_G - l_S - r_0}{h_S}$ , viz obr. 6.3a. Pohyb je dán systémem

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} &= \mathbf{h}, \\ \lambda_1 &= 0, \\ \lambda_2 &= 0. \end{aligned} \quad (6.4)$$

**Stav 2** popisuje výchylku úhlu  $\varphi_S$  během doby, kdy  $\varphi_M = -\frac{r_M - r_0}{h_M}$ , tedy když se úchyt dotýká (bodem 2 na obr. 6.1) tyče a navíc  $\varphi_S < \frac{l_M + l_G - l_S - r_0}{h_S}$  a  $\dot{y} = 0$ . Systém opustí tento stav pokud  $\lambda_1$  změní znaménko a přejde do stavu 1. Žádná změna  $y$  a  $\varphi_M$  neprobíhá, viz obr. 6.3b. Pohyb je dán systémem

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g + \lambda_2 \\ -c_\varphi\left(-\frac{r_M - r_0}{h_M} - \varphi_S\right) - m_S g l_M + h_M \lambda_1 + r_M \lambda_2 \\ -c_\varphi\left(\varphi_S + \frac{r_M - r_0}{h_M}\right) - m_S g l_G \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

**Stav 3** popisuje výchylku úhlu  $\varphi_S$  během doby, kdy  $\varphi_M = \frac{r_M - r_0}{h_M}$ , tedy když se úchyt dotýká (bodem 3 na obr. 6.1) tyče a navíc  $\varphi_S < \frac{l_M + l_G - l_S - r_0}{h_S}$  a  $\dot{y} = 0$ . Systém opustí tento stav pokud  $\lambda_1$  změní znaménko a přejde do stavu 1. Žádná změna  $y$  a  $\varphi_M$  neprobíhá, viz obr. 6.3c. Pohyb je dán systémem

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g + \lambda_2 \\ -c_\varphi \left( \frac{r_M - r_0}{h_M} - \varphi_S \right) - m_S g l_M - h_M \lambda_1 + r_M \lambda_2 \\ -c_\varphi \left( \varphi_S - \frac{r_M - r_0}{h_M} \right) - m_S g l_G \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

**Stav 4** popisuje klovnutí během stavů 1,2,3. Klovnutí znamená, že se zobák dotkne (bodem 1 na obr. 6.1) tyče. Stav 4 nastane v  $t_0$  pokud  $\varphi_S(t_0) = \frac{l_M + l_G - l_S - r_0}{h_S}$  a  $\dot{\varphi}_S(t_0) > 0$  a poté se vrátí do stavu, ve kterém byl systém před klovnutím, viz obr. 6.3d.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t_0+) &= \mathbf{q}(t_0-), \\ \dot{\mathbf{y}}(t_0+) &= \dot{\mathbf{y}}(t_0-), \\ \dot{\varphi}_M(t_0+) &= \dot{\varphi}_M(t_0-), \\ \dot{\varphi}_S(t_0+) &= -\varepsilon \dot{\varphi}_S(t_0-), \end{aligned} \quad (6.7)$$

Protože systém je po částech lineární, jsme schopni nalézt analytické řešení (6.4), (6.5) a (6.6). Stav 4 je pouze skok v  $\dot{\varphi}_S$ .

Analytické řešení (6.5) má tvar:

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1, \\ \varphi_M(t) &= -\frac{r_M - r_0}{h_M}, \\ \varphi_S(t) &= \frac{-gh_M l_G m_S + c_\varphi r_0 - c_\varphi r_M}{c_\varphi h_M} + C_2 e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} + C_3 e^{\frac{-\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{h_M} (g(l_G + l_M)m_S - g(m_M + m_S)r_M - \\ &\quad - \frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}} (J_S + l_G m_S (l_G + l_M - r_M)) (C_2 e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} + C_3)), \\ \lambda_2 &= g(m_M + m_S) - \frac{c_\varphi l_G m_S e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} (C_2 e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} + C_3)}{J_S + l_G^2 m_S}. \end{aligned}$$

Analytické řešení (6.6) má tvar:

$$\begin{aligned}
y(t) &= C_1, \\
\varphi_M(t) &= \frac{r_M - r_0}{h_M}, \\
\varphi_S(t) &= \frac{-gh_M l_G m_S - c_\varphi r_0 + c_\varphi r_M}{c_\varphi h_M} + C_2 e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} + C_3 e^{\frac{-\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}}, \\
\lambda_1 &= \frac{1}{h_M} (g(l_G + l_M) m_S - g(m_M + m_S) r_M - \\
&\quad - \frac{\sqrt{c_\varphi} t}{c_\varphi e^{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}} (J_S + l_G m_S (l_G + l_M - r_M)) (C_2 e^{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}} + C_3)} \frac{2\sqrt{c_\varphi}}{J_S + l_G^2 m_S}), \\
\lambda_2 &= g(m_M + m_S) - \frac{c_\varphi l_G m_S e^{\frac{\sqrt{c_\varphi} t}{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}}} (C_2 e^{\sqrt{-J_S - l_G^2 m_S}} + C_3)}{J_S + l_G^2 m_S}.
\end{aligned}$$

$C_1, C_2, C_3$  jsou počáteční podmínky při vstupu systému do určitého stavu.

V tomto modelu se bohužel nevyskytuje periodické řešení, proto tento model uvádíme jen jako úvod k složitějšímu systému.

## 6.2 Systém se třením a nárazy

Nyní představíme složitější systém pohybových rovnic datla. V modelu se během dotyku datla nebo úchyty uvažuje stick-slip efekt, což znamená, že úchyt nebo zobák se během dotyku s tyčí může pohybovat vertikálním směrem (tzv. klouzavý pohyb) nebo se přilepit k tyči. V systému jsou uvažovány odvozené matice z (6.3). Pak označíme

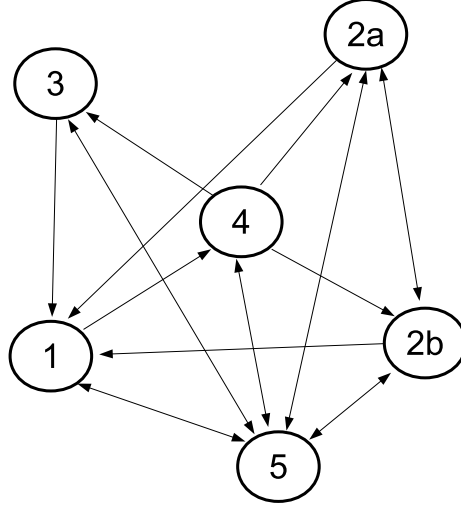
$$g_{N_1} = (l_M + l_G - l_s - r_0) - h_s \varphi_S, g_{N_2} = (r_M - r_0) + h_M \varphi_M, g_{N_3} = (r_M - r_0) - h_S \varphi_M, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{w}_{N_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -h_S \end{bmatrix}, \mathbf{w}_{N_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ h_M \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_{N_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\mathbf{w}_{T_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ l_M \\ l_G - l_S \end{bmatrix}, \mathbf{w}_{T_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_M \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{w}_{T_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ r_M \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$I_N = \{i : g_{N_i} = 0\}.$$

Navíc během kontaktu mezi tělesy, díky tuhosti těles vznikají síly ve směru pohybů těles, proto zavedeme kontaktní sílu v normálovém směru  $\lambda_{N_i}$  a kontaktní sílu v tečném směru  $\lambda_{T_i}$ . K těmto silám přidáme kontaktní impulzy v tečném a normálovém směru, které budeme značit  $\Lambda_{T_i}$  a  $\Lambda_{N_i}$ . Během kontaktů vzniká tření mezi tělesy, proto koeficienty tření mezi jednotlivými částmi označíme  $\mu_1, \mu_2$  a  $\mu_3$ . Náraz se řídí *Newton's restitution law*, podle kterého se zachovává množství kinetické energie po nárazu a proto zavedeme restituční koeficienty  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ .



Obrázek 6.2: Orientovaný graf, který popisuje možnosti průběhů stavů systému

1	pohyb datla bez kontaktů
2a	úchyt se dotýká dolní částí tyče a klouže po tyči
2b	úchyt se dotýká dolní částí tyče a je přilepený k tyči
3	úchyt se dotýká horní částí tyče a klouže po tyči
4	náraz úchyty do tyče
5	náraz zobáku datla do tyče

Dále budeme potřebovat relativní kontaktní rychlosti v tečném směru, které popisují rychlost v tečném směru mezi dvěma tělesy, které jsou v kontaktu. Relativní kontaktní rychlost mezi zobákem datla a tyčí označíme  $\gamma_{T1}$ . Relativní kontaktní rychlosti mezi horní a dolní částí úchyty a tyčí označíme  $\gamma_{T2}$  a  $\gamma_{T3}$ . Tyto rychlosti mají tvar

$$\gamma_{T1} = \dot{y} + l_M \dot{\varphi}_M + (l_G - l_S) \dot{\varphi}_S,$$

$$\gamma_{T2} = \gamma_{T3} = \dot{y} + r_M \dot{\varphi}_M.$$

Model se chová podle následujících stavů:

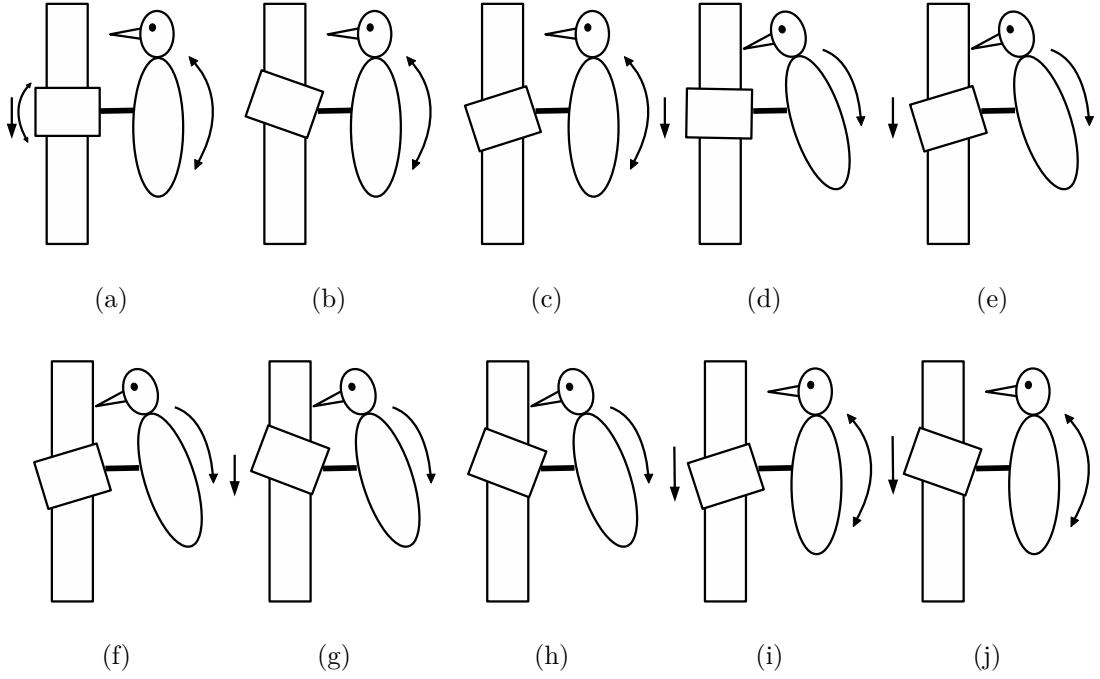
**Stav 1** popisuje pohyb datla a úchyty bez jakéhokoliv rušení nebo klovnutí, tedy když platí  $|\varphi_M| < \frac{r_M - r_0}{h_M}$  a zároveň  $\varphi_S < \frac{l_M + l_G - l_S - r_0}{h_S}$ . Pohyb je dán systémem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{h}, \quad (6.11)$$

**Stav 2** popisuje pohyb modelu během doby, kdy  $g_{N2} = 0$ , tedy když se úchyt dotýká (bodem 2 na obr. 6.1) tyče. Během doby dotyku nastávají následující dvě situace:

(a) úchyt v dotyku začne klouzat po tyči, tedy  $\dot{y} \neq 0$ . Tento pohyb je dán systémem

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g + \lambda_{T2} \\ -c_\varphi \left( \frac{r_M - r_0}{h_M} - \varphi_S \right) - m_S g l_M - h_M \lambda_{N2} + r_M \lambda_{T2} \\ -c_\varphi \left( \varphi_S - \frac{r_M - r_0}{h_M} \right) - m_S g l_G \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$



Obrázek 6.3: (a) Pohyb bez jakéhokoliv rušení (b) Úchyt se dolní částí dotýká tyče a je přilepený k tyči (c) Úchyt se horní částí dotýká tyče a je přilepený k tyči (d) Klovnutí datla (e) Klovnutí datla během klouzavého pohybu (f) Klovnutí datla během přilepení úchytu horní částí k tyči (g) Klovnutí datla během klouzavého pohybu (h) Klovnutí datla během přilepení úchytu dolní částí k tyči (i) Klouzání úchytu po tyči (j) Klouzání úchytu po tyči.

a platí pro pohyb  $y$  směrem dolů

$$\lambda_{T2} = -\mu\lambda_{N2} \quad (6.13)$$

a pro pohyb směrem vzhůru platí

$$\lambda_{T2} = \mu\lambda_{N2}. \quad (6.14)$$

Pokud  $\lambda_N$  změní znaménko, potom systém přejde do stavu 1 nebo pokud rychlost  $\dot{y}$  dojde na nulu, pak systém přejde do následujícího stavu.

- (b) pokud  $\dot{y} = 0$ , pak se úchyt přilepí k tyči a neprobíhá žádný pohyb v  $y$  a  $\varphi_M$ . Tento stav popisuje systém

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g + \lambda_2 \\ -c_\varphi \left( -\frac{r_M - r_0}{h_M} - \varphi_S \right) - m_S g l_M - h_M \lambda_1 + r_M \lambda_2 \\ -c_\varphi \left( \varphi_S + \frac{r_M - r_0}{h_M} \right) - m_S g l_G \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

Tento stav probíhá dokud  $\lambda_{T2} < \mu\lambda_{N2}$ , pak systém přejde do stavu 2a.

**Stav 3** popisuje pohyb modelu během doby, kdy  $g_{N3} = 0$ , tedy když se úchyt dotýká (bodem 3 na obr. 6.1) tyče. Úchyt je v dotyku a klouže po tyči, tedy  $\dot{y} \neq 0$ . Tento pohyb je

dán systémem

$$\mathbf{M} \begin{bmatrix} \ddot{y} \\ 0 \\ \ddot{\varphi}_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(m_S + m_M)g + \lambda_{T3} \\ -c_\varphi \left( \frac{r_M - r_0}{h_M} - \varphi_S \right) - m_S g l_M - h_M \lambda_{N3} + r_M \lambda_{T3} \\ -c_\varphi \left( \varphi_S - \frac{r_M - r_0}{h_M} \right) - m_S g l_G \end{bmatrix}, \quad (6.16)$$

a platí pro pohyb  $y$  směrem dolů

$$\lambda_{T3} = -\mu_3 \lambda_{N3} \quad (6.17)$$

a pro pohyb směrem vzhůru platí

$$\lambda_{T3} = \mu_3 \lambda_{N3}. \quad (6.18)$$

Pokud pak  $\lambda_{N3}$  změní znaménko, tak systém přejde do stavu 1.

**Stav 4** popisuje náraz úchytu o tyč před vstupem do stavu 2 nebo 3, kdy v čase  $t_0$  platí  $g_{Ni} = 0$  pro  $i = 2$  nebo  $i = 3$ . Náraz se řídí *Newton's impact Law* a *Newton's restitution Law*. Navíc během nárazu je uvažování Coulombovo tření mezi tyčí a úchytem. Rovnice nárazu v čase  $t_0$  má tvar

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}(t_0+) - \dot{\mathbf{q}}(t_0-)) = \mathbf{w}_{Ni} \Lambda_{Ni} + \mathbf{w}_{Ti} \Lambda_{Ti}, \quad (6.19)$$

kde  $\dot{\mathbf{q}}(t_0\pm) = \lim_{t \rightarrow t_0\pm} \dot{\mathbf{q}}(t)$  a podle *Newtonian impact Law* platí

$$\dot{\varphi}_M^+ = -\varepsilon_{Ni} \dot{\varphi}_M^-. \quad (6.20)$$

Díky uvažování chování systému podle *Newton's restitution Law* platí pro hodnoty

$$\Lambda_{Ni} > 0 \text{ a } \dot{\varphi}_M(t_0+) = -\varepsilon_{Ni} \dot{\varphi}_M(t_0-). \quad (6.21)$$

Pro Coulombovo tření platí

$$\Lambda_{Ti} \in \mu_i \Lambda_{Ni} \text{ Sgn}(\gamma_{Ti}^+ + \varepsilon_{Ti} \gamma_{Ti}^-). \quad (6.22)$$

Po aplikaci zákonů přejde ihned systém do jiného stavu.

**Stav 5** popisuje náraz, kdy datel se dotkne zobákem do tyče, který proběhne v čase  $t_0$  a tomto čase platí  $g_{N1} = 0$ . Tento stav nastává během jednoho z předchozích stavů a během klouvnutí jsou uvažovány stejné zákony jako ve stavu 4. Náraz popisuje rovnice

$$\mathbf{M}(\dot{\mathbf{q}}(t_0+) - \dot{\mathbf{q}}(t_0-)) = \sum_{i \in I_N} \mathbf{w}_{Ni} \Lambda_{Ni} + \mathbf{w}_{Ti} \Lambda_{Ti}, \quad (6.23)$$

Díky uvažování *Newton's restitution Law* platí pro hodnoty

$$\Lambda_{N1} > 0 \text{ a } \dot{\varphi}_S(t_0+) = -\varepsilon_{N1} \dot{\varphi}_S(t_0-). \quad (6.24)$$

Pro Coulombovo tření během toho stavu má tvar

$$\Lambda_{Ti} \in \mu_i \Lambda_{Ni} \text{ Sgn}(\gamma_{Ti}^+ + \varepsilon_{Ti} \gamma_{Ti}^-), \text{ pro všechny } i \in I_N. \quad (6.25)$$

Po aplikaci zákonů přejde ihned systém do jiného stavu.

Fyzické polohy a pohyb modelu jsou zobrazeny na obr. 6.3, kromě polohy na obr. 2c a 2f, tyto polohy nastávají pouze v jednodušším systému, navíc je možný pohyb úchytu vzhůru namísto dolů.



## 6.3 Periodické chování

V této podkapitole se budeme věnovat popisu hledání periodického chování datla pro systém se třením, tedy jakým způsobem vytvoříme bifurkační diagram periodického řešení. Pro hledání periodického chování využijeme Poincarého zobrazení.

### Poincarého zobrazení

Uvažujeme autonomní  $n$ -dimenzionální dynamický systém

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t)) \quad (6.26)$$

s periodickým řešením  $\mathbf{x}^p(t)$ . Nechť  $\mathbf{x}^*$  je bod periodického řešení a  $\Sigma$  je  $n-1$  dimenzionální nadrovina protínající  $\mathbf{x}^p$  v  $\mathbf{x}^*$ . Trajektorie vycházející z  $\mathbf{x}^*$  protne  $\Sigma$  v  $\mathbf{x}^*$  během času  $T$ , což je perioda periodického řešení. Trajektorie vycházející na  $\Sigma$  v malém okolí  $\mathbf{x}^*$  protne okolí  $\mathbf{x}^*$ . Proto  $\mathbf{x}(t)$  a  $\Sigma$  definují zobrazení z okolí  $U_1(\mathbf{x}^*) \subset \Sigma$  do jiného okolí  $U_2(\mathbf{x}^*) \subset \Sigma$ . Zobrazení  $P: U_1 \rightarrow U_2$  je definováno

$$\mathbf{x}_{i+1} = P(\mathbf{x}_i), \quad (6.27)$$

kde  $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}(t_{i+1})$  je první průsečík trajektorie s  $\Sigma$  vycházející z  $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i) \in \Sigma$ .  $P$  nazveme Poincarého zobrazení a platí  $\mathbf{x}^* = P(\mathbf{x}^*)$ .

Pro všechny hodnoty restitučního koeficientu od 0 do 1 vytvoříme Poincarého zobrazení a z každého Poincarého zobrazení nalezneme hodnoty, pro které existuje periodické řešení. Tyto hodnoty zaneseme do bifurkačního diagramu.

Pro Poincarého zobrazení sestrojíme pětidimenzionální nadrovinu

$$\Sigma = \{(\varphi_M, \varphi_S, \dot{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R} : \varphi_M = -\frac{r_M - r_0}{h_M}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}\}, \quad (6.28)$$

podobně jako v [7]. Fyzický význam počáteční podmínky na množině (6.28) je, že úchyt se dotýká dolní části tyče tj. bod 2 se dotýká tyče na obr. 6.1 a natočení datla je libovolné. Poloha úchyty v  $y$  je libovolná, protože má klesající tendenci a proto systém nemůže být nikdy periodický v  $y$  a nemá vliv na periodické chování v ostatních stavových proměnných. Proto budeme uvažovat periodické řešení jen v 5 dimenzích.  $\dot{\mathbf{q}}(0) = 0$  znamená, že počáteční kinetická energie systému je v tomto stavu nulová.

Poincarého zobrazení sestrojíme tak, že pro systém se třením vytvoříme počáteční úlohy, s počátečními podmínkami

$$\varphi_M(0) = -\frac{r_M - r_0}{h_M}, \dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \varphi_S(0) = \varphi_{S_k}, \varphi_{S_k} \in \langle -2.5, 0.11 \rangle, y(0) = 0. \quad (6.29)$$

Poté budeme sledovat kdy se trajektorie řešení vrátí zpět do nadroviny (6.28). Při návratu do nadroviny zjistíme hodnotu  $\varphi_S$  a označíme jí  $\varphi_{S_{k+1}}$ . Bod  $(\varphi_{S_k}, \varphi_{S_{k+1}})$  nakreslíme do grafu. Pokud  $\varphi_{S_k} = \varphi_{S_{k+1}}$ , pak jsme našli periodické řešení.

## 6.4 Numerická implementace

V této podkapitole se budeme zabývat numerickým hledáním periodického řešení složitějšího systému datla popsaného v předchozích kapitolách a sestrojení Poincarého zobrazení, popsaného v předchozí podkapitole. Pomocí Poincarého zobrazení vytvoříme bifurkační diagram periodického řešení.

Díky nelinearitám a fyzikálním zákonům, kterými se systém řídí, nejsme schopni nalézt jeho analytické řešení. Hlavním problémem je nalézt hodnoty  $\Lambda_{Ni}$ ,  $\Lambda_{Ti}$ ,  $\lambda_{Ni}$  a  $\lambda_{Ti}$ , protože nejsou dynamicky jednoznačně dány. Standardní numerické řešiče diferenciálně algebraických rovnic (např. ode15s v Matlabu) nelze kvůli vysoké složitosti modelu použít. Pokud by systém obsahoval pouze nespojitou pravou stranou, potom numerické řešení lze použít ale výpočet by byl časově velmi náročný. Proto použijeme numerickou metodu z [6], která je vytvořena přímo pro složitější model datla na tyči.

Numerická metoda je založena na Newtonově metodě se změnou pravé strany rovnic a Banachově větě o kontrakci. Banachova věta o kontrakci zaručuje, že metoda je schopna spočítat hodnoty  $\Lambda_{Ni}$ ,  $\Lambda_{Ti}$ ,  $\lambda_{Ni}$  a  $\lambda_{Ti}$  s předem danou chybou.

K výpočtu Poincarého zobrazení použijeme stejné hodnoty jako v [6].

parametr	hodnota	parametr	hodnota
$m_M$	$3 \cdot 10^{-4}$	$h_S$	0.02
$J_M$	$5 \cdot 10^{-9}$	$g$	9.81
$m_S$	$4.5 \cdot 10^{-3}$	$c_\varphi$	0.0056
$J_S$	$7 \cdot 10^{-7}$	$\mu_1$	0.3
$l_M$	0.01	$\mu_2$	0.3
$l_G$	0.015	$\mu_3$	0.3
$l_S$	0.0201	$\varepsilon_{N2}$	0
$r_M$	0.0031	$\varepsilon_{N3}$	0
$r_0$	0.0025	$\varepsilon_{N1}$	$\varepsilon_0 \in \langle 0, 1 \rangle$
$h_M$	0.0058		

Tabulka 6.2: Hodnoty parametrů modelu

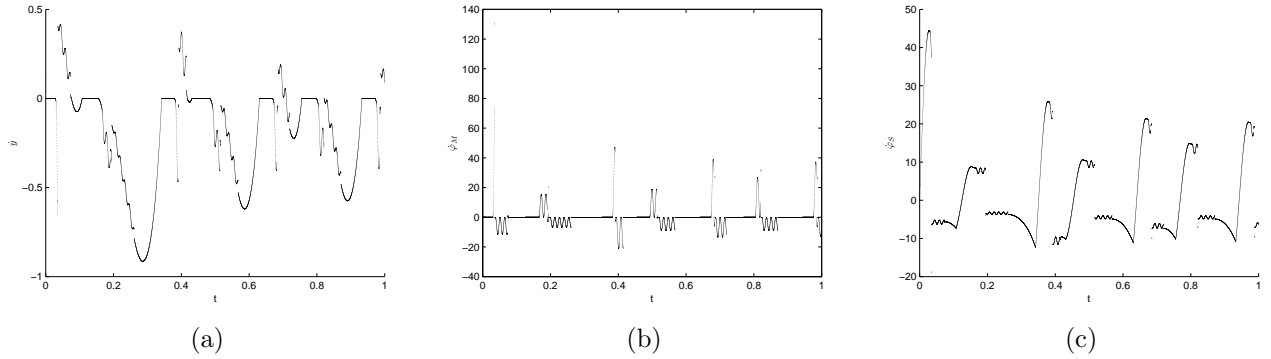
$$\dot{\mathbf{q}}(0) = \mathbf{0}, \mathbf{q}(0) = [0, \frac{r_M - r_0}{h_M}, -0.8]^T \text{ s } \varepsilon_{N1} = 0.1. \quad (6.30)$$

Pomocí výše zmíněného algoritmu získáme zdiskretizovanou trajektorii řešení jedné počátečních úloh z (6.29) vycházející z nadroviny (6.28). Abychom vytvořili Poincarého zobrazení, potřebujeme nalézt průsečík trajektorie s nadrovinou pro  $t > 0$ . Hledání průsečíku je vzhledem ke konečné přesnosti výpočtu a rychlých oscilací úhlu  $\varphi_S$  obtížná úloha. Na obr. 6.4 jsou příklady derivací výchylek a my potřebujeme aby se všechny hodnoty zároveň vynulovaly a také  $\varphi_M = -\frac{r_M - r_0}{h_M}$ . Vzhledem k tomu, že každá křivka dosahuje jiných hodnot a různých skoků v nespojitostech, vznikají v každé dimenzi různé numerické chyby. Z tohoto důvodu situace, kdy se všechny hodnoty vynulují, ve většině případů nenastane.

Intuitivně nás může napadnout, že můžeme nalézt průsečík trajektorie se  $\Sigma$  tak, že vytvoříme vektor  $v = [\dot{y}(t), \dot{\varphi}_M(t), \dot{\varphi}_S(t), \varphi_M(t) + \frac{r_M - r_0}{h_M}]$  a budeme hledat čas, kdy  $\|v\| = 0$  pro  $t > 0$ . Vzhledem k výše popsaným problémům a diskretizaci času, bychom měli uvažovat  $\|v\| < \varepsilon$ , kde  $\varepsilon$  je malá kladná hodnota. Použitím této myšlenky na Poincarého zobrazení vzniknou diskrétní body s velmi odlišnou hodnotou a porovnání s výsledky z [6], se Poincarého zobrazení velmi liší. Proto tuto myšlenku nepoužijeme pro vytvoření bifurkačního diagramu.

Další uvažovaná možnost spočívá v tom, že zvolíme nějakou kladnou malou hodnotu  $\varepsilon$  a hledáme čas takový, kdy  $|\dot{y}(t)| < \varepsilon, |\dot{\varphi}_M(t)| < \varepsilon, |\dot{\varphi}_S(t)| < \varepsilon, |\varphi_M(t) + \frac{r_M - r_0}{h_M}| < \varepsilon$ , pro  $t > 0$ . Podobně jako v předchozím případě je Poincarého zobrazení velmi odlišné oproti výsledkům z [6], proto tuto možnost také nepoužijeme.

Třetí možností podobnou předchozí, je zvolení čtyř různých kladných konstant  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  a hledání hodnot, které splňují  $|\dot{y}| < \varepsilon_1, |\dot{\varphi}_M| < \varepsilon_2, |\dot{\varphi}_S| < \varepsilon_3, |\varphi_M(t) + \frac{r_M - r_0}{h_M}| < \varepsilon_4$ . Určení správných hodnot  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ , vyžaduje spoustu numerických experimentů. Výsledné Poincarého zobrazení pro hodnotu restitučního koeficientu  $\varepsilon_{N1} = 0.5$  je zobrazeno na obr. 6.5a a je podobné Poincarého zobrazení z [6] je zobrazeno na obr. 6.5b. Tuto metodu použijeme na vytvoření bifurkačního diagramu.



Obrázek 6.4: Derivace řešení počáteční úlohy

Námi získané Poincarého zobrazení na obr. 6.5a je vytvořeno pro 2611 diskrétních hodnot počáteční podmínky pro  $\varphi_S$  a krok času je  $10^{-5}$ . Poincarého zobrazení na obr. 6.5b je vytvořeno z 1000 diskretizovaných hodnot počátečních podmínek pro  $\varphi_S$ .

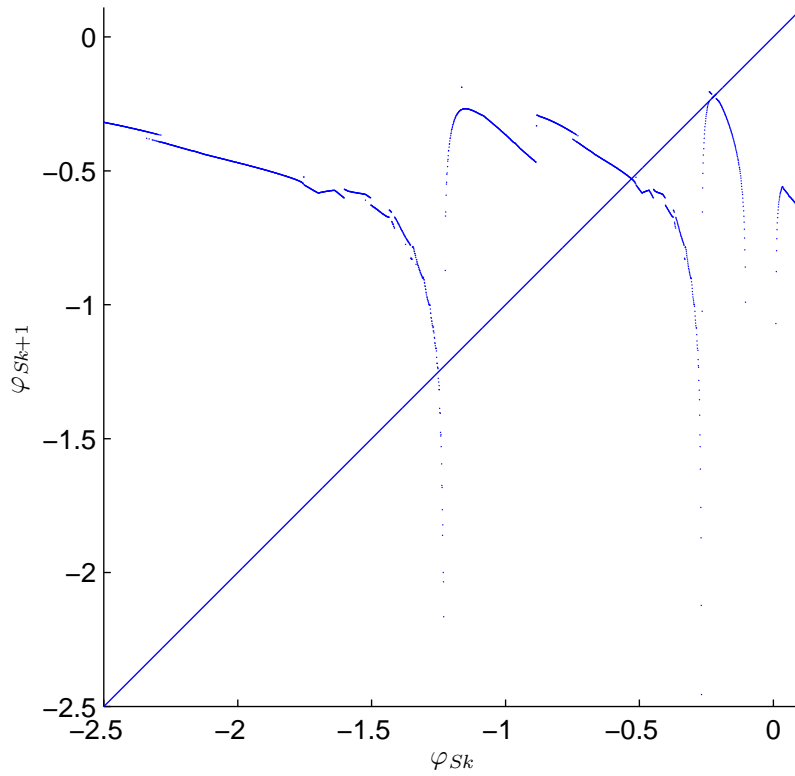
Zobrazení jsou po částech podobná. V hodnotách  $\varphi_{S_k}(0) = -1.23$  a  $-0.27$  se řešení nevrací do nadroviny  $\Sigma$ . V hodnotě  $\varphi_{S_k} = -0.76$  jsou zobrazení nespojitá. Nespojitost v zobrazení vzniká při záměně pořadí kontaktů mezi částí modelu, které řešení systémů podstoupí, než se vrátí do nadroviny. Například v  $\varphi_{S_k} = -0.76$  se zamění pořadí klovnutí datla s horním dotykem úchyty s tyčí.

Zásadní rozdíl mezi zobrazeními je na intervalu  $(-0.15, 0.05)$ . Na obr. 6.6 jsou zobrazeny řešení systému pro  $\varphi_{S_k}(0) = 0$ . Řešení na obr. 6.6 s rostoucím časem se nemění, proto tvrdíme, že řešení počáteční úlohy (6.29) s  $\varphi_S \in (-0.08, 0.02)$  se nikdy nevrátí do nadroviny a neproběhne v něm žádný kontakt mezi tělesy kromě v čase  $t = 0$ .

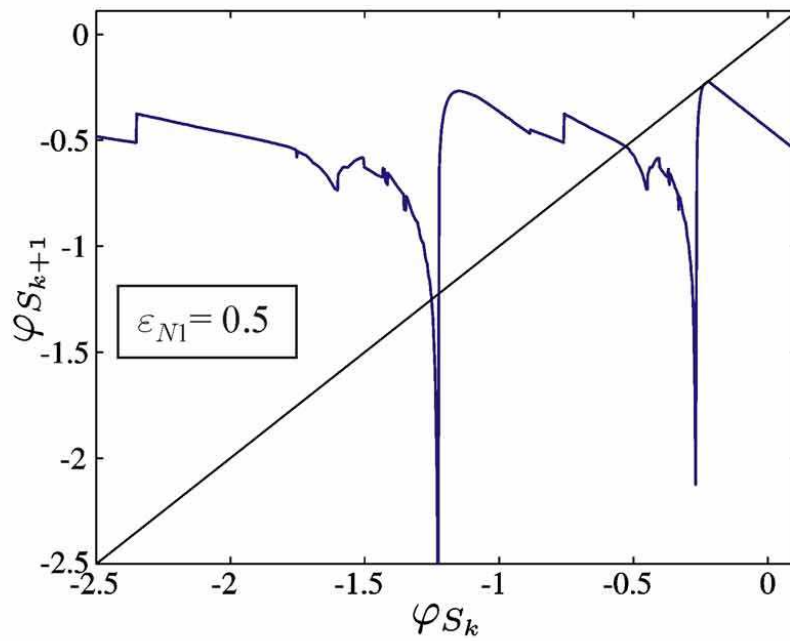
Hodnoty,  $\varphi_{S_k}$  pro které existuje periodické řešení, nalezneme tak, že proložíme graf Poincarého zobrazení přímkou, která je osou první a třetího kvadrantu stejně jako na obr. 6.5b a 6.5a. Body, které přímka protíná, jsou body periodického řešení a tyto body vykreslíme v závislosti na hodnotě  $\varepsilon_{N1}$ , tak získáme body bifurkačního diagramu periodického řešení v závislosti na  $\varepsilon_{N1}$ . Na obr. 6.5a je vidět, že je velký rozdíl mezi jednotlivými body, mezi kterými by měl být průsečík s osou a křivkou. Proto pro zpřesnění využijeme metodu střelby s využitím půlení intervalů, pro hledání průsečíku mezi křivkami. Námi získaný bifurkační diagram je zobrazený na obr. 6.7a a bifurkační diagram získaný v [6] je na obr. 6.7b.

Díky rozdílné diskretizaci času v numerické metodě a různé metodě hledání návratu řešení do nadroviny  $\Sigma$  a jejich parametrů, jsou některé větve v bifurkačních diagramech různé. V našem bifurkačním diagramu se objevuje jedna větev řešení navíc, v okolí hodnoty  $\varepsilon_{N1} = 0.1$ .

Ve větvích bifurkačního diagramu jsme našli několik typů periodického řešení systému. Fázové portréty nalezených periodických řešení jsou na obr. 8.2, 8.4, 8.6 a 8.8. Výchylinky a derivace periodických řešení jsou na obr. 8.3, 8.5, 8.7 a 8.9. Nespojitosti v  $\dot{\varphi}_S(t), \dot{\varphi}_M(t)$  nebo  $\dot{y}(t)$  implikují počátek kontaktu úchyty s tyčí nebo klovnutí datla o tyč. Tyto nespojitosti se pak projeví tak, že výchylinky jsou spojité po částech hladké funkce.



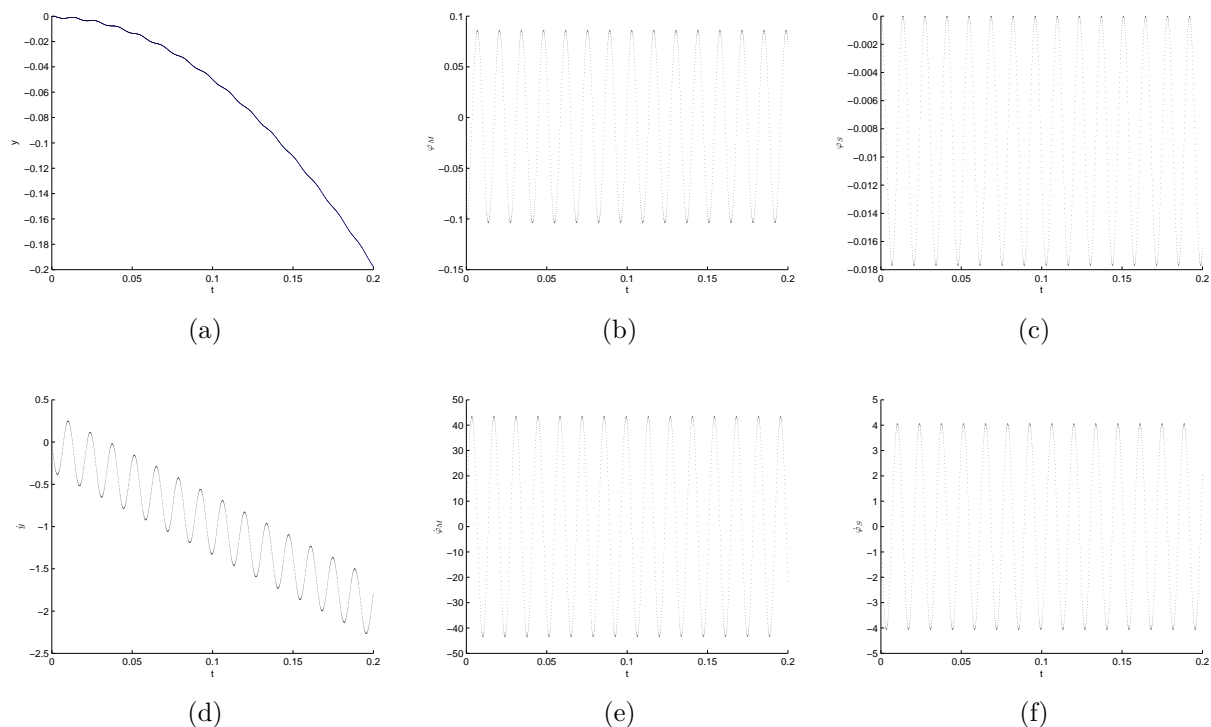
(a)



(b)

Obrázek 6.5: Poincarého zobrazení pro  $\varepsilon_{N1} = 0.5$

Protože v nebuženém systému je uvažováno tření a také nárazy, které ubírají kinetickou energii systému, je možné periodické chování jen díky změně potencionální energie na kinetickou energii. Model je uvažován v gravitačním poli a toto pole je potencionální a

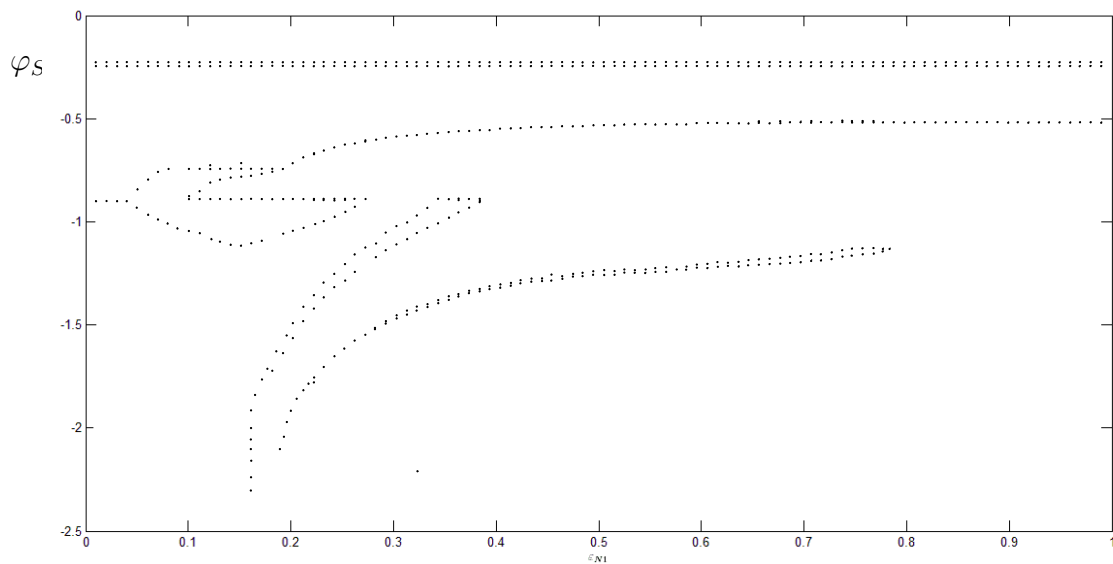


Obrázek 6.6: Řešení počáteční úlohy

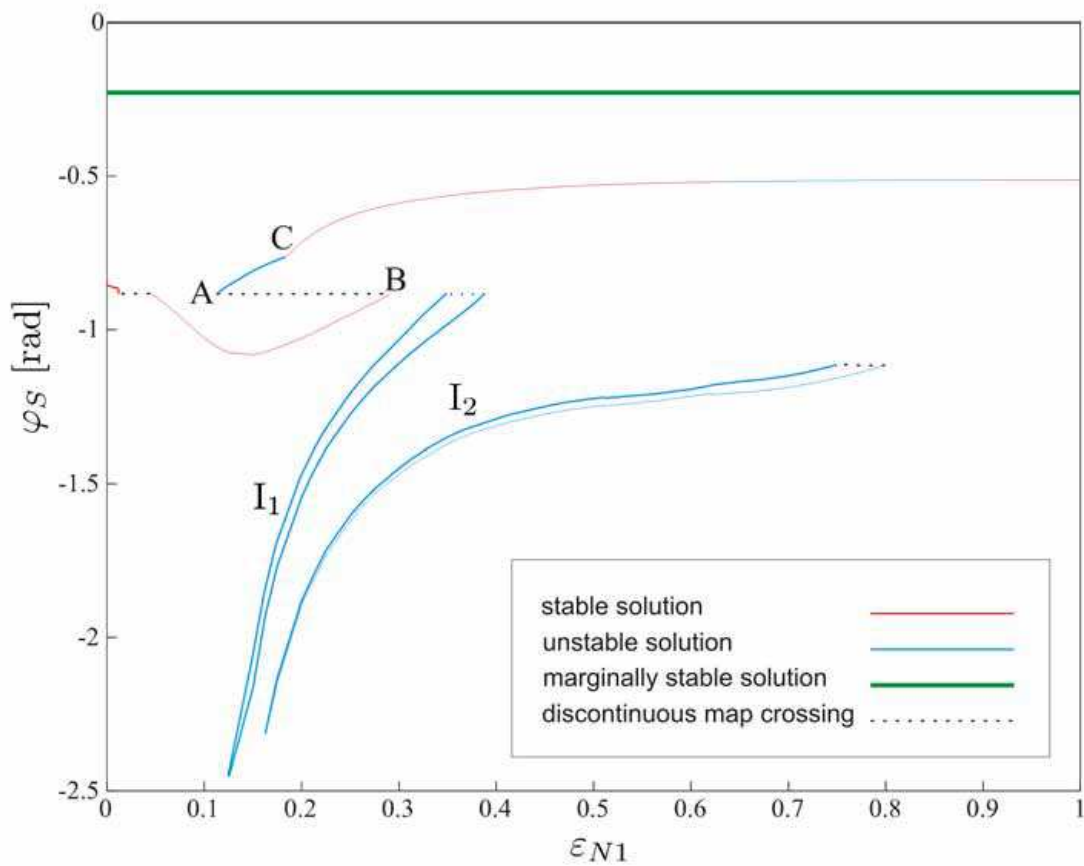
vertikální poloha úchyty je uvažována na nekonečně dlouhé tyči. Proto se potenciální energie se přemění na kinetickou energii posunem úchyty směrem níže v ose  $y$ . Vývoj potenciální a kinetické energie periodického řešení z 6.9 je na obr. 6.8. Z obrázku je patrné, že kinetická energie se v periodickém řešení chová periodicky a potenciální energie klesá, což odpovídá tomu, že hledané periodické řešení není periodické v  $y$ . Periodické řešení je na obr. 6.9.

periodické řešení	průběh stavů periodického řešení
Viz obr. 8.2.	(2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2)
Viz obr. 8.4.	(2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2)
Viz obr. 8.6.	(2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2)
Viz obr. 8.8.	(2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (5) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (3) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2) $\rightarrow$ (1) $\rightarrow$ (4) $\rightarrow$ (2)

Tabulka 6.3: Průběhy periodických řešení

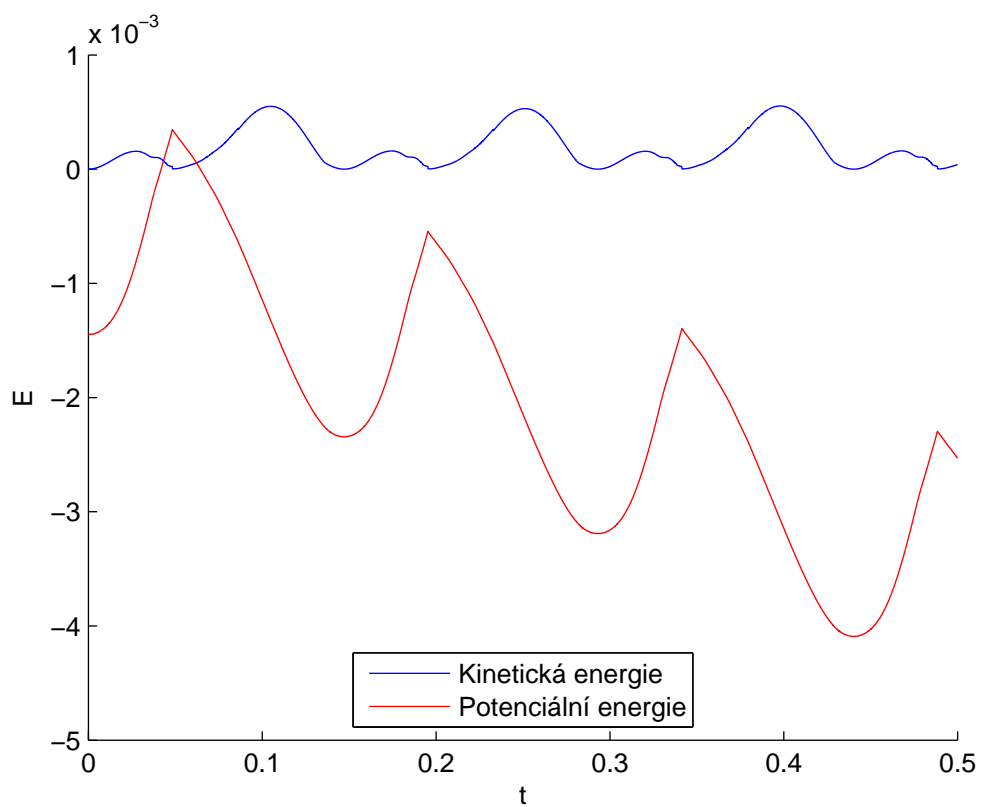


(a) Získaný bifurkační diagram

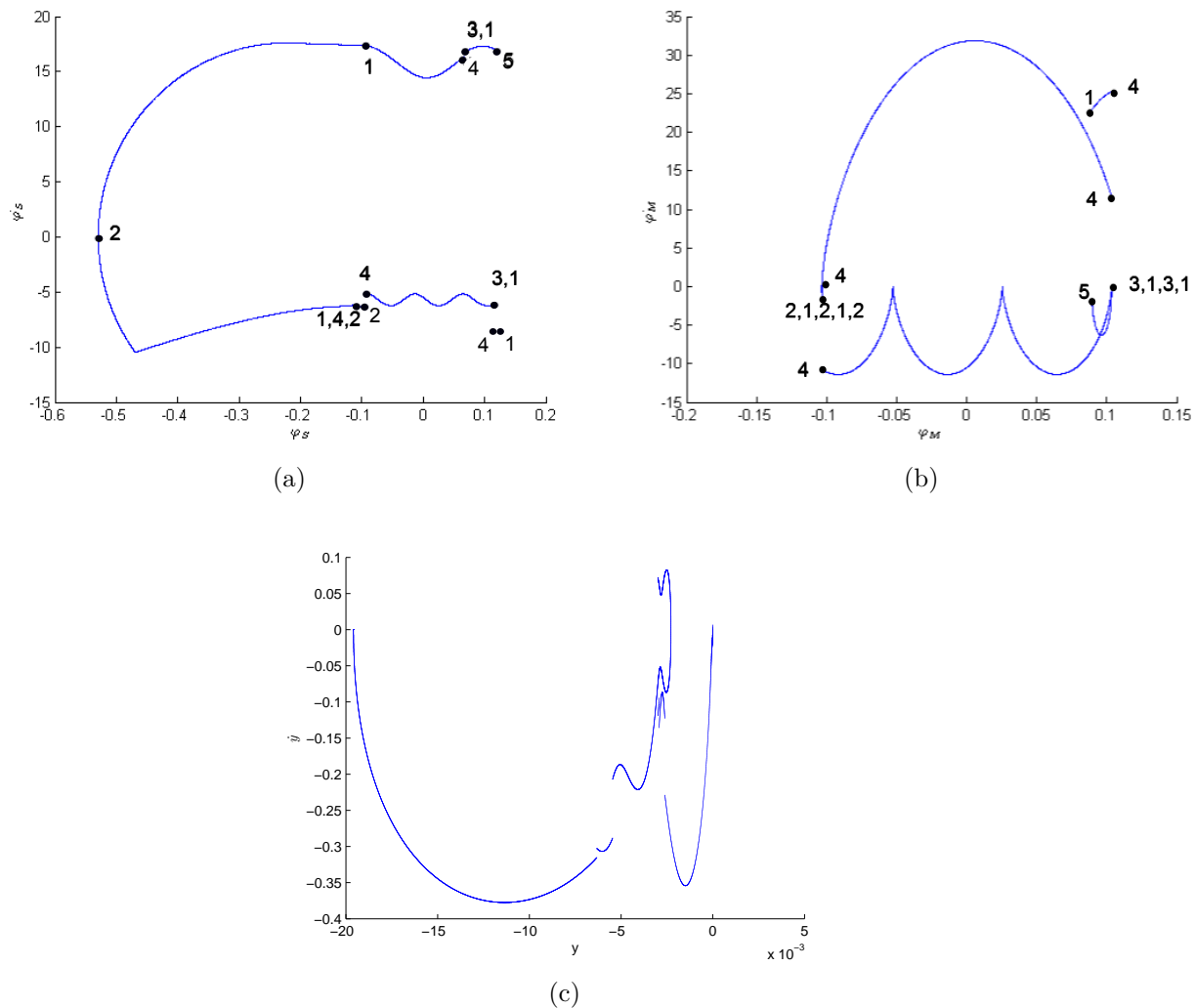


(b) Bifurkační diagram převzatý z [7]

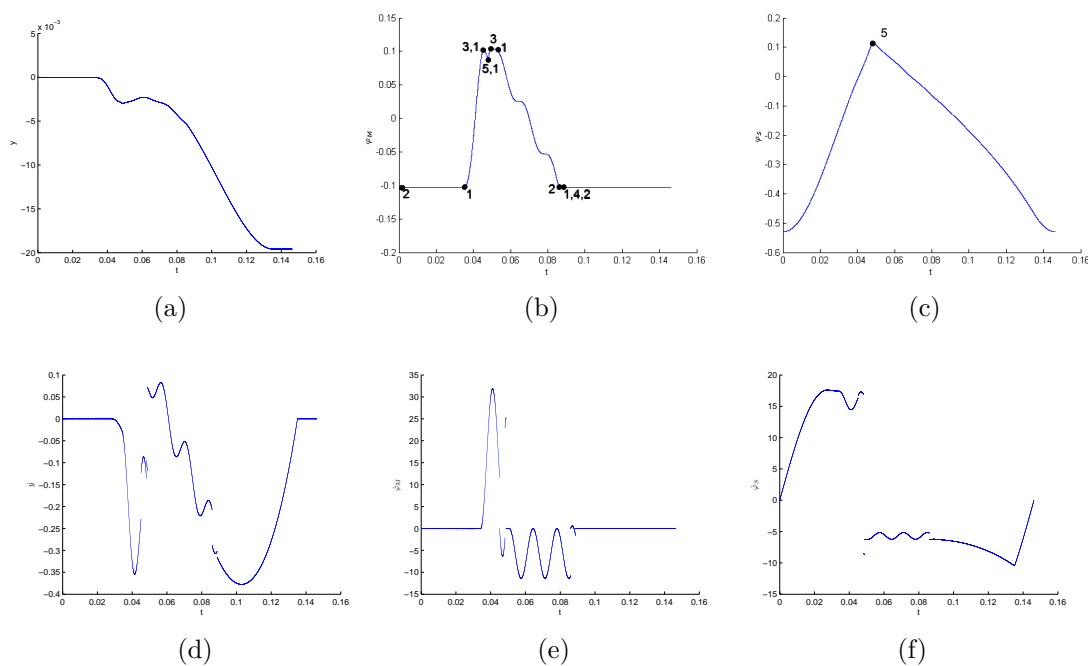
Obrázek 6.7: Bifurkační diagramy periodického řešení



Obrázek 6.8: Vývoj energií periodického řešení



Obrázek 6.9: Fázové portréty (s průběhem stavů) se stabilním periodickým řešením úlohy (6.29), kde  $\varphi_S(0) = -0.529664271866097$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.5$ . Řešení má periodu 0.1462.



Obrázek 6.10: Výchylky periodického řešení na základní periodě z obr. 6.9 (části (a) (b) (c)) a derivace periodického řešení na základní periodě z obr. 6.9 (části (d) (e) (f)).



# Kapitola 7

## Závěr

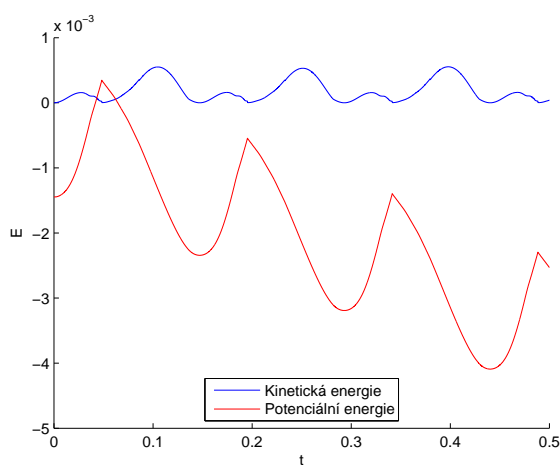
Vytvořili jsme algoritmus, díky kterému se nám povedlo vykreslit bifurkační diagram periodického řešení složitějšího modelu datla na tyči. Námi získaný bifurkační diagram je podobný bifurkačnímu diagramu v použitých materiálech. Podařilo se nám vytvořit seznam některých druhů periodického řešení vyskytujících se pro různé hodnoty na bifurkačním diagramu. Povedlo se nám sepsat stavy složitějšího systému podobně jako jednodušším modelu. Dále jsme vytvořili diagram průběhu stavů systému.

# Literatura

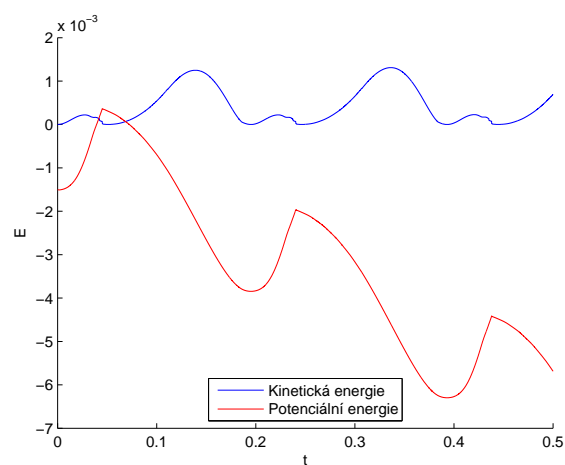
- [1] LEINE, Remco Ingmar. *Bifurcations in discontinuous mechanical systems of Filippov-type*. [S.l.: s.n.], 2000. ISBN 90-386-2911-7.
- [2] CLARKE, Frank H. *Nonsmooth analysis and control theory*. New York: Springer, c1998, xii, 276 p. ISBN 03-879-8336-8.
- [3] SIMPSON, David John Warwick. *Bifurcations in piecewise-smooth continuous systems*. New Jersey: World Scientific, 2010, xv, 238 p. World Scientific series on nonlinear science, v. 70. ISBN 98-142-9384-9.
- [4] AUBIN, Jean Pierre. *Viability theory*. Boston: Birkhauser, c2009, xxvii, 543 p. ISBN 978-081-7649-098.
- [5] SEYDEL, R. *Practical bifurcation and stability analysis*. 3rd ed. New York: Springer, c2010, xvii, 483 p. Interdisciplinary applied mathematics, 5. ISBN 14-419-1739-X.
- [6] LEINE, Remco. , Analysis and Experiments Multibody Systems with Unilateral Constraints. s. 1-41. Dostupné z: <http://www.inrialpes.fr/bipop/NonSmoothMechanics-Seminars/BipopSpringSchool2010/Lectures/Leine-Aussois2010-Lecture.pdf>
- [7] LEINE, R. I., D. H. VAN CAMPEN a C H. GLOCKER. Nonlinear Dynamics and Modeling of Various Wooden Toys with Impact and Friction: Introduction: The linear complementarity problem: Mathematical modeling of impact with friction: The woodpecker toy. *Journal of Vibration and Control*. 2003-01-01, vol. 9, 1-2, s. 25-78. DOI: 10.1177/107754603030741. Dostupné z: <http://jvc.sagepub.com/cgi/doi/10.1177/107754603030741>
- [8] FUHRER, Claus a Christian ANDERSSON. Project 3: Simulation Tools. 2011, s. 1-5.
- [9] KUBÍČEK, Milan, Martin HOLODNIOK, Miloš MAREK a Alois KLÍČ. *Metody analýzy nelineárních dynamických modelů*. Praha: Academia, 1986, 417 s.

# Kapitola 8

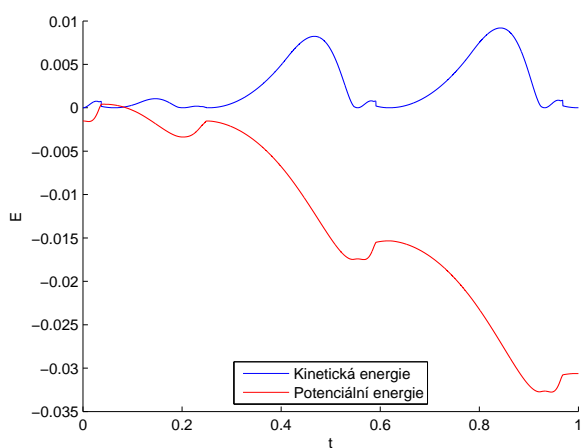
## Příloha



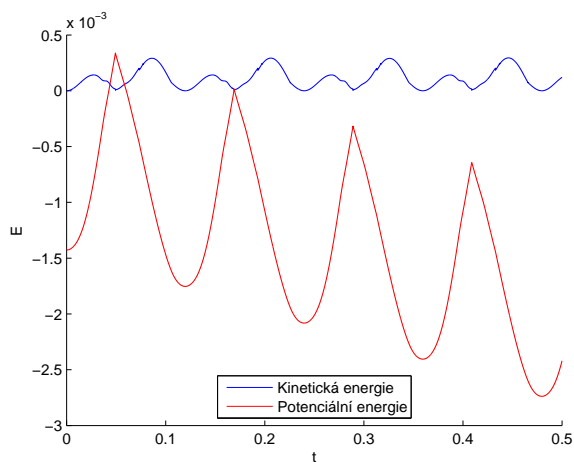
(a) K obr. 8.2



(b) K obr. 8.4

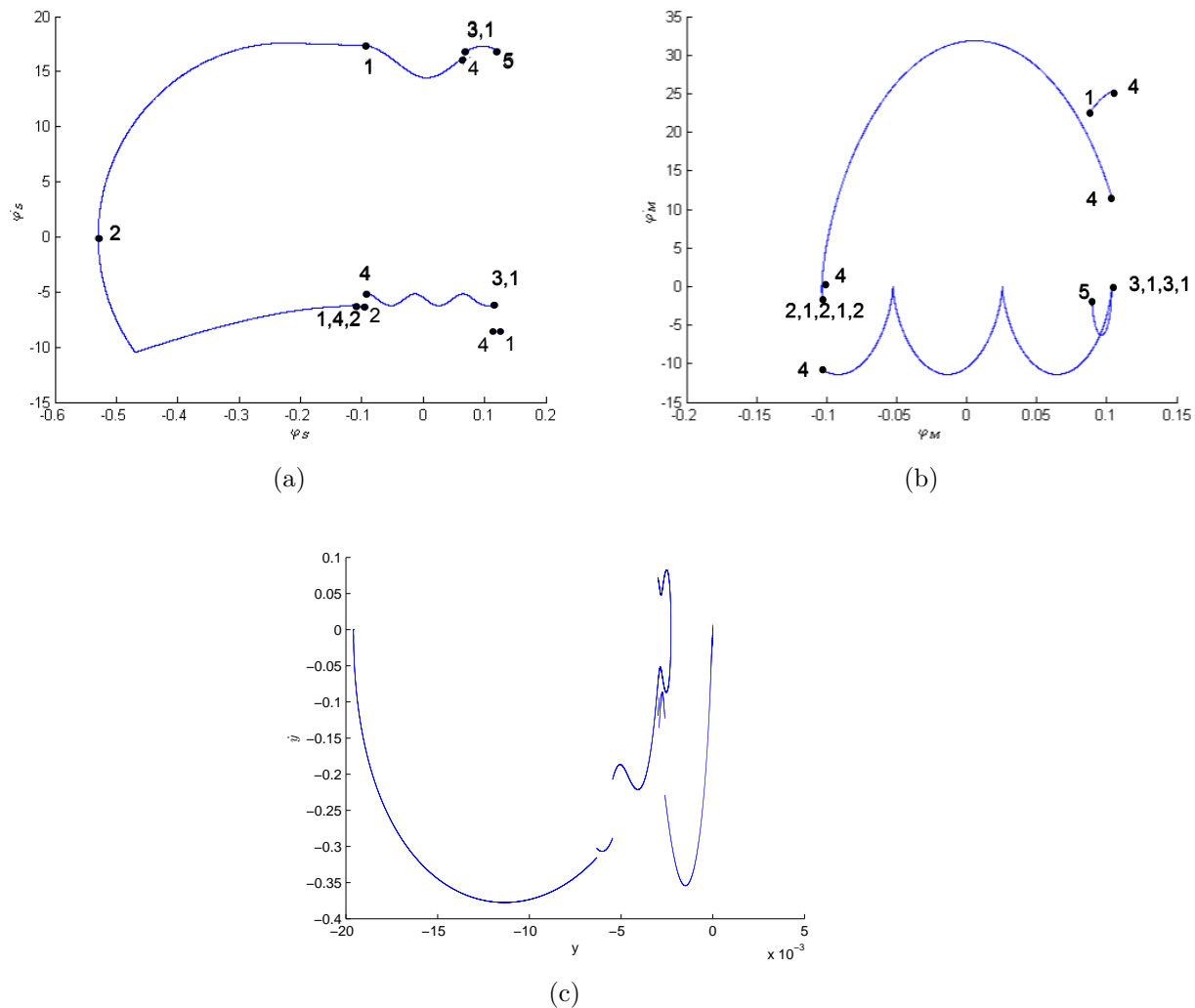


(c) K obr. 8.6

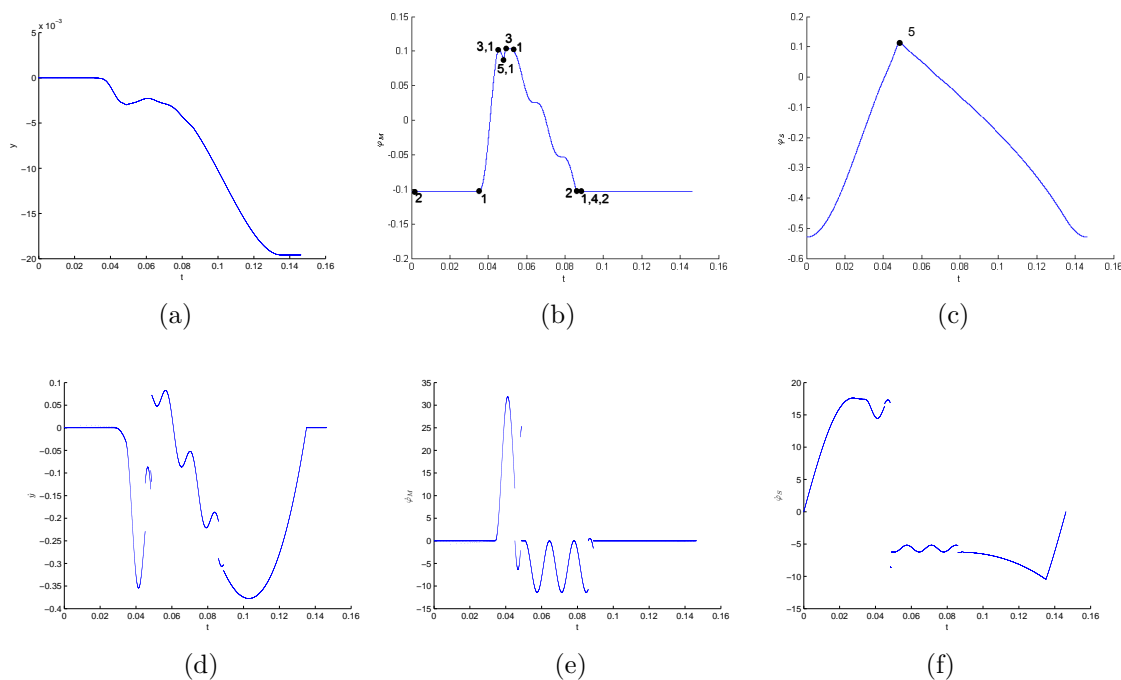


(d) K obr. 8.8

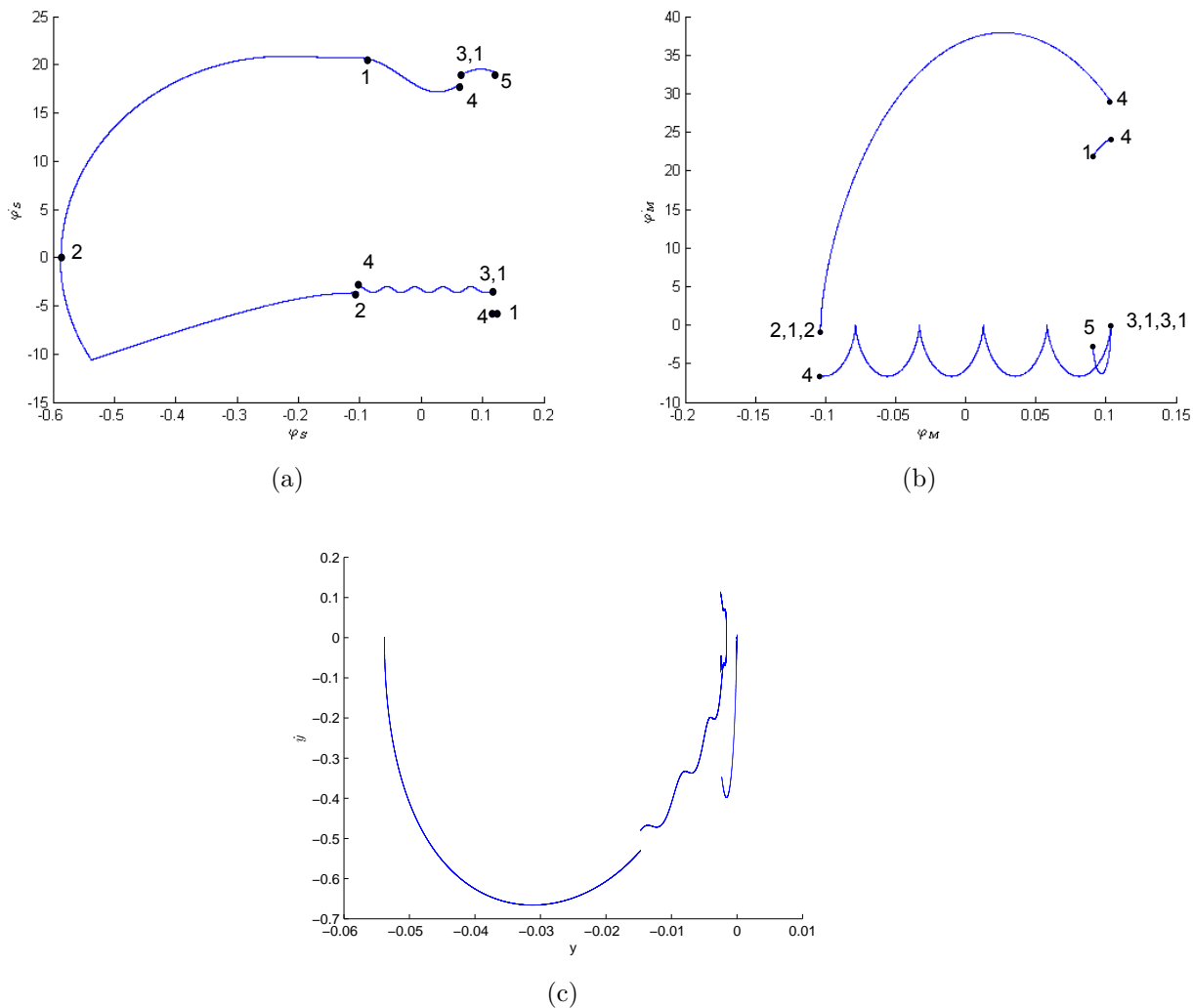
Obrázek 8.1: Vývoj potenciální a kinetické energie periodických řešení



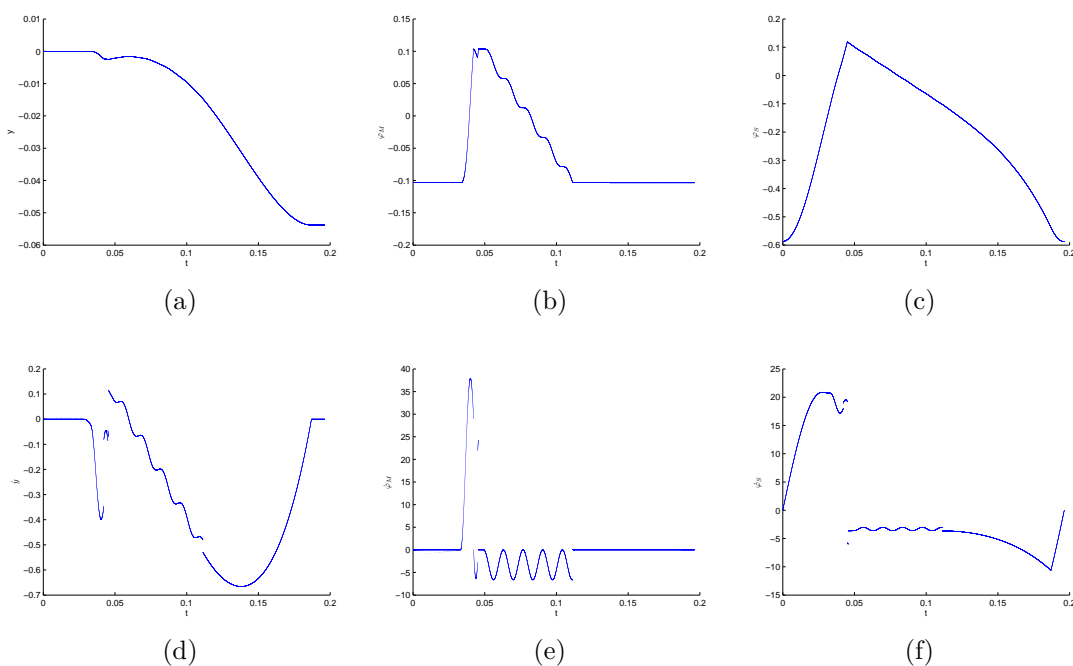
Obrázek 8.2: Fázové portréty (s průběhem stavů) se stabilním periodickým řešením úlohy (6.29), kde  $\varphi_S(0) = -0.529664271866097$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.5$ . Řešení má periodu 0.1462.



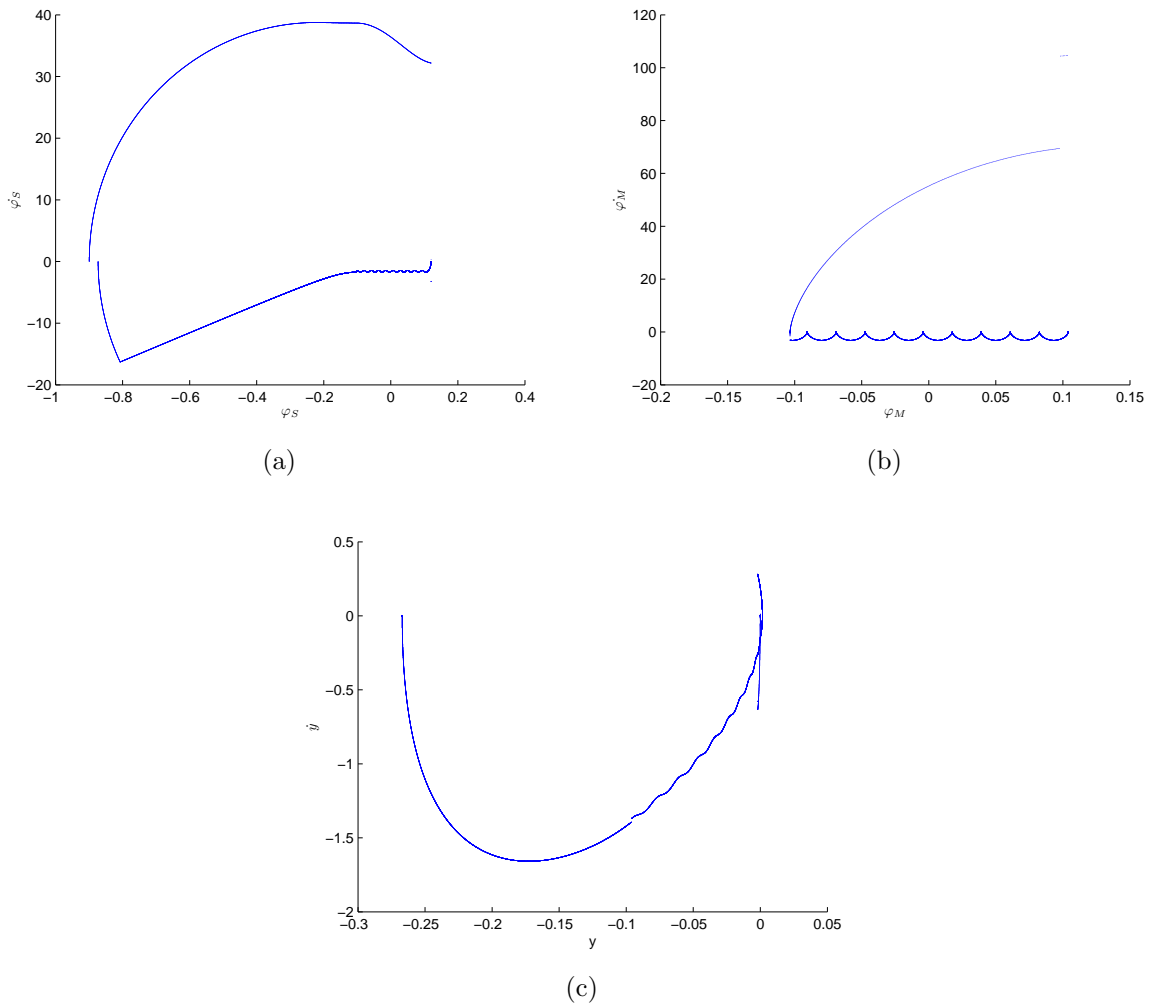
Obrázek 8.3: Výchyly periodického řešení na základní periodě z obr. 8.2 (část (a) (b) (c)) Derivace periodického řešení na základní periodě z obr. 8.2 (část (d) (e) (f))



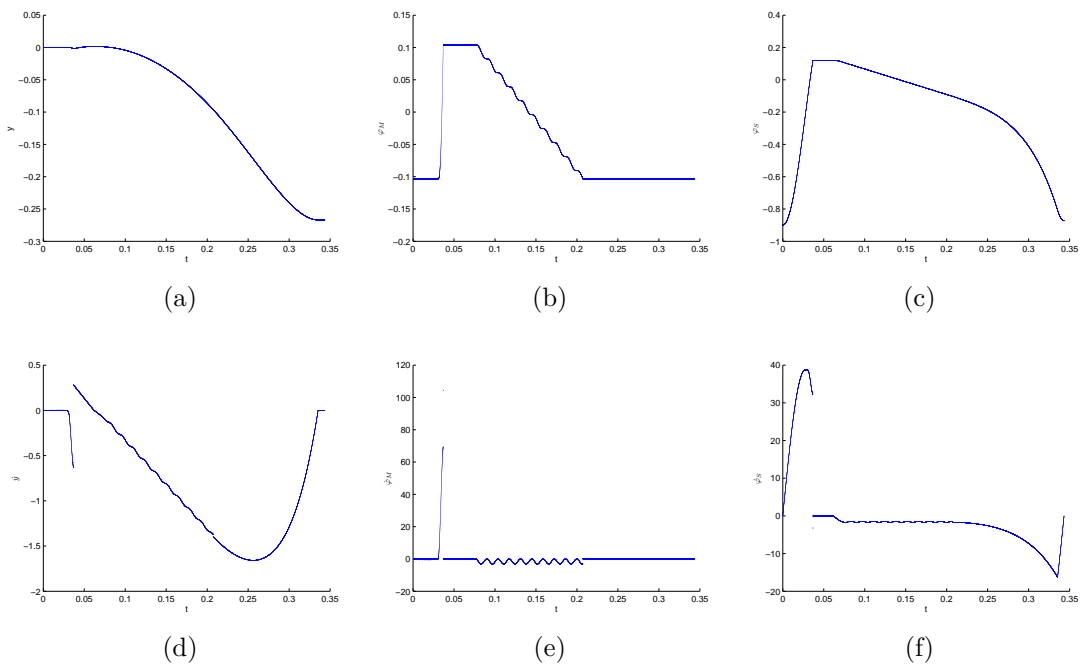
Obrázek 8.4: Fázové portréty (s průběhem stavů) se stabilním periodickým řešením úlohy (6.29), kde  $\varphi_S(0) = -0.5869140625$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.3$ . Řešení má periodu 0.19629.



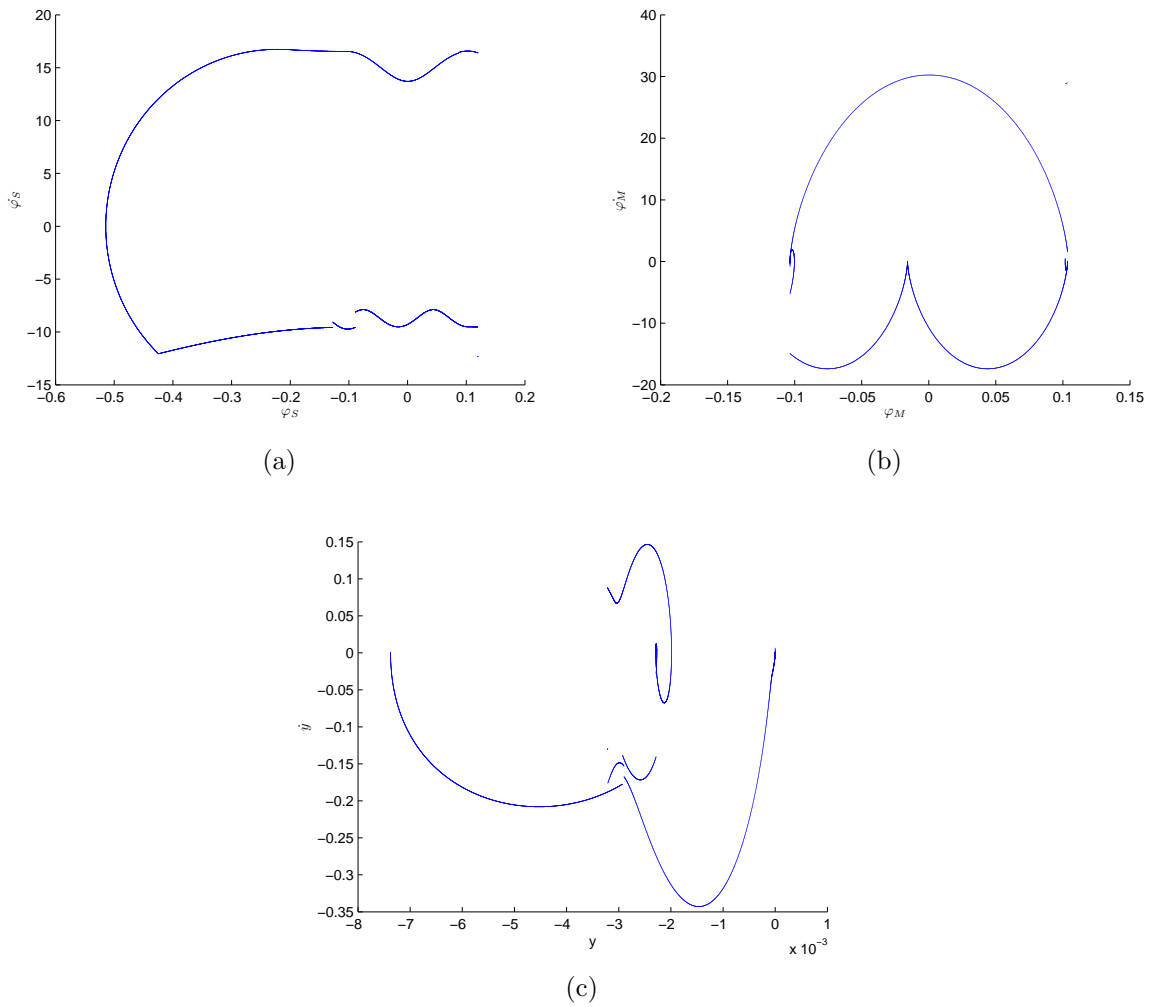
Obrázek 8.5: Výchyly periodického řešení na základní periodě z obr. 8.4 (část (a) (b) (c)) Derivace periodického řešení na základní periodě z obr. 8.4 (část (d) (e) (f))



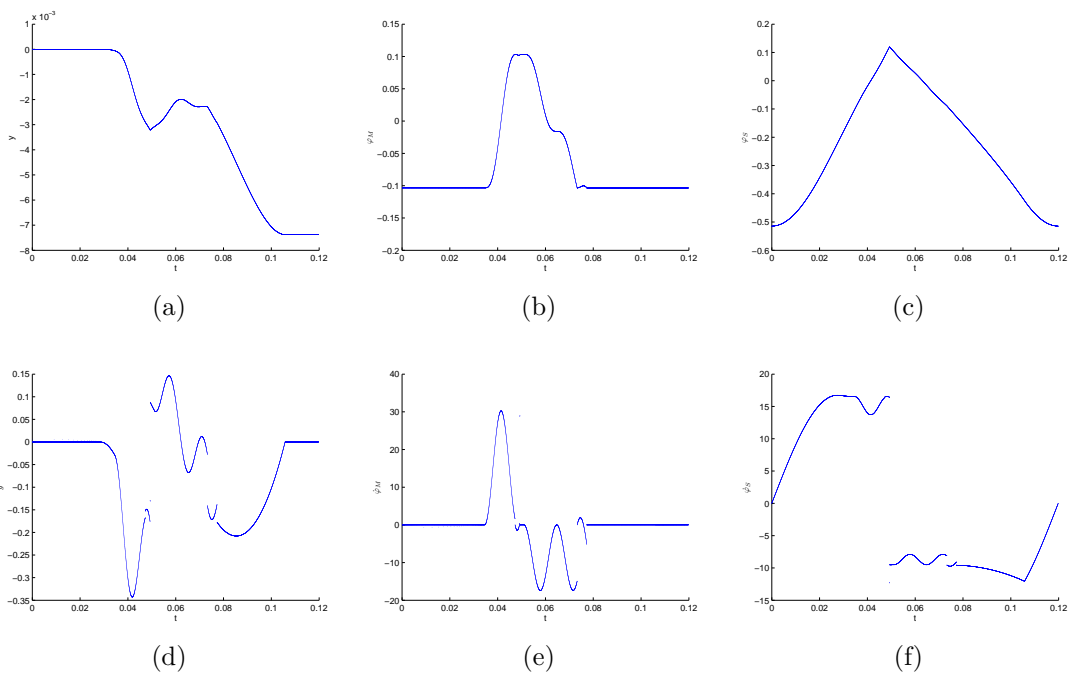
Obrázek 8.6: Fázové portréty se nestabilním periodickým řešením úlohy (6.29), kde  $\varphi_S(0) = -0.8995$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.1$ . Řešení má periodu 0.34323.



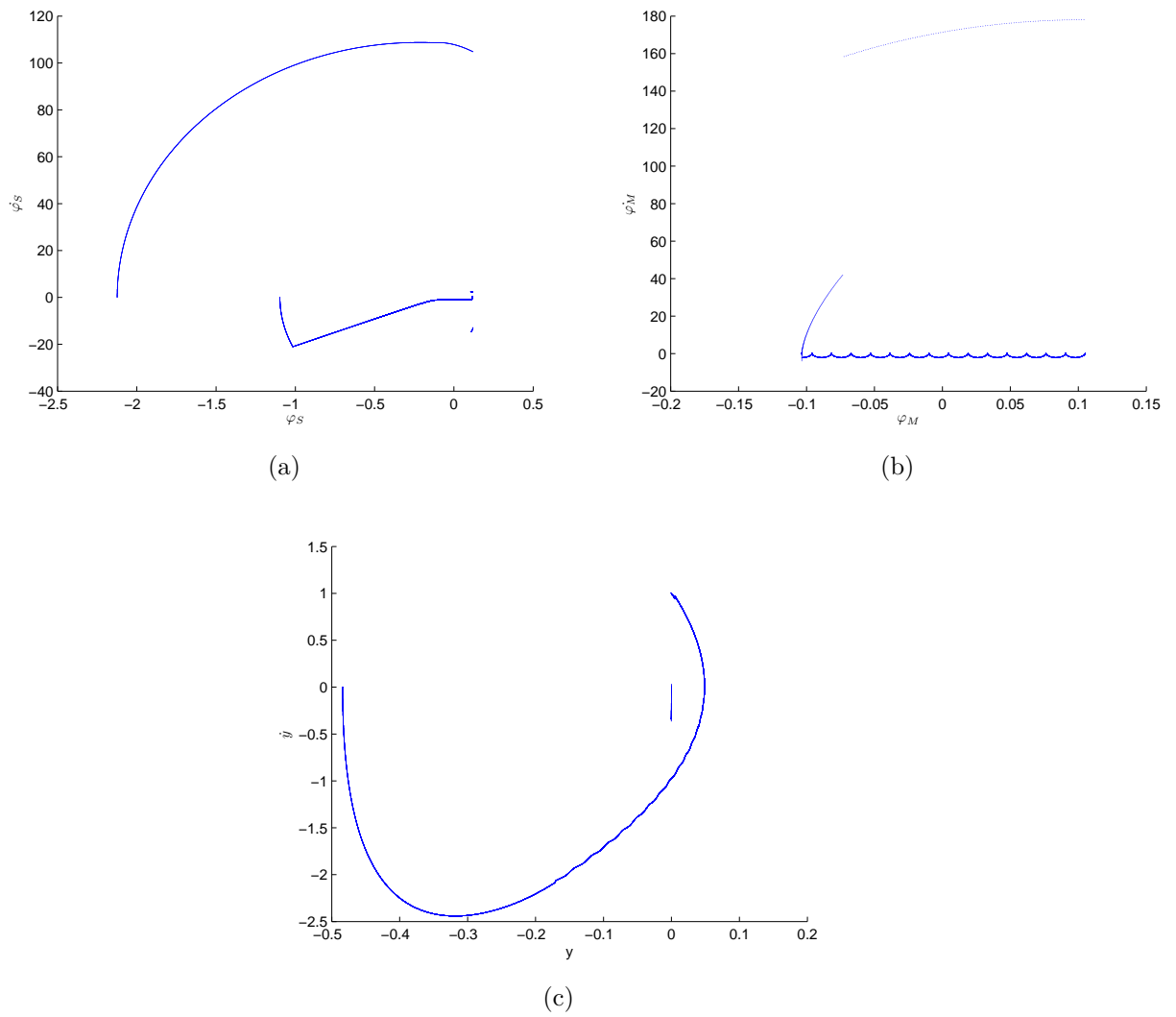
Obrázek 8.7: Výchylky periodického řešení na základní periodě z obr. 8.6(část (a) (b) (c)) Derivace periodického řešení na základní periodě z obr. 8.6 (část (d) (e) (f))



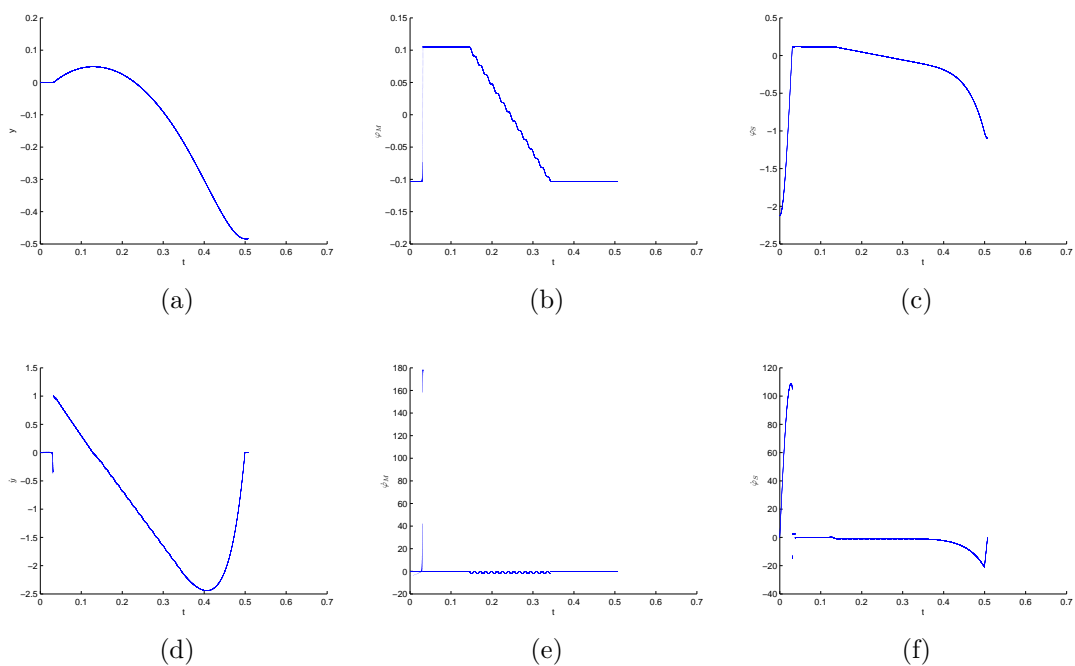
Obrázek 8.8: Fázové portréty se nestabilním periodickým řešením úlohy (6.29), kde  $\varphi_S(0) = -0.514407348632812$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.75$ . Řešení má periodu 0.11983.



Obrázek 8.9: Výchylky periodického řešení na základní periodě z obr. 8.8 (část (a) (b) (c)) Derivace periodického řešení na základní periodě z obr. 8.8 (část (d) (e) (f))

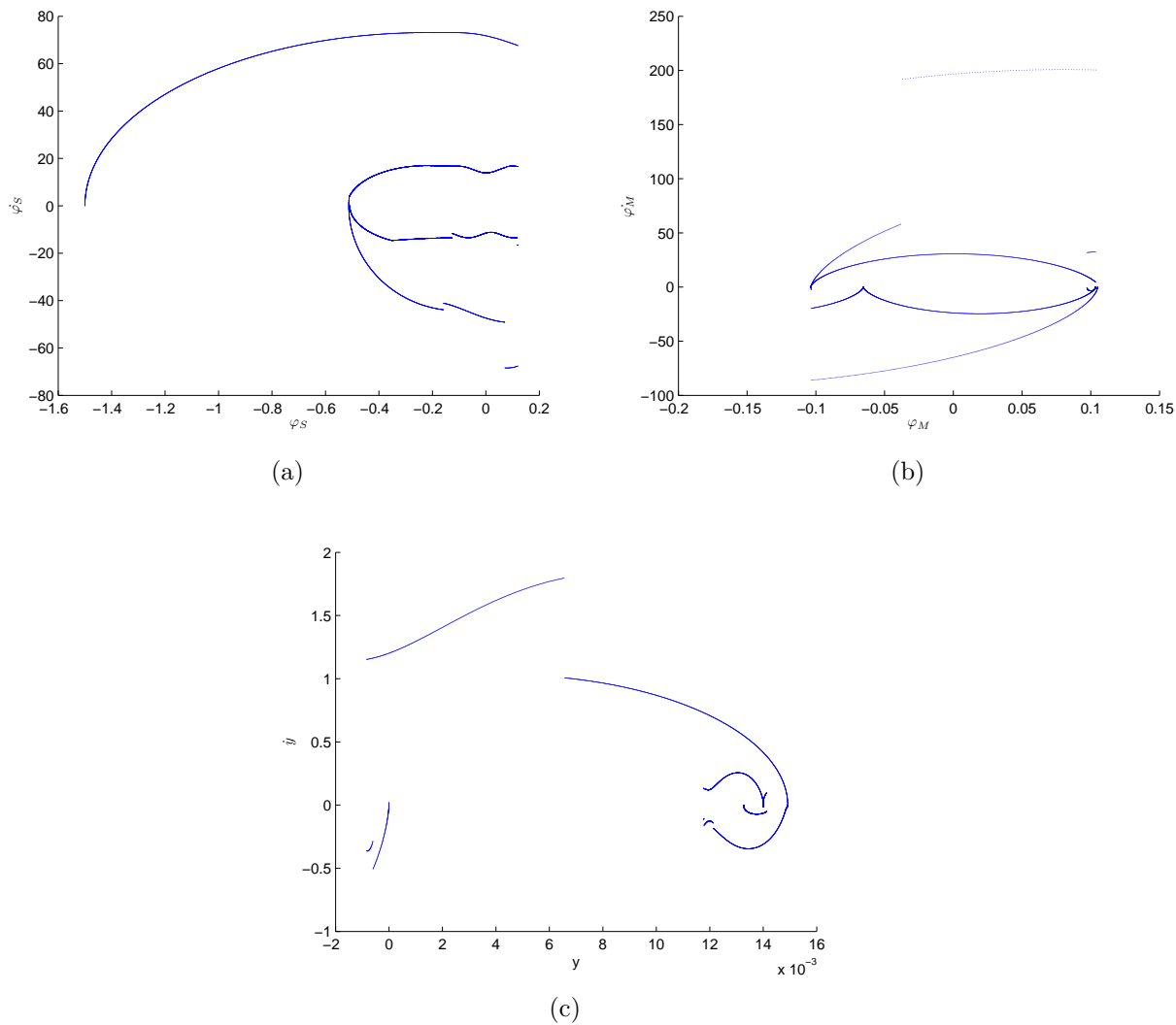


Obrázek 8.10: Fázové portréty řešení úlohy (6.29) s  $\varphi_S(0) = -2.123456489$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.123$ , které se vrací do nadroviny  $\Sigma$ .

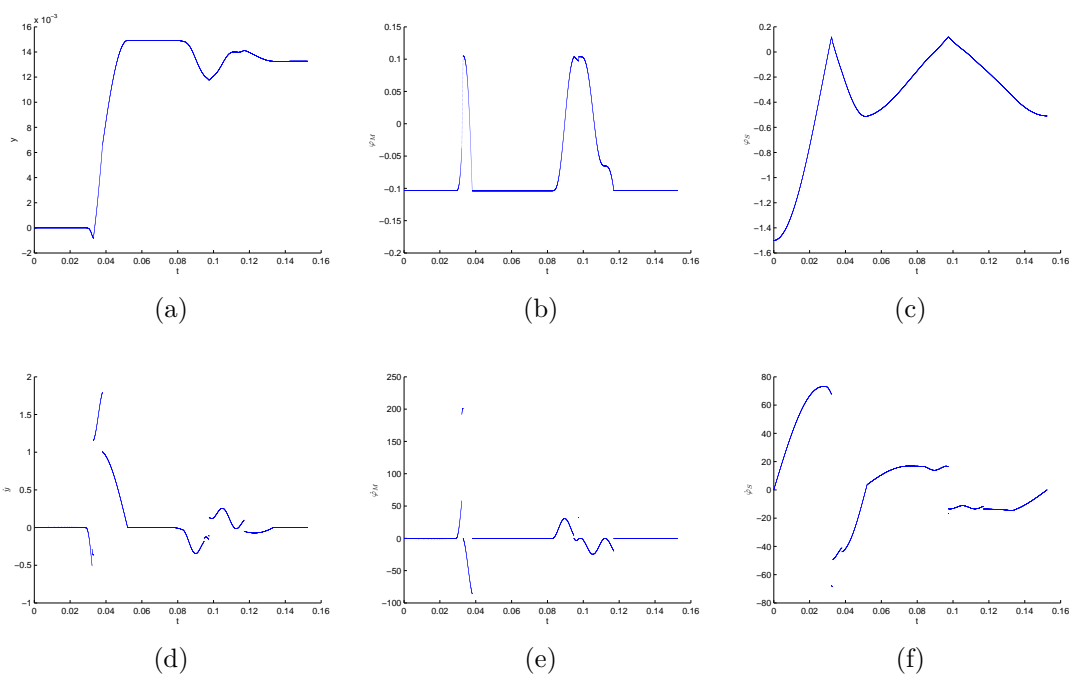


Obrázek 8.11: Výchylky řešení z obr. 8.10 (část (a) (b) (c)) Derivace řešení z obr. 8.10 (část (d) (e) (f) )

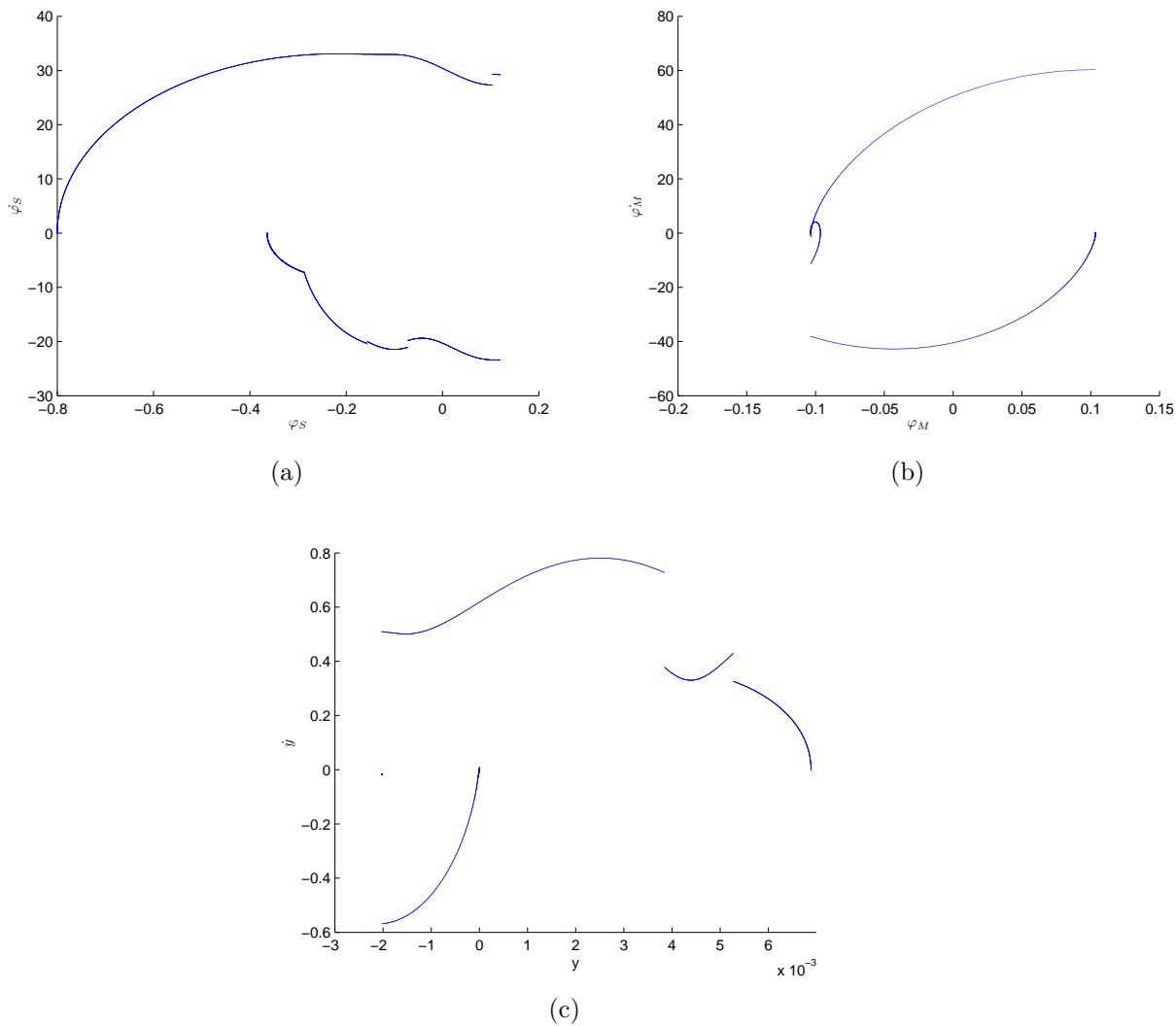




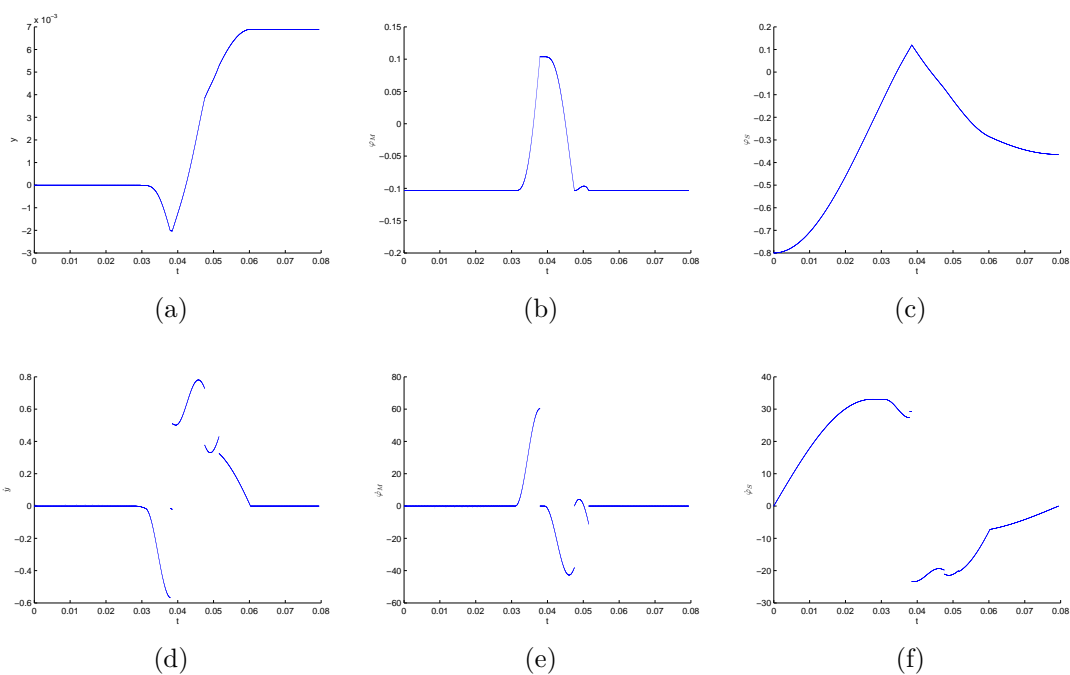
Obrázek 8.12: Fázové portréty řešení úlohy (6.29) s  $\varphi_S(0) = -1.5$  a  $\varepsilon_{N1} = 1$ , které se vrací do nadrovin  $\Sigma$ .



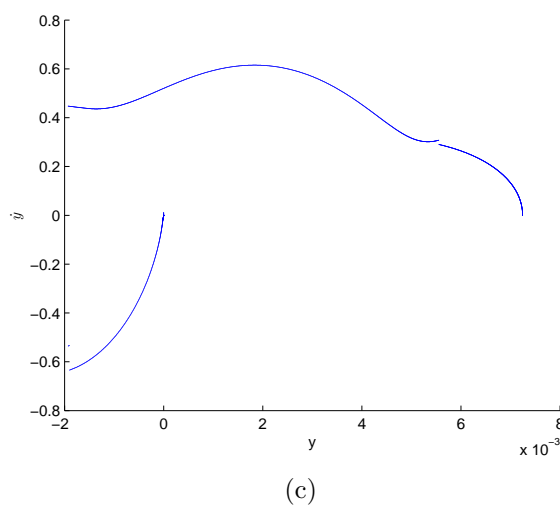
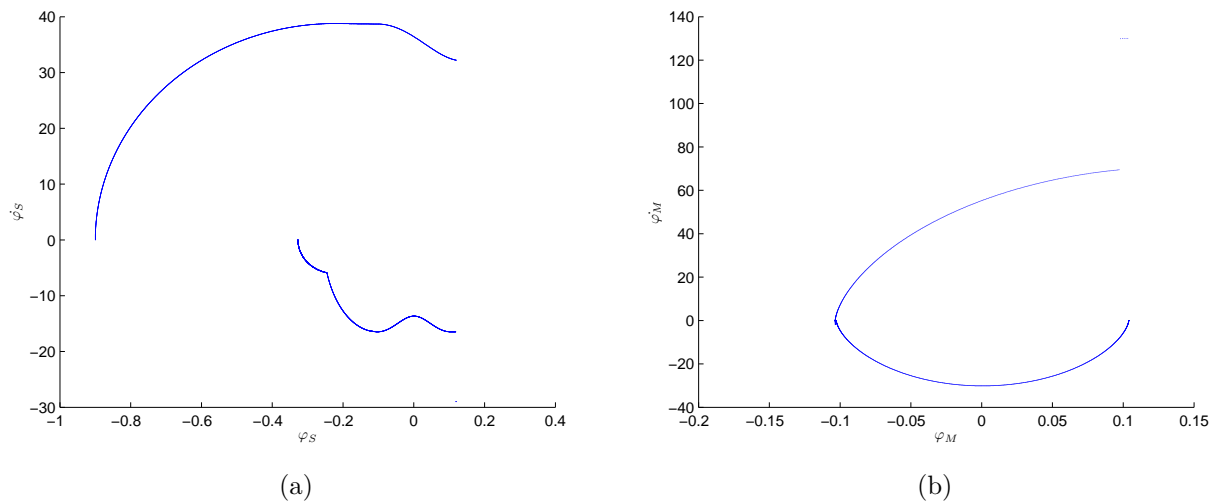
Obrázek 8.13: Výchytky řešení z obr. 8.12 (část (a) (b) (c)) Derivace řešení z obr. 8.12 (část (d) (e) (f))



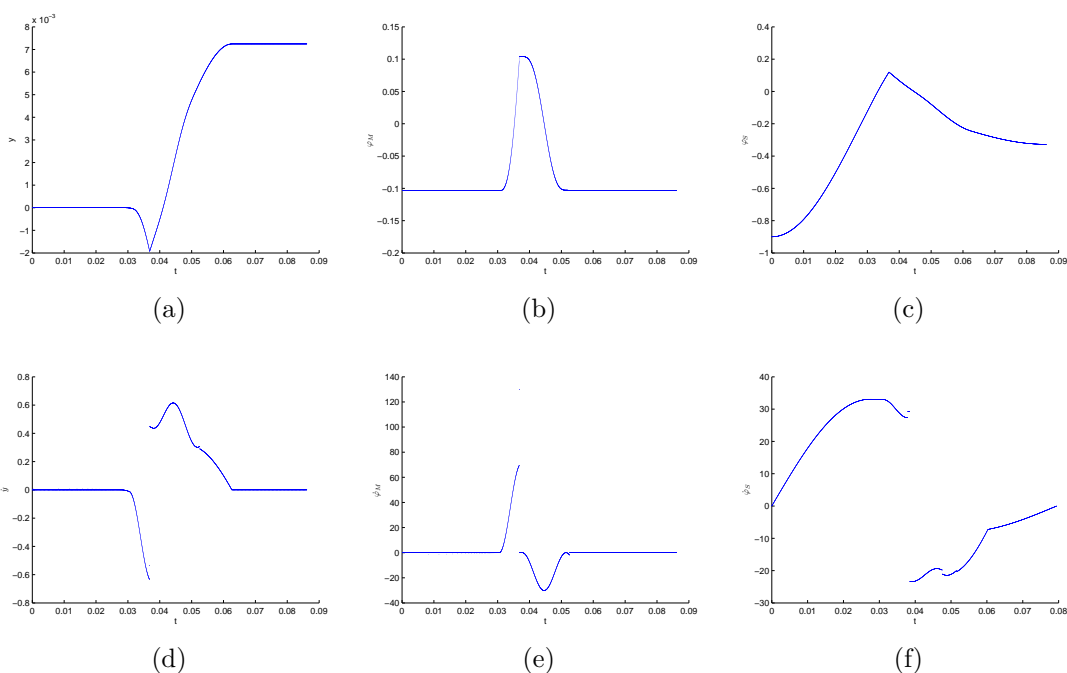
Obrázek 8.14: Fázové portréty řešení úlohy (6.29) s  $\varphi_S(0) = -0.8$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.8$ , které se vrací do nadrovin  $\Sigma$ .



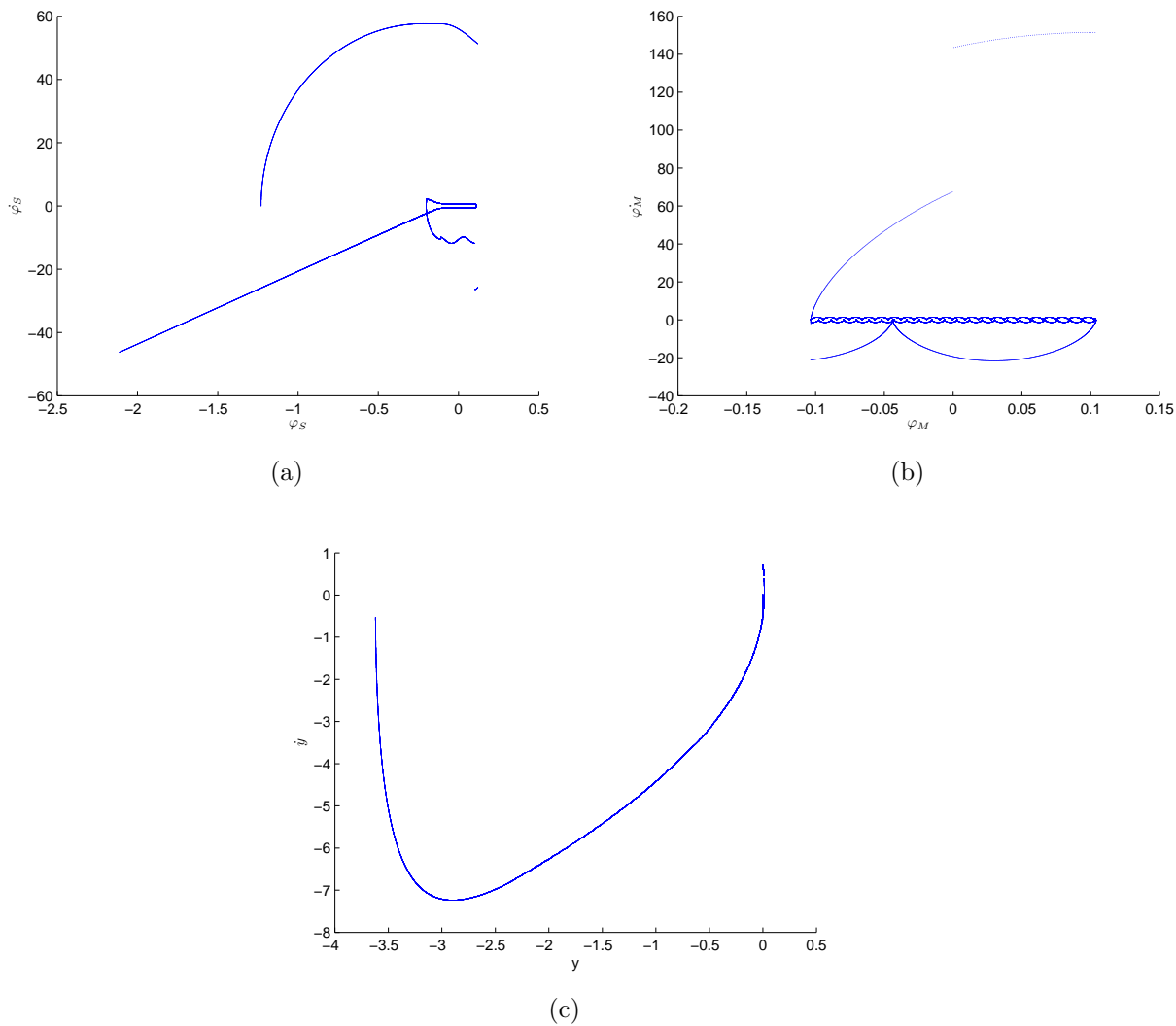
Obrázek 8.15: Výchytky řešení z obr. 8.14(část (a) (b) (c)) Derivace řešení z obr. 8.14 (část (d) (e) (f))



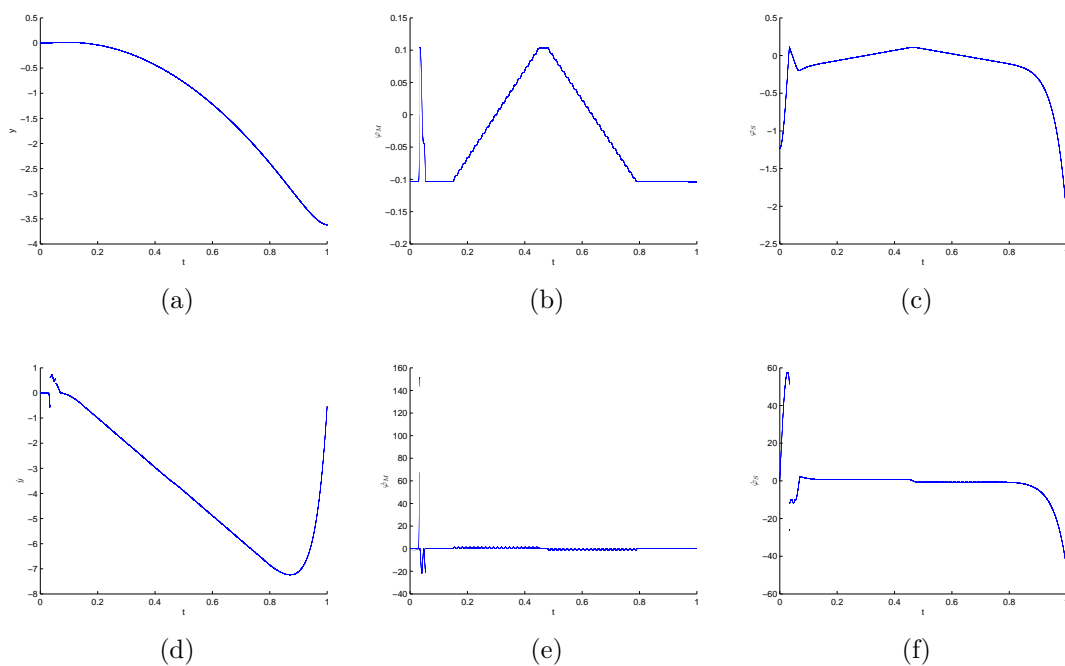
Obrázek 8.16: Fázové portréty řešení úlohy (6.29) s  $\varphi_S(0) = -0.9$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.9$ , které se vrací do nadrovin  $\Sigma$ .



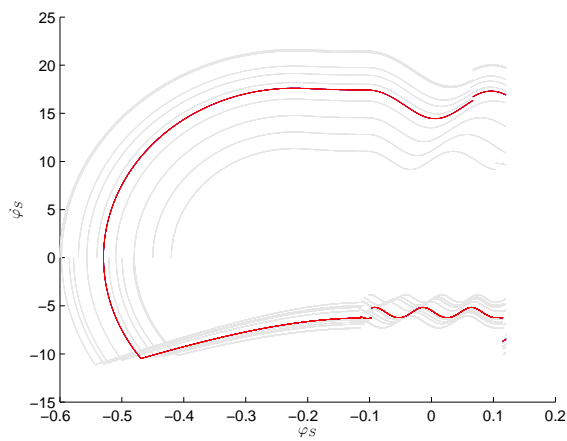
Obrázek 8.17: Výchylinky řešení z obr. 8.16 (část (a) (b) (c)) Derivace řešení z obr. 8.16 (část (d) (e) (f))



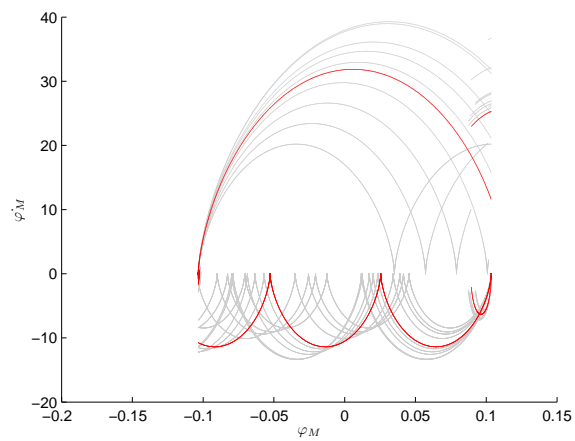
Obrázek 8.18: Fázové portréty řešení úlohy (6.29) s  $\varphi_S(0) = -1.23$  a  $\varepsilon_{N1} = 0.5$ , které se nikdy nevrátí do nadroviny  $\Sigma$ .



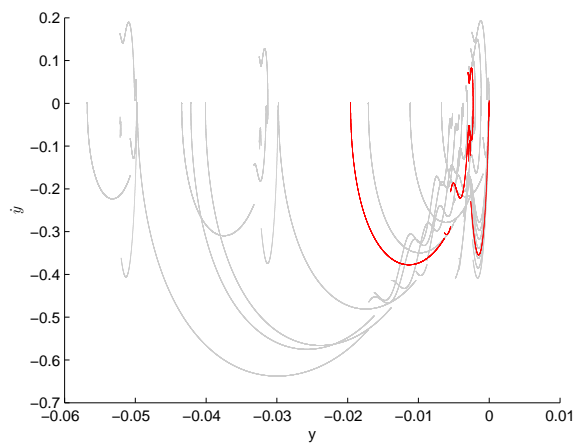
Obrázek 8.19: Výchylky řešení z obr. 8.18 (část (a) (b) (c)) Derivace řešení z obr. 8.18 (část (d) (e) (f))



(a)



(b)



(c)

Obrázek 8.20: Fázové portréty v okolí periodického řešení