

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Plzeň, 2013

Bc. Tomáš Popule

Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra kybernetiky

Řízení pohybu víceosých robotických manipulátorů

University of West Bohemia
Faculty of Applied Sciences
Department of Cybernetics

Motion control of multiaxis robotic
manipulators

ZADANI

P R O H L Á Š E N Í

Předkládám tímto k posouzení a obhajobě diplomovou práci zpracovanou na závěr studia na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni.

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a výhradně s použitím odborné literatury a pramenů, jejichž úplný seznam je její součástí.

V Plzni dne

.....

P O D Ě K O V Á N Í

Za odborné vedení, pomoc a podporu při vypracování diplomové práce bych chtěl vyjádřit své poděkování vedoucímu diplomové práce Ing. Martinu Goubejovi.

A B S T R A K T

Tato práce se zabývá problematikou řízení robotických manipulátorů a identifikací jejich dynamického modelu. Nejprve je provedeno odvození kinematického a dynamického modelu víceosého sériového manipulátoru AGEBOT. V další části je rozebrána identifikace dynamického modelu tohoto manipulátoru. Zejména je řešeno určení lineárního modelu vzhledem k dynamickým parametrům. Dále je provedena volba vhodného vstupního signálu a v závěru této části jsou uvedeny možnosti získání rychlosti a zrychlení z polohy měřené IRC čidlem. Nakonec je proveden návrh různých strategií řízení manipulátorů. Je navržena decentralizované PID regulace, centralizované regulace, robustního řízení a adaptivního řízení. Tyto straterie jsou nakonec porovnány mezi sebou z hlediska přesnosti sledování požadované polohy koncového efektoru.

K L Í Č O V Á S L O V A

Přímá kinematická úloha, inverzní kinematická úloha, dynamický model, identifikace dynamického modelu, kaskádní regulace, centralizované řízení, robustní řízení, adaptivní řízení

A B S T R A C T

This thesis deals with controlling of robotics manipulators and dynamics parameter identification. First of all, the kinematics and the dynamics models for robotic manipulator AGEBOT are derived. In the next part of the thesis dynamics model identification of this manipulator is analyzed. Particularly the problem of finding linearity in dynamics model is solved. Then suitable input signal is chosen and problem of calculate joint velocity and acceleration estimates based on the measured joint positions is mentioned. After all, several techniques for controlling the manipulator are designed and compare among themselves. Decentralized, centralized, robust and adaptive control are analyzed.

K E Y W O R D S

Forward kinematics, inverse kinematics, dynamic model, dynamic model identification, cascade control, centralized control, robust control, adaptive control

Obsah

1	Úvod	8
2	Struktura manipulátoru	9
3	Kinematická transformace	9
3.1	Přímá kinematická transformace	10
3.1.1	Rotace	10
3.1.2	Translace	10
3.1.3	Homogenní transformace	10
3.1.4	Přímá transformace – poloha	11
3.1.5	Přímá transformace – rychlost	11
3.1.6	Přímá transformace – zrychlení	12
3.2	Inverzní kinematická transformace	12
3.2.1	Inverzní transformace – poloha	12
3.2.2	Inverzní transformace – rychlost	14
3.2.3	Inverzní transformace – zrychlení	15
3.3	Ověření výsledků	15
4	Odvození dynamiky	18
4.1	Určení Lagrangianu	18
4.1.1	Kinetická energie	18
4.1.2	Potenciální energie	19
4.2	Výpočet pohybových rovnic	20
4.3	Ověření výsledků	20
5	Identifikace	22
5.1	Volba vektoru parametrů	22
5.1.1	Řešení soustavy rovnic	26
5.1.2	Singulární rozklad	27
5.1.3	Odhad kvality volby vektorů parametrů	28
5.2	Volba vstupního signálu	33
5.2.1	Pseudonáhodný binární signál – PRBS	33
5.2.2	Skutečná trajektorie manipulátoru	36
5.2.3	Součet harmonických funkcí	36
5.2.4	Porovnání dosažených výsledků	41
6	Volba metody pro určení rychlosti a zrychlení	42
6.1	Návrh derivačních filtrů	42
6.1.1	Diskretizace filtrů	43
6.1.2	Volba frekvence zlomu ω_f	43
6.1.3	Dosažené výsledky	45
6.2	Výpočet derivace ve frekvenčním spektru	48
6.3	Výpočet derivace pomocí Fourierovy řady	51
6.4	Metoda DIDIM	55

6.4.1	Dosažené výsledky	57
6.5	Shrnutí	58
7	Metody řízení	59
7.0.1	Generátor trajektorie	59
8	Decentralizované řízení	60
8.0.2	Určení přenosu systému	61
8.0.3	Určení momentu setrvačnosti	61
8.0.4	Převodovka	62
8.1	Regulátor třetího ramena	63
8.1.1	Rychlostní smyčka	63
8.1.2	Polohová smyčka	66
8.2	Regulátor druhého ramena	69
8.3	Regulátor prvního ramena	70
8.4	Sledování trajektorie	70
8.5	Shrnutí	73
9	Centralizovaná metoda	74
10	Robustní řízení	78
11	Adaptivní řízení	84
12	Porovnání použitých metod řízení	89
13	Závěr	97
	Literatura	98
	Přílohy	99

1 Úvod

Tato práce se bude zabývat problematikou identifikace a řízení robotických manipulátorů. Veškeré uvedené metody a algoritmy budou testovány na modelu sériové části víceosého robotického manipulátoru AGEBOT (Obr. 1).

V současnosti je nejběžnější způsob řízení manipulátorů kaskádní PID regulace. Při jejím návrhu se ovšem zanedbává spousta vlivů (např. vzájemné silové působení mezi rameny), které pak musí být regulátor schopen odregulovat jako poruchu. Takto navržené regulátory pak ovšem nezvládají přesné sledování příliš rychlých trajektorií. Jedním z nabízených způsobů řešení tohoto problému může být použití centralizovaných metod regulace. Přesnost těchto metod ovšem závisí na znalosti dynamického modelu manipulátoru, který ale přesně nikdy neznáme. Proto přichází na řadu metody identifikace, které umožňují dynamiku odhadnout.

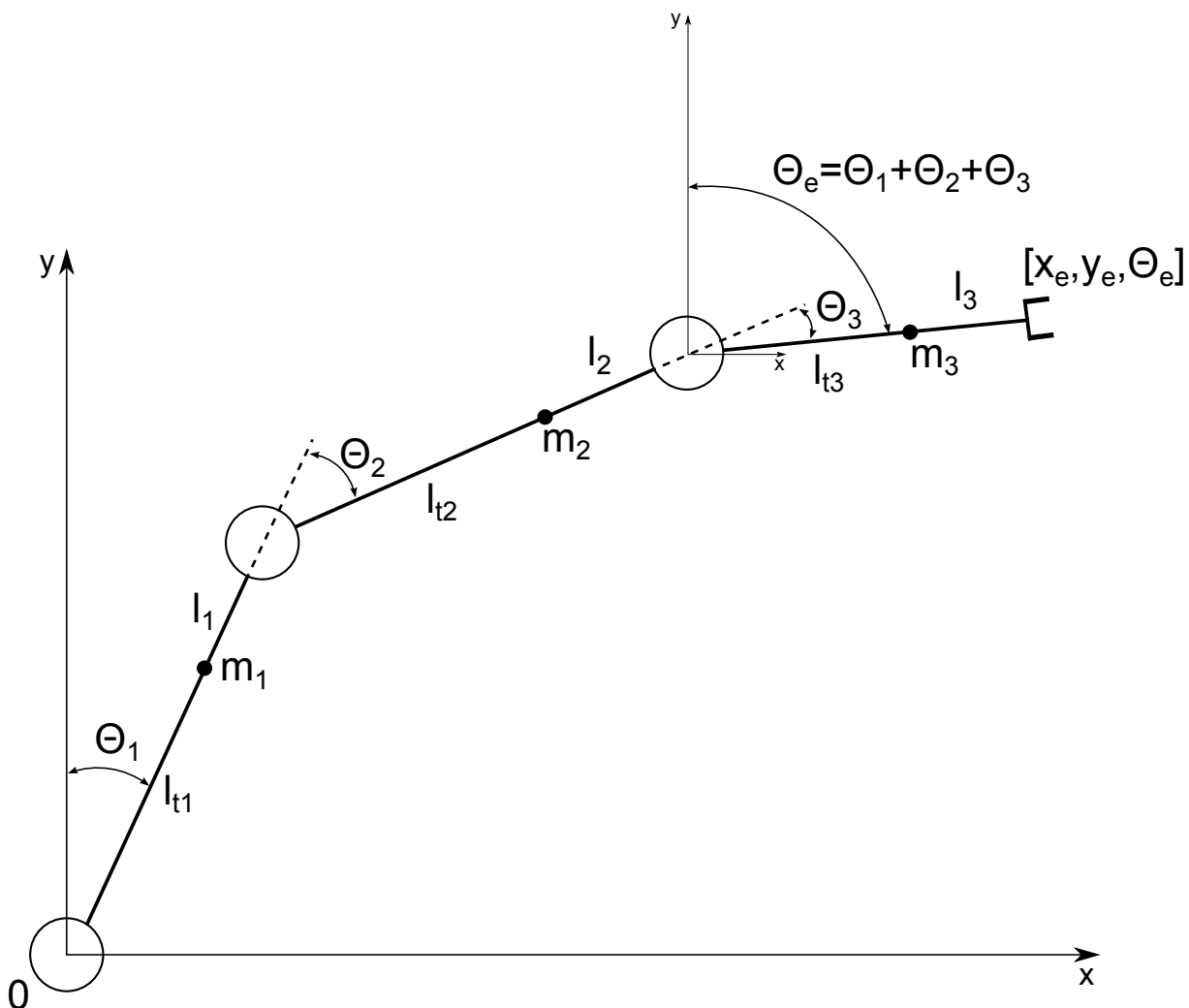
V úvodu této práce bude nejprve provedeno odvození kinematického a dynamického modelu sériové části uvedeného manipulátoru. Zejména znalost teoretického dynamického modelu je zásadní pro možnost provedení jeho identifikace, kterou se budeme zabývat v prostřední části.

Závěrečná část práce se bude věnovat odvození a otestování různých strategií řízení. Porovnávat mezi sebou budeme běžně používanou decentralizovanou kaskádní regulaci s centralizovanými způsoby regulace, které využívají znalosti identifikovaného dynamického modelu. Dále také použijeme metody, které se snaží odstranit případnou nejistotu v odhadu dynamických parametrů.



Obrázek 1: Manipulátor AGEBOT [7].

2 Struktura manipulátoru



Obrázek 2: Struktura manipulátoru.

Struktura manipulátoru, kterou budeme uvažovat, je zobrazena na Obr. 2. Jedná se o sériový manipulátor složený ze tří ramen a tří rotačních kloubů. Úhly Θ_1 , Θ_2 a Θ_3 [rad] jsou úhly natočení příslušných ramen. Tato ramena mají délku l_1 , l_2 a l_3 [m] a délky l_{t1} , l_{t2} a l_{t3} [m] udávají vzdálenost od ukotvení daného ramena k těžišti. Hmotnosti odpovídající těžištům jsou označeny m_1 , m_2 a m_3 [kg].

Pozici efektoru udávají souřadnice $[x_e, y_e, \Theta_e]$, tedy x -ová a y -ová souřadnice v globálním souřadném systému a úhel od osy y .

3 Kinematická transformace

Nejprve se budeme zabývat odvozením kinematiky manipulátoru. Ta je důležitá k tomu, abychom byli schopni provádět převod mezi kloubovými souřadnicemi Θ_1 , Θ_2 a Θ_3 (úhly

natočení ramen) a souřadnicemi efektoru $[x_e, y_e, \Theta_e]$. Úlohu je možné rozdělit na dvě části:

Přímá úloha – Ze známých kloubových souřadnic chceme určit pozici (souřadnice) efektoru. Lze ji použít např. po zapnutí manipulátoru, kdy víme jak jsou natočeny jednotlivé klouby a potřebujeme zjistit polohu koncového efektoru.

Inverzní úloha – Z požadované polohy koncového efektoru chceme určit, jak nastavit kloubové souřadnice, abychom této polohy dosáhli. Využije se např. při plánování pohybu, kdy máme dānu požadovanou trajektorii efektoru, ale pro její realizaci musíme zjistit, jak máme měnit kloubové souřadnice.

3.1 Přímá kinematická transformace

V našem případě pracujeme se sériovým manipulátorem a díky tomu lze provést odvození poměrně jednoduchým způsobem – pomocí skládání elementárních transformací (rotace a translace).

3.1.1 Rotace

Rotace souřadného systému se provádí pomocí matice rotace, kterou přenásobíme vektorem původních souřadnic. Manipulátor je umístěn v prostoru x-y, rotaci proto budeme provádět kolem osy z. Matice rotace tedy bude v tomto tvaru:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R_{z, \theta} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

3.1.2 Translace

Posunutí souřadného systému se provádí prostým přičtením vektoru posunutí jednoho souřadného systému vůči druhému, např.:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

3.1.3 Homogenní transformace

Obě uvedené transformace (rotace a translace) lze po formálním přidání čtvrtého řádku spojit dohromady do matice homogenní transformace:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta & -\sin\Theta & 0 & p_x \\ \sin\Theta & \cos\Theta & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Výhoda této reprezentace spočívá v tom, že sdružuje rotaci i translaci do jediného maticového násobení. To je výhodné při skládání několika transformací za sebou.

3.1.4 Přímá transformace – poloha

Nyní využijeme uvedenou homogenní transformaci pro odvození přímé kinematické transformace. Nejprve provedeme přímou transformaci polohy. Jelikož manipulátor obsahuje tři rotační klouby, bude transformace složena z postupného násobení třech matic homogenní transformace. Vždy provedeme rotaci o úhel Θ_i a translaci o délku i -tého ramena. Souřadnice efektoru v globální souřadné soustavě vyjdou:

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ z_e \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Theta_1 & -\sin\Theta_1 & 0 & l_1 \cdot \cos\Theta_1 \\ \sin\Theta_1 & \cos\Theta_1 & 0 & l_1 \cdot \sin\Theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Theta_2 & -\sin\Theta_2 & 0 & l_2 \cdot \cos\Theta_2 \\ \sin\Theta_2 & \cos\Theta_2 & 0 & l_2 \cdot \sin\Theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\Theta_3 & -\sin\Theta_3 & 0 & l_3 \cdot \cos\Theta_3 \\ \sin\Theta_3 & \cos\Theta_3 & 0 & l_3 \cdot \sin\Theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Použitý počáteční vektor je nulový, protože uvažujeme, že efektor je ve svém souřadném systému umístěn v počátku. Úhel efektoru Θ_e je roven:

$$\Theta_e = \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3$$

Výše uvedený maticový zápis lze roznásobením a zjednodušením přepsat do tvaru (z-ovou osu zanedbáváme):

$$\begin{bmatrix} x_e \\ y_e \\ \Theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \cdot \cos(\Theta_1) + l_2 \cdot \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + l_3 \cdot \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1 \cdot \sin(\Theta_1) + l_2 \cdot \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + l_3 \cdot \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ \Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3 \end{bmatrix}$$

Tento zápis je přehlednější a lépe derivovatelný, čehož využijeme v následující části.

3.1.5 Přímá transformace – rychlost

Dále je třeba odvodit přímou transformaci rychlosti. To lze jednoduše provést prostou derivací vztahů získaných v předchozí části:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\dot{\Theta}_1 \sin(\Theta_1) - l_2(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) \sin(\Theta_1 + \Theta_2) - l_3(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3) \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1\dot{\Theta}_1 \cos(\Theta_1) + l_2(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + l_3(\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3) \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix}$$

Zjednodušení tohoto zápisu docílíme přepsáním do maticového tvaru a zavedením absolutních kloubových souřadnic:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\Theta_1) & -l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & -l_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1 \cos(\Theta_1) & l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix}$$

Je zřejmé, že transformaci rychlosti lze zapsat jako rovnicí:

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

kde J je Jakobián a q jsou absolutní kloubové souřadnice:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix}$$

3.1.6 Přímá transformace – zrychlení

Nakonec musíme odvodit přímou transformaci zrychlení. Pro její výpočet využijeme předchozí rovnici, kterou zderivujeme pomocí věty o derivaci součinu:

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}$$

Jediné, co tedy potřebujeme spočítat, je derivace Jakobiánu:

$$\dot{J} = \begin{bmatrix} -l_1 \cos(\Theta_1) & -l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & -l_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ -l_1 \sin(\Theta_1) & -l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & -l_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

Nyní již známe vše potřebné k tomu, abychom mohli napsat výsledný vztah pro zrychlení:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \\ \ddot{\Theta}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \sin(\Theta_1) & -l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & -l_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1 \cos(\Theta_1) & l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 \cos(\Theta_1) & l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1 \sin(\Theta_1) & l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\dot{\Theta}_1)^2 \\ (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 \\ (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3)^2 \end{bmatrix}$$

3.2 Inverzní kinematičká transformace

3.2.1 Inverzní transformace – poloha

Tentokrát není situace tak jednoduchá jako u přímé transformace. V našem případě je tato úloha nejednoznačná (má dvě řešení), avšak je naštěstí analyticky řešitelná (což obecně nemusí platit). Na Obr. 3 je uvedena grafická interpretace pomocných proměnných. Nejprve zjistíme souřadnice druhého kloubu. Jelikož máme k dispozici úhel Θ_e , lze je vypočítat snadno pomocí:

$$x_2 = x_e - dx_2 = x_e - l_3 \sin \Theta_e$$

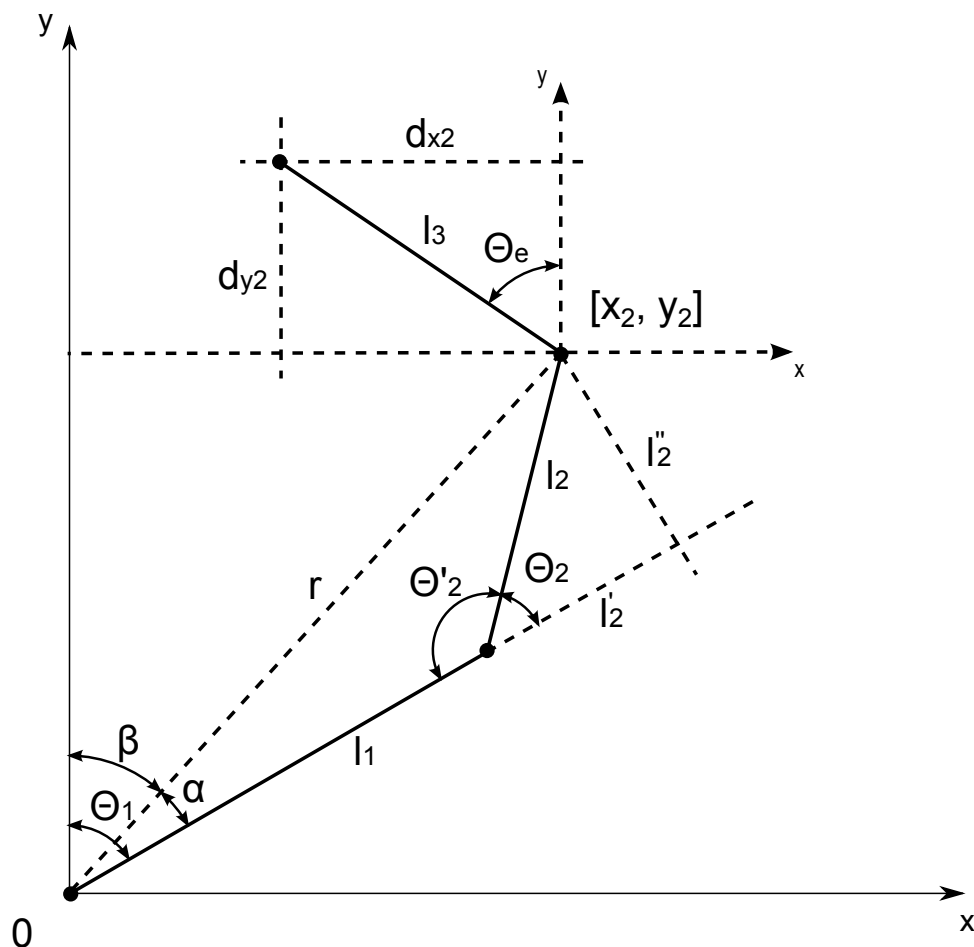
$$y_2 = y_e - dy_2 = y_e - l_3 \cos \Theta_e$$

Nyní již můžeme pomocí kosinové věty vypočítat úhel Θ'_2 :

$$\cos \Theta'_2 = \frac{l_1^2 + l_2^2 - x_2^2 - y_2^2}{2l_1 l_2}$$

Mezi Θ_2 a Θ'_2 platí vztah $\Theta_2 = \pi - \Theta'_2$. Upravíme tedy předchozí rovnici:

$$\cos(\Theta_2) = \cos(\pi - \Theta'_2) = -\cos(\Theta'_2) = \frac{x_2^2 + y_2^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}$$



Obrázek 3: Pomocný obrázek pro odvození inv. kinematiky.

Kvůli přesnosti výpočtu nevypočteme úhel Θ_2 pomocí acos , ale pomocí atan2 . K tomu ještě potřebujeme určit $\sin\Theta_2$:

$$\sin\Theta_2 = \pm\sqrt{1 - \cos^2\Theta_2}$$

Úhel Θ_2 potom vyjde:

$$\Theta_2 = \text{atan2}(\sin\Theta_2, \cos\Theta_2)$$

Nyní je nutné vypočítat úhel Θ_1 . Nejprve vypočítáme úhel α :

$$\alpha = \text{atan2}(l_2'', l_1 + l_2')$$

$$l_2'' = l_2 \sin\Theta_2$$

$$l_2' = l_2 \cos\Theta_2$$

Dále vypočteme úhel β :

$$\beta = \text{atan2}(x_2, y_2)$$

A úhel Θ_1 je potom dán:

$$\Theta_1 = \beta + \alpha$$

Na závěr spočteme úhel Θ_3 :

$$\Theta_3 = \Theta_e - \Theta_1 - \Theta_2$$

Výsledná transformace je:

$$\begin{bmatrix} \Theta_2 \\ \Theta_1 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - \left(\frac{x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2}, \frac{x_e^2 + y_e^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1l_2}\right) \\ \text{atan2}(x_e - l_3\sin\Theta_e, y_e - l_3\cos\Theta_e) + \text{atan2}(l_2\sin\Theta_2, l_1 + l_2\cos\Theta_2) \\ \Theta_e - \Theta_1 - \Theta_2 \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} x_2 &= x_e - l_3\sin\Theta_e \\ y_2 &= y_e - l_3\cos\Theta_e \end{aligned}$$

3.2.2 Inverzní transformace – rychlost

K odvození inverzní transformace rychlosti použijeme rovnici, kterou jsme získali při odvození přímé transformace rychlosti:

$$\dot{X} = J\dot{q}$$

ze které vyjádříme rychlost absolutních kloubových souřadnic:

$$\dot{q} = J^{-1}\dot{X}$$

Po dosazení tedy dostaneme:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1\sin(\Theta_1) & -l_2\sin(\Theta_1 + \Theta_2) & -l_3\sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1\cos(\Theta_1) & l_2\cos(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3\cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Theta}_e \end{bmatrix}$$

Po zinvertování vyjde:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\Theta_1\cos\Theta_2 - \sin\Theta_1\sin\Theta_2}{l_1\sin\Theta_2} & \frac{\sin\Theta_1\cos\Theta_2 + \cos\Theta_1\sin\Theta_2}{l_1\sin\Theta_2} & \frac{l_3\sin\Theta_3}{l_1\sin\Theta_2} \\ -\frac{\cos\Theta_1}{l_2\sin\Theta_2} & -\frac{\sin\Theta_1}{l_2\sin\Theta_2} & -\frac{l_3(\sin\Theta_2\cos\Theta_3 + \cos\Theta_2\sin\Theta_3)}{l_2\sin\Theta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_e \\ \dot{y}_e \\ \dot{\Theta}_e \end{bmatrix}$$

kde výsledná transformace vyjde:

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\Theta}_1 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 \\ \dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{\Theta}_1 &= \dot{q}_1 \\ \dot{\Theta}_2 &= \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \\ \dot{\Theta}_3 &= \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \end{aligned}$$

3.2.3 Inverzní transformace – zrychlení

Opět využijeme vztahu získaného pro přímou transformaci zrychlení:

$$\ddot{X} = J\ddot{q} + \dot{J}\dot{q}$$

a opět si vyjádříme zrychlení:

$$\ddot{q} = J^{-1}(\ddot{X} - \dot{J}\dot{q})$$

Po dosazení získáme:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\cos\Theta_1 \cos\Theta_2 - \sin\Theta_1 \sin\Theta_2}{l_1 \sin\Theta_2} & \frac{\sin\Theta_1 \cos\Theta_2 + \cos\Theta_1 \sin\Theta_2}{l_1 \sin\Theta_2} & \frac{l_3 \sin\Theta_3}{l_1 \sin\Theta_2} \\ -\frac{\cos\Theta_1}{l_2 \sin\Theta_2} & -\frac{\sin\Theta_1}{l_2 \sin\Theta_2} & -\frac{l_3(\sin\Theta_2 \cos\Theta_3 + \cos\Theta_2 \sin\Theta_3)}{l_2 \sin\Theta_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{y}_e \\ \ddot{\Theta}_e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \cos(\Theta_1) & l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ l_1 \sin(\Theta_1) & l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) & l_3 \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1^2 \\ \dot{q}_2^2 \\ \dot{q}_3^2 \end{bmatrix} \right)$$

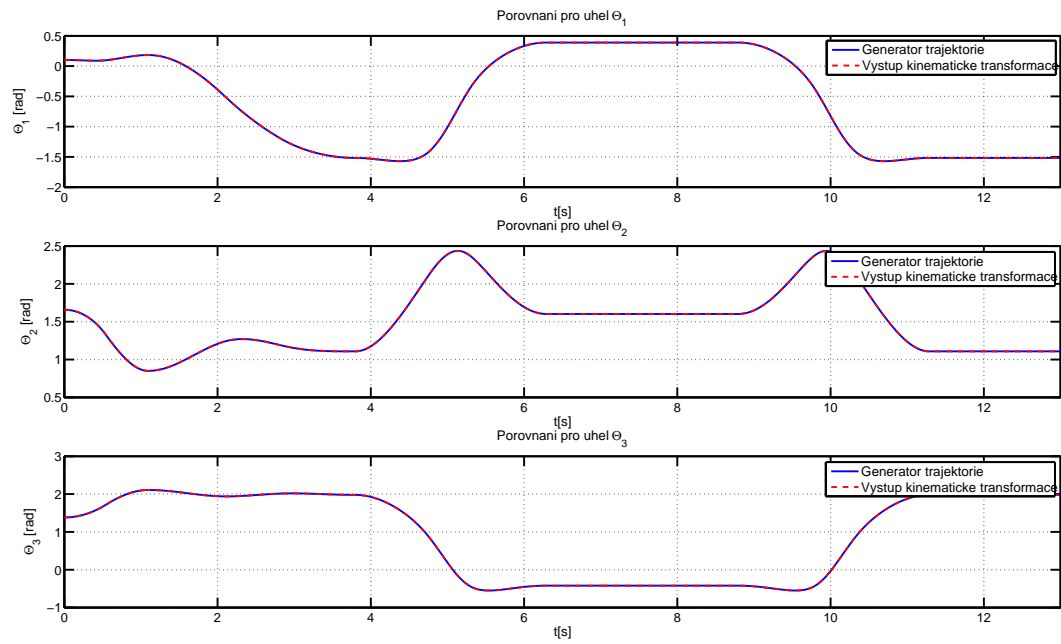
kde výsledná transformace vyjde:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{\Theta}_1 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 \\ \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \ddot{\Theta}_1 &= \ddot{q}_1 \\ \ddot{\Theta}_2 &= \ddot{q}_2 - \ddot{q}_1 \\ \ddot{\Theta}_3 &= \ddot{q}_3 - \ddot{q}_2 \end{aligned}$$

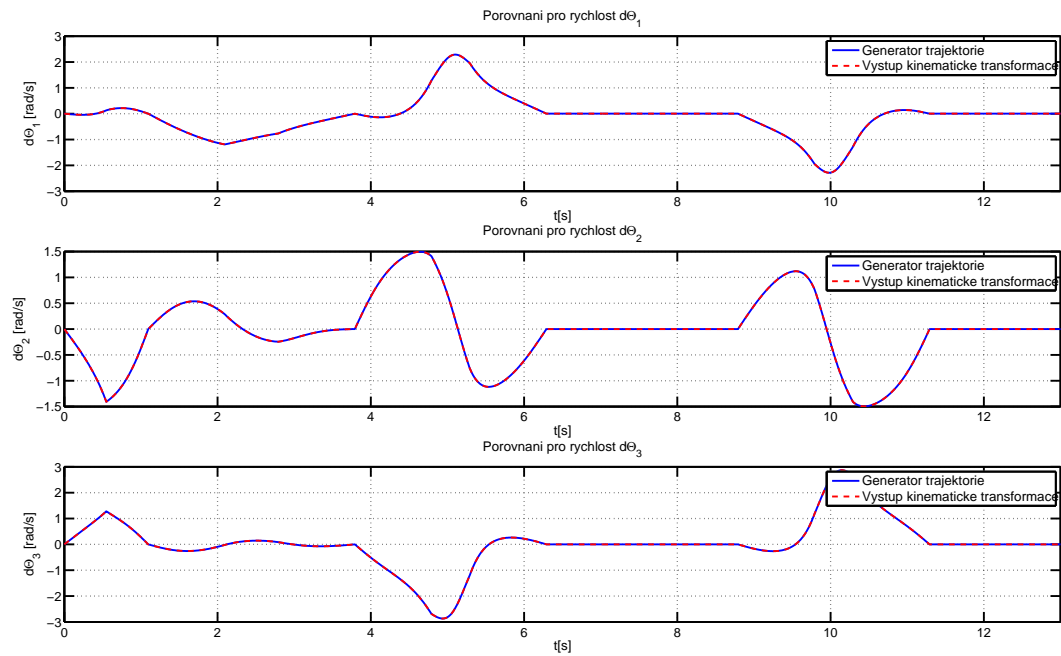
3.3 Ověření výsledků

Ověření výsledků provedeme v Simulinku tak, že vezmeme použitý generátor trajektorie, který generuje požadované trajektorie kloubových souřadnic. Tyto trajektorie nejprve přivedeme na vstup generátoru přímé kinematiky \Rightarrow tím získáme souřadnice efektoru. Následně souřadnice efektoru přivedeme do generátoru inverzní kinematiky \Rightarrow tím znovu získáme kloubové souřadnice, které porovnáme s těmi z generátoru trajektorie. Pokud se budou shodovat, lze prohlásit, že přímá a inverzní kinematika je odvozena správně.

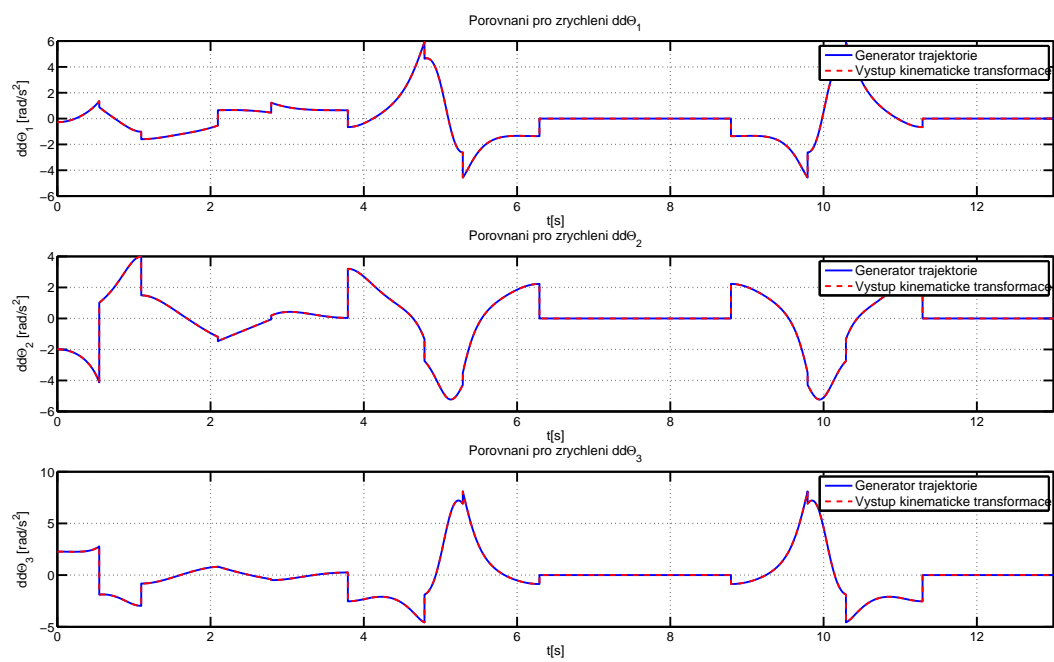
Použité schéma v Simulinku je uvedeno na Obr. 73. Získané grafy viz. Obr. 4, 5 a 6. Ze získaných grafů je vidět, že oba výstupy se shodují, a proto lze prohlásit odvozené kinematické transformace za správné.



Obrázek 4: Kontrola kinematické transformace polohy.



Obrázek 5: Kontrola kinematické transformace rychlosti.



Obrázek 6: Kontrola kinematické transformace zrychlení.

4 Odvození dynamiky

Jako další bod provedeme odvození dynamického modelu manipulátoru. Výsledkem jsou pohybové rovnice, které zahrnují i vzájemné silové působení mezi jednotlivými rameny na rozdíl od kinematického modelu, kterým lze provádět pouze přepočty mezi kloubovými souřadnicemi a souřadnicemi koncového efektoru.

K odvození pohybových rovnic využijeme Lagrangeovu metodu. Ta využívá celkovou potenciální a kinetickou energii. Předpis pro Lagrangeovy rovnice je:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = Q_i$$
$$L = T - V$$

kde L je Lagrangian, T je kinetická energie vzhledem k inerciální soustavě, V je potenciální energie, q_i jsou zobecněné souřadnice a Q_i jsou zobecněné síly.

4.1 Určení Lagrangianu

Pro výpočet Lagrangianu tedy budeme muset určit potenciální a kinetickou energii celého manipulátoru. To provedeme tak, že pro každé rameno určíme potenciální a kinetickou energii. Výsledné energie budou jejich součtem.

4.1.1 Kinetická energie

Kinetická energie prvního ramena je:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$$

Jelikož těžiště neprochází osou rotace, je nutné při výpočtu využít Steinerovu větu:

$$J_1 = J_{t1} + m_1 l_{t1}^2$$

kde J_{t1} je moment setrvačnosti vzhledem k ose rotace procházející těžištěm a l_{t1} vzdálenost těžiště od osy rotace. Po dosazení je výsledná kinetická energie složena z rotační a translační složky:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_{t1} \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l_{t1}^2 \dot{\Theta}_1^2$$

K odvození kinetické energie druhého ramena budeme muset použít mírně odlišný způsob. Rotační složka zůstane stejná, avšak do translační složky je nutné zahrnout vzájemné působení mezi rameny. Budeme ji počítat dle vztahu:

$$T_{2t} = \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

Rychlost v rozložíme na rychlost v x-ové a y-ové ose:

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2$$

kde x_2 a y_2 představují polohu těžiště:

$$x_2 = l_1 \sin \Theta_1 + l_{t2} \sin(\Theta_1 + \Theta_2)$$

$$y_2 = l_1 \cos \Theta_1 + l_{t2} \cos(\Theta_1 + \Theta_2)$$

Celková kinetická energie druhého ramena potom vyjde:

$$T_2 = \frac{1}{2} J_{t2} (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

Kinetická energie třetího ramena se bude počítat analogicky jako energie druhého ramena:

$$T_3 = \frac{1}{2} J_{t3} (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)$$

kde

$$x_3 = l_1 \sin \Theta_1 + l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + l_{t3} \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$$

$$y_3 = l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + l_{t3} \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3)$$

Celková kinetická energie soustavy je potom součtem kinetických energií všech ramen:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2} J_{t1} \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_1 l_{t1}^2 \dot{\Theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_{t2} (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2)^2 + \\ + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_{t3} (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_3)^2 + \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2)$$

kde

$$\dot{x}_2 = \frac{d}{dt} (l_1 \sin \Theta_1 + l_{t2} \sin(\Theta_1 + \Theta_2))$$

$$\dot{y}_2 = \frac{d}{dt} (l_1 \cos \Theta_1 + l_{t2} \cos(\Theta_1 + \Theta_2))$$

$$\dot{x}_3 = \frac{d}{dt} (l_1 \sin \Theta_1 + l_2 \sin(\Theta_1 + \Theta_2) + l_{t3} \sin(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3))$$

$$\dot{y}_3 = \frac{d}{dt} (l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + l_{t3} \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3))$$

4.1.2 Potenciální energie

Potenciální energii určíme dle vzorce:

$$V = mgh$$

kde za výšku h budeme považovat y-ovou souřadnici těžiště. Výsledná potenciální energie vyjde:

$$V = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 + m_3 g y_3 = m_1 g l_{t1} \cos \Theta_1 + m_2 g (l_1 \cos \Theta_1 + l_{t2} \cos(\Theta_1 + \Theta_2)) + \\ + m_3 g (l_1 \cos \Theta_1 + l_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + l_{t3} \cos(\Theta_1 + \Theta_2 + \Theta_3))$$

4.2 Výpočet pohybových rovnic

Nyní již máme nadefinovanu kinetickou a potenciální energii celé soustavy a jsme schopni určit Lagrangian jako:

$$L = T - V$$

Jako zobecněné souřadnice zvolíme úhly natočení Θ_1 , Θ_2 a Θ_3 a jejich pohybové rovnice určíme ze vztahů (tření zanedbáváme):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_1} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta_1} \right) = T_1$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_2} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta_2} \right) = T_2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}_3} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \Theta_3} \right) = T_3$$

kde T_1 , T_2 a T_3 představují točivé momenty pohonů jednotlivých kloubů. Uvedené rovnice jsou již příliš složité pro ruční řešení, proto je vhodné použít matematický software pro symbolické výpočty (např. program Maple). Výsledné pohybové rovnice je možné přepsat do přehlednějšího maticového tvaru:

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) = T$$

kde $M(\Theta)$ je matice setrvačnosti, $C(\Theta)$ je tenzor odstředivé a Coriolisovy síly, $G(\Theta)$ je vektor gravitace a T je vektor točivých momentů pohonů. Konkrétní hodnoty matic jsou uvedeny v příloze.

4.3 Ověření výsledků

Nakonec zkontrolujeme dosažené výsledky. Kontrolu provedeme tak, že dynamický model manipulátoru sestavíme dvěma způsoby a porovnáme, jestli se dosažené výsledky shodují:

- První model sestavíme pomocí výše uvedených pohybových rovnic, kdy z nich vygenerujeme druhé derivace (zrychlení) úpravou výše uvedené maticové formy:

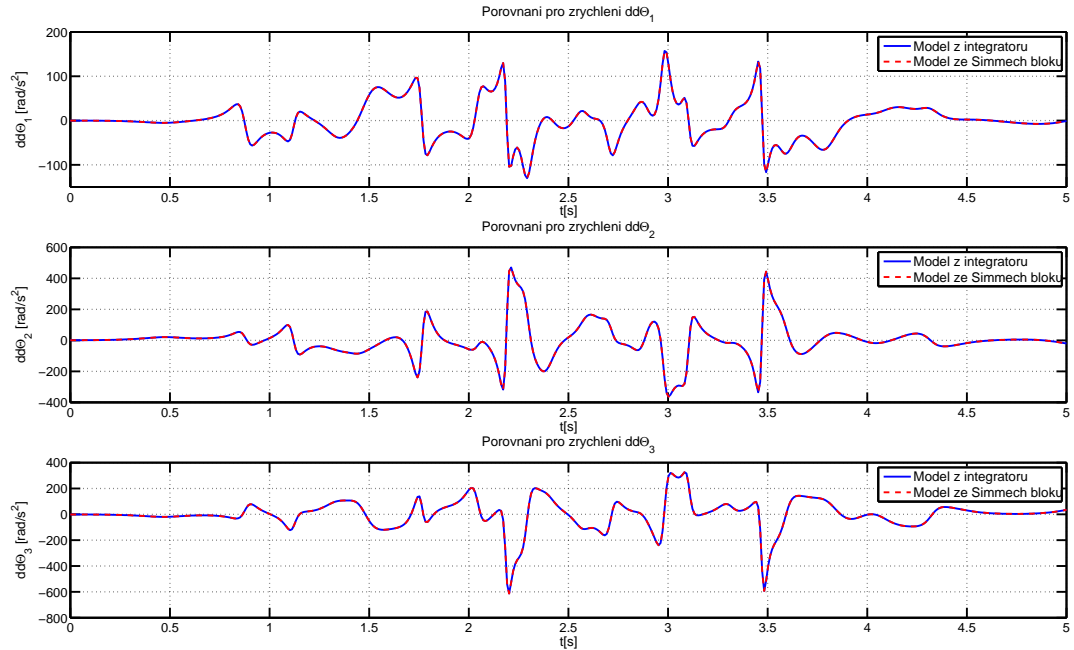
$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) = T \Rightarrow \ddot{\Theta} = M(\Theta)^{-1}(T - \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} - G(\Theta))$$

Získané druhé derivace dvakrát zintegrujeme a tím získáme rychlosti a polohy jednotlivých kloubových souřadnic.

- Druhý model sestavíme pomocí Simmechanicu a jeho bloků (Body, Revolute, ...).

Na závěr provedeme srovnání obou modelů, zda poskytují stejné výsledky. Použité schéma pro porovnání je uvedeno v příloze na Obr. 74. Rychlost a poloha jsou získány prostou integrací druhých derivací (zrychlení), které je získáno z pohybových rovnic. Proto budeme pouze kontrolovat, zda se shodují druhé derivace (zrychlení).

Jelikož porovnávané dva matematické modely, tak můžeme použít libovolného vstupní signály (bez ohledu na fyzikální význam). My použijeme 3 různé sinusové průběhy (každý připojený na jeden kloub). Na Obr. 7 jsou uvedeny získané grafy, které se shodují, proto lze považovat použité modely za správné.



Obrázek 7: Kontrola dynamického modelu.

Oba vytvořené modely nepoužijeme pouze pro kontrolu správnosti pohybových rovnic, ale i v dalších kapitolách. Při návrhu regulátorů bude pohodlnější využívat modelu sestaveného v Simmechanicsu. Pro centralizované řízení a identifikaci dynamických parametrů je pak nutné znát výše uvedené analyticky vyjádřené pohybové rovnice.

5 Identifikace

V této kapitole se budeme zabývat identifikací dynamického modelu. Znalost dynamického modelu je důležitá například pro centralizované řízení. Neznáme ho ovšem nikdy zcela přesně, a proto se budeme zabývat možnostmi jeho identifikace. Problematiku identifikace můžeme rozdělit do následujících částí:

Určení dynamického modelu – Nejprve je třeba určit teoretický dynamický model, který budeme identifikovat. Ten již máme hotový z kapitoly „Dynamický model“.

Volba vektoru parametrů – Z odvozených pohybových rovnic je vidět, že se jedná o nelineární vztahy. U sériových manipulátorů lze ale nalézt linearitu v pohybových rovnicích mezi určitými parametry. Díky tomu budeme moci po přepsání do lineárního tvaru použít metody lineárního odhadu a identifikace se tím značně zjednoduší.

Volba vstupního signálu – Zde je nutné zvolit takový signál, který bude fyzikálně realizovatelný a zároveň dostatečně bohatý, aby vhodně vybudil dynamiku manipulátoru.

Volba metody pro určení rychlosti a zrychlení – Na závěr je třeba vyřešit jakým způsobem určit průběhy rychlosti a zrychlení. Běžně se totiž měří pouze poloha, ale pro identifikaci je nutné znát i rychlost a zrychlení.

5.1 Volba vektoru parametrů

Jak již bylo řečeno, tak v odvozeném dynamickém (nelineárním) modelu lze nalézt linearitu mezi určitými parametry. Volba těchto parametrů ovšem není jednoznačná a jelikož se jedná o první krok pro identifikaci, ovlivňuje tak konečný výsledek. Pokud se tedy hned na začátku zvolí špatné parametry, dostaneme špatné výsledky bez ohledu na následující volbu identifikační metody a vstupního signálu. Přepsání do lineární formy vypadá takto:

$$\begin{aligned} M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) &= T \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}) \cdot \Pi &= T \end{aligned} \quad (5.1)$$

Kde Y je matice regresorů, která závisí na volbě vektoru parametrů Π .

Problematiku volby vektoru parametrů nejprve pro přehlednost ilustrujeme na modelu pouze dvouramenného manipulátoru a dosažené výsledky potom zobecníme na náš případ manipulátoru trojramenného. Dvouramenný manipulátor má následující pohybové rovnice:

$$\begin{aligned} [J_{t1} + m_1 l_{t1}^2 + J_{t2} + m_2(l_1^2 + l_{t2}^2 + 2l_1 l_{t2} c_2)]\ddot{\Theta}_1 + \\ + [J_{t2} + m_2(l_{t2}^2 + l_1 l_{t2} c_2)]\ddot{\Theta}_2 - 2m_2 l_1 l_{t2} s_2 \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - m_2 l_1 l_{t2} s_2 \dot{\Theta}_2^2 + \\ + (m_1 l_{t1} + m_2 l_1)g s_1 + m_2 l_{t2} g s_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$[J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_1 l_{t_2} c_2)]\ddot{\Theta}_1 + [J_{t_2} + m_2 l_{t_2}^2]\ddot{\Theta}_2 + m_2 l_1 l_{t_2} s_2 \dot{\Theta}_1^2 + m_2 l_{t_2} g s_{12} = \tau_2$$

kde hledané dynamické parametry jsou – $J_{t_1}, m_1, l_{t_1}, J_{t_2}, m_2, l_{t_2}$.

Nyní si uvedeme tři sady vektorů parametrů. Jako první by se mohla nabízet volba:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} m_1 l_{t_1} \\ J_{t_1} + m_1 l_{t_1}^2 \\ m_2 \\ m_2 l_{t_2} \\ J_{t_2} + m_2 l_{t_2}^2 \end{bmatrix}$$

Pro tuto sadu parametrů vyjde matice regresorů:

$$Y_1 = \begin{bmatrix} g s_1 & \ddot{\Theta}_1 & (l_1^2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 g s_1) & (2l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 c_2 \ddot{\Theta}_2 - 2l_1 s_2 \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - l_1 s_2 \dot{\Theta}_2^2 + g s_{12}) & (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) \\ 0 & 0 & 0 & (l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 s_2 \dot{\Theta}_1^2 + g s_{12}) & (\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2) \end{bmatrix}$$

Jako další možnost použijeme volbu, která vychází z vektoru parametrů voleného v [1]:

$$\Pi_1 = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_1 l_{C1} \\ J_{t_1} + m_1 l_{C1} \\ m_2 \\ m_2 l_{C2} \\ J_{t_2} + m_2 l_{C2} \end{bmatrix}$$

kde $l_{C1} = (l_{t_1} - l_1)$ a $l_{C2} = (l_{t_2} - l_2)$. V tomto případě již není jednoduše vidět, jak získat matici regresorů. Nejprve je potřeba provést úpravu pohybových rovnic, kdy na několika místech rozšíříme vztahy přičtením „nuly“ (např. „ $+2m_1 l_1 l_{t_1} - 2m_1 l_1 l_{t_1}$ “, rozšíření je značeno červeně):

$$\begin{aligned} & [J_{t_1} + m_1 l_{t_1}^2 + 2m_1 l_1 l_{t_1} - 2m_1 l_1 l_{t_1} + m_1 l_1^2 + m_1 l_1^2 - 2m_1 l_1^2 + J_{t_2} + \\ & + m_2(l_1^2 + l_{t_2}^2 + 2l_1 l_{t_2} c_2 + l_2^2 - 2l_2^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2 - 2l_1 l_2 c_2 + 2l_2 l_{t_2} - 2l_2 l_{t_2})]\ddot{\Theta}_1 + \\ & + [J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_1 l_{t_2} c_2 + l_2^2 - 2l_2^2 + l_2^2 + l_1 l_2 c_2 - l_1 l_2 c_2 + 2l_2 l_{t_2} - 2l_2 l_{t_2})]\ddot{\Theta}_2 + \\ & + (-2m_2 l_1 l_{t_2} s_2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 + 2m_2 l_1 l_2 s_2)\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \\ & + (-m_2 l_1 l_{t_2} s_2 - m_2 l_1 l_2 s_2 + m_2 l_1 l_2 s_2)\dot{\Theta}_2^2 + \\ & + (m_1 l_{t_1} + m_2 l_1 + m_1 l_1 - m_1 l_1)g s_1 + (m_2 l_{t_2} + m_2 l_2 - m_2 l_2)g s_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_1 l_{t_2} c_2 + l_2^2 - 2l_2^2 + l_2^2 + l_1 l_2 c_2 - l_1 l_2 c_2 + 2l_2 l_{t_2} - 2l_2 l_{t_2})]\ddot{\Theta}_1 + \\ & + [J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_2^2 - 2l_2^2 + l_2^2 + 2l_2 l_{t_2} - 2l_2 l_{t_2})]\ddot{\Theta}_2 + \\ & + (m_2 l_1 l_{t_2} s_2 + m_2 l_1 l_2 s_2 - m_2 l_1 l_2 s_2)\dot{\Theta}_1^2 + \\ & + (m_2 l_{t_2} + m_2 l_2 - m_2 l_2)g s_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

Dále zavedeme nové proměnné $l_{C1} = (l_{t1} - l_1)$ a $l_{C2} = (l_{t2} - l_2)$. Po jejich zavedení a přeuspořádání získáme:

$$\begin{aligned} & [J_{t1} + m_1(l_{C1}^2 + l_1^2 + 2l_1l_{C1}) + J_{t2} + m_2(l_1^2 + l_{C2}^2 + l_2^2 + 2l_1l_2c_2 + 2l_1l_{C2}c_2 + 2l_2l_{C2})]\ddot{\Theta}_1 + \\ & \quad + [J_{t2} + m_2(l_{C2}^2 + l_2^2 + l_1l_2c_2 + l_1l_{C2}c_2 + 2l_2l_{C2})]\ddot{\Theta}_2 + \\ & \quad + (-2m_2l_1l_{C2}s_2 - 2m_2l_1l_2s_2)\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 + (-m_2l_1l_{C2}s_2 - m_2l_1l_2s_2)\dot{\Theta}_2^2 + \\ & \quad + (m_1l_{C1} + m_1l_1 + m_2l_2)gs_1 + (m_2l_{C2} + m_2l_2)gs_{12} = \tau_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [J_{t2} + m_2(l_{C2}^2 + l_2^2 + l_1l_2c_2 + l_1l_{C2}c_2 + 2l_2l_{C2})]\ddot{\Theta}_1 + \\ & \quad + [J_{t2} + m_2(l_{C2}^2 + l_2^2 + l_2l_{C2})]\ddot{\Theta}_2 + (m_2l_1l_{C2}s_2 + m_2l_1l_2s_2)\dot{\Theta}_1^2 + \\ & \quad + (m_2l_{C2} + m_2l_2)gs_{12} = \tau_2 \end{aligned}$$

Z tohoto vyjádření je již zřejmé, jak se dostaneme k matici regresorů:

$$Y_2 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = l_1^2\ddot{\Theta}_1 + l_1gs_1$$

$$y_{12} = 2l_1\ddot{\Theta}_1 + gs_1$$

$$y_{13} = \ddot{\Theta}_1$$

$$y_{14} = (l_1^2 + 2l_1l_2c_2 + l_2^2)\ddot{\Theta}_1 + (l_1l_2c_2 + l_2^2)\ddot{\Theta}_2 - 2l_1l_2s_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 - l_1l_2s_2\dot{\Theta}_2^2 + l_1gs_1 + l_2gs_{12}$$

$$y_{15} = (2l_1c_2 + 2l_2)\ddot{\Theta}_1 + (l_1c_2 + 2l_2)\ddot{\Theta}_2 - 2l_1s_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 - l_1s_2\dot{\Theta}_2^2gs_{12}$$

$$y_{16} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2$$

$$y_{21} = 0$$

$$y_{22} = 0$$

$$y_{23} = 0$$

$$y_{24} = (l_1l_2c_2 + l_2^2)\ddot{\Theta}_1 + l_2^2\ddot{\Theta}_2 + l_1l_2s_2\dot{\Theta}_1^2 + l_2gs_{12}$$

$$y_{25} = (l_1c_2 + 2l_2)\ddot{\Theta}_1 + 2l_2\ddot{\Theta}_2 + l_1s_2\dot{\Theta}_1^2 + gs_{12}$$

$$y_{26} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2$$

Jako poslední vektor parametrů použijeme:

$$\Pi_3 = \begin{bmatrix} J_{t1} + m_1l_{t1}^2 + J_{t2} + m_2l_{t2}^2 + m_2l_1^2 \\ m_2l_1l_{t2} \\ J_{t2} + m_2l_{t2}^2 \\ g(m_1l_{t1} + m_2l_1) \\ gm_2l_{t2} \end{bmatrix}$$

Pro tuto sadu parametrů vyjde matice regresorů:

$$Y_3 = \begin{bmatrix} \ddot{\Theta}_1 & (2c_2\ddot{\Theta}_1 + c_2\ddot{\Theta}_2 - 2s_2\dot{\Theta}_1\dot{\Theta}_2 - s_2\dot{\Theta}_2^2) & \ddot{\Theta}_2 & s_1 & s_{12} \\ 0 & (c_2\ddot{\Theta}_1 + s_2\dot{\Theta}_1^2) & (\dot{\Theta}_1 + \dot{\Theta}_2) & 0 & s_{12} \end{bmatrix}$$

Volba vektoru parametrů tedy skutečně není jednoznačná. Proto je nutné určit způsob, jak vhodně provést volbu vektoru parametrů. Pro objasnění této volby se nejprve zmíníme o způsobu řešení soustavy rovnic a o tom, co znamená singulární dekompozice. Ještě před tím ale zkontrolujeme, zda jsou uvedené matice regresorů vypočteny správně. To provedeme tak, že porovnáme výstup z původního dynamického modelu a nynějšího modelu, přepsaného do lineárního tvaru vzhledem ke zvolenému vektoru parametrů. Tedy zkontrolujeme, zda platí:

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) = T = Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}) \cdot \Pi$$

Porovnáme tedy, zda se pro danou trajektorii budou shodovat točivé momenty. Pro toto porovnání bude ovšem nejprve třeba si specifikovat vstupní signál. Volbou vstupního signálu se budeme zabývat v další části, proto pouze konstatujeme, že použijeme součet harmonických funkcí:

$$\Theta_i = \left(\frac{a_{i1}}{\omega_{fi}l_{i1}} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t) - \frac{b_{i1}}{\omega_{fi}l_{i1}} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t) \right) + \left(\frac{a_{i2}}{\omega_{fi}l_{i2}} \sin(\omega_{fi}l_{i2}t) - \frac{b_{i2}}{\omega_{fi}l_{i2}} \cos(\omega_{fi}l_{i2}t) \right) + \Theta_{i0}$$

$$\dot{\Theta}_i = (a_{i1} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t) + b_{i1} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t)) + (a_{i2} \cos(\omega_{fi}l_{i2}t) + b_{i2} \sin(\omega_{fi}l_{i2}t))$$

$$\ddot{\Theta}_i = (-a_{i1}\omega_{fi}l_{i1} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t) + b_{i1}\omega_{fi}l_{i1} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t)) + (-a_{i2}\omega_{fi}l_{i2} \sin(\omega_{fi}l_{i2}t) + b_{i2}\omega_{fi}l_{i2} \cos(\omega_{fi}l_{i2}t))$$

Použité parametry jsou uvedeny v Tab. 1. V Tab. 2 je uvedena přesnost přepsání do lineárního tvaru. Jako chybu budeme považovat maximální rozdíl mezi momentem T vygenerovaným nelineárním modelem a lineárním modelem ($Y \cdot \Pi = T$) v absolutní hodnotě. Chyba je v podstatě nulová a odvození je tedy provedeno správně.

	a_1	b_1	a_2	b_2	ω_f	l_1	l_2	Θ_0
1. rameno	0.2	0.1	0.15	0.2	2	1	2	0.15
2. rameno	0.2	0.1	0.15	0.25	1.5	1	3	0.1

Tabulka 1: Parametry vstupního signálu pro dvouramenný manipulátor.

Vektor parametrů	$\max(\text{abs}(Y_i\Pi - T))$
Π_1	$1.1369 \cdot 10^{-13}$
Π_2	$1.4211 \cdot 10^{-13}$
Π_3	$1.1369 \cdot 10^{-13}$

Tabulka 2: Chyba lineárního modelu.

5.1.1 Řešení soustavy rovnic

Nyní máme model přepsán do tvaru soustavy lineárních rovnic:

$$Y \cdot \Pi = T$$

Konkrétně se budeme zabývat řešením přeурčené soustavy rovnic. To znamená, že budeme mít k dispozici více rovnic, než hledaných parametrů. To je přesně případ, kdy je k dispozici sada měření, která je rozsáhlejší než počet hledaných parametrů.

Přeурčená soustava obecně nemá řešení. Jednotlivé řádky totiž mohou poskytovat protichůdné informace. Protože nalezené parametry nebudou přesně řešit všechny rovnice, zavedeme do soustavy rovnic chybu rovnice:

$$\epsilon = T - Y \cdot \Pi$$

Tato chyba rovnice se také nazývá reziduum. Pro řešení přeурčené soustavy lze použít např. metodu nejmenších čtverců (viz. [2]). Ta provede odhad Π jako odhad vektoru, který minimalizuje ztrátovou funkci $V(\Pi)$:

$$V(\Pi) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \epsilon^2(t) = \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon$$

Metoda nejmenších čtverců tedy provede odhad tak, že minimalizuje kvadrát reziduí. Nyní se pokusíme najít explicitní řešení tohoto odhadu. Do kriteriální funkce dosadíme za reziduum:

$$\begin{aligned} V(\Pi) &= \frac{1}{2} \epsilon^T \epsilon = \frac{1}{2} [T - Y \cdot \Pi]^T [T - Y \cdot \Pi] = \\ &= \frac{1}{2} [\Pi^T Y^T Y \Pi - \Pi^T Y^T T - T^T Y \Pi + T^T T] \end{aligned}$$

Pro nalezení hledaného minima kriteriální funkce položíme její derivaci rovnu nule:

$$\frac{dV(\Pi)}{d\Pi} = \Pi^T (Y^T Y) - T^T Y = 0$$

Řešení potom vyjde:

$$\Pi^T (Y^T Y) = T^T Y \Rightarrow (Y^T Y) \Pi = Y^T T \Rightarrow \Pi = (Y^T Y)^{-1} Y^T T$$

kde se člen $(Y^T Y)^{-1} Y^T$ nazývá pseudoinverze matice Y . Pro nalezení hledaného vektoru parametrů je nutné provést výpočet inverze, resp. pseudoinverze matice Y . Zde ovšem mohou při špatné podmíněnosti matice Y vznikat numerické problémy. Pojem podmíněnosti matice si objasníme v následující části.

5.1.2 Singulární rozklad

Inverzní matici čtvercové matice lze vypočítat právě tehdy, když je matice regulární. Pro regulární matici platí, že $\det A \neq 0$, a to odpovídá tomu, že žádné vlastní číslo není nulové. Problémy s výpočtem inverze ale mohou nastat už i při „velkém“ rozdílu velikostí vlastních čísel, kdy je např. jedno vlastní číslo vůči ostatním řádově mnohem větší. Ostatní vlastní čísla se pak mohou jevit jako v podstatě nulová a matice tak zdegeneruje na singulární i přes to, že žádná vlastní čísla nulová nejsou. Proto se zavádí pojem podmíněnost matice, což je podíl největšího a nejmenšího vlastního čísla:

$$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$$

pro $\kappa \gg 1$ bude matice špatně podmíněná, což může způsobovat problémy při výpočtu inverze. Tento postup je nyní nutné mírně zobecnit, protože my potřebujeme počítat pseudoinverzi obdélníkové matice a pro ní nejsou definována vlastní čísla. Na místo nich budeme hovořit o singulárních číslech. Ty lze získat pomocí singulární dekompozice. Ta říká, že každá matice lze rozložit na následující součin matic:

$$Y = U \Sigma V^T$$

kde U a V jsou ortogonální matice a Σ je diagonální matice se singulárními čísly na diagonále ($\Sigma_r = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\}$) tak, že:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Singulární dekompozice také rovnou řadí vlastní čísla sestupně dle velikosti:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0$$

U obdélníkové matice tedy definujeme číslo podmíněnosti jako podíl největšího a nejmenšího singulárního čísla, resp. jako podíl prvního a posledního singulárního čísla:

$$\kappa = \frac{\sigma_1}{\sigma_n}$$

Toto číslo bychom mohli vzít jako ukazatel toho, zda bude výpočet pseudoinverze numericky korektní. Pro ohodnocení kvality volby vektoru parametrů Π použijeme číslo podmíněnosti matice Y , protože matice Y je přímo závislá na volbě vektoru parametrů.

5.1.3 Odhad kvality volby vektorů parametrů

Nyní se pokusíme určit na základě čísla podmíněnosti matice regresorů Y vhodnost volby vektoru parametrů. Jelikož je matice regresorů závislá na Θ , $\dot{\Theta}$ i $\ddot{\Theta}$ je nutné pro její sestavení použít nějakou trajektorii polohy, rychlosti a zrychlení. K tomu opět použijeme součet dvou harmonických signálů. Číslo podmíněnosti můžeme určit např. pomocí Matlabu příkazem $cond(Y)$. Získáme následující výsledky:

$$cond(Y_1) = 4.2660 \cdot 10^{15} \quad cond(Y_2) = 5.8181 \cdot 10^{15} \quad cond(Y_3) = 19.5672$$

Podle těchto výsledků by měl vektor parametrů Π_3 poskytovat nejlepší odhady. Ke kontrole tohoto předpokladu můžeme využít nelineárního dynamického modelu tak, že si pomocí inverzní dynamiky vygenerujeme momenty motorů T nutné pro dosažení požadovaných průběhů polohy, rychlosti a zrychlení. Jelikož takto získáme ideální průběhy momentů, měla by být zatím identifikace přesná. Provedeme ji jako:

$$\hat{\Pi} = pinv(Y) \cdot T$$

Chyba určení parametrů v procentech je uvedena v následujících Tab. 3, 4 a 5. V souladu s určenými čísly podmíněnosti vychází přesně pouze odhady pro vektor parametrů Π_3 . Pro vektor parametrů Π_2 vycházejí odhady dle předpokladů úplně špatně. Parametry Π_1 také nevycházejí přesně, ovšem oproti volbě parametrů Π_2 vycházejí mnohem přesněji (přestože čísla podmíněnosti vyšla skoro stejně).

Parametr	Chyba[%]
π_1	2.9102
π_2	3.0656
π_3	4.2285
π_4	0.0000
π_5	0.0000

Tabulka 3: Chyba odhadu pro vektor parametrů Π_1

Parametr	Chyba[%]
π_1	65.7995
π_2	277.6545
π_3	317.0836
π_4	29.9430
π_5	99.5838
π_6	111.8541

Tabulka 4: Chyba odhadu pro vektor parametrů Π_2

Parametr	Chyba[%]
π_1	$0.1309 \cdot 10^{-11}$
π_2	$0.0200 \cdot 10^{-11}$
π_3	$0.0027 \cdot 10^{-11}$
π_4	$0.0055 \cdot 10^{-11}$
π_5	$0.0146 \cdot 10^{-11}$

Tabulka 5: Chyba odhadu pro vektor parametrů Π_3

Výsledky dosažené pro dvouramenný manipulátor nyní zobecníme pro tříramenný manipulátor. Volbu vektoru Π_2 již nebudeme uvažovat, protože poskytovala i za teoretických hodnot velmi špatné výsledky. Parametry Π_1^3 a Π_3^3 budeme volit analogicky s dvouramenným manipulátorem (horní index značí, že parametry uvažujeme pro tříramenný manipulátor):

$$\Pi_1^3 = \begin{bmatrix} m_1 l_{t1} \\ J_{t1} + m_1 l_{t1}^2 \\ m_2 \\ m_2 l_{t2} \\ J_{t2} + m_2 l_{t2}^2 \\ m_3 \\ m_3 l_{t3} \\ J_{t3} + m_3 l_{t3}^2 \end{bmatrix} \quad \Pi_3^3 = \begin{bmatrix} J_{t1} + m_1 l_{t1}^2 + J_{t2} + m_2 (l_1^2 + l_{t2}^2) + J_{t3} + m_3 (l_1^2 + l_2^2 + l_{t3}^2) \\ J_{t2} + m_2 l_{t2}^2 + J_{t3} + m_3 (l_2^2 + l_{t3}^2) \\ m_3 l_{t3} \\ m_2 l_{t2} + m_3 l_2 \\ J_{t3} + m_3 l_{t3}^2 \\ g(m_1 l_{t1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) \end{bmatrix}$$

Matice regresorů, které vzniknou z vektorů parametrů, jsou:

$$Y_1^3 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} & y_{17} & y_{18} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} & y_{27} & y_{28} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} & y_{37} & y_{38} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = g s_1$$

$$y_{12} = \ddot{\Theta}_1$$

$$y_{13} = l_1^2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 g s_1$$

$$y_{14} = 2l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 c_2 \ddot{\Theta}_2 - 2l_1 s_2 \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - l_1 s_2 \dot{\Theta}_2^2 + g s_{12}$$

$$y_{15} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2$$

$$y_{16} = (l_1^2 + l_2^2 + 2l_1 l_2 c_2) \ddot{\Theta}_1 + (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \ddot{\Theta}_2 - 2l_1 l_2 s_2 \dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 - l_1 l_2 s_2 \dot{\Theta}_2^2 + l_1 g s_1 + l_2 g s_{12}$$

$$y_{17} = (2l_1 c_2 c_3 - 2l_1 s_2 s_3 + 2l_2 c_3) \ddot{\Theta}_1 + (2l_2 c_3 + l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3) \ddot{\Theta}_2 + (l_2 c_3 + l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3) \ddot{\Theta}_3 - (l_1 c_2 s_3 + l_1 s_2 c_3) (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_2^2) - (l_2 s_3 + l_1 c_2 s_3 + l_1 s_2 c_3) (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_3 + 2\dot{\Theta}_2 \dot{\Theta}_3 + \dot{\Theta}_3^2) + g s_{123}$$

$$y_{18} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3$$

$$y_{21} = y_{22} = y_{23} = 0$$

$$y_{24} = l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 s_2 \dot{\Theta}_1^2 + g s_{12}$$

$$y_{25} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2$$

$$y_{26} = (l_2^2 + l_1 l_2 c_2) \ddot{\Theta}_1 + l_2^2 \ddot{\Theta}_2 + l_1 l_2 s_2 \dot{\Theta}_1^2 + l_2 g s_{12}$$

$$y_{27} = (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + 2l_2 c_3) \ddot{\Theta}_1 + 2l_2 c_3 \ddot{\Theta}_2 + l_2 c_3 \ddot{\Theta}_3 + (l_1 c_2 s_3 + l_1 s_2 c_3) \dot{\Theta}_1^2 - l_2 s_3 (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_3 + 2\dot{\Theta}_2 \dot{\Theta}_3 + \dot{\Theta}_3^2) + g s_{123}$$

$$y_{28} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3$$

$$y_{31} = y_{32} = y_{33} = y_{34} = y_{35} = y_{36} = 0$$

$$y_{37} = (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + l_2 c_3) \ddot{\Theta}_1 + l_2 c_3 \ddot{\Theta}_2 + (l_1 c_2 s_3 + l_1 s_2 c_3 + l_2 s_3) \dot{\Theta}_1^2 + l_2 s_3 (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_2^2) + g s_{123}$$

$$y_{38} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3$$

A druhá sada parametrů je:

$$Y_2^3 = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} & y_{15} & y_{16} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} & y_{25} & y_{26} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} & y_{35} & y_{36} \end{bmatrix}$$

$$y_{11} = \ddot{\Theta}_1$$

$$y_{12} = \ddot{\Theta}_2$$

$$y_{13} = (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + l_2 c_3) (2\ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_3) + (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + 2l_2 c_3) \ddot{\Theta}_2 + (-l_1 c_2 s_3 - l_1 s_2 c_3) (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_2^2) + (-l_1 c_2 s_3 - l_1 s_2 c_3 - l_2 s_3) (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_3 + 2\dot{\Theta}_2 \dot{\Theta}_3 + \dot{\Theta}_3^2) + g s_{123}$$

$$y_{14} = 2l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 c_2 \ddot{\Theta}_2 - l_1 s_2 (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_2^2) + g s_{12}$$

$$y_{15} = \ddot{\Theta}_3$$

$$y_{16} = s_1$$

$$y_{21} = 0$$

$$y_{22} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2$$

$$y_{23} = (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + 2l_2 c_3) \ddot{\Theta}_1 + l_2 c_3 (2\ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3) + (l_1 s_2 c_3 + l_1 c_2 s_3) \dot{\Theta}_1^2 - l_2 s_3 (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_3 + 2\dot{\Theta}_2 \dot{\Theta}_3 + \dot{\Theta}_3^2) + g s_{123}$$

$$y_{24} = l_1 c_2 \ddot{\Theta}_1 + l_1 s_2 \dot{\Theta}_1^2 + g s_{12}$$

$$y_{25} = \ddot{\Theta}_3$$

$$y_{26} = 0$$

$$y_{31} = y_{32} = 0$$

$$y_{33} = (l_1 c_2 c_3 - l_1 s_2 s_3 + l_2 c_3) \ddot{\Theta}_1 + l_2 c_3 \ddot{\Theta}_2 + (l_1 s_2 c_3 + l_1 c_2 s_3 + l_2 s_3) \dot{\Theta}_1^2 + \dots l_2 s_3 (2\dot{\Theta}_1 \dot{\Theta}_2 + \dot{\Theta}_2^2) + g s_{123}$$

$$y_{34} = 0$$

$$y_{35} = \ddot{\Theta}_1 + \ddot{\Theta}_2 + \ddot{\Theta}_3$$

$$y_{36} = 0$$

Nyní zkontrolujeme, zda je odvození provedeno správně. To uděláme jako v předchozím případě, kdy jako chybu budeme považovat maximální rozdíl mezi momentem T vygenerovaným z nelineárního dynamického modelu pomocí inverzní dynamiky a momentem vygenerovaným z přeepsaného lineárního modelu (v absolutní hodnotě). Jako vstup použijeme součet dvou harmonických signálů ovšem v tomto případě již pro tři ramena. Použité parametry tohoto vstupního signálu jsou uvedeny v Tab. 6. Chyba je uvedena v Tab. 7 a je opět v podstatě nulová, což znamená, že odvození je provedeno správně.

	a_1	b_1	a_2	b_2	ω_f	l_1	l_2	Θ_0
1. rameno	0.20	0.100	0.15	0.20	2.00	1	2	0.15
2. rameno	0.20	0.100	0.15	0.25	1.50	1	3	0.10
3. rameno	0.15	0.075	0.20	0.15	1.75	1	4	0.20

Tabulka 6: Parametry vstupního signálu pro tříramenný manipulátor.

Nakonec ještě zkontrolujeme, jak přesné vyjdou odhady za použití teoretických hodnot. Použijeme opět stejný vstup a s jeho pomocí nejprve vygenerujeme z nelineárního dynamického modelu teoretický točivý moment T potřebný pro provedení této trajektorie. Dále sestavíme matici regresorů a poté již můžeme provést identifikaci. V Tab. 8 a Tab. 9 jsou uvedeny procentuální chyby odhadu. Pro vektor parametrů Π_3^3 vyjdou odhady přesně, zato pro vektor parametrů Π_1^3 vyjdou odhady některých parametrů velmi nepřesně, a proto budeme v dalších částech pracovat již pouze s vektorem parametrů Π_3^3 (dále značíme pouze Π).

Vektor parametrů	$\max(\text{abs}(Y_i\Pi - T))$
Π_1^3	$4.5475 \cdot 10^{-13}$
Π_3^3	$3.4106 \cdot 10^{-13}$

Tabulka 7: Chyba lineárního modelu.

Parametr	Chyba[%]
π_1	15.9478
π_2	16.7999
π_3	8.0929
π_4	44.7085
π_5	46.9216
π_6	19.2261
π_7	0.0000
π_8	0.0000

Tabulka 8: Chyba odhadu pro vektor parametrů Π_1^3

Parametr	Chyba[%]
π_1	$0.0757 \cdot 10^{-11}$
π_2	$0.1854 \cdot 10^{-11}$
π_3	$0.0887 \cdot 10^{-11}$
π_4	$0.0806 \cdot 10^{-11}$
π_5	$0.0370 \cdot 10^{-11}$
π_6	$0.0180 \cdot 10^{-11}$

Tabulka 9: Chyba odhadu pro vektor parametrů Π_3^3

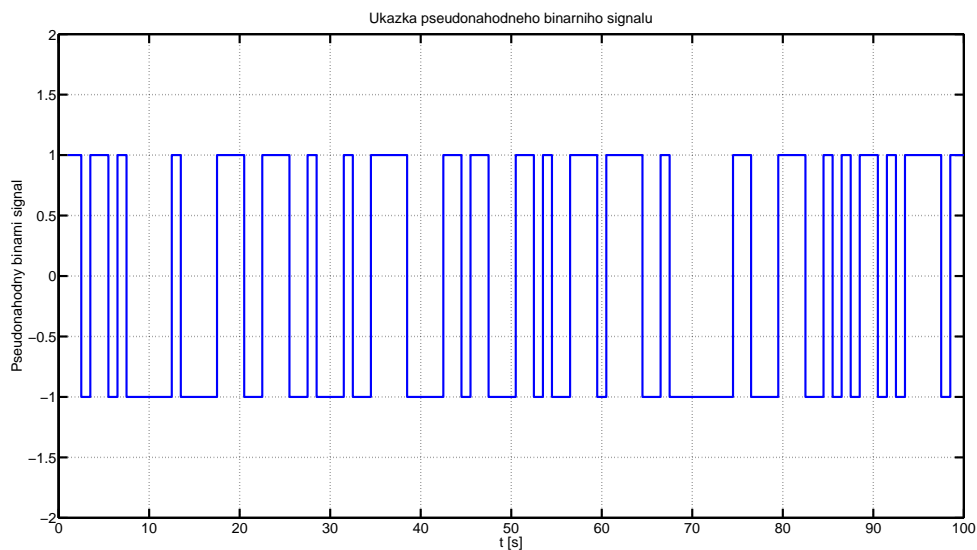
5.2 Volba vstupního signálu

Z předchozí části máme zvolen jediný vektor parametrů Π , se kterým budeme pracovat, a tím máme určen dynamický model v lineárním tvaru. Další krok pro provedení identifikace je volba vstupního signálu. V minulé části jsme pouze konstatovali použití součtu harmonických signálů. V této části se proto budeme zabývat hlouběji touto volbou. Testování možných vstupních signálů pak budeme provádět pomocí decentralizovaných regulátorů, jejichž návrhem se zabývá příslušná kapitola.

Nejprve je nutné určit jaké signály použijeme. Pro identifikaci je důležité, aby byla dostatečně vybudena dynamika manipulátoru. Zkusíme použít pseudonáhodný binární signál, reálnou trajektorii manipulátoru a součet harmonických funkcí.

5.2.1 Pseudonáhodný binární signál – PRBS

Jako první vstupní signál zkusíme použít pseudonáhodný binární signál. Tento signál nabývá pouze dvou hodnot a doba přechodu z jedné hodnoty do druhé je pseudonáhodná. Ukázka tohoto signálu je uvedena na Obr. 8.



Obrázek 8: Ukázka pseudonáhodného binárního signálu.

Nyní je třeba zvolit jako jaký vstup tento signál použijeme. Přivést ho přímo na pohony, aby měl význam požadovaných momentů, nelze. Uvažovaný manipulátor je totiž ve vertikální poloze a bez použití regulátoru by se vlivem gravitace „zhroutil“.

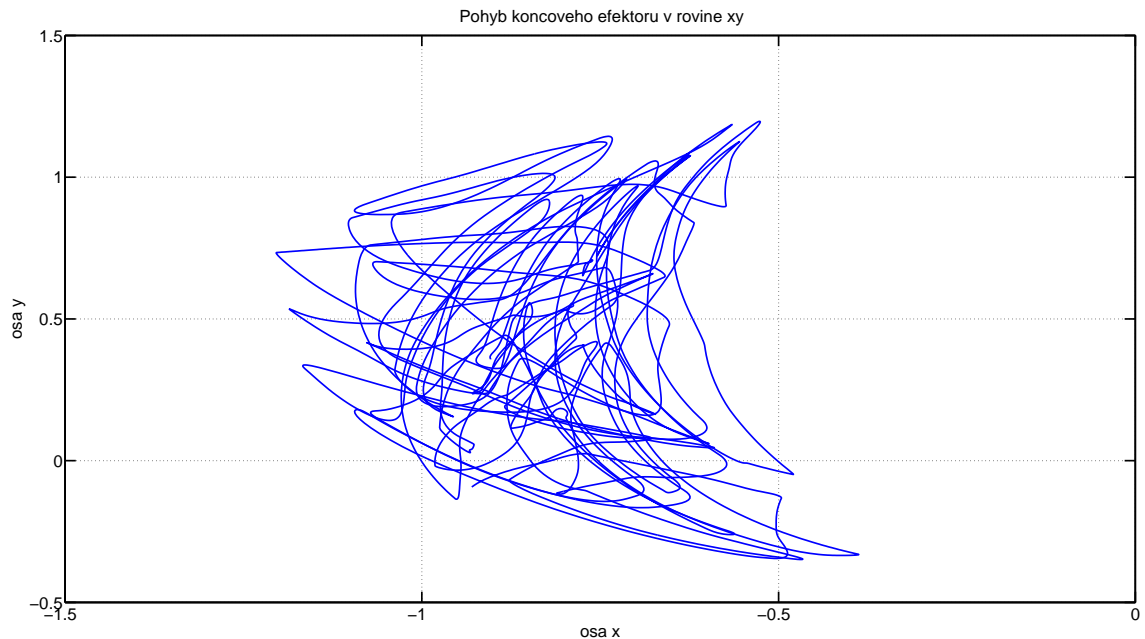
Další možnost by byla přivedení signálu na vstup regulátoru rychlosti. V tomto případě by ovšem nastal problém s omezením pohybu manipulátoru v jeho pracovním prostoru, což je při návrhu vstupního signálu také důležitá podmínka. Je totiž nutné udržet pohyb manipulátoru v určitých mezích, aby například nenarazil do nějaké překážky v pracovním prostoru nebo sám do sebe.

Nejvhodnější tedy bude použit vygenerovaný signál jako vstup polohového regulátoru. Omezení pohybu můžeme provést například tak, že vezmeme určité počáteční natočení jednotlivých ramen a pomocí dvou hodnot binárního signálu určíme „rozptyl“ v jakém se mohou ramena pohybovat. Budeme uvažovat, že základna manipulátoru je umístěna v počátku souřadnic a efektor se má pohybovat převážně ve 2. kvadrantu s možnými mírnými přesahy do 1. a 3. kvadrantu (což přibližně odpovídá prostoru, kde se má efektor reálně pohybovat). Použijeme toto počáteční natočení:

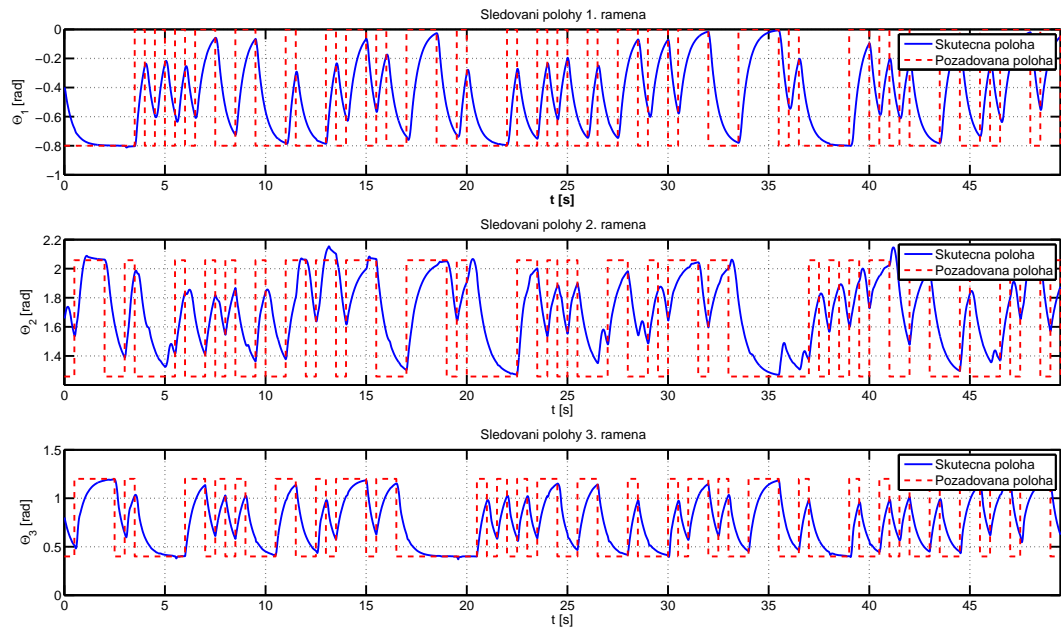
$$\Theta_{01} = -0.40 \text{ rad}, \quad \Theta_{02} = 1.66 \text{ rad}, \quad \Theta_{03} = 0.80 \text{ rad}$$

Jako rozptyl použijeme hodnotu 0.4 rad na každou stranu od počátečního natočení.

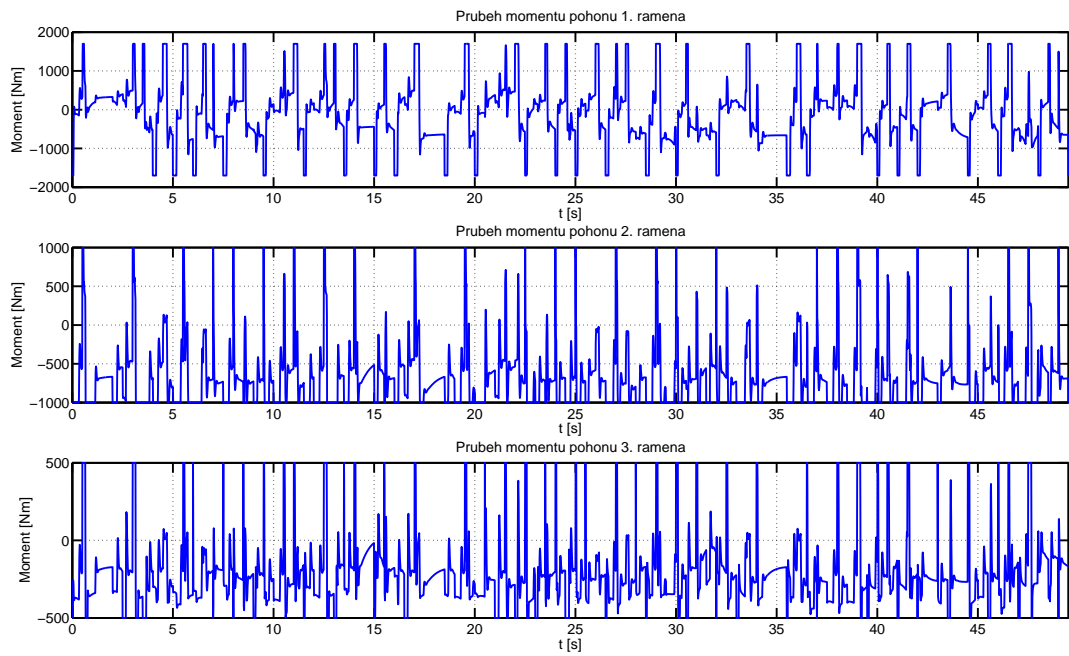
Ještě před samotným testováním vstupního signálu bude nutné provést korekci použitého regulátoru. Tu provedeme tak, že z vygenerovaných vstupních signálů určíme nové střední hodnoty momentů setrvačnosti zátěže a příslušně tomu upravíme parametry regulátorů (viz. kapitola o decentralizovaném řízení). Na Obr. 9 je uveden získaný průběh polohy koncového efektoru. z obrázku je patrné, že se efektor pohybuje ve vymezeném prostoru. Na Obr. 10 je uveden průběh sledování požadované trajektorie. Je vidět, že trajektorie není sledována příliš dobře (nestíhá se sledovat požadovaná poloha). To ale v tomto případě příliš nevádí, protože nám jde spíše o dostatečné vybuzení, než o přesné sledování trajektorie. Na Obr. 11 jsou uvedeny průběhy točivých momentů pohonů. Z nich je patrné, že se místy podobají pseudonáhodnému binárnímu signálu, což může být poměrně výhodné. Ideálně bychom totiž chtěli (pro co největší vybuzení) přivést binární signál rovnou na pohony. To ale není, jak již bylo řečeno, možné. Získané výsledky z identifikace jsou uvedeny v závěru této části v porovnání s ostatními vstupními signály.



Obrázek 9: Průběh polohy koncového efektoru.



Obrázek 10: Sledování požadované trajektorie polohy.



Obrázek 11: Průběhy točivých momentů jednotlivých pohonů.

5.2.2 Skutečná trajektorie manipulátoru

Jako další vstupní signál použijeme skutečnou trajektorii, kterou má manipulátor vykonávat. Pro tu je navržen regulátor v kapitole o decentralizovaném řízení, a proto zde není třeba řešit žádné úpravy použitých regulátorů. Pouze sestavíme matici regresorů a zkusíme provést identifikaci.

Nevýhoda tohoto vstupního signálu by mohla spočívat v tom, že tato trajektorie je relativně pomalá a nemuselo by tak dojít k dostatečnému vybuzení dynamiky. Dále zde nedochází k takovému pokrytí pracovní prostor jako u ostatních vstupních signálů.

5.2.3 Součet harmonických funkcí

Nakonec zkusíme použít vstupní signál, který je složen ze sumy harmonických funkcí. Možnost použití tohoto signálu se například uvádí v článku [3]. Uvažovaný vstupní signál má následující tvar:

$$\Theta_i = \sum^n \left(\frac{a_{i1}}{\omega_{fi}l_{i1}} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t) - \frac{b_{i1}}{\omega_{fi}l_{i1}} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t) \right) + \Theta_{0i}$$

$$\dot{\Theta}_i = \sum^n (a_{i1} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t) + b_{i1} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t))$$

$$\ddot{\Theta}_i = \sum^n (-a_{i1} \omega_{fi}l_{i1} \sin(\omega_{fi}l_{i1}t) + b_{i1} \omega_{fi}l_{i1} \cos(\omega_{fi}l_{i1}t))$$

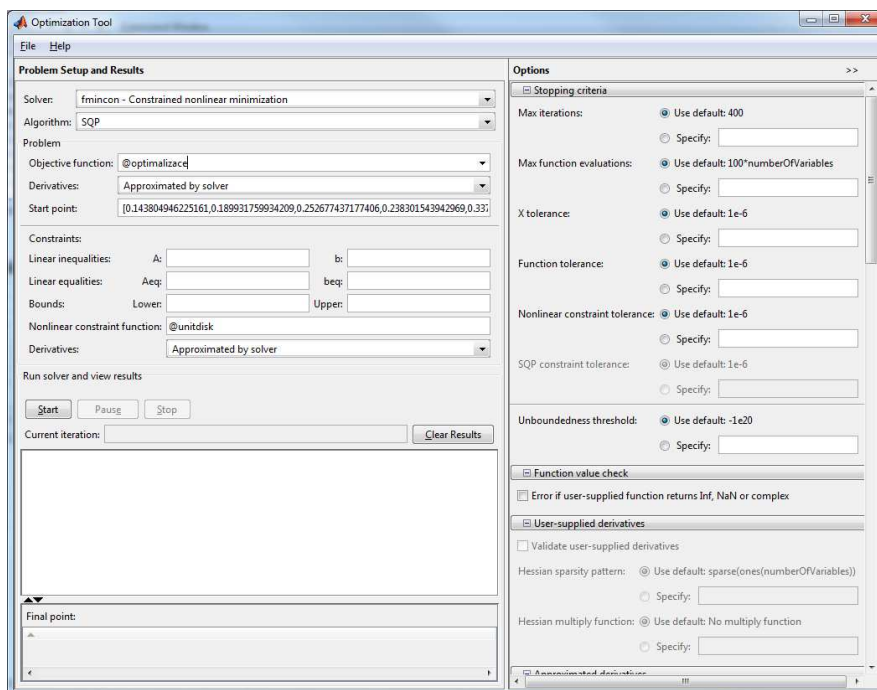
kde a_i a b_i jsou amplitudy jednotlivých členů, ω_{fi} jsou vlastní frekvence signálů, l_i jsou násobky vlastních frekvencí a n je počet členů v sumě. Nyní je třeba vyřešit otázku, jakým způsobem tyto parametry volit.

Vhodná volba parametrů by se mohla provést například pomocí optimalizace, kde bychom se pro co nejlepší numerickou stabilitu při výpočtu pseudoinverze mohli pokusit minimalizovat číslo podmíněnosti matice regresorů. Jelikož ale chceme určit poměrně mnoho parametrů, narazíme zde na problém s velkou výpočetní náročností a pro nevhodně zvolené počáteční podmínky nemusí optimalizace vůbec proběhnout. Volbu vhodných počátečních podmínek můžeme efektivně provést například použitím metody Monte Carlo, kdy budeme náhodně generovat jednotlivé parametry a následně kontrolovat, zda jsou dodrženy kladené podmínky (maximální poloha, rychlost, ...). Tímto způsobem vygenerujeme několik sad vhodných počátečních podmínek pro optimalizační algoritmus. Pro vstupní signál pak použijeme ty parametry, pro které najde optimalizační algoritmus nejmenší hodnotu čísla podmíněnosti matice regresorů. Je ovšem nutné podotknout, že jelikož se jedná o nelineární optimalizaci, tak nalezené parametry budou s největší pravděpodobností ležet pouze v lokálním minimu čísla podmíněnosti matice regresorů.

Algoritmus Monte Carlo se bude skládat z následujících kroků:

1. Vygenerování parametrů a_i , b_i , ω_{fi} , l_i , n .
2. Vygenerování Θ_i , $\dot{\Theta}_i$ a $\ddot{\Theta}_i$.

3. Kontrola, zda jsou průběhy Θ_i , $\dot{\Theta}_i$ a $\ddot{\Theta}_i$ v požadovaných mezích.
4. Sestavení matice regresorů.
5. Určení čísla podmíněnosti matice regresorů.



Obrázek 12: Optimalizační toolbox.

Následnou optimalizaci provedeme v Matlabu pomocí optimalizačního toolboxu (příkaz `optimtool`). Vzhled použitého toolboxu je uveden na Obr. 12. K řešení použijeme řešitel *fmincon* (nelineární minimalizace s omezením) a algoritmus *SQP* (Sequential quadratic programming – Sekvenční kvadratické programování), což je iterativní metoda pro řešení nelineární optimalizace.

Dále je třeba vytvořit dvě funkce:

Objective function Tato funkce má jako vstup hledané parametry a jako výstup číslo podmíněnosti matice regresorů. Je v podstatě totožná jako funkce pro výpočet metodou Monte Carlo. Ze vstupních parametrů se určí průběhy Θ_i , $\dot{\Theta}_i$ a $\ddot{\Theta}_i$. Z nich se sestaví matice regresorů a nakonec se určí číslo podmíněnosti této matice, které se má minimalizovat.

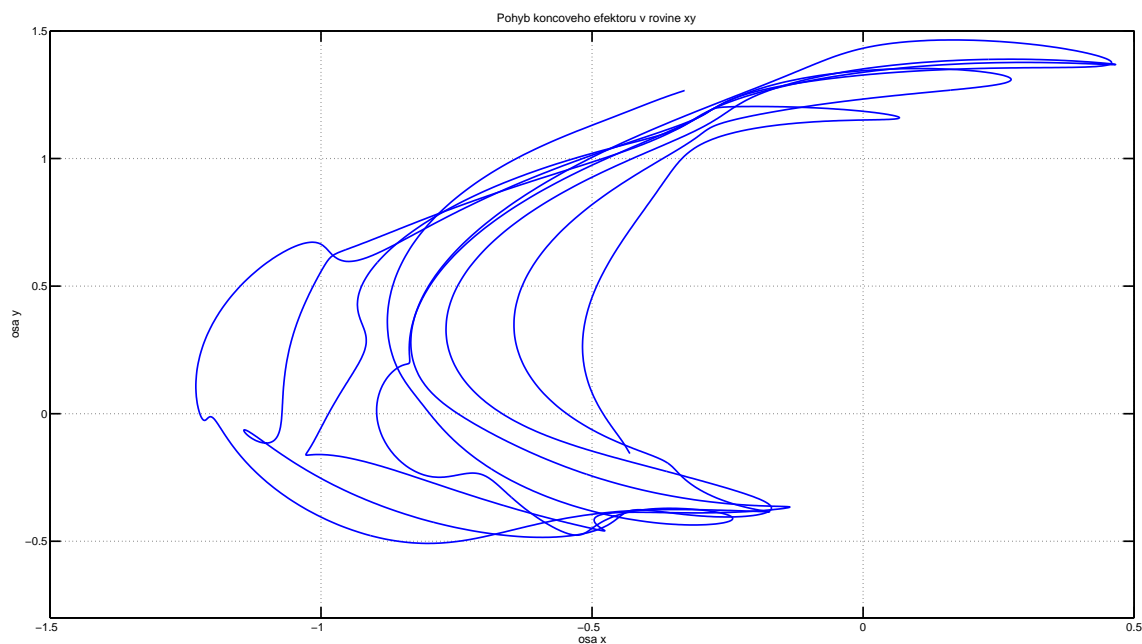
Nonlinear constraint function Tato funkce obsahuje vazební podmínky, resp. omezení kladená na hledané parametry. My budeme klást požadavky na omezení polohy, rychlosti a zrychlení vygenerovaných průběhů.

Tímto způsobem tedy zvolíme optimální vstupní signál. Nalezené parametry jsou uvedeny v Tab. 10

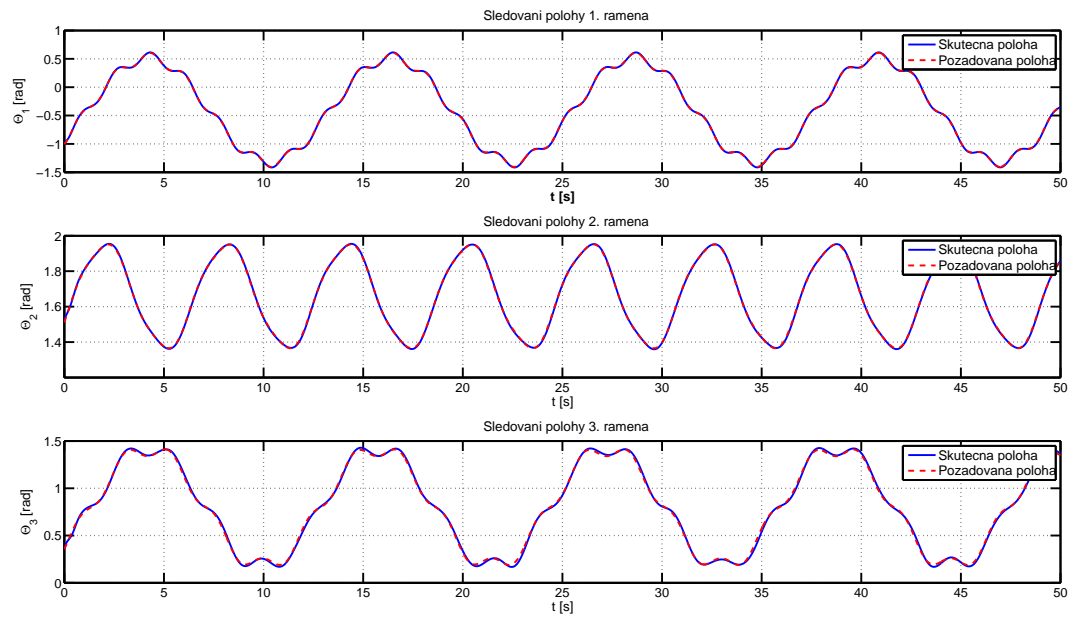
	a_1	b_1	a_2	b_2	ω_f	l_1	l_2	Θ_0
1. rameno	0.3907	0.2690	0.0413	0.3102	0.5155	1	7	-0.40
2. rameno	0.2604	0.1484	0.0625	0.0106	1.0322	1	3	1.66
3. rameno	0.2530	0.2244	0.1964	0.0933	0.5457	1	5	0.80

Tabulka 10: Optimální parametry z hlediska minimálního čísla podmíněnosti matice regresorů.

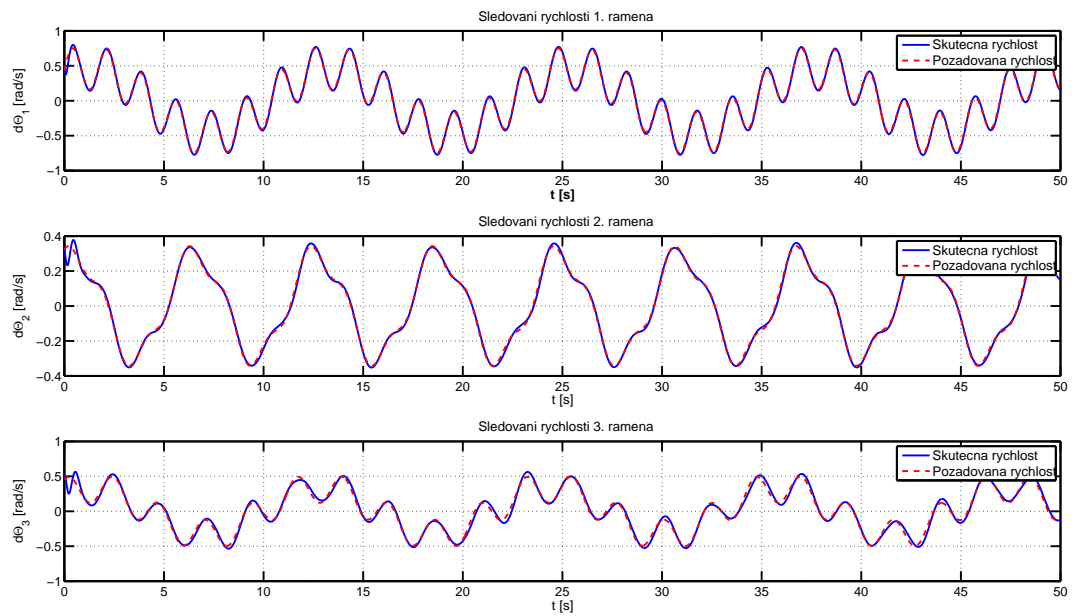
Nyní již máme k dispozici požadované průběhy, které jsou optimální z hlediska minima čísla podmíněnosti matice regresorů. K dosažení těchto průběhů opět použijeme decentralizovanou PID regulaci s tím, že opět bude třeba přepočítat střední moment setrvačnosti tak, aby odpovídal použitým průběhům polohy (viz. příslušná kapitola). Na Obr. 13 je uveden pohyb koncového efektoru. Ten se opět pohybuje v uvažovaných mezích specifikovaných jako u pseudonáhodného signálu. Na Obr. 14, 15 a 16 je uvedeno porovnání požadovaných a skutečných průběhů polohy, rychlosti a zrychlení. Je vidět, že poloha a rychlost je sledována poměrně přesně. Vetší odchylka je ovšem u sledování požadovaného zrychlení, kde již není dokonale kompenzováno vzájemné silové působení mezi rameny. Na Obr. 17 jsou na závěr uvedeny průběhy točivý momentů jednotlivých pohonů.



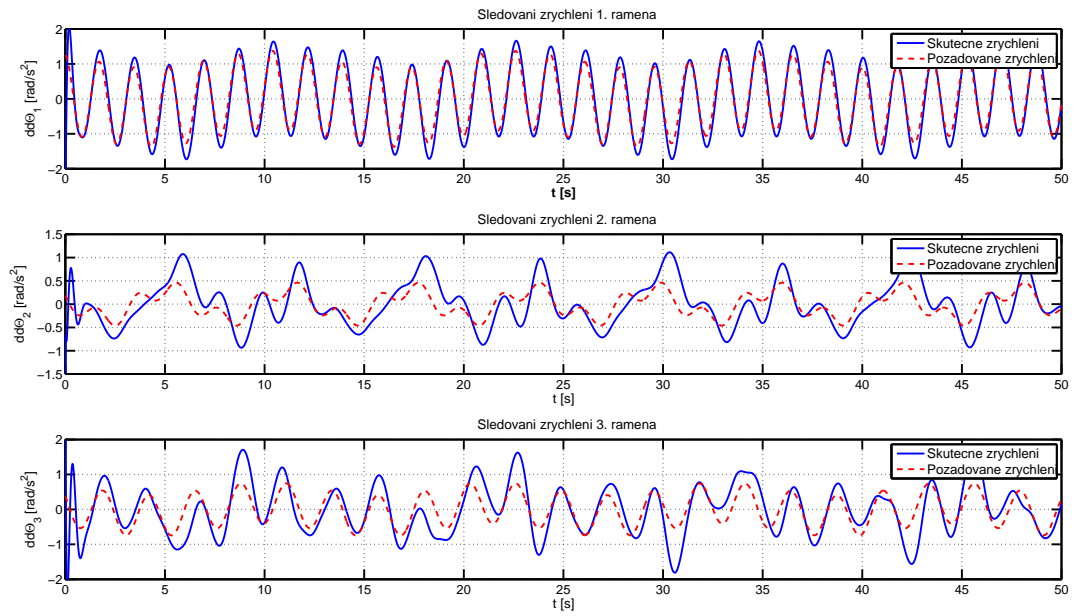
Obrázek 13: Průběh polohy koncového efektoru.



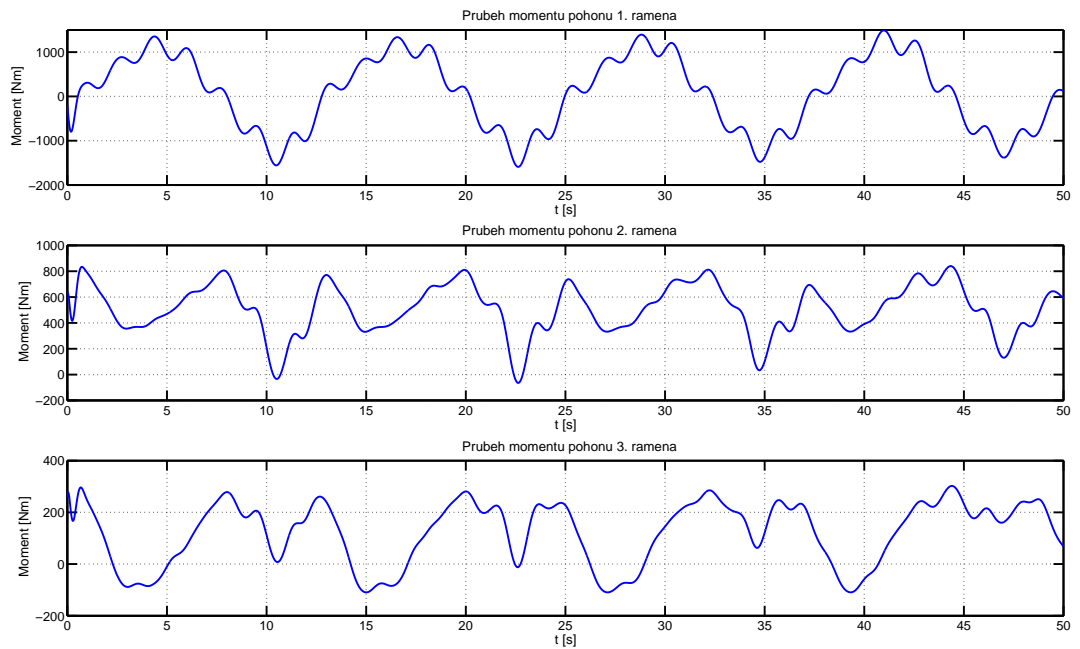
Obrázek 14: Sledování požadované trajektorie polohy.



Obrázek 15: Sledování požadované trajektorie rychlosti.



Obrázek 16: Sledování požadované trajektorie zrychlení.



Obrázek 17: Průběhy točivých momentů jednotlivých pohonů.

5.2.4 Porovnání dosažených výsledků

V Tab. 11 jsou uvedeny dosažené výsledky identifikace při použití uvažovaných signálů. Nejprve jsou uvedeny procentuální chyby odhadů. Je vidět, že pro všechny vstupní signály vycházejí odhady v podstatě totožné. Mírný rozdíl je pouze u čísel podmíněnosti matic regresorů, kde vychází nejlépe suma harmonických funkcí. To je očekávaný výsledek, protože zde jsme cíleně hledali parametry tak, aby bylo číslo podmíněnosti minimální.

Jelikož vycházejí odhady takřka totožné a čísla podmíněnosti se liší pouze mírně (a ne řádově), nelze jednoduše rozhodnout podle tohoto čísla o tom, jaký vstup bude nejlepší použít. V další části proto budeme stále ještě se všemi uvažovanými vstupními signály. Pouze zde ještě zkusíme porovnat jednotlivé signály mezi sebou z praktického hlediska:

- Pokud bychom jako vstupní signál zvolili reálnou trajektorii, kterou má manipulátor vykonávat, mohl by být problém s tím, že příliš nevyužívá celý dostupný pracovní prostor. Dále je tato trajektorie pomalá a nemusí tak dojít k dostatečnému vybuzení dynamiky. Proto by bylo zřejmě vhodnější použití pseudonáhodného signálu nebo součtu harmonických funkcí.
- Výhoda sumy harmonických funkcí oproti pseudonáhodnému signálu by mohla spočívat v tom, že požadované točivé momenty pro pohony jsou plynulejší (neobsahují rázy), a proto by mohl být tento vstup citlivější k použitým motorům. S tím souvisí i to, že při použití sumy harmonických funkcí nebude docházet k tak velkému vybuzení nemodelované dynamiky.

Parametr	Chyba identifikace [%]		
	PRBS	Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
π_1	$0.2314 \cdot 10^{-12}$	$0.0610 \cdot 10^{-11}$	$0.1094 \cdot 10^{-11}$
π_2	$0.0337 \cdot 10^{-12}$	$0.2865 \cdot 10^{-11}$	$0.1331 \cdot 10^{-11}$
π_3	$0.7693 \cdot 10^{-12}$	$0.0456 \cdot 10^{-11}$	$0.0222 \cdot 10^{-11}$
π_4	$0.4433 \cdot 10^{-12}$	$0.0322 \cdot 10^{-11}$	$0.0685 \cdot 10^{-11}$
π_5	$0.2034 \cdot 10^{-12}$	$0.6675 \cdot 10^{-11}$	$0.0481 \cdot 10^{-11}$
π_6	$0.8858 \cdot 10^{-12}$	$0.0984 \cdot 10^{-11}$	$0.0443 \cdot 10^{-11}$
číslo podmíněnosti	85.6927	48.6236	26.0923

Tabulka 11: Dosažené výsledky.

6 Volba metody pro určení rychlosti a zrychlení

V této části již máme určený dynamický model manipulátoru, který byl přepsán do lineární formy. Dále jsme provedli analýzu možných vstupních signálů. Pro praktickou realizovatelnost je třeba ještě vyřešit další zásadní problém. Sestavení matice regresorů Y totiž vyžaduje nejen znalost polohy, ale i rychlosti a zrychlení, což může být v praxi problém. Reálně se totiž běžně provádí pouze měření polohy pomocí IRC čidla. Rychlost a zrychlení se potom mohou určit pomocí derivačních filtrů.

Nastavení filtrů ovšem může být problematické, protože IRC čidlo má daný počet pulzů na jednu otáčku a má tedy pouze určitý počet kvantizačních hladin. To znamená, že výstup z něj má schodovitý průběh a ten právě způsobuje problémy při derivování, protože vytváří kvantizační šum. Proto se budeme v následující části zabývat návrhem těchto filtrů.

6.1 Návrh derivačních filtrů

Pro získání měřené polohy ve stejné formě jako z IRC čidla použijeme v Simulinku blok *Quantizer*. V něm je nutné nastavit velikost kvantizačního kroku. Ten lze zjistit z parametrů čidla. Na něm se uvádí počet pulzů na otáčku – n , z čehož můžeme určit velikost kvantizačního kroku jako:

$$\text{velikost kroku}[\text{rad}] = \frac{2\pi}{n}$$

Ideální derivace 1. řádu má přenos:

$$F_d(s) = s$$

Takováto derivace ovšem není fyzikálně realizovatelná, a proto je nutné ji doplnit o filtr typu dolní propust:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_f} \cdot s + 1}$$

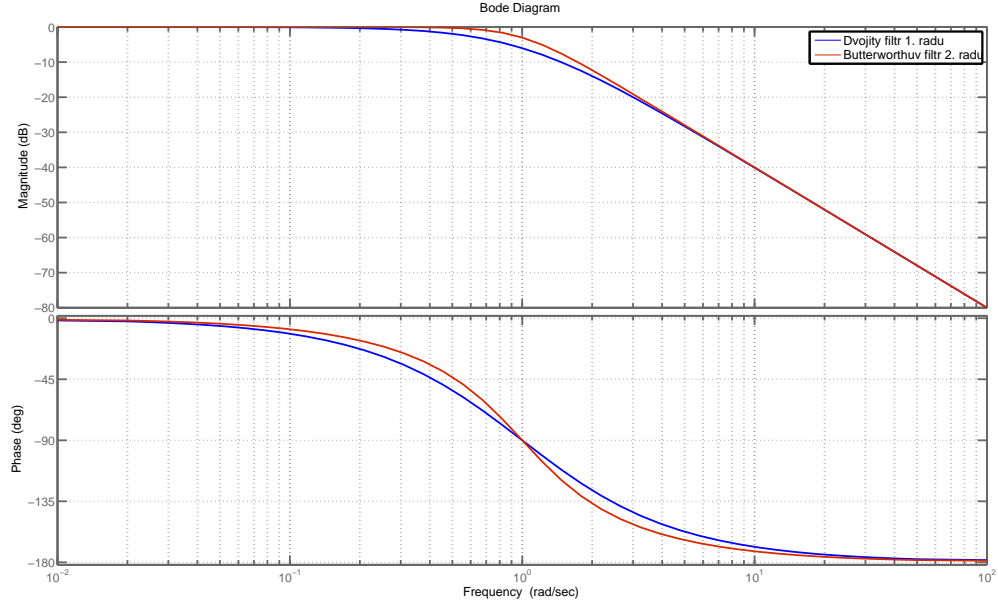
kde ω_f je frekvence zlomu. Přenos rychlostního filtru je potom dán součinem obou výše uvedených přenosů:

$$F_{\text{rychlost}}(s) = \frac{s}{\frac{1}{\omega_f} \cdot s + 1}$$

Pro určení zrychlení bude třeba použít derivační filtr druhého řádu. Mohli bychom použít dvakrát filtr prvního řádu. Vhodnější ovšem bude použití Butterworthova filtru druhého řádu, který má nejplošší charakteristiku v propustné oblasti. Na Obr. 18 je uvedeno porovnání frekvenčních charakteristik Butterworthova filtru a složeného filtru prvního řádu. U amplitudové charakteristiky je vidět, že strmost poklesu na okraji propustného frekvenčního pásma je větší u Butterworthova filtru. Pro fázovou charakteristiku platí, že pro nižší frekvence drží Butterworthův filtr déle menší fázové zpoždění. Filtr má

následující přenos:

$$F_{zrychleni}(s) = \frac{s^2}{\frac{1}{\omega_f^2} \cdot s^2 + \frac{1.4142}{\omega_f} \cdot s + 1}$$



Obrázek 18: Porovnání filtrů 2. řádů.

6.1.1 Diskretizace filtrů

Filtry jsou zatím uvažovány spojité. Měření ovšem provádíme diskrétně v čase. Proto je nutné uvedené přenosy ještě zdiskretizovat. To provedeme pomocí lichoběžníkové metody, kdy použijeme substituci:

$$s = \frac{2}{T_{vzork}} \frac{z - 1}{z + 1}$$

Po dosazení a úpravě vyjdou přenosy filtrů:

$$F_{rychlost}(z) = \frac{2\omega_f \cdot z - 2\omega_f}{(2 + T_{vzork}\omega_f) \cdot z + (T_{vzork}\omega_f - 2)}$$

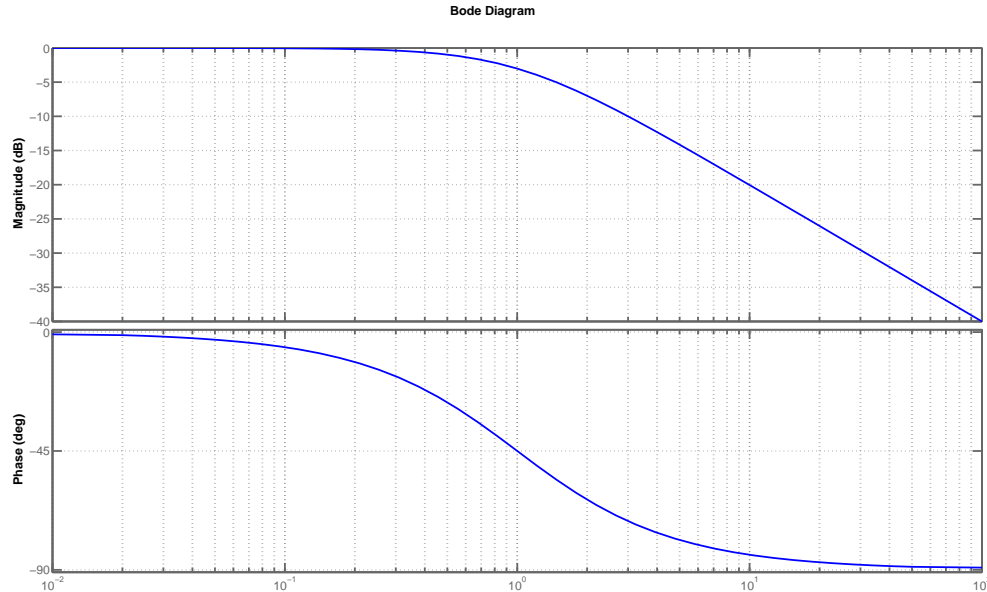
$$F_{zrychleni}(z) = \frac{4\omega_f^2 \cdot z^2 - 8\omega_f^2 \cdot z + 4\omega_f^2}{(4 + 2 \cdot 1.4142 T_{vzork}\omega_f + \omega_f^2 T_{vzork}^2) \cdot z^2 + (-8 + 2\omega_f^2 T_{vzork}^2) \cdot z + (-2 \cdot 1.4142 T_{vzork}\omega_f + 4 + \omega_f^2 T_{vzork}^2)}$$

Periodu vzorkování budeme uvažovat $T_{vzork} = 0.01 \text{ s}$

6.1.2 Volba frekvence zlomu ω_f

Nyní je třeba vyřešit, jakým způsobem volit frekvenci zlomu ω_f . Je třeba, aby měl filtr co nejmenší fázové zpoždění a co nejlépe tlumil kvantizační šum. Na Obr. 19 jsou uvedeny Bodeho charakteristiky derivačního filtru 1. řádu. Z nich lze vyčíst následující požadavky na volby zlomové frekvence ω_f :

- Abychom měli co nejmenší fázový posun, bylo by vhodné volit frekvenci ω_f co největší.
- Pro utlumení kvantizačního šumu je ovšem vhodnější volit frekvenci ω_f co nejmenší, ale takovou, aby nedošlo k utlumení užitečného signálu.



Obrázek 19: Bodeho charakteristiky kompenzačního článku.

Požadavky na volbu frekvence filtru jdou tedy „proti sobě“ a hodnotu je nutné volit jako kompromis mezi oběma požadavky. Na Obr. 20 je ilustrováno, jak vypadá filtrovaná derivace pro „malou“ a pro „velkou“ volbu frekvence ω_f . Pokud je frekvence zvolena malá, má derivace velké fázové zpoždění a navíc je i tlumena. Naopak pro velkou volbu hodnoty frekvence má derivace minimální fázové zpoždění, ale je přítomen kvantizační šum.

Volbu frekvence bychom opět mohli optimalizovat a to tak, aby výsledné derivace byly co nejvhodnější pro identifikaci. To by bylo možné určit např. tak, že bychom po získání rychlosti a zrychlení provedli identifikaci a odhadnuté parametry porovnali se skutečnými parametry a snažili se minimalizovat např. maximální nebo průměrnou chybu. Tento způsob by byl ovšem možný pouze teoreticky, protože skutečné parametry v praxi neznáme. Proto bude vhodnější využít inverzní dynamiky a následujícího algoritmu:

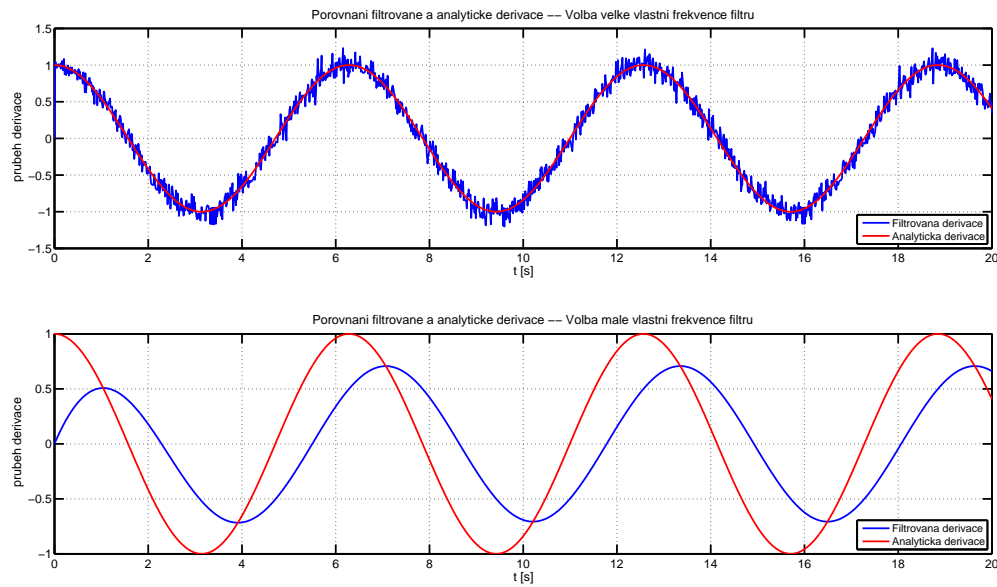
1. Zvolíme počáteční nastavení frekvencí ω_f .
2. Provedeme derivace průběhu polohy \Rightarrow získáme rychlost a zrychlení.
3. Sestavíme matici regresorů a provedeme identifikaci.
4. Pomocí inverzní dynamiky vygenerujeme momenty motorů:

$$\tau = Y \cdot \hat{\Pi}$$

5. Spočítáme sumu kvadratické chyby mezi změřenými momenty motorů a momenty získanými z inverzní dynamiky a provedeme minimalizaci této sumy.

		Druh vstupního signálu		
		PRBS	Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
Rychlost	ω_1 [rad/s]	726.80	284.72	91.41
	ω_2 [rad/s]	354.30	133.88	38.81
	ω_3 [rad/s]	600.00	143.20	77.97
Zrychlení	ω_1 [rad/s]	75.76	23.56	24.15
	ω_2 [rad/s]	84.23	20.99	18.21
	ω_3 [rad/s]	83.34	16.05	21.47

Tabulka 12: Nastavené zlomové frekvence filtrů.



Obrázek 20: Volba vlastní frekvence filtru.

Zvolené optimální parametry jsou uvedeny v Tab. 12.

6.1.3 Dosažené výsledky

Přesnost odhadů zkontrolujeme určením chyby inverzní dynamiky. To provedeme tak, že na vstup identifikované inverzní dynamiky přivedeme průběhy polohy, rychlosti a zrychlení manipulátoru. Tím získáme identifikované průběhy točivých momentů motorů, které porovnáme se skutečnými naměřenými průběhy. Určíme maximální chybu a průměrnou kvadratickou chybu (RMS). V Tab. 13 jsou uvedeny chyby pro použité vstupní signály.

Nyní se ještě podíváme na to, co se stane, pokud do matice regresorů dosadíme za zrychlení požadované průběhy namísto výstupu derivačního filtru. Budeme tedy předpokládat, že regulátor udržuje skutečné průběhy blízko těm požadovaným, a proto lze místo filtrovaného zrychlení rovnou použít požadovanou trajektorii. V Tab. 14 jsou uvedeny získané chyby. V tomto případě již neuvažujeme pseudonáhodný binární signál, protože pro něj nemáme požadované průběhy zrychlení.

V Tab. 15 a Tab. 16 jsou uvedeny procentuální chyby v určení odhadů jednotlivých parametrů. Tyto chyby jsou ukázány pouze pro ilustraci, protože prakticky skutečné parametry neznáme, a proto je nelze určit. Je ovšem vidět, že velikost procentuálních chyb koresponduje s chybami inverzní dynamiky, které již je možné v praxi určit.

Při použití derivačního filtru pro získání zrychlení dopadl nejlépe vstupní signál typu součet harmonických funkcí. Mírně horších výsledků dosáhlo použití reálné trajektorie. Nejhuře dopadl pseudonáhodný binární signál.

Při použití požadované trajektorie zrychlení místo výstupu derivačního filtru ovšem nejlépe vyšlo použití reálné trajektorie, jejíž výsledky se razantně zlepšily. Naopak součet harmonických signálů dosáhl horších výsledků. To je dáno tím, že pro reálnou trajektorii má pomalejší požadované průběhy a je tak lépe sledováno požadované zrychlení.

		Druh vstupního signálu		
		PRBS	Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
RMS [Nm]	1. rameno	50.3054	5.3268	3.9753
	2. rameno	23.9446	4.5117	2.0892
	3. rameno	15.7741	2.9732	2.2802
Max. chyba [Nm]	1. rameno	82.5101	10.8499	8.6800
	2. rameno	49.7280	9.6467	5.0680
	3. rameno	10.5137	7.0788	5.4173

Tabulka 13: Získaná chyba inverzní dynamiky.

		Druh vstupního signálu	
		Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
RMS [Nm]	1. rameno	0.2219	17.8319
	2. rameno	0.1443	6.4009
	3. rameno	0.1418	3.0149
Max. chyba [Nm]	1. rameno	0.4486	28.4402
	2. rameno	0.2170	12.8514
	3. rameno	0.3204	8.6479

Tabulka 14: Získaná chyba inverzní dynamiky.

parametr	Chyba identifikace [%]		
	PRBS	Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
π_1	13.0506	3.9605	2.7133
π_2	18.4520	10.3772	3.7946
π_3	9.1245	0.1563	0.0573
π_4	7.4066	0.1841	0.1322
π_5	18.8618	12.8778	9.7070
π_6	4.7814	0.2685	0.1703

Tabulka 15: Chyba odhadů jednotlivých parametrů.

parametr	Chyba identifikace [%]	
	Reálná trajektorie	Suma harm. funkcí
π_1	0.1600	14.1972
π_2	0.0910	15.8410
π_3	0.0278	0.9955
π_4	0.0301	0.4947
π_5	0.5418	11.7691
π_6	0.0103	0.0794

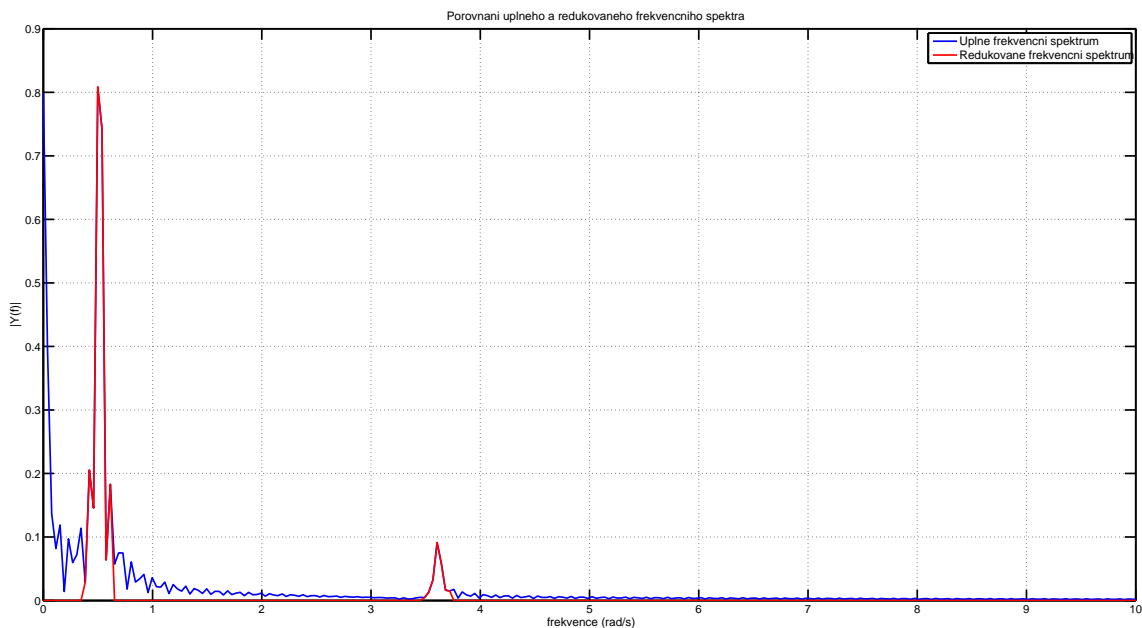
Tabulka 16: Chyba odhadů jednotlivých parametrů.

6.2 Výpočet derivace ve frekvenčním spektru

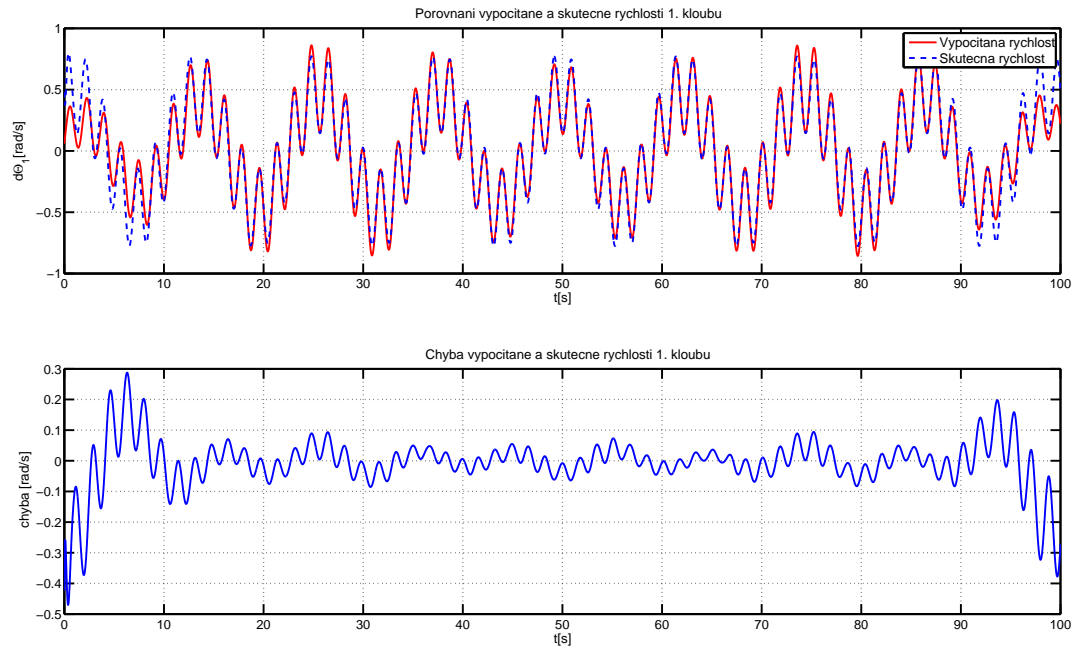
Dále vyzkoušíme alternativní metodu pro určení derivací polohy. Tuto metodu použijeme pouze pro vstup ve formě sumy harmonických funkcí. Její princip spočívá v tom, že naměřený průběh polohy nejprve převedeme pomocí Fourierovy transformace do frekvenční oblasti. Zde využijeme toho, že víme jaké frekvence má tento signál obsahovat (z volby vstupního signálu). Kolem těchto frekvencí zvolíme okénko tak, že budeme dále pracovat pouze s malým okolím těchto frekvencí a ostatní frekvence vynulujeme (viz. Obr. 21). Takto upravený signál potom ve frekvenčním spektru zderivujeme a převedeme opět do časové oblasti a tím získáme průběhy rychlosti a zrychlení.

Nevýhoda derivování tímto způsobem je ilustrována na Obr. 22, kde je porovnána získaná rychlost s rychlostí skutečnou. Problém spočívá v tom, že ořez obdélníkovým okénkem ve frekvenční oblasti způsobí v časové oblasti „rozjetí“ signálu na začátku a na konci časového intervalu. Tento problém by bylo možno vyřešit použitím jiného než obdélníkového okénka pro ořez frekvence a nebo například tak, že bychom k identifikaci použili pouze hodnoty z prostřední části. My budeme uvažovat způsob s použitím hodnot z prostřední části časového intervalu.

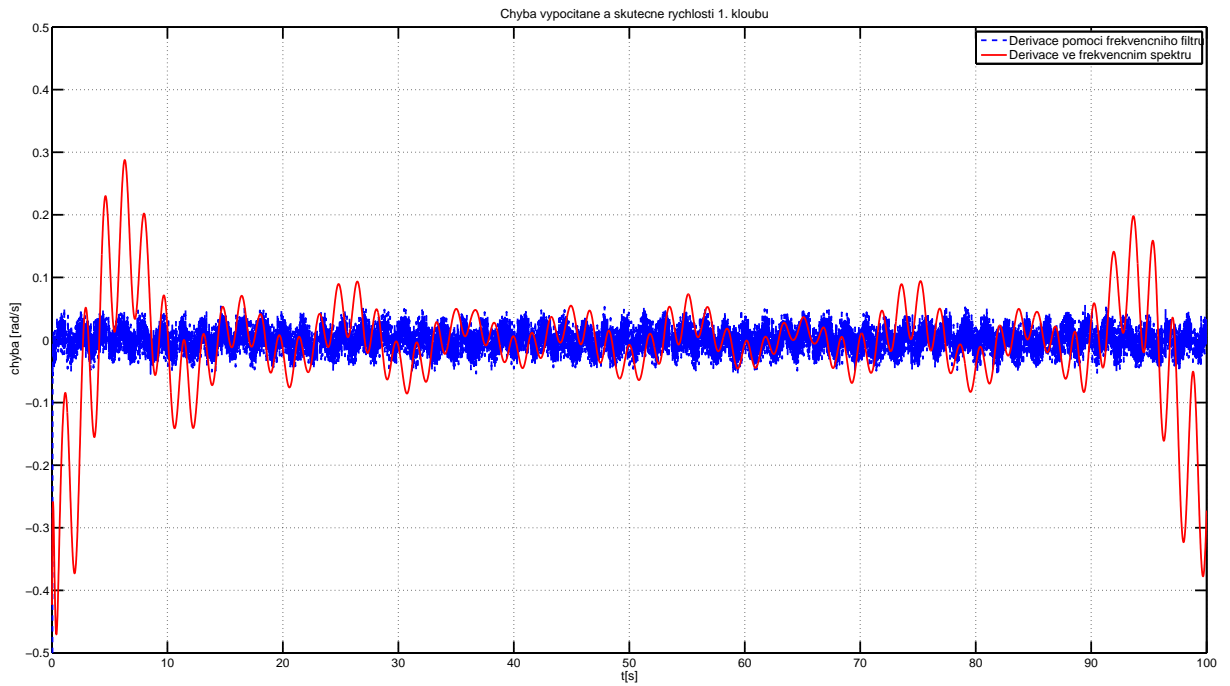
Na Obr. 23 je uvedeno porovnání chyby rychlosti 1. ramena získané pomocí derivačního filtru a metodou derivování ve frekvenčním spektru. Je vidět, že chyba se pohybuje přibližně ve stejných mezích. Vůči chybě získané derivačním filtrem ovšem průběh není tak zašuměný. Na Obr. 24 je pak uvedena chyba pro zrychlení. V tomto případě již dosáhneme touto metodou výrazného zlepšení oproti použití derivačního filtru druhého řádu.



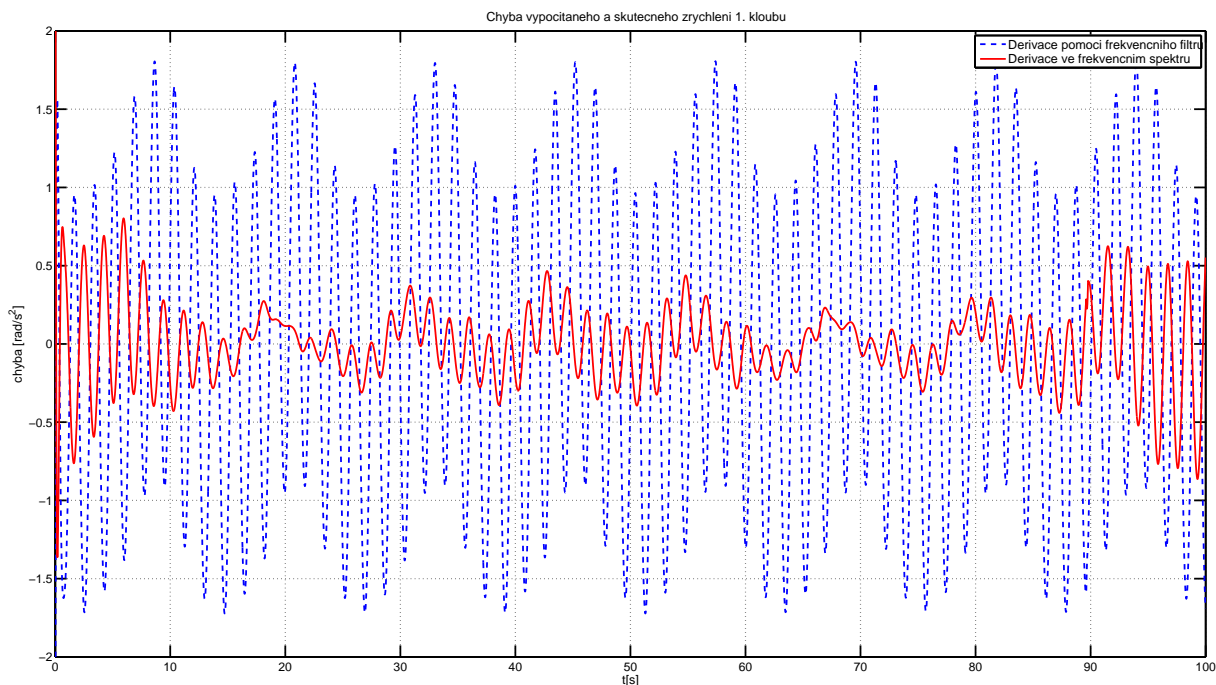
Obrázek 21: Ořez frekvenčního spektra.



Obrázek 22: Chyba získané rychlosti.



Obrázek 23: Porovnání chyby získaných rychlostí.



Obrázek 24: Porovnání chyby získaných zrychlení.

V Tab. 17 je uvedeno porovnání chyby inverzní dynamiky mezi touto metodou a metodou určení derivací pomocí filtrů. Pro 1. a 3. rameno bylo dosaženo výsledků lepších řádově o desítky procent. Pro 2. rameno nebyly výsledky o tolik lepší. Průměrná chyba vyšla skoro totožná, ale i tak byla maximální chyba lepší téměř o deset procent.

		Způsob derivace		Zlepšení [%]
		Frekvenční filtry	Ve frek. spektru	
RMS [Nm]	1. rameno	3.9753	3.0803	22.5140
	2. rameno	2.0892	2.0862	0.1436
	3. rameno	2.2802	1.4845	34.8961
Max. chyba [Nm]	1. rameno	8.6800	7.0874	18.3479
	2. rameno	5.0680	4.5633	9.9585
	3. rameno	5.4173	3.4896	35.5841

Tabulka 17: Získaná chyba inverzní dynamiky.

6.3 Výpočet derivace pomocí Fourierovy řady

Další metoda pro výpočet derivace, kterou použijeme, vychází z určování koeficientů Fourierovy řady. Ze změřeného průběhu polohy identifikujeme prvních k -členů Fourierova rozvoje:

$$\Theta(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

Jednotlivé koeficienty Fourierovy řady určíme dle:

$$a_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \Theta(t) \cos(k\omega t)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \Theta(t) \sin(k\omega t)$$

Stejnosečná složka se určí jako:

$$a_0 = \frac{2}{T} \sum_{t=1}^T \Theta(t)$$

Tento způsob je ovšem možné použít pouze pro periodické signály. Proto tuto metodu použijeme pouze pro vstupní signál ve tvaru součtu harmonických funkcí, kde je periodičita již z principu volby tohoto vstupu zajištěna. Po určení koeficientů Fourierova rozvoje (a_k a b_k) lze již pak získat hledané derivace velmi snadno jako:

$$\dot{\Theta}(t) = \sum_{k=1}^{k_{max}} [-a_k k\omega \sin(k\omega t) + b_k k\omega \cos(k\omega t)]$$
$$\ddot{\Theta}(t) = \sum_{k=1}^{k_{max}} [-a_k (k\omega)^2 \cos(k\omega t) - b_k (k\omega)^2 \sin(k\omega t)]$$

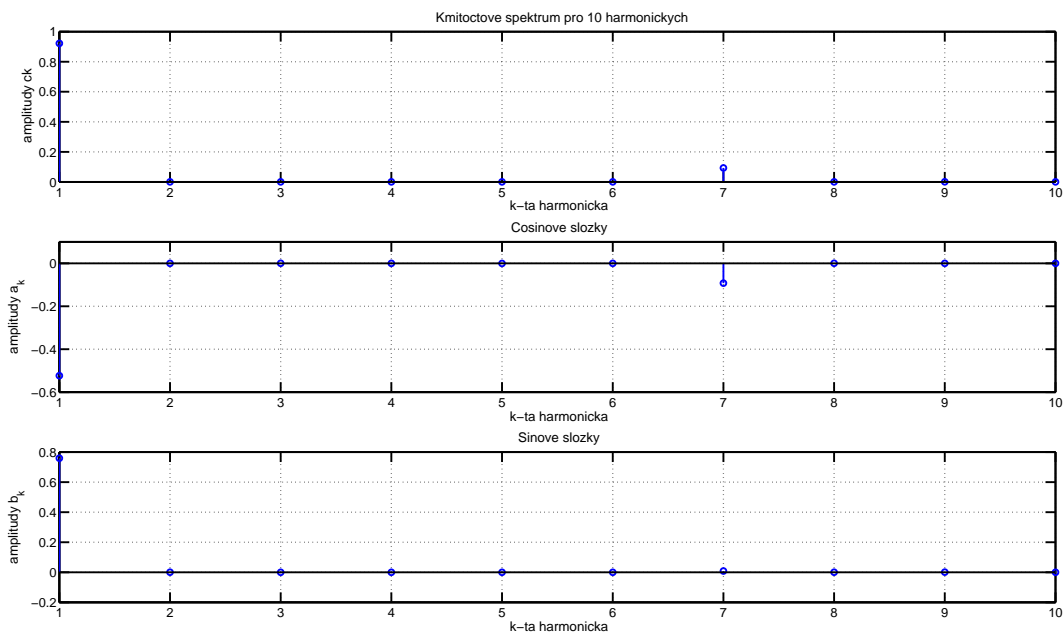
Počet členů Fourierova rozvoje je třeba volit rozumně. Čím víc členů budeme uvažovat, tím přesnější aproximaci dostaneme. Pokud ovšem zvolíme členů příliš mnoho, dostane se nám do signálu kvantizační šum, kterému se snažíme vyhnout. Na Obr. 25 je ukázáno získané frekvenční spektrum pro prvních deset harmonických průběhu polohy prvního ramena. Z obrázku je patrné, že je zde dominantní první a sedmá harmonická, což odpovídá volbě požadovaného vstupního signálu.

Na Obr. 26 je zobrazeno porovnání změřeného průběhu polohy a zpětně rekonstruovaného průběhu polohy. Je vidět, že poloha je určena poměrně přesně.

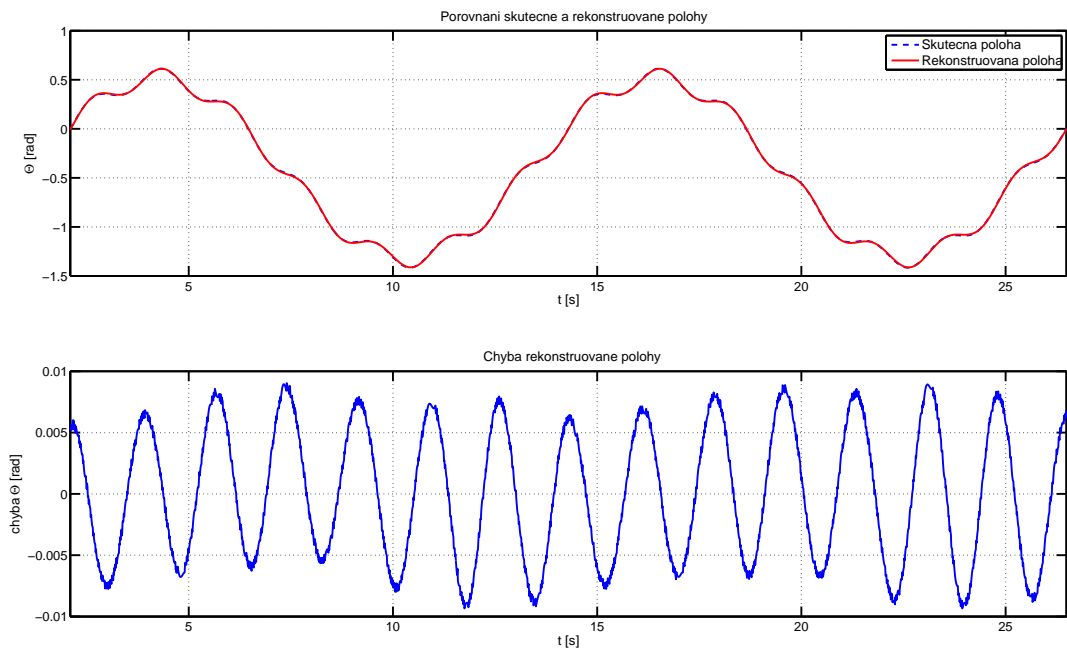
Na Obr. 27 je uvedeno porovnání skutečného a získaného průběhu rychlosti pro jednu periodu, kde lze zaznamenat mírné fázové zpoždění. Na dalším grafu je chyba získané rychlosti, která je opět poměrně malá. Poslední graf na Obr. 27 porovnává chyby rychlosti získané touto metodou a derivačním filtrem. Chyba získaná derivačním filtrem je daleko

více zarušená, ale jinak má obdobný průběh.

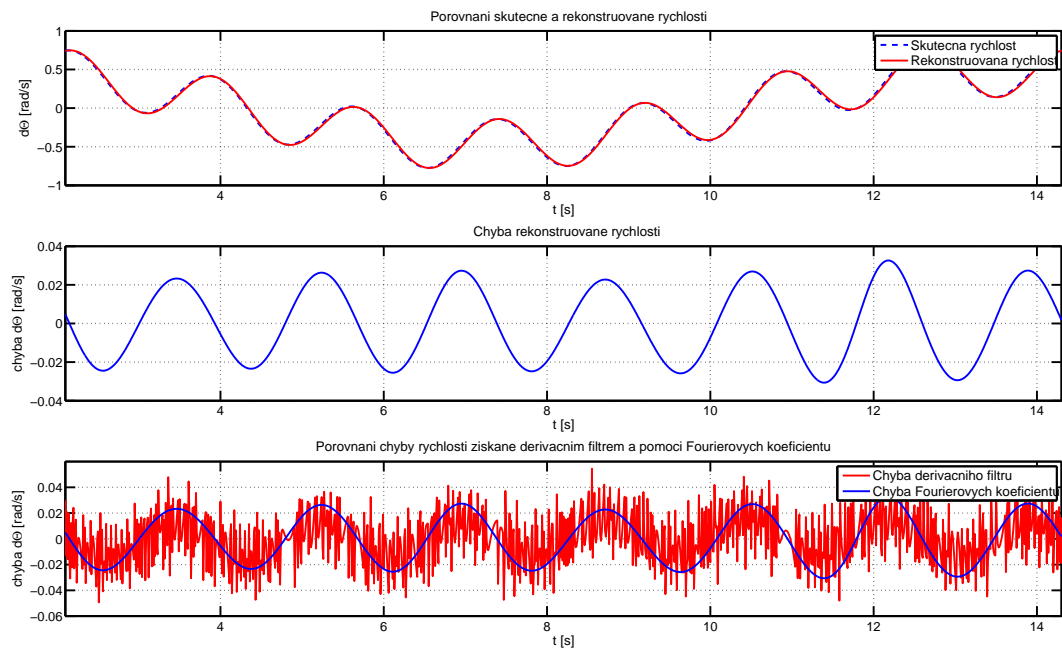
Na Obr. 28 je uvedeno porovnání skutečného a získaného průběhu zrychlení pro jednu periodu. Chyba v tomto případě již dosahuje větších hodnot. Poslední graf opět ukazuje porovnání chyby zrychlení získané touto metodou a pomocí derivačního filtru. Průběh chyby zrychlení je vůči derivačnímu filtru v podstatě bez šumu, ale je zde viditelné určité fázové zpoždění a to i přes to, že filtr sám o sobě již fázové zpoždění obsahuje. Tento výsledek by mohl být dán tím, že po průchodu požadovaného signálu manipulátorem, tedy nelineárním systémem, se na výstupu mohou objevit vyšší harmonické nebo neceločíselné násobky základní frekvence, které nejsme touto metodou schopni identifikovat.



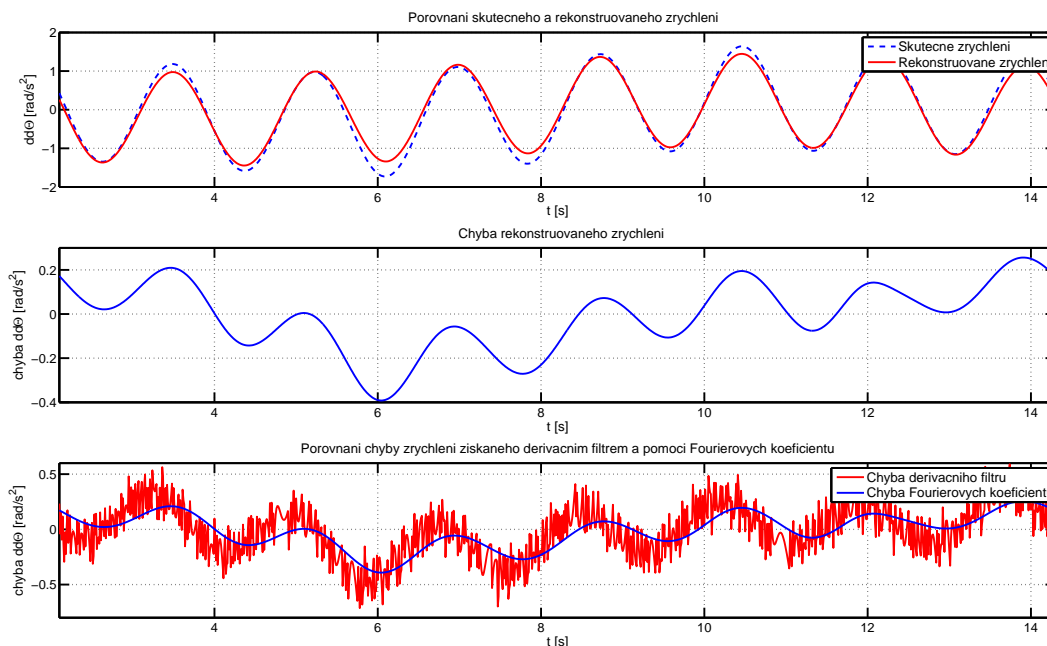
Obrázek 25: Frekvenční spektrum pro prvních deset harmonických.



Obrázek 26: Grafy pro získanou polohu.



Obrázek 27: Grafy pro získanou rychlost.



Obrázek 28: Grafy pro získané zrychlení.

Pro další ramena provedeme určení rychlosti a zrychlení analogicky, a proto již nebudeme uvádět získané grafy. Pro identifikaci pak zkusíme použít prvních deset harmonických a kvůli uvedeným problémům s určením zrychlením použijeme i větší množství odhadovaných harmonických.

V Tab. 18 jsou získané výsledky. Pokud uvažujeme více harmonických než pouze prvních deset, tak se výsledky nejprve zlepší. Po použití ještě více harmonických se ale naopak získají nejhorší výsledky. To je z toho důvodu, že se již začne významně projevovat vliv kvantizačního šumu. V Tab. 19 je uvedeno porovnání získaných výsledů vůči ostatním metodám (pro vstupní signál typu součtu harmonických funkcí).

Počet harmonických (1., 2. a 3. rameno)	(10,10,10)	(50,20,50)	(60,30,60)	
RMS [Nm]	1. rameno	10.1282	3.2405	15.8797
	2. rameno	3.6537	1.1425	9.4199
	3. rameno	2.1091	1.2772	4.7613
Max. chyba [Nm]	1. rameno	17.0546	6.3014	29.4176
	2. rameno	8.3272	2.5343	19.4498
	3. rameno	6.0498	2.9568	11.1835

Tabulka 18: Získaná chyba inverzní dynamiky.

		Způsob derivace		
		Frekvenční filtry	Ve frek. spektru	Fourier. koeficienty
RMS [Nm]	1. rameno	3.9753	3.0803	3.2405
	2. rameno	2.0892	2.0862	1.1425
	3. rameno	2.2802	1.4845	1.2772
Max. chyba [Nm]	1. rameno	8.6800	7.0874	6.3014
	2. rameno	5.0680	4.5633	2.5343
	3. rameno	5.4173	3.4896	2.9568

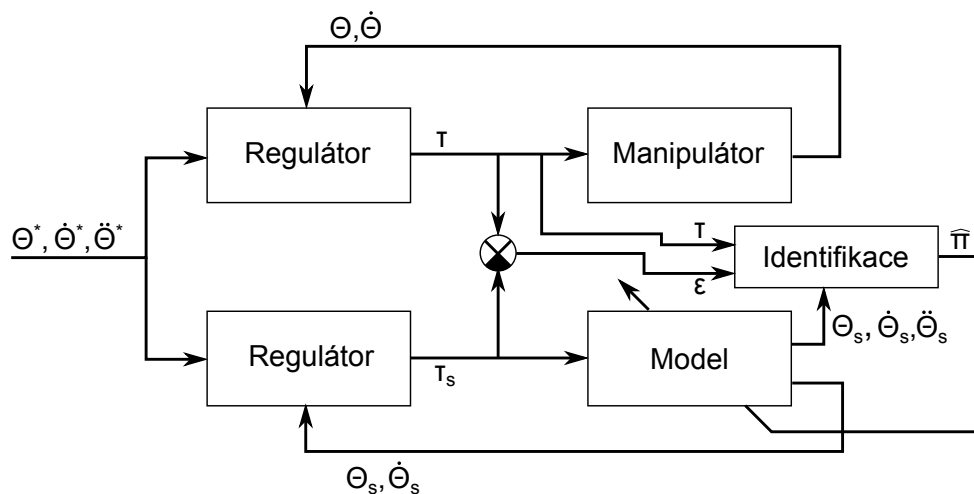
Tabulka 19: Získaná chyba inverzní dynamiky.

6.4 Metoda DIDIM

Tato metoda využívá pro určení odhadu úplně jiného přístupu než bylo zatím uváděno. Pro provedení identifikace zde není potřebná znalost průběhů polohy, rychlosti a zrychlení, ale postačí pouze znalost točivých momentů motorů.

DIDIM je zkratka pro „Direct and Inverse Dynamic Identification Models“ – „Přímé a inverzní identifikované dynamické modely“, což znamená, že zde bude využita přímá i inverzní dynamika. Metoda je založena na simulaci v uzavřené smyčce, která využívá přímý dynamický (identifikovaný) model. Odhady parametrů jsou pak provedeny tak, aby minimalizovaly chybu mezi skutečným (změřeným) točivým momentem a momentem získaným pomocí simulace, za předpokladu použití stejných regulátorů a požadované trajektorie.

Pro identifikaci použijeme jako točivý moment skutečný (naměřený) moment a matici regresorů sestavíme pomocí průběhů získaných simulací (viz. Obr. 29). Nemusíme tak vůbec řešit problémy se získáním rychlosti a zrychlení a identifikace se tak velmi zjednoduší.



Obrázek 29: Schéma DIDIM.

Nyní provedeme odvození této metody v souladu se článkem [4]. Optimální odhad je dán jako:

$$\hat{\Pi} = \underset{\Pi}{\operatorname{argmin}} \|\tau - \tau_s(\Pi)\|^2$$

kde τ jsou skutečné točivé momenty a τ_s jsou momenty získané simulací. Toto řešení minimalizuje kritériální funkci:

$$J(\Pi) = \|\tau - \tau_s(\Pi)\|^2$$

Jedná se tedy o problém nelineárních nejmenších čtverců, který můžeme řešit pomocí Newtonovy metody (metoda tečen). Nová iterace řešení je dána:

$$\hat{\Pi}_{k+1} = \hat{\Pi}_k - (\nabla^2 J(\hat{\Pi}_k))^{-1} \nabla J(\hat{\Pi}_k)$$

Dále zavedeme chybu odhadu jako:

$$\varepsilon = \tau - \tau_s(\Pi)$$

gradient je potom dán:

$$\nabla J(\Pi) = 2(\nabla \varepsilon)^T \varepsilon$$

a hessián můžeme aproximovat jako:

$$\nabla^2 J(\Pi) \approx 2(\nabla \varepsilon)^T \nabla \varepsilon$$

Nyní dosadíme do kritériální funkce za τ_s pomocí inverzní dynamiky:

$$J(\Pi) = \|\tau - Y_s(\Theta_s(\Pi), \dot{\Theta}_s(\Pi), \ddot{\Theta}_s(\Pi)) \cdot \Pi\|^2$$

Kritériální funkce tedy bude minimalizována:

$$J(\Pi) = \|\tau - Y_s \cdot \Pi\|^2 = \varepsilon^T \varepsilon$$

Nyní určíme derivaci funkce $J(\Pi)$. Gradient ε se rovná citlivostní funkci (derivace výstupu – točivého momentu pohonu podle parametrů), $\nabla \varepsilon = \nabla \tau_s$:

$$\nabla \varepsilon = -Y_s - \left(\frac{\partial Y_s(\Theta_s(\Pi), \dot{\Theta}_s(\Pi), \ddot{\Theta}_s(\Pi))}{\partial \Pi} \right) \Pi \approx -Y_s$$

Tato aproximace je možná z toho důvodu, že uvažujeme simulaci v uzavřené smyčce. Díky tomu lze předpokládat, že průběhy $\Theta_s(\Pi)$, $\dot{\Theta}_s(\Pi)$ a $\ddot{\Theta}_s(\Pi)$ jsou blízko referenčním trajektoriím pro široký rozsah hodnot parametrů Π . Výsledné vztahy se potom zjednoduší na:

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}_{k+1} &= \underset{\Pi}{\operatorname{argmin}} \|\tau - Y_s(\Theta_s(\Pi), \dot{\Theta}_s(\Pi), \ddot{\Theta}_s(\Pi)) \cdot \Pi\|^2 \\ \hat{\Pi}_{k+1} &= (Y_s^T(\hat{\Pi}_k) Y_s(\hat{\Pi}_k))^{-1} Y_s^T(\hat{\Pi}_k) \cdot \tau \end{aligned}$$

Jako zastavovací podmínku zvolíme:

$$\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k < tol$$

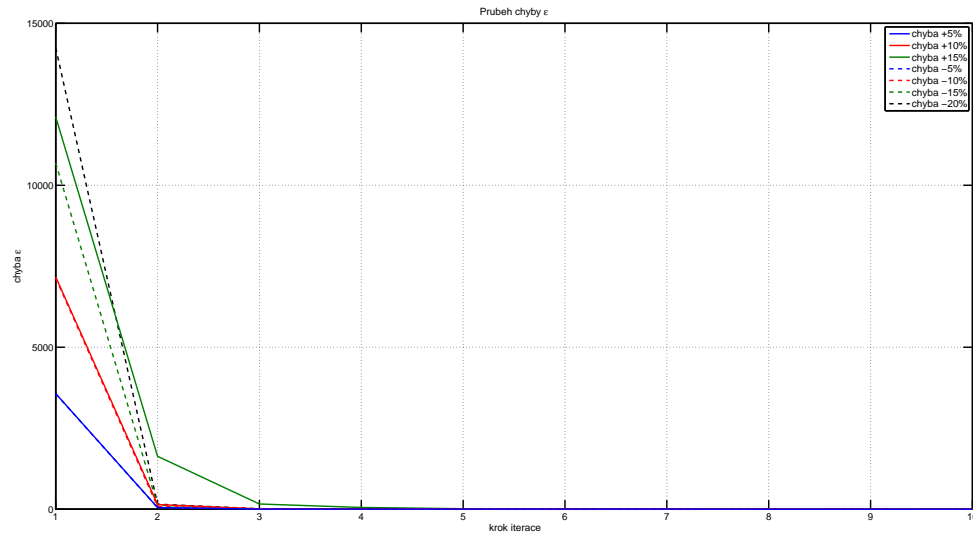
kde tol je zadaná tolerance.

6.4.1 Dosažené výsledky

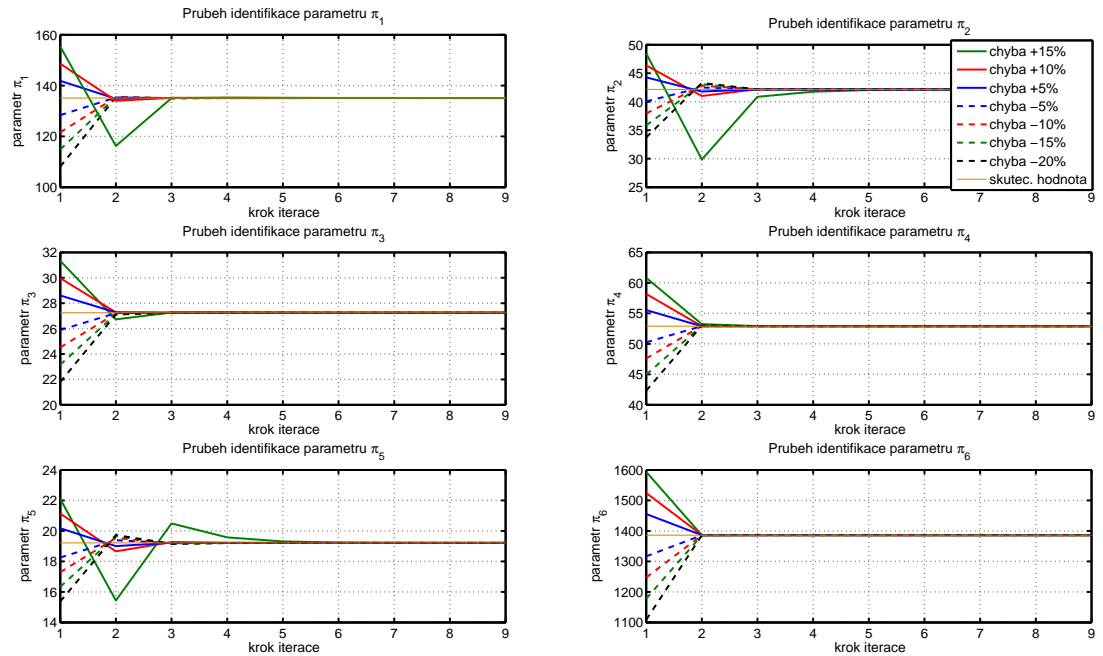
Přesnost a stabilitu této metody ověříme tak, že jako počáteční odhad vezmeme skutečné hodnoty, které zatížíme n-procentní chybou. Chybu použijeme v rozsahu -20% až +15%. Na Obr. 30 jsou potom uvedeny příslušné průběhy konvergence chyby ε . Je vidět, že průběh konvergence je velmi rychlý a to i pro široký rozptyl počátečních nastavení. Pro chybu +17% od skutečných hodnot již regulátor nezvládne ustabilizovat simulační model a konvergence neproběhne.

Na Obr. 31 jsou uvedeny průběhy konvergence jednotlivých parametrů k jejich skutečným hodnotám. Konvergence je opět velmi rychlá. Výjimku tvoří případ chyby +15% od skutečných hodnot. To je dáno tím, že chyba je blízká +17% chybě, pro kterou byl již identifikační experiment nestabilní.

Tato metoda tedy vyšla poměrně robustní vůči volbě počátečního odhadu a vykazuje velmi rychlou konvergenci. Proto se jedná o zajímavou alternativu k výše uvedeným způsobům identifikace, resp. ji můžeme brát jako jejich doplnění. Když by se nejprve provedla identifikace výše uvedenými způsoby a její výsledek by se vzal jako počáteční hodnota pro tuto metodu a tím by se ideálně získané odhady ještě zpřesnily.



Obrázek 30: Volba vlastní frekvence filtru.



Obrázek 31: Volba vlastní frekvence filtru.

6.5 Shrnutí

Při použití derivačních filtrů vyšel nejlépe odhad pro vstupní signál typu součet harmonických funkcí.

Velmi dobře vyšla varianta, kdy jsme uvažovali vstup ve formě reálné trajektorie a místo filtru pro zrychlení použili požadované zrychlení. Tuto volbu jsme odůvodnili tak, že předpokládáme dostatečně přesné sledování požadované trajektorie.

Jako další možnost jsme zkusili použít dvě frekvenční metody pro určení derivací. První metoda využívala převodu změřené polohy do frekvenčního spektra a následného ořezu dominantních frekvencí. Tento způsob dosahoval lepších výsledků, než použití derivačních filtrů.

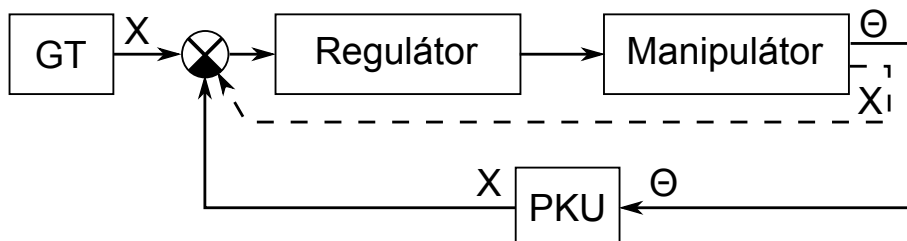
Druhá metoda využila k získání derivací určování koeficientů Fourierovy řady. Tato metoda poskytla ještě o něco lepší výsledky než předchozí metoda. Ovšem narazili jsme zde na problém s vhodnou volbou počtu určených harmonických. Bylo nutné použít jich co nejvíce, ale s tím omezením, že nesmí dojít k zahrnutí kvantizačního šumu.

Nakonec jsme použili iterační metodu DIDIM. Ta poskytovala velmi dobré výsledky i pro široký rozptyl počátečního nastavení odhadů. Přesnost určení parametrů byla v podstatě dána pouze námi volenou přesností v zastavovací podmínce.

7 Metody řízení

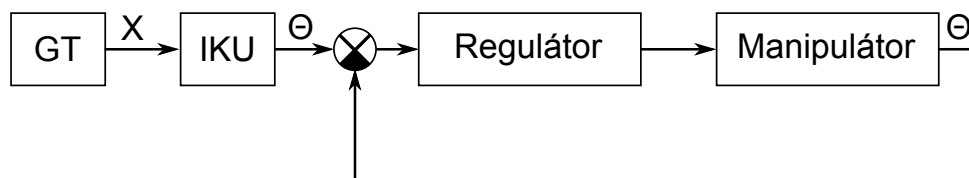
Nyní již přistoupíme k návrhu řízení. K tomu je možné využít dva základní přístupy:

Řízení v operačním prostoru – Viz. Obr. 32. V tomto případě generuje generátor trajektorie (GT) požadovanou trajektorii v souřadnicích koncového efektoru a ta je přiváděna přímo na regulátor. Pokud máme možnost měřit souřadnice efektoru, tak jsou tyto souřadnice přivedeny přímo zpětnou vazbou do regulátoru. Pokud můžeme měřit pouze kloubové souřadnice, tak je nutné ještě do zpětné vazby zařadit blok řešící přímou kinematickou úlohu (PKÚ), který převádí kloubové souřadnice do souřadnic koncového efektoru.



Obrázek 32: Řízení v operačním prostoru.

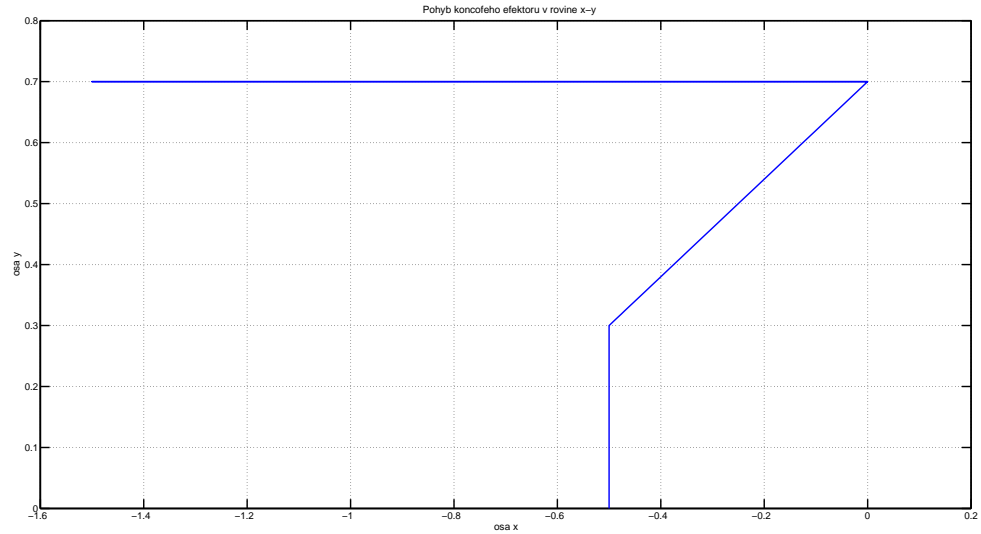
Řízení v prostoru kloubových souřadnic – Viz. Obr. 33. Generátor trajektorie opět generuje požadované průběhy koncového efektoru. Tyto průběhy jsou tentokrát přivedeny na blok inverzní kinematické úlohy (IKÚ), která převede souřadnice efektoru do kloubových souřadnic a ty jsou pak přivedeny na regulátor. Měření probíhá rovnou v kloubových souřadnicích. V této práci budeme řešit pouze tento způsob řízení.



Obrázek 33: Řízení v prostoru kloubových souřadnic.

7.0.1 Generátor trajektorie

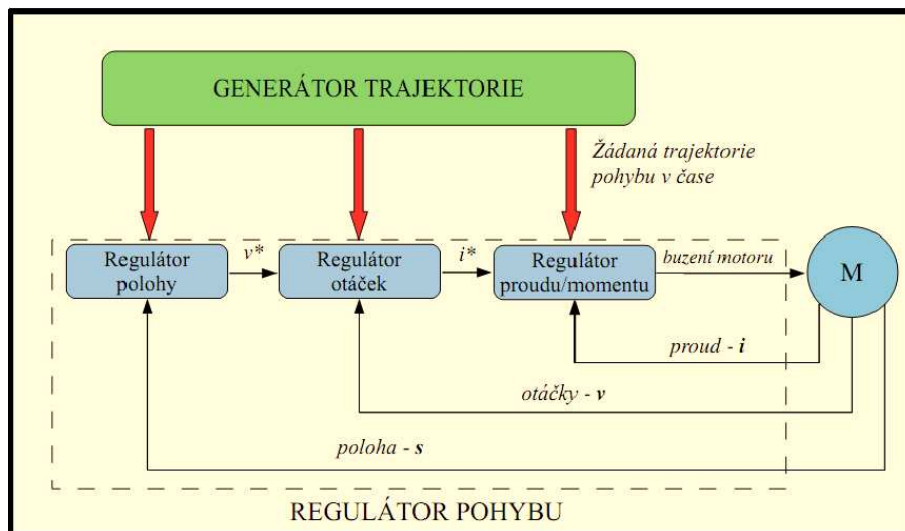
Jako první část je nutné navrhnout trajektorii, kterou má manipulátor vykonávat. Touto problematikou se v této práci nebudeme zabývat. Budeme rovnou pracovat s trajektorií, která byla použita pro reálný manipulátor. Na Obr. 34 je pro představu uveden průběh pohybu koncového efektoru v rovině x-y.



Obrázek 34: Pohyb koncového efektoru manipulatoru.

8 Decentralizované řízení

Jako první použijeme decentralizovanou metodu řízení pomocí kaskádní regulace (viz. Obr. 35). Každý kloub je řízen jedním motorem. V našem případě tedy budeme navrhovat tři SISO regulátory (pro tři ramena). Decentralizace spočívá v tom, že každý regulátor reguluje pouze svoje rameno bez ohledu na to, jakou způsobí poruchu svým akčním zásahem ostatním ramenům. Není zde tedy přítomen žádný „arbitr“, který by nějak optimálně rozděloval jednotlivé zásahy regulátorů.



Obrázek 35: Kaskádní struktura regulátoru pro sledování trajektorie.

8.0.2 Určení přenosu systému

V této práci se omezíme pouze na návrh polohové a rychlostní smyčky. Tyto smyčky lze totiž navrhnout bez ohledu na druh použitého motoru a jeho parametry. Při návrhu tedy proudovou smyčku zanedbáme jako velmi rychlou s tím, že požadovaný proud je k dispozici ihned. Nyní je třeba určit model systému, pro který budeme návrh provádět (viz. např. [5]). K tomu využijeme vztah pro kroutící moment motoru:

$$M_k = k_t i_k(t)$$

kde M_k je kroutící moment motoru, i_k je proud motorem a k_t je elektro-mechanická konstanta motoru. Dále použijeme vztah pro moment setrvačnosti motoru:

$$M_s = J \frac{d\omega(t)}{dt}$$

kde M_s je setrvačný moment, J je moment setrvačnosti motoru a zátěže. Nakonec použijeme vztah pro rovnováhu momentů:

$$\sum_i M_i = 0 \quad \Rightarrow \quad J \frac{d\omega(t)}{dt} = k_t i_k(t)$$

který říká, že kroutící moment motoru $M_k(t)$ se v každém časovém okamžiku spotřebuje na setrvačný moment M_s (viskózní tření zanedbáváme). Dále provedeme Laplaceovu transformaci:

$$J \cdot s\Omega(s) = k_t I_k(s)$$

a již můžeme psát přenos:

$$F_s(s) = \frac{\Omega(s)}{I_k(s)} = \frac{k_t}{J \cdot s}$$

kdy proud je vstup a otáčky ω jsou výstup, což je přesně to, co potřebujeme. Regulátor rychlosti nám dá požadavek na proud a jelikož proudovou smyčku zanedbáváme jako velmi rychlou, potřebujeme znát přenos znovu na rychlost.

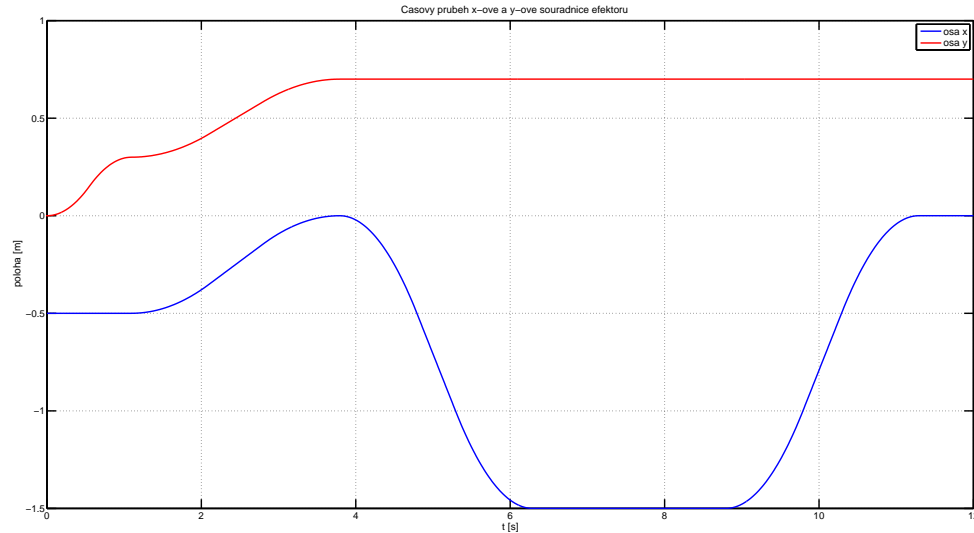
Nyní ještě potřebujeme určit konstantu motoru k_t a moment setrvačnosti J . Jelikož neznáme konkrétní motor, položíme pro zjednodušení konstantu rovnu jedné ($k_t = 1$). Tím ale nedojde ke ztrátě na obecnosti, protože po zjištění konstanty by nebylo nutné znovu provádět odvození, ale pouze by se příslušně přenásobily výsledné vztahy.

8.0.3 Určení momentu setrvačnosti

Hledaný moment setrvačnosti se skládá z momentu setrvačnosti motoru a zátěže. Setrvačnost motoru opět neznáme, a proto budeme uvažovat pouze moment setrvačnosti zátěže, resp. daného kloubu manipulátoru. Tento člen odpovídá diagonálnímu prvku matice setrvačnosti $M(\Theta)$ a obecně není konstantní, protože je závislý na aktuální konfiguraci manipulátoru. Pro možnost návrhu regulátoru ho proto budeme muset nějakým způsobem aproximovat jednou hodnotou. To uděláme tak, že určíme jeho průměrnou hodnotu podél

trajektorie pohybu manipulátoru. Pokud se ale podíváme na časový průběh polohy koncového efektoru v x-ové a y-ové ose (Obr. 36), tak zjistíme, že se manipulátor po určité době nehýbe (cca od 6 s do 9 s). Tuto část tedy zanedbáme a hledaný moment setrvačnosti určíme jako průměrnou hodnotu diagonálního prvku matice $M(\Theta)$.

Na závěr je nutné poznamenat, že tímto způsobem naprosto zanedbáváme vzájemné silové působení mezi jednotlivými rameny. Tyto silové účinky bude muset regulátor zvládnout odregulovat jako poruchu.



Obrázek 36: Časový průběh polohy koncového efektoru.

8.0.4 Převodovka

Před začátkem návrhu regulátorů je nutné se ještě zmínit o převodovce (Obr. 37). Protože se často používají motory v kombinaci s ní. Převodovka může měnit směr i rychlost otáčení. Převodový poměr je určen poměrem rychlostí:

$$n = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

Pro $n > 1$ se jedná o převod do pomala, pro $n < 1$ se jedná o převod do rychla. Točivý moment se přepočítává opačně. Pro převod do pomala (otáčky za převodovkou jsou menší než před ní) bude točivý moment větší a naopak. Vztahy pro přepočet rychlostí a momentů jsou:

$$\omega_1 = n \cdot \omega_2$$

$$n \cdot \tau_1 = \tau_2$$

Dále uvedeme, jak se projeví moment setrvačnosti zátěže před převodovkou. Při určování momentu setrvačnosti pro návrh regulátoru totiž zjišťujeme moment zátěže za převodovkou a bude tedy muset být přepočten před ní. K odvození využijeme vztahu pro kinetickou energii a toho, že energie před a za převodovkou musí být stejná:

$$E_{k1} = E_{k2} \Rightarrow \frac{1}{2}J_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}J_2\omega_2^2 = \frac{1}{2}J_2\frac{\omega_1^2}{n^2} \Rightarrow J_1 = \frac{J_2}{n^2}$$

Při převodu momentu setrvačnosti tedy bude moment podělen kvadrátem převodu.



Obrázek 37: Motor s převodovkou.

8.1 Regulátor třetího ramena

Pro návrh regulátoru využijeme již sestavený model manipulátoru v Simmchanicsu. Samotný návrh pak začneme provádět od třetího (posledního) ramena. Nejprve „zablokujeme“ první dvě ramena, aby nám ze začátku nepůsobila porucha. Až poté, co naladíme regulátor, je zkusíme uvolnit. Pokud je návrh proveden v pořádku, měl by regulátor poruchy odregulovat. Při návrhu ostatních regulátorů budeme postupovat analogicky.

8.1.1 Rychlostní smyčka

Jak již bylo řečeno výše, regulátor proudu nebudeme navrhovat a začneme rovnou s návrhem regulátoru rychlostní smyčky. K řízení použijeme PI regulátor. Požadavkem na rychlostní smyčku je, aby byla velmi rychlá, ale je přípustný i malý překmit.

Před samotným návrhem je nutné nejprve určit přenos systému, pro který budeme návrh provádět. Můžeme využít odvozeného dynamického modelu, kde vezmeme diagonální prvek matice setrvačnosti $M(\Theta)$, který přísluší danému (zde třetímu) motoru. Tento prvek obecně není konstantní, proto je nutné udělat jeho průměr podél trajektorie pohybu manipulátoru. V tomto případě, kdy provádíme návrh pro poslední rameno, je možné i použití Steinerovy věty. Využijeme Steinerovy věty a dosadíme do ní:

$$J_{3_zatez} = J_{t3} + m_3 l_{t3}^2 = 19.2146 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Tento moment je dále třeba přepočítat před převodovku. Budeme uvažovat převod $n_3 = 100$ (převod do pomala):

$$J_3 = \frac{J_{3_zatez}}{n_3^2} = \frac{19.2146}{100^2} = 0.00192146 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Přenos systému, pro který budeme provádět návrh, potom bude:

$$F_s = \frac{1}{J_3 \cdot s}$$

K řízení použijeme PI regulátor se dvěma stupni volnosti. Přenos uzavřeného systému bude:

$$F_u = \frac{k_p b \cdot s + k_i}{J_3 \cdot s^2 + k_p \cdot s + k_i}$$

Přiřazení pólů můžeme parametrizovat pomocí přirozené frekvence systému ω_n a relativního činitele tlumení ξ :

$$s^2 + \frac{k_p}{J_3} \cdot s + \frac{k_i}{J_3} = s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2$$

Parametry regulátoru vyjdou:

$$\begin{aligned} k_p &= 2\xi\omega_n J_3 \\ k_i &= \omega_n^2 J_3 \end{aligned}$$

Použijeme parametry:

$$\begin{aligned} \omega_n &= 60 \\ \xi &= 0.9 \\ b &= 0.7 \end{aligned}$$

Tyto parametry následně použijeme i pro další rychlostní smyčky. To znamená, že přenosy uzavřených smyček vyjdou pro všechna ramena stejné, ale regulátory budou mít v závislosti na J_i různé parametry. Pro třetí rameno vyjdou parametry regulátoru:

$$\begin{aligned} k_{p_rychlost} &= 0.208 \\ k_{i_rychlost} &= 6.917 \end{aligned}$$

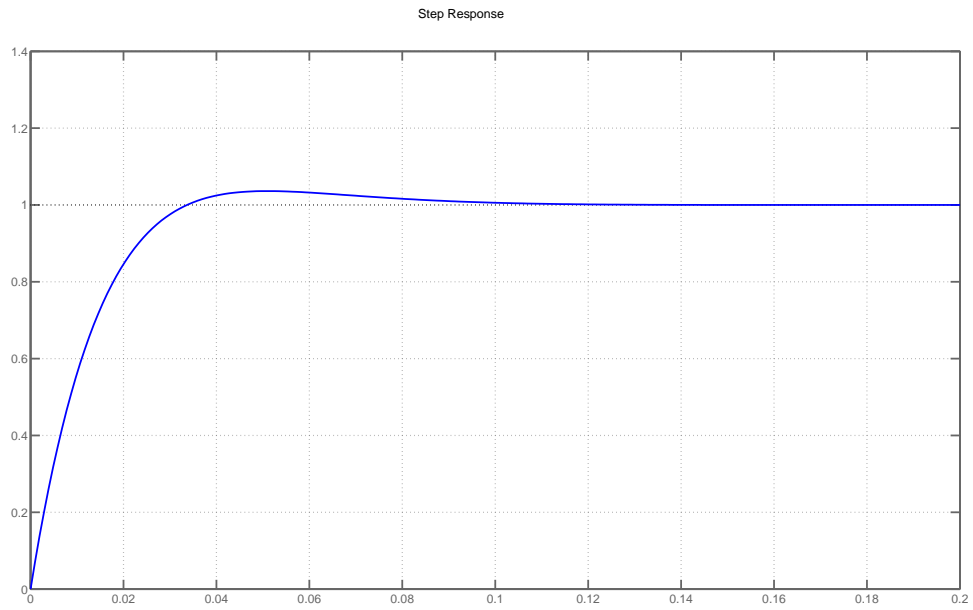
Přechodová charakteristika uzavřeného systému je uvedena na Obr. 38. Je vidět, že je rychlá a má malý překmit, což splňuje kladené požadavky v úvodu. Dále zkontrolujeme, jak robustní je navržený regulátor. To zjistíme určením bezpečnosti ve fázi (PM – Phase Margin) a v zesílení (GM – Gain Margin). K tomu můžeme například použít Nyquistovu charakteristiku otevřené smyčky. Ta má přenos:

$$F_o = \frac{k_{p3} b_3 \cdot s + k_{i3}}{J_3 \cdot s^2}$$

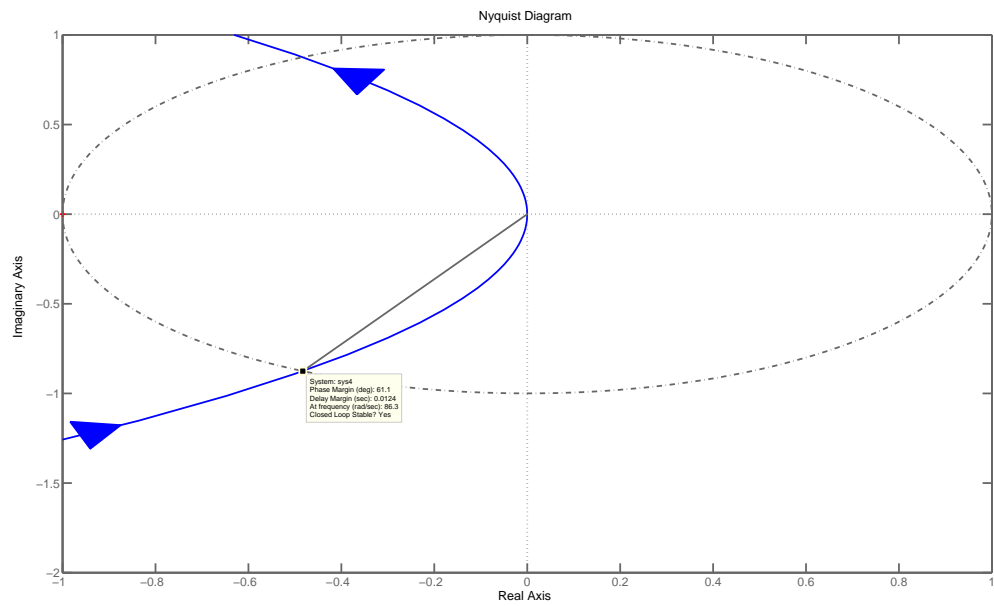
Na Obr. 39 je získaná charakteristika. Z ní je patrné, že bezpečnosti vyjdou:

$$\begin{aligned} PM &= 61.1^\circ \\ GM &= \infty \end{aligned}$$

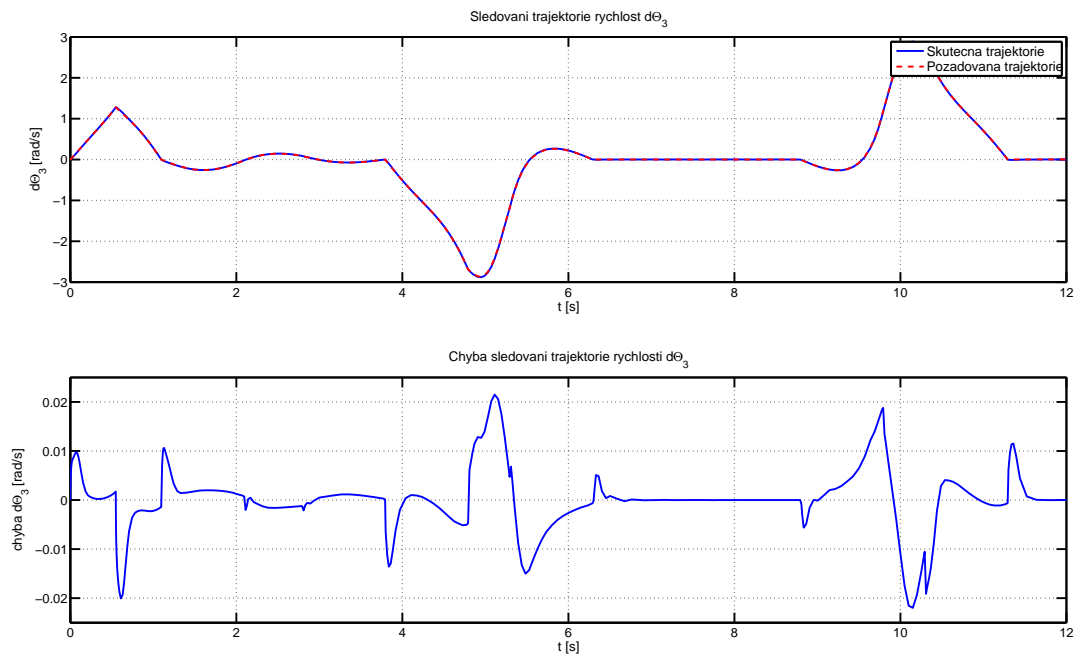
Nakonec zkontrolujeme jak přesně sleduje navržený regulátor požadovanou trajektorii rychlosti. Na Obr. 40 je uvedeno požadované a skutečné rychlosti a dále je uvedena chyba regulace. Je vidět, že rychlost je sledována poměrně přesně.



Obrázek 38: Přechodová charakteristika rychlostní smyčky.



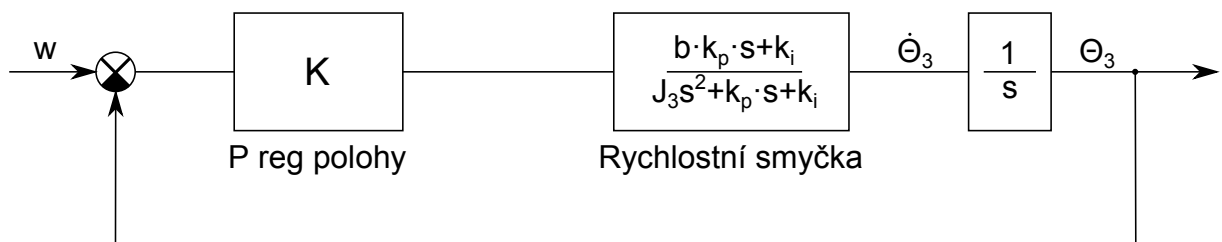
Obrázek 39: Nyquistova charakteristika otevřené rychlostní smyčky.



Obrázek 40: Sledování požadované rychlosti.

8.1.2 Polohová smyčka

Schéma pro výpočet polohové smyčky je uvedeno na Obr. 41. Jelikož tato smyčka obsahuje astatismus, postačí pro regulaci použít P regulátor.

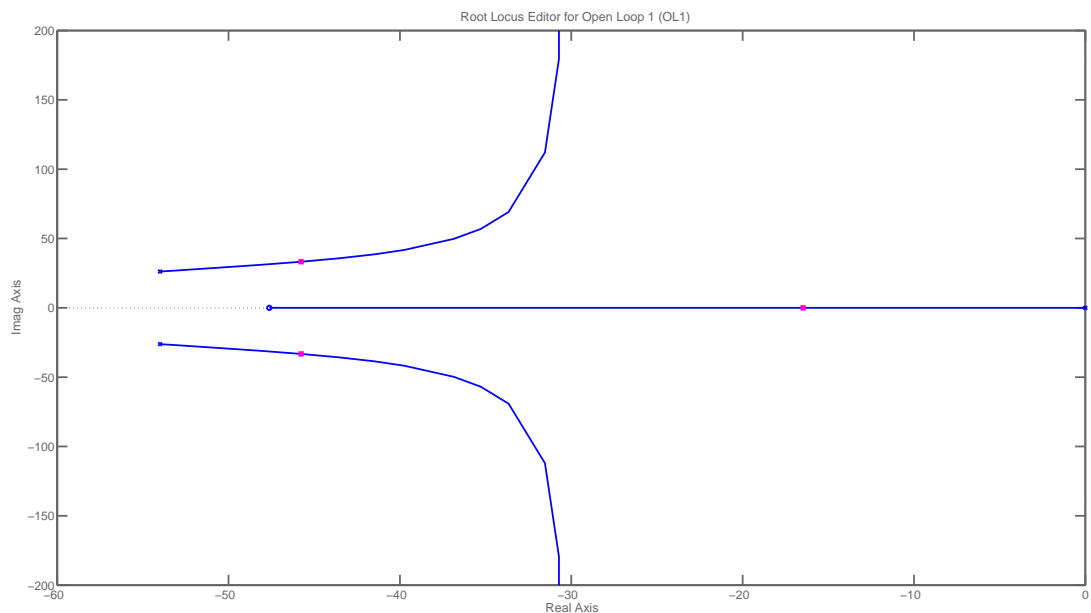


Obrázek 41: Schéma polohové smyčky.

Požadavek na polohovou smyčku je, že musí být bez překmitu (i za cenu delší doby regulace). Návrh parametru K můžeme provést např. pomocí metody GMK (např. v Matlabu příkazem `rltool()`). Přenos otevřené smyčky pro použití GMK bude:

$$F_o = K \frac{k_p b \cdot s + k_i}{J_3 \cdot s^3 + k_p \cdot s^2 + k_i \cdot s}$$

Při návrhu požadujeme, aby jako dominantní zůstal pól na reálné ose. Dominance dvou komplexně sdružených pólů by měla za následek kmitavou odezvu, což by bylo pro polohovou smyčku nepřijatelné. Proto zvolíme rozvržení pólů viz. Obr. 42. Pro takovou volbu vyjde parametr regulátoru – $K = 14.6$.



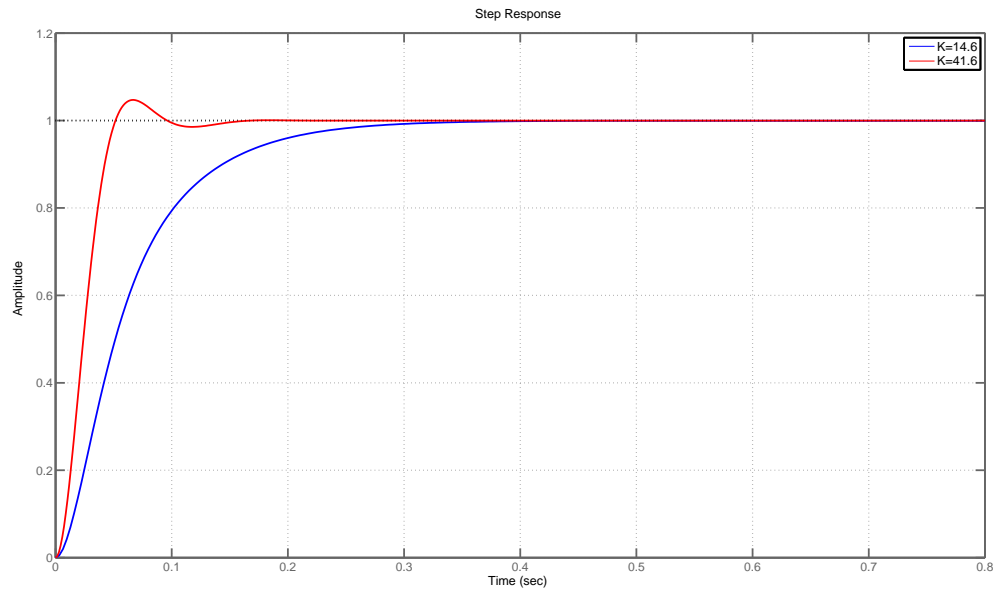
Obrázek 42: GMK pro polohovou smyčku.

Pro ilustraci problému kmitavosti ještě zvolíme jinou konfiguraci pólů – všechny tři póly pod sebou. V tomto případě vyjde $K = 41.6$. Na Obr. 43 je porovnání přechodových charakteristik. Je vidět, že pro zesílení $K = 14.6$ je dle požadavků průběh bez překmitu. Oproti tomu je ale průběh pro druhé zesílení již kmitavý. Z toho důvodu je použito výše uvedené rozložení pólů (viz. Obr. 42). Dále se podíváme na Nyquistovu charakteristiku otevřené smyčky pro zjištění bezpečnosti ve fázi a v zesílení. Charakteristika je uvedena na Obr. 44. Hodnoty bezpečností vyjdou:

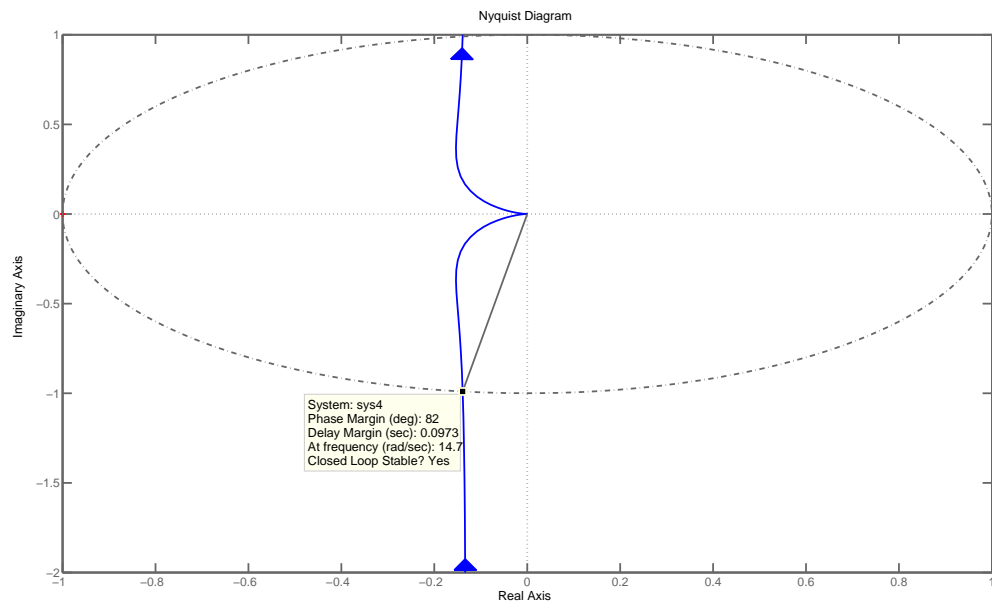
$$PM = 82^\circ$$

$$GM = \infty$$

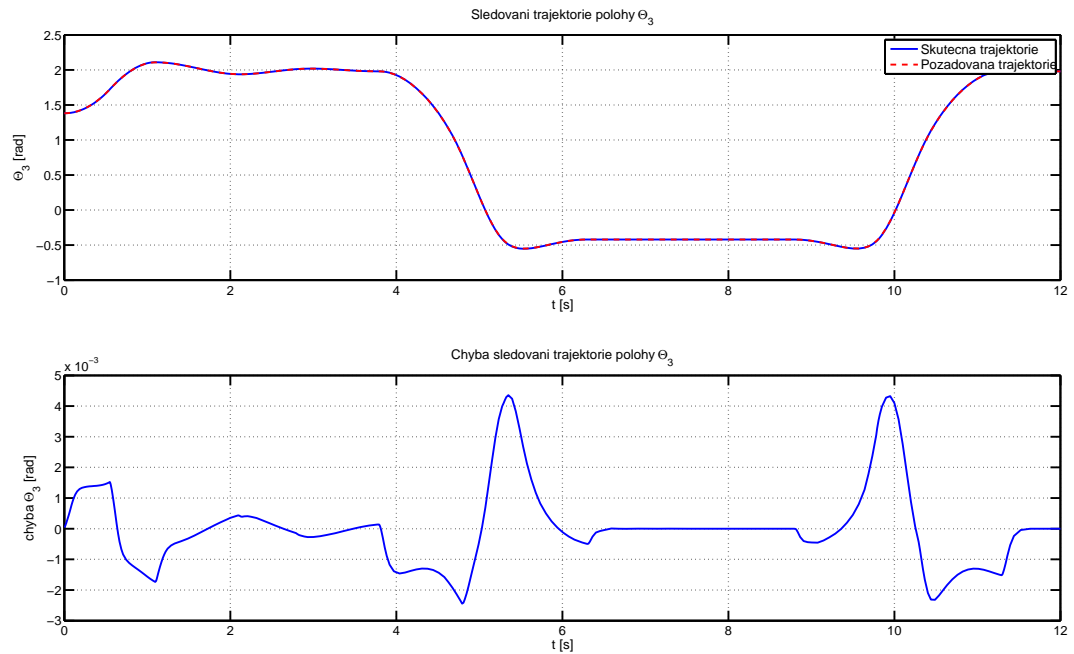
Nakonec zkontrolujeme, jak dobře bude sledována trajektorie polohy. To je uvedeno na Obr. 45.



Obrázek 43: Přechodová charakteristika polohové smyčky.



Obrázek 44: Nyquistova charakteristika otevřené polohové smyčky.



Obrázek 45: Sledování požadované polohy.

8.2 Regulátor druhého ramena

Při návrhu regulátoru druhého a prvního ramena budeme postupovat totožně jako u ramena třetího. Proto se zde nebudeme zabývat podrobným odvozením, ale pouze uvedeme použité parametry. Přenosy smyček budou vycházet stejné, pouze dojde ke změně konkrétních parametrů rychlostního regulátoru v závislosti na momentu setrvačnosti J_2 . Ten určíme, jak již bylo řečeno, jako průměrný moment setrvačnosti podél trajektorie, resp. jako průměrnou hodnotu diagonálního prvku matice $M(\Theta)$. Budeme uvažovat hodnotu:

$$J_{2_zatez} = 45.86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Po přepočtu před převodovku získáme přenos (opět uvažujeme převod $n_2 = 100$):

$$F_s = \frac{1}{J_2 \cdot s} = \frac{1}{\frac{45.86}{n_2^2} s} = \frac{1}{0.004586 \cdot s}$$

Jako parametry rychlostní smyčky použijeme stejně jako u třetího ramena tyto hodnoty:

$$\omega_n = 60$$

$$\xi = 0.9$$

Konkrétní hodnoty regulátoru vyjdou:

$$k_{p_rychlost} = 0.4848$$

$$k_{i_rychlost} = 16.1604$$

$$b = 0.7$$

Jako parametr polohového regulátoru znovu použijeme:

$$K = 14.6$$

8.3 Regulátor prvního ramena

Návrh regulátoru pro první rameno bude opět totožný jako u předchozích ramen. Tentokrát budeme uvažovat moment setrvačnosti zátěže:

$$J_{2_zatez} = 115.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Po přepočtu před převodovku získáme přenos (opět uvažujeme převod $n_1 = 100$):

$$F_s = \frac{1}{J_1 \cdot s} = \frac{1}{0.011471 \cdot s}$$

Jako parametry rychlostní smyčky použijeme:

$$\omega_n = 60$$

$$\xi = 0.9$$

Konkrétní hodnoty regulátoru vyjdou:

$$k_{p_rychlost} = 1.2451$$

$$k_{i_rychlost} = 41.5044$$

$$b = 0.7$$

Jako parametr polohového regulátoru znovu použijeme:

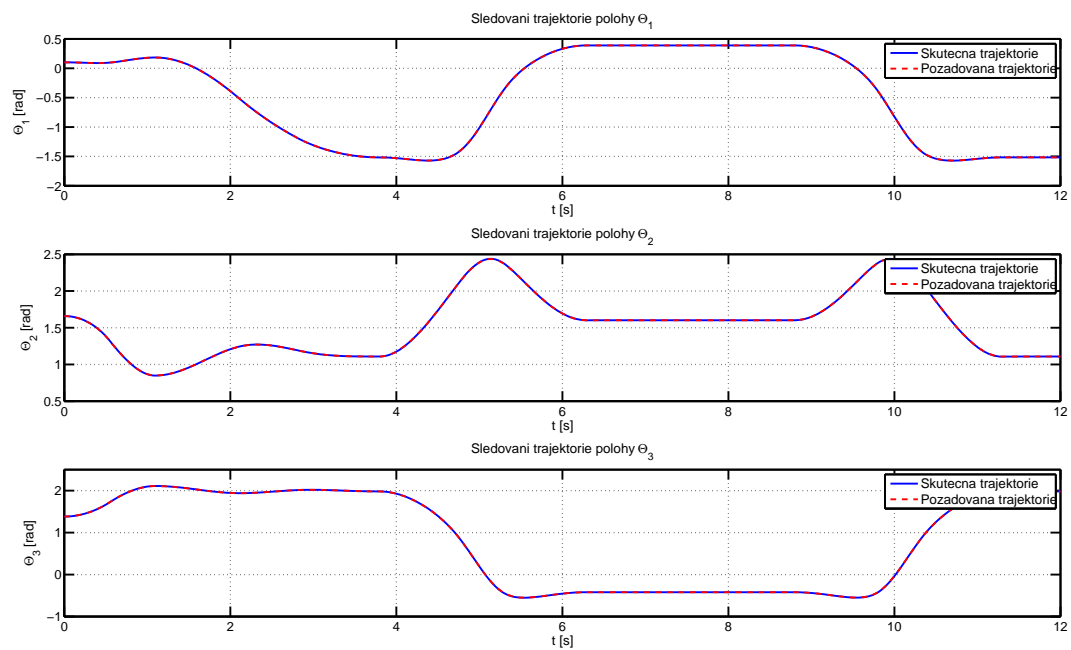
$$K = 14.6$$

8.4 Sledování trajektorie

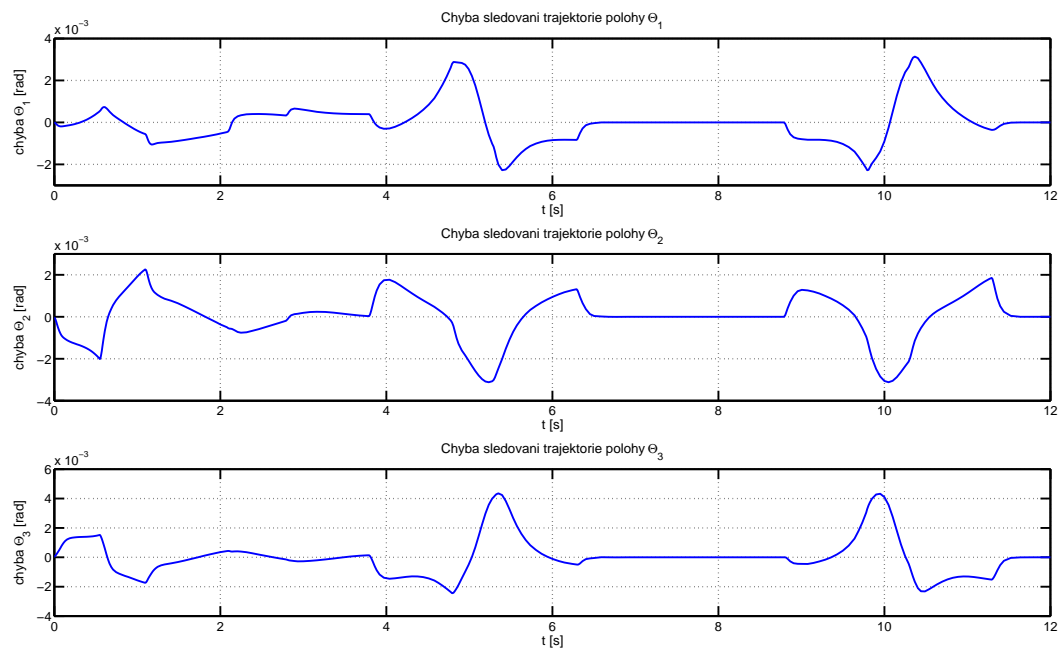
Na závěr zkontrolujeme, zda výše navržené regulátory budou sledovat požadovanou trajektorii. Na Obr. 46 jsou uvedeny grafy sledování požadované polohy. Na Obr. 47 je uvedena chyba skutečné polohy vůči poloze požadované. Nakonec se podíváme na to, jak přesně jsme schopni sledovat požadovanou trajektorii koncovým efektem (Obr. 48). Určíme tedy euklidovskou vzdálenost mezi požadovanou a skutečnou polohou efektoru. Ta se jednoduše vypočte jako vzdálenost dvou bodů:

$$d = \sqrt{(x_{skutec} - x_{pozad})^2 + (y_{skutec} - y_{pozad})^2}$$

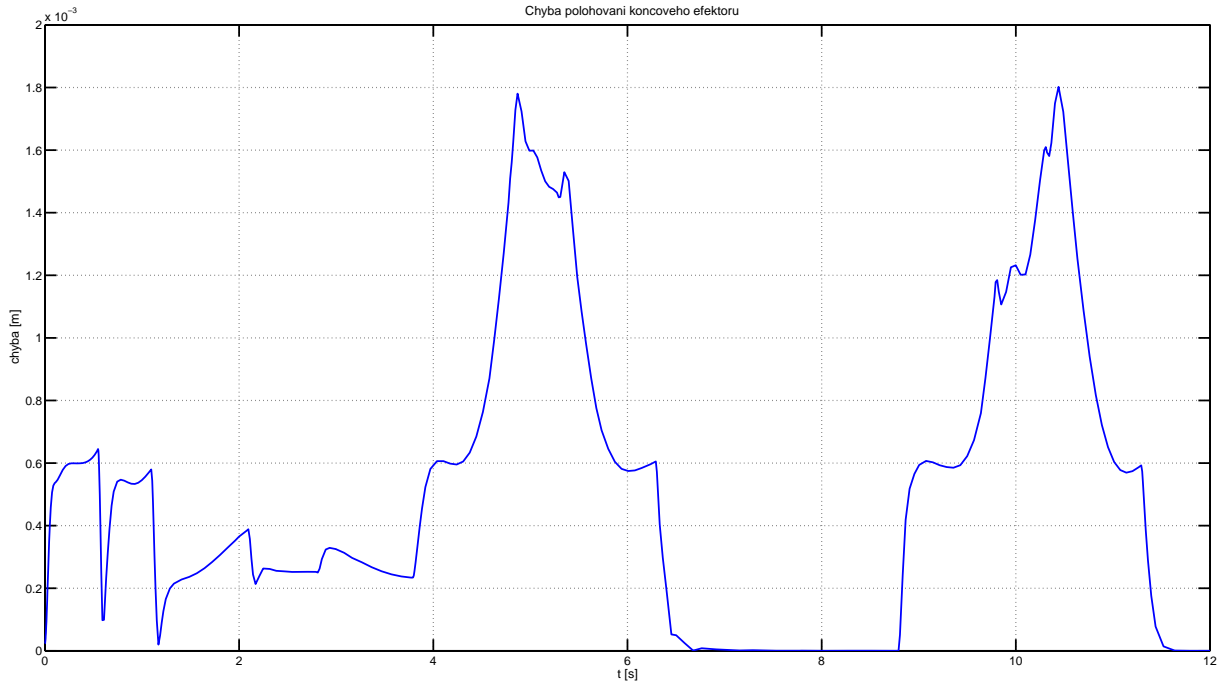
Na Obr. 49 jsou uvedeny průběhy momentů (akčních zásahů regulátorů) za převodovkou. Je zřejmé, že momenty jsou v povolených mezích. Resp. v mezích daných n_i -násobkem T_{max} (viz. Tab. 20), protože točivý moment za převodovkou je n_i -krát větší.



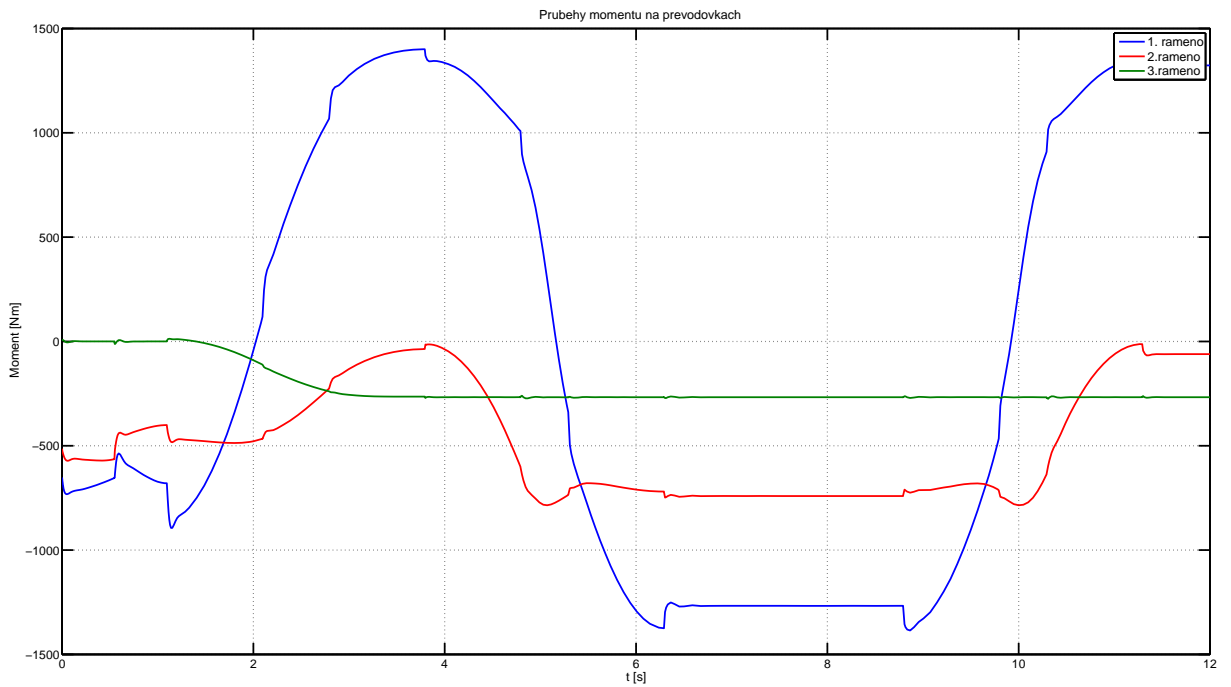
Obrázek 46: Sledování požadované polohy.



Obrázek 47: Chyba sledování požadované polohy.



Obrázek 48: Chyba polohování efektoru.



Obrázek 49: Akční zásahy jednotlivých regulátorů.

8.5 Shrnutí

V následující tabulce (Tab. 20) je uveden souhrn použitých parametrů regulátorů jednotlivých ramen:

Parametr	3. rameno	2. rameno	1. rameno
J	19.21	45.86	114.71
n	100	100	100
ω_n	60	60	60
ξ	0.9	0.9	0.9
b	0.7	0.7	0.7
k_p	0.208	0.485	1.245
k_i	6.917	16.160	41.504
$k_{p-poloha}$	14.6	14.6	14.6
T_{max}	5	10	17

Tabulka 20: Popis tabulky

kde

- J – moment setrvačnosti zátěže za převodovkou
- n – převod převodovky
- ω_n – netlumená frekvence rychlostní smyčky
- ξ – relativní činitel tlumení rychlostní smyčky
- k_p, k_i – parametry rychlostního regulátoru
- $k_{p-poloha}$ – parametr polohového regulátoru
- T_{max} – maximální točivý moment daného motoru

V příloze na Obr. 75 je uvedeno zapojení celé kaskády regulátoru třetího ramena. Kaskáda je kromě polohové a rychlostní smyčky doplněna o saturaci, vysledování integrační složky PI regulátoru rychlosti a namodelování převodovky. Převodovka je zde modelována pouze jednoduše pomocí zesílení.

9 Centralizovaná metoda

Druhá metoda, kterou použijeme, bude jedna z centralizovaných metod (viz. [1]). V tomto případě budeme pracovat s modelem manipulátoru jako s celkem, tedy systémem se třemi vstupy a třemi výstupy. Použitá metoda vychází ze znalosti dynamického modelu (který jsme již odvodili):

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) = T$$

Jako vstup T použijeme:

$$T = \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) + M(\Theta)y$$

kde budeme y považovat za nový vstup. Po dosazení do původní rovnice zjistíme, že platí:

$$\begin{aligned} M(\Theta)\ddot{\Theta} + \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) &= \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta) + M(\Theta)y \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\Theta} &= y \end{aligned} \quad (9.1)$$

Toto řízení je nazýváno inverzní dynamické řízení, protože je založeno na výpočtu inverzní dynamiky manipulátoru. Systém se potom pro nový vstup y jeví jako lineární a dekomponovaný. To znamená, že člen vstupního vektoru y_i ovlivňuje (přes dvojitý integrátor) pouze kloubovou proměnnou Θ_i nezávisle na pohybu ostatních kloubových proměnných.

Problém návrhu řízení se tedy redukoval pouze na hledání zákona řízení y , které bude řídit dvojitý integrátor. Volbou PD regulátoru lze tento problém vyřešit:

$$y = -K_P\Theta - K_D\dot{\Theta} + r$$

Dále dosadíme do (9.1) a získáme systém druhého řádu:

$$\ddot{\Theta} + K_D\dot{\Theta} + K_P\Theta = r \quad (9.2)$$

který je stabilní pro pozitivně definitní matice K_P a K_D . Tyto matice jsou diagonální (máme dekomponovaný systém) a platí pro ně:

$$K_P = \text{diag}\{\omega_{n1}^2, \dots, \omega_{nn}^2\} \quad K_D = \text{diag}\{2\zeta_1\omega_{n1}, \dots, 2\zeta_n\omega_{nn}\}$$

kdy chování systému je určeno vlastními frekvencí ω_{ni} a relativním činitelem tlumení ζ_n .

Požadovanou trajektorii manipulátoru ($\Theta_d(t)$) pak do vztahů zavedeme pomocí členu r :

$$r = \ddot{\Theta}_d + K_D\dot{\Theta}_d + K_P\Theta_d$$

Dosazením do 9.2 získáme:

$$\begin{aligned} \ddot{\Theta} + K_D\dot{\Theta} + K_P\Theta &= \ddot{\Theta}_d + K_D\dot{\Theta}_d + K_P\Theta_d \Rightarrow \\ \Rightarrow \ddot{\tilde{\Theta}} + K_D\dot{\tilde{\Theta}} + K_P\tilde{\Theta} &= 0 \end{aligned}$$

což je dynamika chyby polohy ($\tilde{\Theta} = \Theta_d - \Theta$). Tato chyba se vyskytuje pouze pro nenulovou počáteční chybu a rychlost konvergence chyby k nule potom záleží na volbě matic K_P a

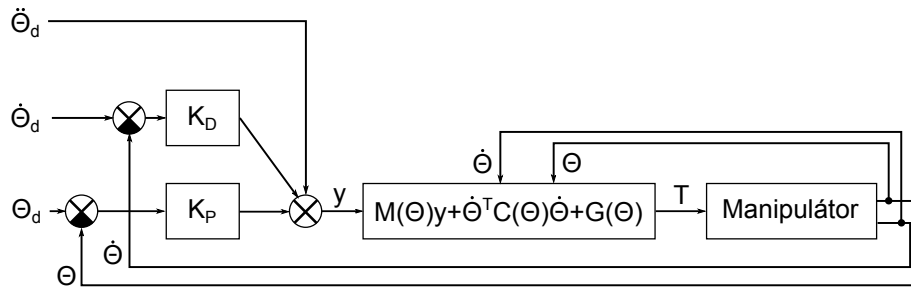
K_D , resp. na naladění jednotlivých PD regulátorů. Schéma této metody je uvedeno na Obr. 50.

Parametry regulátoru zvolíme pro všechny ramena stejné, a to:

$$\omega_n = 120, \quad \xi = 0.8$$

Pro tuto volbu pak vyjdou matice K_P a K_D :

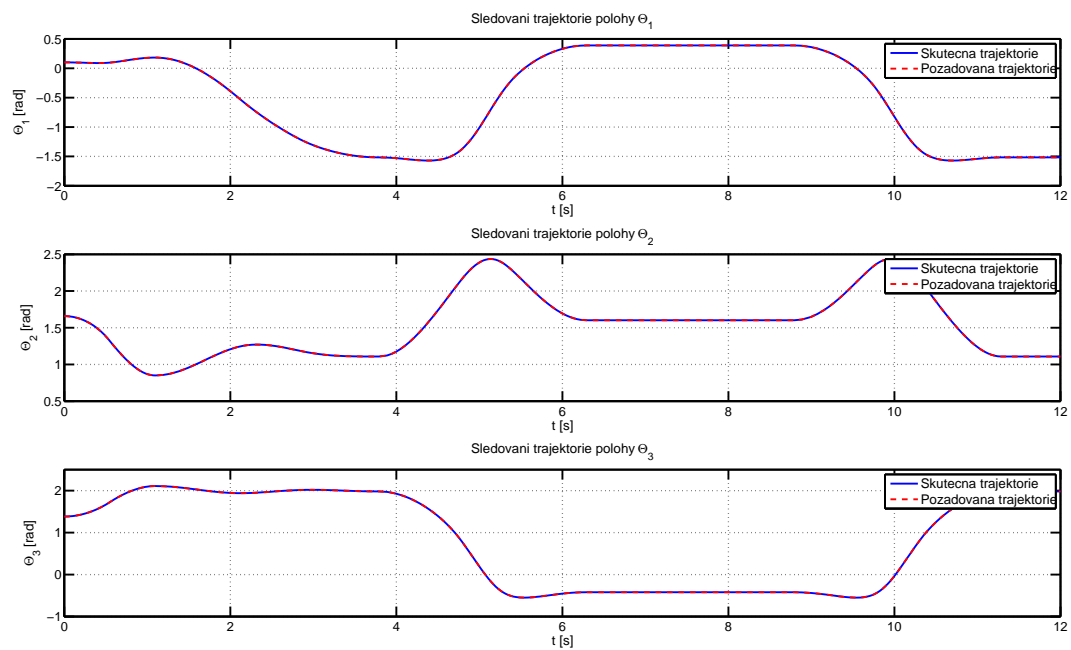
$$K_P = \begin{bmatrix} 14400 & 0 & 0 \\ 0 & 14400 & 0 \\ 0 & 0 & 14400 \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} 192 & 0 & 0 \\ 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 192 \end{bmatrix}$$



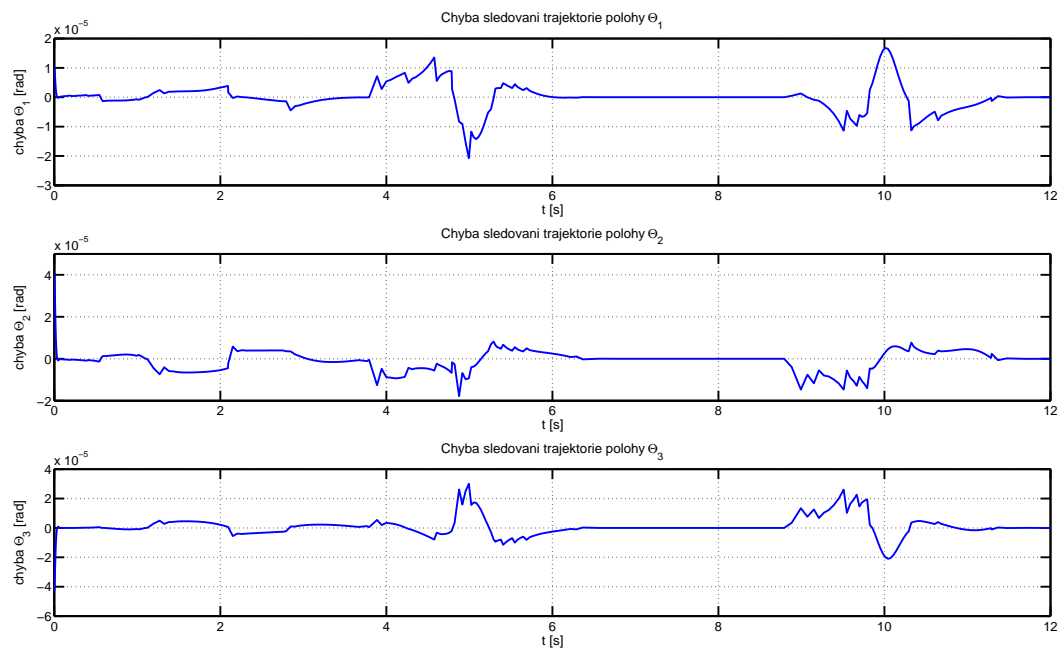
Obrázek 50: Schéma centralizované metody.

Na Obr. 51 je uvedeno porovnání skutečné a požadované polohy jednotlivých ramen. Přesnost tohoto sledování je pak uvedena na Obr. 52, kde je zobrazena chyba sledování požadované polohy. Na Obr. 53 je uvedena vzdálenost mezi požadovanou a skutečnou polohou efektoru. Na závěr jsou na Obr. 54 zobrazeny akční zásahy regulátorů, resp. točivé momenty za převodovkou.

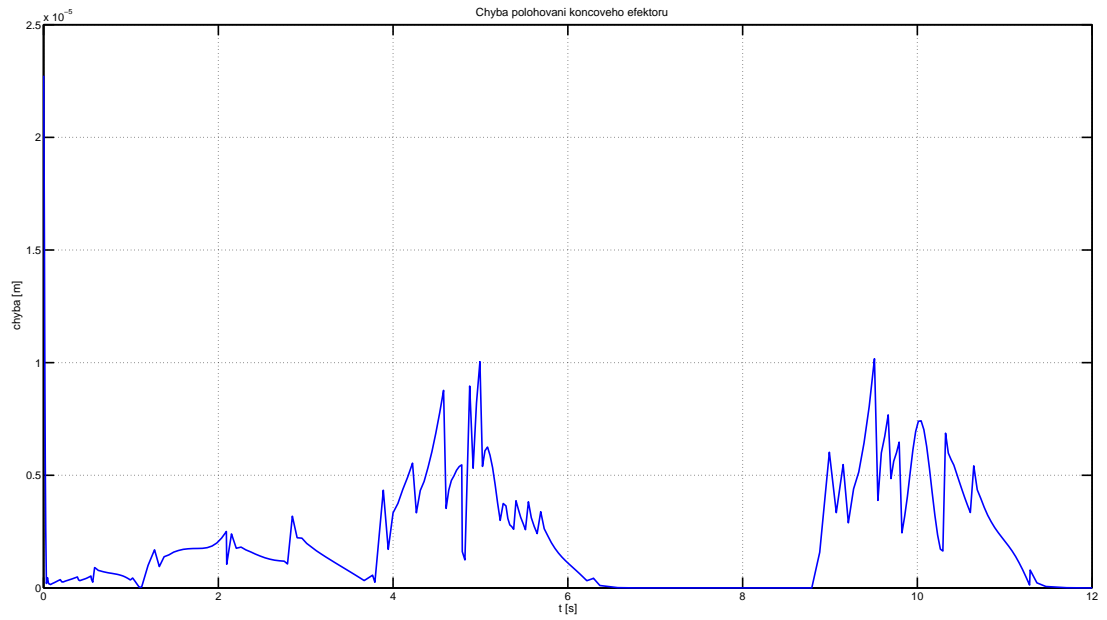
Použitím inverzní dynamiky se tedy návrh regulátorů velice zjednoduší, protože je potřeba řídit pouze systém ve formě dvojitého integrátoru. Toto zjednodušení ovšem platí pouze za předpokladu, že známe dokonale dynamický model manipulátoru. Ten ovšem nikdy zcela přesně znát nebudeme. V tom případě pak bude systém vykazovat trvalou regulační odchylku. Pro její odstranění by byla například možnost použití PID regulátoru místo uváděného PD regulátoru. Dalšími možnostmi pro odstranění nejistoty v dynamickém modelu mohou být robustní, resp. adaptivní řízení, kterými se budeme zabývat dále.



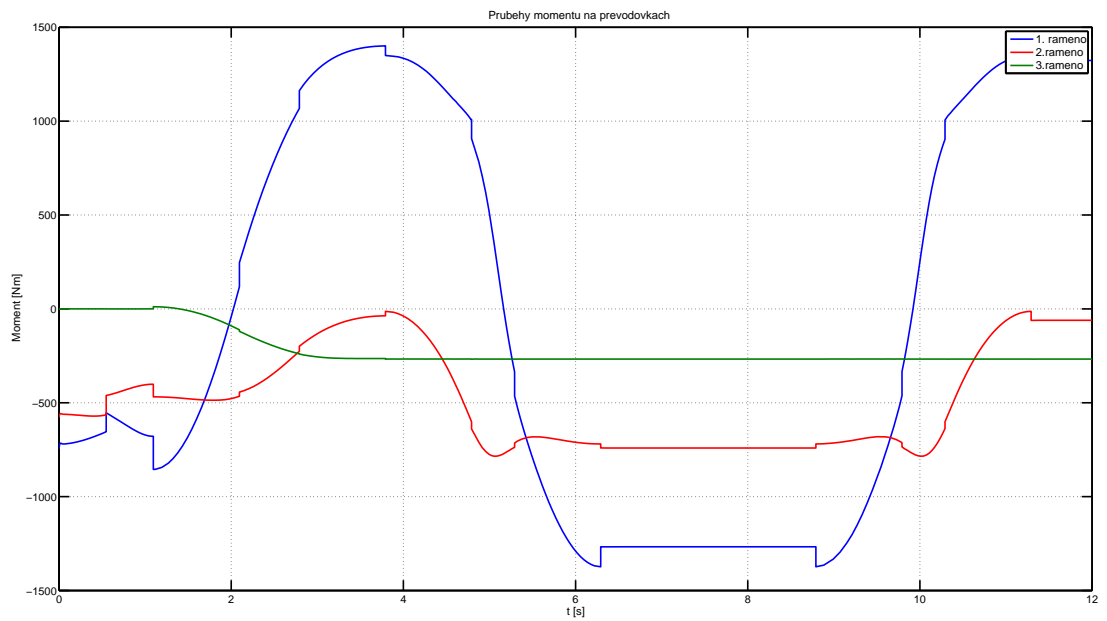
Obrázek 51: Sledování požadované polohy.



Obrázek 52: Chyba sledování požadované polohy.



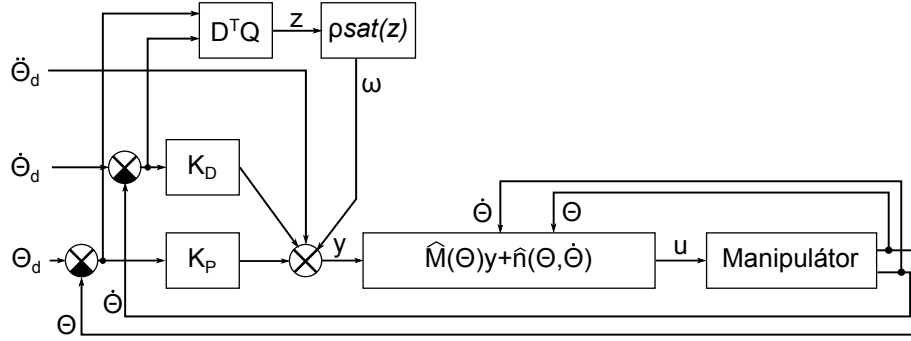
Obrázek 53: Chyba polohování efektoru.



Obrázek 54: Akční zásahy jednotlivých regulátorů.

10 Robustní řízení

První metoda, kterou zkusíme použít pro odstranění neurčitosti v dynamickém modelu, bude robustní řízení. Tato metoda má téměř stejnou strukturu jako uvedené centralizované řízení (viz. Obr. 55). Je zde pouze navíc přidán člen, který pomocí reléového řízení zajišťuje robustnost vzhledem ke znalosti dynamického modelu.



Obrázek 55: Schéma robustní metody.

Pro přehlednost nejprve přepíšeme zatím uvedené vztahy do tvaru v souladu s odvozením provedeném v [1]. Zde je dynamický model zapsaný ve tvaru:

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + n(\Theta, \dot{\Theta}) = u \quad (10.1)$$

kde:

$$n(\Theta, \dot{\Theta}) = \dot{\Theta}^T C(\Theta)\dot{\Theta} + G(\Theta)$$

Pokud uvažujeme řízení ve tvaru:

$$u = M(\Theta)y + n(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (10.2)$$

pak po dosazení řízení do dynamického modelu získáme (viz. Kap. 9):

$$y = \ddot{\Theta}$$

V případě, že známe pouze odhad dynamického modelu (\hat{M} a \hat{n}), bude řízení ve tvaru:

$$u = \hat{M}(\Theta)y + \hat{n}(\Theta, \dot{\Theta}) \quad (10.3)$$

Dosazením tohoto zákona řízení do dynamického modelu (10.1) získáme:

$$M\ddot{\Theta} + n = \hat{M}y + \hat{n}$$

Matice M je z principu invertovatelná. Jedná se o matici setrvačnosti, která je pozitivně definitní, a proto lze vypočítat její inverzi a psát:

$$\ddot{\Theta} = M^{-1}(\hat{M}y + \hat{n} - n) + y - y = y + (M^{-1}\hat{M} - I)y + M^{-1}\tilde{n} = y - \eta \quad (10.4)$$

kde člen η vyjadřuje nejistotu odhadu:

$$\eta = (I - M^{-1}\hat{M})y - M^{-1}\tilde{n}$$

Jak je vidět, tak v tomto případě již novým vstupem y neovlivňujeme přímo zrychlení, ale je zde navíc přítomna nejistota η , která je dána nepřesnou znalostí dynamického modelu. Dále uvažujme akční zásah PD regulátoru:

$$y = \ddot{\Theta}_d + K_d(\dot{\Theta}_d - \dot{\Theta}) + K_p(\Theta_d - \Theta)$$

Dosazením tohoto vztahu do (10.4) získáme:

$$\eta + \ddot{\Theta} = y = \ddot{\Theta}_d + K_d\dot{\tilde{\Theta}} + K_p\tilde{\Theta} \Rightarrow \ddot{\tilde{\Theta}} + K_d\dot{\tilde{\Theta}} + K_p\tilde{\Theta} = \eta$$

Dále přepíšeme rovnici (10.4) do tvaru:

$$\ddot{\Theta} - \ddot{\Theta}_d + \ddot{\Theta}_d = y - \eta \Rightarrow \ddot{\tilde{\Theta}} = \ddot{\Theta}_d - y + \eta$$

a zavedeme stav systému jako:

$$\xi = \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} \\ \dot{\tilde{\Theta}} \end{bmatrix}$$

Dále upravíme vztah:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Theta}} \\ \ddot{\tilde{\Theta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Theta}} \\ \ddot{\Theta}_d - y + \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\Theta}} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \ddot{\Theta}_d - y + \eta \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} \\ \dot{\tilde{\Theta}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} (\ddot{\Theta}_d - y + \eta) \end{aligned}$$

Volbou:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$$

kde H má rozměr $(2n \times 2n)$ a D $(2n \times n)$, lze uvedený vztah přehledněji zapsat jako:

$$\dot{\xi} = H\xi + D(\ddot{\Theta}_d - y + \eta) \quad (10.5)$$

Problém sledování požadované trajektorie pak můžeme převést na problém hledání zákona řízení y , které stabilizuje systém (10.5). Návrh řízení je potom založen na předpokladu, že i když neznáme nejistotu odhadu η , tak lze určit v jakém rozsahu se tato nejistota pohybuje. Hledaný zákon řízení pak musí zajistit stability pro celý rozsah, ve kterém se může η nacházet.

Dále zvolíme:

$$y = \ddot{\Theta}_d + K_d\dot{\tilde{\Theta}} + K_p\tilde{\Theta} + \omega \quad (10.6)$$

kde $K_d\dot{\tilde{\Theta}} + K_p\tilde{\Theta}$ je zásah PD regulátoru, člen $\ddot{\Theta}_d$ je dopředná vazba na požadované zrychlení a člen ω má garantovat robustnost vůči nejistotě η . Zavedením matice $K = [K_p \quad K_d]$ a úpravou (10.6) získáme:

$$y = \ddot{\Theta}_d + K_d\dot{\tilde{\Theta}} + K_p\tilde{\Theta} + \omega = \ddot{\Theta}_d + [K_p \quad K_d] \begin{bmatrix} \tilde{\Theta} \\ \dot{\tilde{\Theta}} \end{bmatrix} + \omega = \ddot{\Theta}_d + K\xi + \omega$$

Tento získaný vztah dosadíme do systému (10.5):

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= H\xi + D(\ddot{\Theta}_d - y + \eta) = H\xi + D(\ddot{\Theta}_d - \ddot{\Theta}_d - K\xi - \omega + \eta) = \\ &= H\xi - DK\xi + D(\eta - \omega)\end{aligned}\quad (10.7)$$

Zavedením matice \tilde{H} :

$$\tilde{H} = H - DK$$

se získaný vztah zjednoduší na:

$$\dot{\xi} = \tilde{H}\xi + D(\eta - \omega)\quad (10.8)$$

kde:

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -K_p & -K_d \end{bmatrix}$$

Nyní je třeba určit parametr ω . K jeho určení použijeme Ljapunovovu teorii stability. Budeme uvažovat kandidáta na Ljapunovovu funkci:

$$V(\xi) = \xi^T Q \xi > 0 \quad \forall \xi \neq 0\quad (10.9)$$

Ljapunovova funkce musí být kladná pro všechna nenulová ξ , což je splněno pro volbu Q jako pozitivně definitní matice s rozměrem $(2n \times 2n)$. Derivace \dot{V} vyjde:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \dot{\xi}^T Q \xi + \xi^T Q \dot{\xi} = (\tilde{H}\xi + D(\eta - \omega))^T Q \xi + \xi^T Q (\tilde{H}\xi + D(\eta - \omega)) = \\ &= \xi^T (\tilde{H}^T Q + Q \tilde{H}) \xi + 2\xi^T Q D(\eta - \omega)\end{aligned}$$

Tato derivace musí být menší než nula. Začneme s prvním výrazem v rovnici. Matice \tilde{H} má všechna vlastní čísla se zápornou reálnou částí. Potom pro jakoukoli symetrickou pozitivně definitní matici P platí, že z rovnice:

$$\tilde{H}^T Q + Q \tilde{H} = -P\quad (10.10)$$

získáme řešení matice Q , které je symetrické a pozitivně definitní, což odpovídá požadavku kladenému na matici Q při volbě Ljapunovovy funkce (10.9). Po dosazení získáme:

$$\dot{V} = -\xi^T P \xi + 2\xi^T Q D(\eta - \omega)\quad (10.11)$$

Člen $-\xi^T P \xi$ je tedy negativně definitní a je vyřešen. Vyřešení druhého členu bude mírně složitější. Nejprve zavedeme $z = D^T Q \xi$. Tím může být druhý člen (10.11) přepsán jako $z^T(\eta - \omega)$. Dále zvolíme zákon řízení ω :

$$\omega = \frac{\rho}{\|z\|} z \quad \rho > 0$$

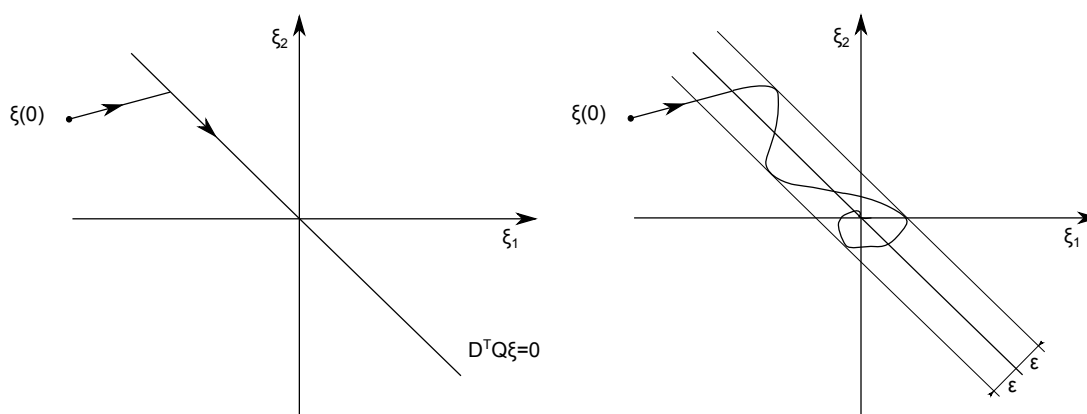
Tato volba odpovídá zavedení relé do obvodu. To se bude přepínat podle znaménka z , kdy z je dáno jako lineární kombinace chyby ξ . Proměnná z tak určuje přepínací nadplochu. Relé je ještě doplněno o zesílení ρ . Dále dosadíme řízení ω do proměnné z :

$$z^T(\eta - \omega) = z^T\eta - \frac{\rho}{\|z\|}z^Tz \leq \|z\|\|\eta\| - \rho\|z\| = \|z\|(\|\eta\| - \rho)$$

Tento vztah nám říká, že pro dostatečně velké ρ ($\rho \geq \|\eta\|$) bude výraz $z^T(\eta - \omega)$ menší nebo roven nule. Tím je dokázáno, že derivace Ljapunovovy funkce (10.11) bude vždy záporná ($\forall \xi \neq 0$):

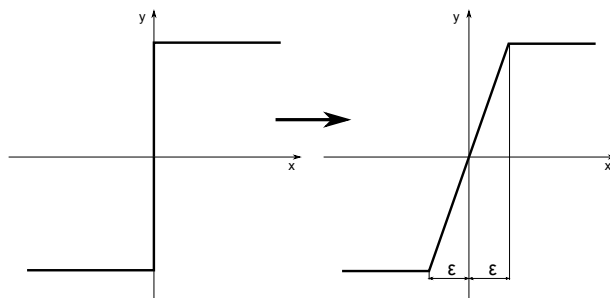
$$\dot{V} = -\xi^T P \xi + 2z^T(\eta - \frac{\rho}{\|z\|}z) < 0 \quad \forall \xi \neq 0$$

Volba dostatečně velkého ρ , tak „přebije“ neurčitost η a systém (10.8) je stabilní a konverguje do nuly. To znamená, že je tak získána nulová odchylka od požadované trajektorie. Na Obr. 56 vlevo je znázorněn průběh konvergence. Systém se nejprve z počátečních podmínek dostane na přepínací nadplochu $z = D^T Q \xi = 0$ a po ní poté konverguje do nuly. Zde ovšem nastává problém v tom, že pro dosažení takového průběhu konvergence by bylo nutné, aby použité relé spínalo s nekonečnou frekvencí.



Obrázek 56: Průběh chyby trajektorie s robustním řízením.

Relé proto můžeme aproximovat například pomocí nasycení (viz. Obr. 57). U saturace je nutné zvolit parametr ε . Ten určuje strmost přechodu mezi saturačními mezemi. Pro volbu $\varepsilon \rightarrow 0$ bychom opět získali relé. Při použití této aproximace již ale nedostaneme konvergenci chyby trajektorie přímo po přepínací nadploše. Ta bude konvergovat podél přepínací nadplochy v okolí daném pásem o velikosti 2ε , viz. Obr. 56 vpravo.



Obrázek 57: Zavedení saturace.

Nyní již můžeme přistoupit k volbě parametrů regulátoru. PD regulátor použijeme totožný jako u centralizované metody:

$$\omega_n = 120, \quad \xi = 0.8$$

$$K_P = \begin{bmatrix} 14400 & 0 & 0 \\ 0 & 14400 & 0 \\ 0 & 0 & 14400 \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} 192 & 0 & 0 \\ 0 & 192 & 0 \\ 0 & 0 & 192 \end{bmatrix}$$

Dále zvolíme:

$$\rho = 10, \quad \varepsilon = 0.1$$

Nakonec ještě zbývá určit matici Q. Pro její určení je nutné nejprve zvolit matici P, viz. (10.10). Její volbu provedeme stejně jako v [6]:

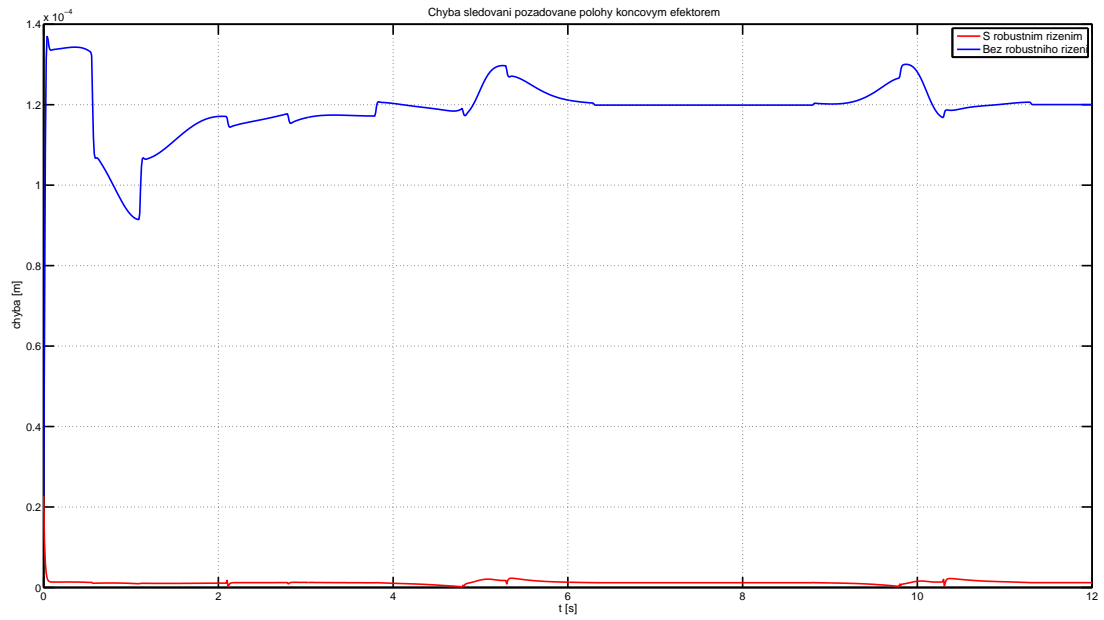
$$P = \begin{bmatrix} 2K_P^2 & 0 \\ 0 & 2K_D^2 - 2K_P \end{bmatrix}$$

Pro tuto volbu potom lze analyticky vyjádřit matici Q jako:

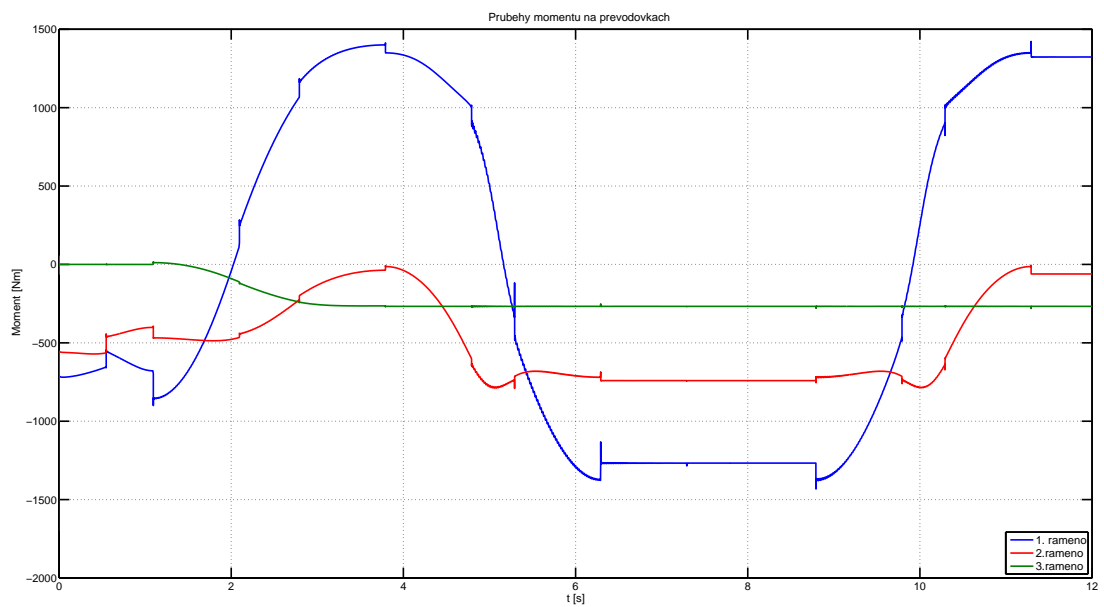
$$Q = \begin{bmatrix} 2K_P K_D & K_P \\ K_P & K_D \end{bmatrix}$$

Na Obr. 58 je uvedeno porovnání vzdálenosti koncového efektoru od požadované hodnoty pro centralizované a robustní řízení. Je zřejmé, že pokud není zapojena část obvodu zajišťující robustnost, tak sledování polohy vykazuje trvalou regulační odchylku. Po zavedení robustního řízení je tato odchylka minimalizována. Pro její úplné odstranění by mohlo být zmenšen člen ε . Tím by ale mohl nastat problém s přílišnou agresivností robustního členu.

Na Obr. 59 jsou uvedeny průběhy točivých momentů motorů. Z grafů je místy vidět určité „zvlnění“ průběhů momentů, kdy se začne projevovat přidávaný robustní člen.



Obrázek 58: Chyba polohování koncového efektoru.



Obrázek 59: Akční zásahy jednotlivých regulátorů.

11 Adaptivní řízení

Jako poslední způsob řízení použijeme adaptivní metodu. Ta využívá možnosti přepsání dynamického modelu do lineárního tvaru vůči určitým parametrům (viz. Identifikace), kdy jsou tyto parametry při řízení neustále odhadovány. Ideálně je pak po ustálení odhadů k jejich skutečným hodnotám manipulátor řízen v podstatě pouze přímou vazbou pomocí inverzní dynamiky.

Uvažujeme tedy dynamický model ve tvaru:

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} + G(\Theta) = Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta})\Pi = u \quad (11.1)$$

kde Π je vektor parametrů a Y je matice regresorů (viz. Kap ...). Nejprve budeme uvažovat, že dynamický model známe dokonale, a podíváme se, zda bude uvažovaný způsob řízení stabilní. Budeme uvažovat zákon řízení:

$$u = M(\Theta)\ddot{\Theta}_r + C(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta}_r + G(\Theta) + K_D\sigma \quad (11.2)$$

kde K_D je pozitivně definitní matice. Člen $K_D\sigma$ odpovídá PD akčnímu zásahu na chybu σ , $\dot{\Theta}_r$ a $\ddot{\Theta}_r$ volíme jako:

$$\dot{\Theta}_r = \dot{\Theta}_d + \Lambda\tilde{\Theta}, \quad \ddot{\Theta}_r = \ddot{\Theta}_d + \Lambda\dot{\tilde{\Theta}}$$

Členy $\dot{\Theta}_r$ a $\ddot{\Theta}_r$ jsou tedy voleny jako lineární kombinace požadované rychlosti, resp. zrychlení a vážené chyby v poloze, resp. rychlosti ($\tilde{\Theta} = \Theta_d - \Theta$, $\dot{\tilde{\Theta}} = \dot{\Theta}_d - \dot{\Theta}$). Váha chyby je dána pozitivně definitní diagonální maticí Λ . Touto volbou se mimo jiné vyhneme nutnosti řešit problém s měřením zrychlení, protože zde používáme pouze požadované zrychlení $\ddot{\Theta}_r$. Chyba σ je pak volena jako:

$$\sigma = \dot{\Theta}_r - \dot{\Theta} = \dot{\Theta}_d + \Lambda\tilde{\Theta} - \dot{\Theta} = \dot{\tilde{\Theta}} + \Lambda\tilde{\Theta} \quad (11.3)$$

Nyní dosadíme zákon řízení (11.2) do dynamického modelu (11.1):

$$\begin{aligned} M(\Theta)\ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} + G(\Theta) &= M(\Theta)\ddot{\Theta}_r + C(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta}_r + G(\Theta) + K_D\sigma \Rightarrow \\ \Rightarrow M(\Theta)(\ddot{\Theta}_r - \ddot{\Theta}) + C(\Theta, \dot{\Theta})(\dot{\Theta}_r - \dot{\Theta}) + K_D\sigma &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow M(\Theta)\dot{\sigma} + C(\Theta, \dot{\Theta})\sigma + K_D\sigma &= 0 \end{aligned} \quad (11.4)$$

Dále budeme uvažovat kandidáta na Ljapunovovu funkci:

$$V(\sigma, \tilde{\Theta}) = \frac{1}{2}\sigma^T M(\Theta)\sigma + \frac{1}{2}\tilde{\Theta}^T A\tilde{\Theta} > 0 \quad \forall \sigma, \tilde{\Theta} \neq 0$$

Je zřejmé, že takto zvolená funkce je vždy kladná pro $\forall \sigma, \tilde{\Theta} \neq 0$. Matice $M(\Theta)$ je matice setrvačnosti, která je symetrická a pozitivně definitní. Matici A volíme také jako symetrickou a pozitivně definitní. Po zderivování získáme:

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \sigma^T M(\Theta) \dot{\sigma} + \frac{1}{2} \sigma^T \dot{M}(\Theta) \sigma + \tilde{\Theta}^T A \dot{\tilde{\Theta}} = \sigma^T (-C(\Theta, \dot{\Theta}) \sigma - K_D \sigma) + \frac{1}{2} \sigma^T \dot{M}(\Theta) \sigma + \tilde{\Theta}^T A \dot{\tilde{\Theta}} = \\ &= \frac{1}{2} \sigma^T (\dot{M}(\Theta) - 2C(\Theta, \dot{\Theta})) \sigma - \sigma^T K_D \sigma + \tilde{\Theta}^T A \dot{\tilde{\Theta}} = -\sigma^T K_D \sigma + \tilde{\Theta}^T A \dot{\tilde{\Theta}} \quad (11.5)\end{aligned}$$

kde využijeme, že platí $\dot{q}^T (\dot{M} - 2C) \dot{q} = 0$ (viz. [1]). Dále dosadíme za σ :

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\sigma^T K_D \sigma + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} = -(\dot{\tilde{\Theta}} + \Lambda \tilde{\Theta}) K_D (\dot{\tilde{\Theta}} + \Lambda \tilde{\Theta}) + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} = \\ &= -\dot{\tilde{\Theta}}^T K_D \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{\Theta}^T \Lambda K_D \Lambda \tilde{\Theta} + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} = \\ &= -\dot{\tilde{\Theta}}^T K_D \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{\Theta}^T \Lambda K_D \Lambda \tilde{\Theta} \quad (11.6)\end{aligned}$$

Oba členy jsou již z jejich volby pozitivně definitní a tudíž je derivace záporná a systém s takovýmto řízením je globálně asymptoticky stabilní. Nyní budeme uvažovat, že dynamický model nebudeme znát přesně, ale bude znám pouze jeho odhad. Budeme uvažovat zákon řízení:

$$u = \widehat{M}(\Theta) \ddot{\Theta}_r + \widehat{C}(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta}_r + \widehat{G}(\Theta) + K_D \sigma = Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}_r) \widehat{\Pi} + K_D \sigma \quad (11.7)$$

kde $\widehat{\Pi}$ (resp. \widehat{M} , \widehat{C} , \widehat{G}) představuje odhad vektoru parametrů (resp. dynamického modelu). Dosazením řízení (11.7) do dynamického modelu (11.1) získáme:

$$M(\Theta) \ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta} + G(\Theta) = \widehat{M}(\Theta) \ddot{\Theta}_r + \widehat{C}(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta}_r + \widehat{G}(\Theta) + K_D \sigma$$

kde zavedeme chybu odhadu dynamického modelu jako $\widetilde{M} = \widehat{M} - M$, $\widetilde{C} = \widehat{C} - C$ a $\widetilde{G} = \widehat{G} - G$. Po dosazení do předchozí rovnice získáme:

$$\begin{aligned}M(\Theta) \ddot{\Theta} + C(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta} + G(\Theta) &= \\ &= [\widetilde{M}(\Theta) + M(\Theta)] \ddot{\Theta}_r + [\widetilde{C}(\Theta, \dot{\Theta}) + C(\Theta, \dot{\Theta})] \dot{\Theta}_r + [\widetilde{G}(\Theta) + G(\Theta)] + K_D \sigma\end{aligned}$$

Po roznásobení a úpravě potom získáme:

$$\begin{aligned}M(\Theta) (\ddot{\Theta}_r - \ddot{\Theta}) + C(\Theta, \dot{\Theta}) (\dot{\Theta}_r - \dot{\Theta}) + K_D \sigma &= \\ &= -\widetilde{M} \ddot{\Theta}_r - \widetilde{C}(\Theta, \dot{\Theta}) \dot{\Theta}_r - \widetilde{G}(\Theta) = -Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}_r) \widetilde{\Pi}\end{aligned}$$

Výsledný vztah tedy je:

$$M(\Theta) \dot{\sigma} + C(\Theta, \dot{\Theta}) \sigma + K_D \sigma = -Y(\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}_r) \widetilde{\Pi} \quad (11.8)$$

Dále uvažujeme kandidáta na Ljapunovovu funkci:

$$V(\sigma, \tilde{\Theta}, \tilde{\Pi}) = \frac{1}{2} \sigma^T M(\Theta) \sigma + \tilde{\Theta}^T \Lambda K_D \tilde{\Theta} + \frac{1}{2} \tilde{\Pi}^T K_\pi \tilde{\Pi} > 0 \quad \forall \sigma, \tilde{\Theta}, \tilde{\Pi} \neq 0$$

První dva členy jsou jistě pozitivně definitní. Člen K_π volíme jako symetrickou pozitivně definitní matici a třetí člen je tudíž také kladný. Derivace Ljapunovovy funkce vyjde:

$$\dot{V} = \sigma^T M(\Theta)\dot{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma^T \dot{M}(\Theta)\sigma + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} + \tilde{\Pi}^T K_\pi \dot{\tilde{\Pi}}$$

Dále za $M(\Theta)\dot{\sigma}$ dosadíme z (11.8):

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sigma^T [-Y(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\tilde{\Pi} - C(\Theta, \dot{\Theta})\sigma - K_D\sigma] + \frac{1}{2}\sigma^T \dot{M}(\Theta)\sigma + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} + \tilde{\Pi}^T K_\pi \dot{\tilde{\Pi}} = \\ &= \frac{1}{2}\sigma^T [\dot{M}(\Theta) - 2C(\Theta, \dot{\Theta})]\sigma - \sigma^T K_D\sigma + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} + \tilde{\Pi}^T [K_\pi \dot{\tilde{\Pi}} - Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma] \end{aligned} \quad (11.9)$$

První člen je opět nulový a za σ dosadíme:

$$\dot{V} = -(\dot{\tilde{\Theta}} + \Lambda\tilde{\Theta})^T K_D (\dot{\tilde{\Theta}} + \Lambda\tilde{\Theta}) + \tilde{\Theta}^T 2\Lambda K_D \dot{\tilde{\Theta}} + \tilde{\Pi}^T [K_\pi \dot{\tilde{\Pi}} - Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma]$$

Po roznásobení již získáme výsledný vztah:

$$\dot{V} = -\dot{\tilde{\Theta}}^T K_D \dot{\tilde{\Theta}} - \tilde{\Theta}^T \Lambda K_D \Lambda \dot{\tilde{\Theta}} + \tilde{\Pi}^T [K_\pi \dot{\tilde{\Pi}} - Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma]$$

Jelikož jsou matice K_D a Λ voleny jako diagonální a pozitivně definitní, jsou první dva členy derivace záporné. Zbývá tedy vyřešit poslední člen. Položíme ho roven nule:

$$K_\pi \dot{\tilde{\Pi}} - Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\tilde{\Pi}} = K_\pi^{-1} Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma$$

a pokud budeme uvažovat, že skutečné parametry jsou konstantní ($\dot{\tilde{\Pi}} = 0$), získáme zákon adaptace:

$$\dot{\tilde{\Pi}} = K_\pi^{-1} Y^T(\Theta, \dot{\Theta}, \dot{\Theta}_r, \ddot{\Theta}_r)\sigma$$

Tímto zákonem adaptace tak docílíme vynulování posledního členu a máme tedy dokázanu stabilitu. Zde je nutné poznamenat, že se jedná pouze o důkaz stability. Konvergenci odhadu parametrů $\tilde{\Pi}$ k jejich skutečným hodnotám zajištěnu nemáme. Tato konvergence závisí také na volbě matice regresorů a použité trajektorii (viz. Kap. identifikace). Nyní již zkusíme realizovat uvedené řízení. Na Obr. 60 je uvedeno schéma této metody. Použijeme parametry:

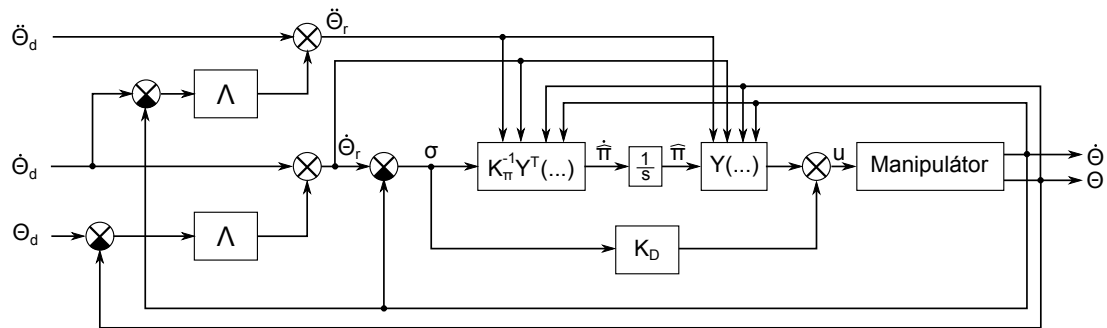
$$\Lambda = 10, \quad K_\pi = 0.000001I, \quad K_D = 2000I$$

Na Obr. 61 je uvedeno porovnání chyby polohy koncového efektoru pro případ, kdy je počáteční odhad znám přesně, a pro případ, kdy jsou všechny parametry zatíženy 10 % chybou. Z grafu je patrné, že pro přesný počáteční odhad je chyba velmi malá. Pro nepřesný odhad pak dochází nejprve k určitým zákmitům, které se se zpřesňováním odhadů utlumují. Po naladění parametrů je pak poloha sledována takřka totožně, jako při přesném počátečním odhadu.

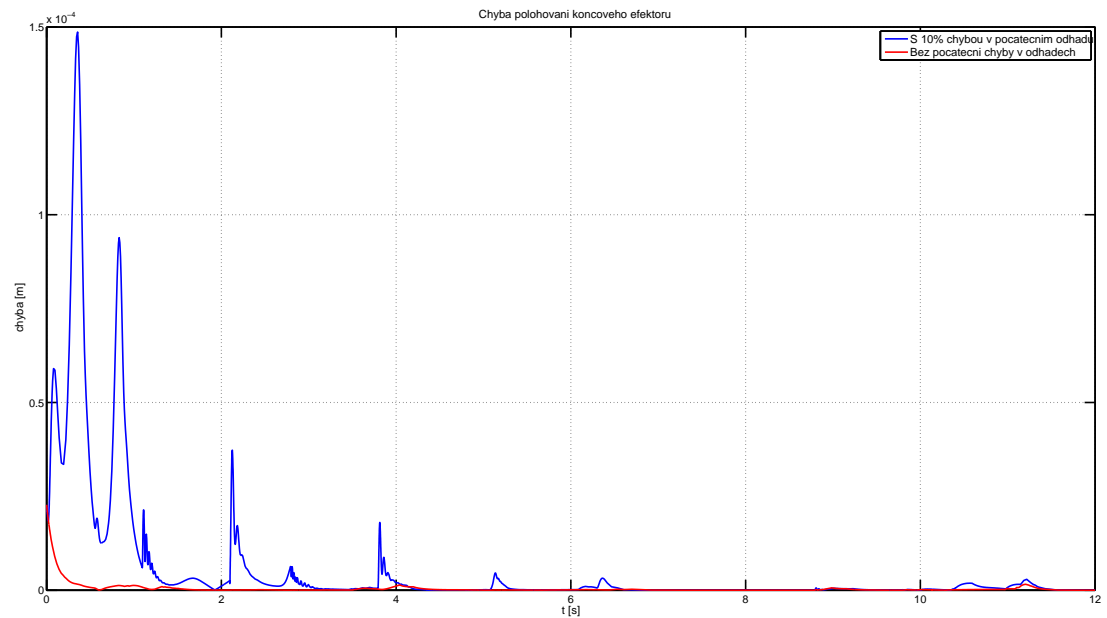
Na Obr. 62 jsou uvedeny průběhy točivých momentů pohonů pro případ nepřesného počátečního odhadu. Zde je jasně patrný průběh ladění parametrů, kdy je ze začátku

patrné kmitání při skokové změně požadovaného proudu, které ovšem se zpřesňováním odhadu vymizí.

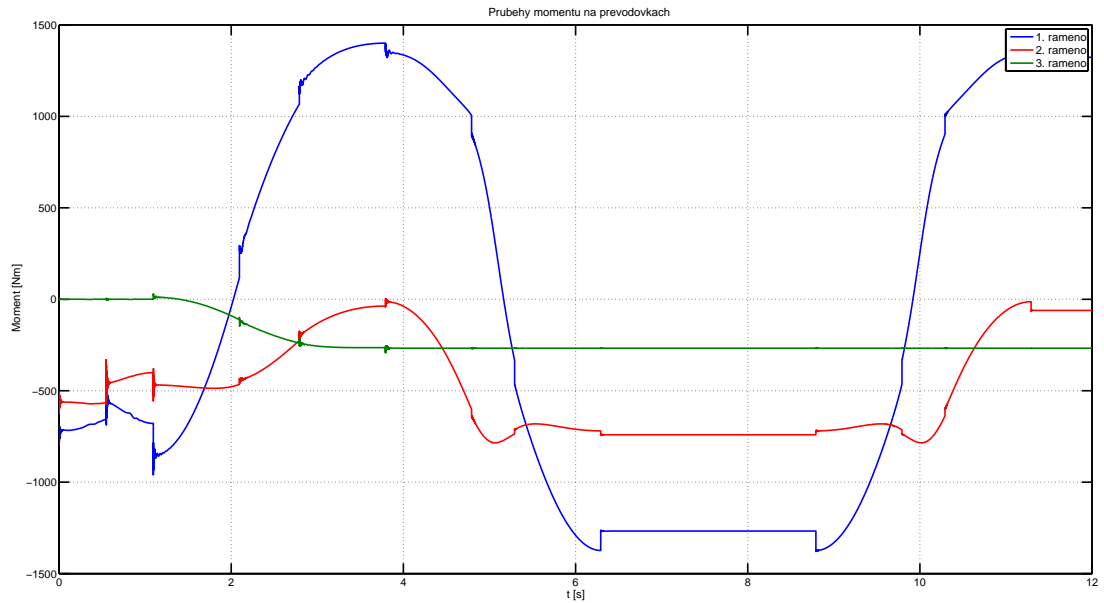
Na Obr. 63 je uveden průběh konvergence odhadovaných parametrů k jejich skutečným hodnotám. Z těchto grafů je patrný již zmíněný problém, kdy i přes to, že chyba efektoru v pořádku konverguje k nule, ne všechny odhady konvergují ke svým skutečným hodnotám.



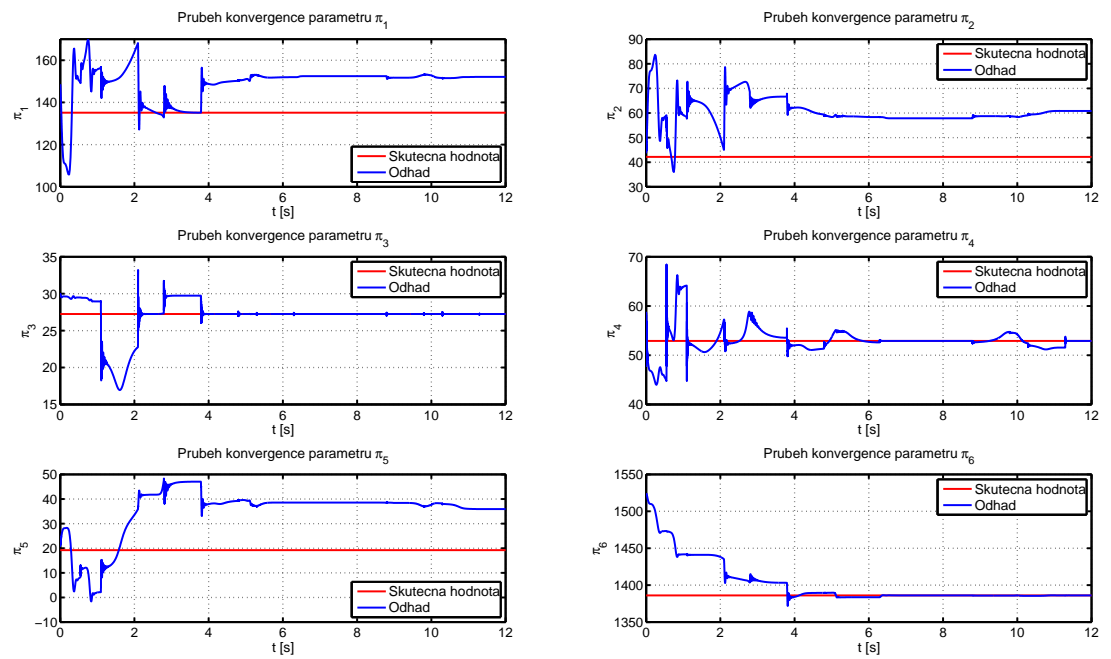
Obrázek 60: Schéma adaptivního řízení.



Obrázek 61: Chyba polohování koncového efektoru.



Obrázek 62: Akční zásahy jednotlivých regulátorů.



Obrázek 63: Konvergence odhadů parametrů.

12 Porovnání použitých metod řízení

Nyní provedeme porovnání použitých metod řízení mezi sebou. Při porovnávání budeme používat pomalý a rychlý průběh již použité trajektorie. Pomalá verze má maximální rychlost a zrychlení nastaveno jako $v_{max} = 1 \text{ rad/s}$ a $a_{max} = 1 \text{ rad/s}^2$. Rychlá varianta trajektorie má $v_{max} = 2.5 \text{ rad/s}$ a $a_{max} = 2.5 \text{ rad/s}^2$. Dále budeme zkoušet pro centralizované metody zavést 15% chybu odhadu vektorů parametrů. Nakonec budeme zkoušet simulovat uchopení předmětu manipulátorem. To provedeme tak, že na konec posledního ramena navíc připevníme předmět ve tvaru koule. Použijeme parametry: $m = 15 \text{ kg}$ a $r = 0.09 \text{ m}$. Pro tuto variantu s připevněným závažím opět provedeme již udevené experimenty.

Na Obr. 64 je uvedeno porovnání chyby sledování polohy koncového efektoru pro decentralizované a centralizované řízení při uvažování pomalé verze trajektorie. Je vidět, že nejhorších výsledků dosáhlo decentralizované řízení. Ovšem při uvažování břemena na koncovém rameni manipulátoru takřka nedošlo ke zhoršení chyby (pro tuto pomalou trajektorii). Centralizovaná metoda oproti tomu při dokonalé znalosti dynamiky vykazovala chybu takřka nulovou. Při zavedení chyby v podobě nepřesného dynamického modelu, případně přídatného břemena nebo kombinaci obojího, se výsledky zhorší a začnou se přibližovat přesnosti decentralizovaného řízení. Z uvedeného grafu je vidět, že větší vliv na zhoršení mělo neuvažované břemeno, než nepřesnost ve znalosti dynamického modelu.

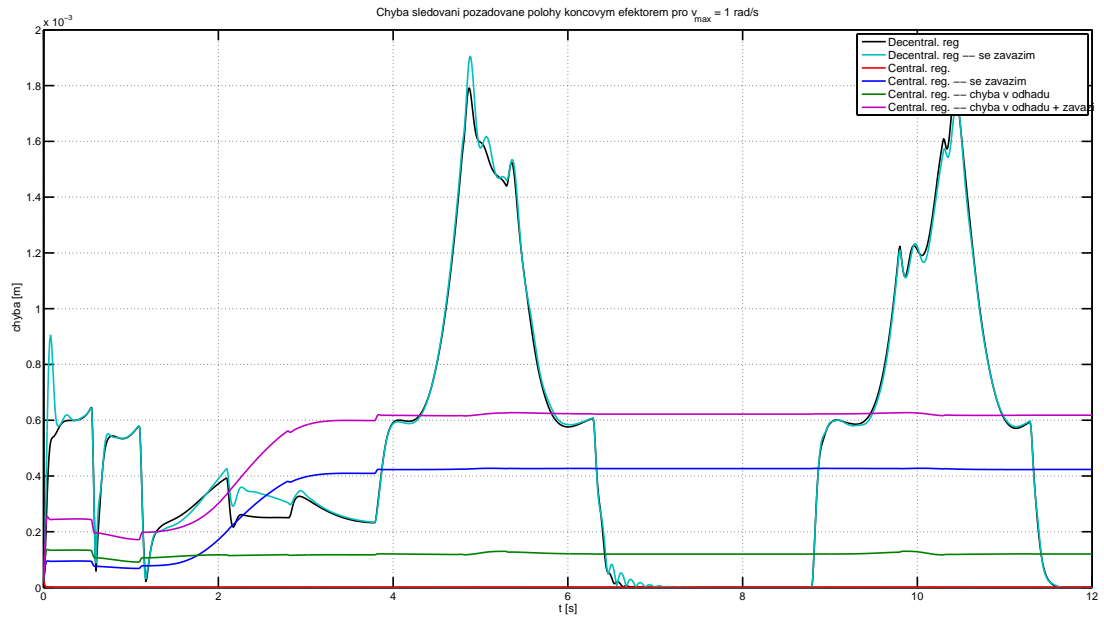
Na Obr. 65 je potom uvedeno porovnání decentralizovaného a centralizovaného řízení pro rychlou variantu trajektorie. Je vidět, že u decentralizovaného řízení došlo ke zhoršení výsledků a to zejména pro případ, kdy je použito nemodelované břemeno. Rozkmitání, které je patrné na průběhu chyby, je způsobeno při prudké změně požadované rychlosti, resp. zrychlení. Centralizované řízení vyšlo pro rychlou trajektorii v podstatě totožně jako pro pomalou trajektorii. Toto porovnání je uvedeno na Obr. 66.

Na Obr. 67 a 68 je uvedeno porovnání centralizovaného a robustního řízení pro nepřesný odhad dynamického modelu a pro kombinaci nepřesného modelu a břemena na konci manipulátoru. Pro pomalou trajektorii je chyba robustní metody vůči centralizované skoro nulová. Při použití rychlé trajektorie dojde ke zhoršení robustní metody při uvažování nepřesného dynamického modelu a břemena. Ale vůči tomuto případu u centralizovaného řízení je chyba stále poměrně menší.

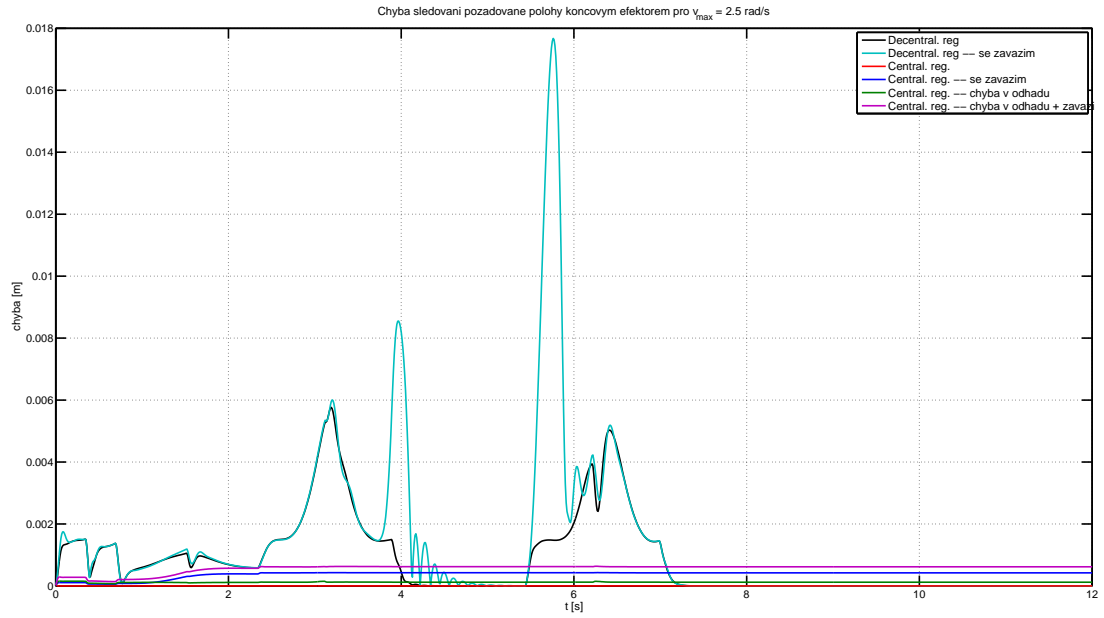
Na Obr. 69 a 70 je uvedeno porovnání centralizovaného a adaptivního řízení pro nepřesný odhad dynamického modelu a pro kombinaci nepřesného modelu a břemena na konci manipulátoru. Z průběhů je vidět, že při použití adaptivní metody není oproti ostatním metodám vcelku rozdíl v tom, jestli je uvažováno břemeno na konci manipulátoru či nikoli. Všechny průběhy adaptivního řízení sice obsahují počáteční kmitání při lazení parametrů, ale chyba při něm příliš nepřevyšuje chybu centralizovaných metod.

Na Obr. 71 a 72 je na závěr provedeno porovnání robustní a adaptivní metody. V tomto případě již porovnáme pouze nejhorší možný případ a to nepřesný dynamický model

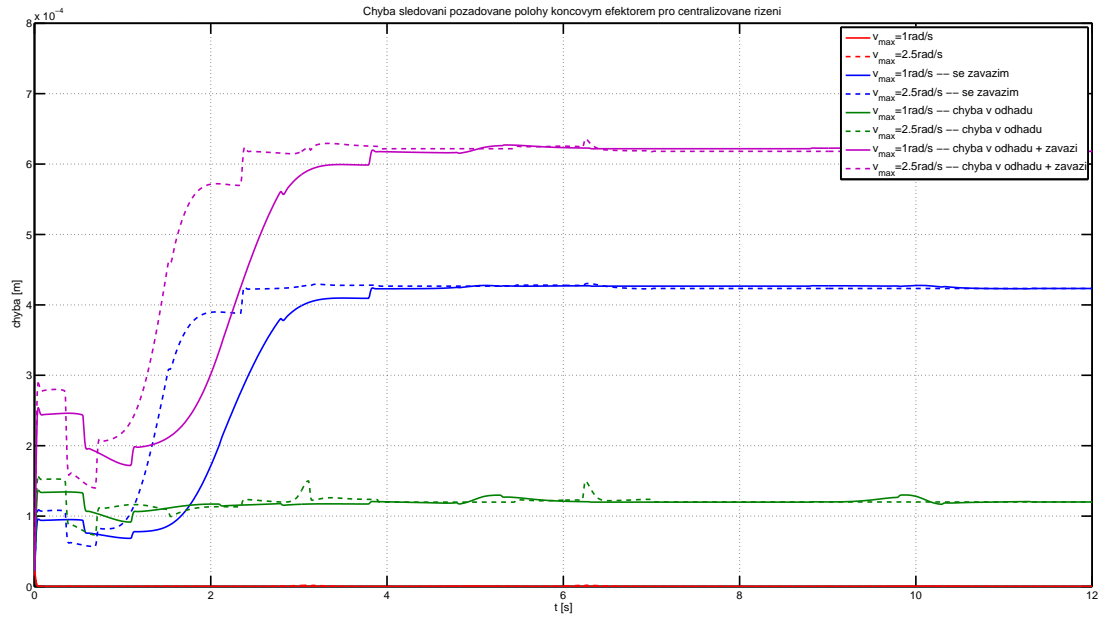
a břemeno na konci manipulátoru. Pro pomalou trajektorii má robustní řízení téměř konstantně stejnou chybu. Adaptivní řízení zpočátku kmitá, ale po nalazení parametrů již poskytuje mírně lepší výsledky. Pro rychlou trajektorii vykazuje adaptivní řízení obdobný průběh. Robustní řízení oproti tomu vykazuje chybu výrazně vyšší a to v případě prudkých změn rychlosti, resp. zrychlení.



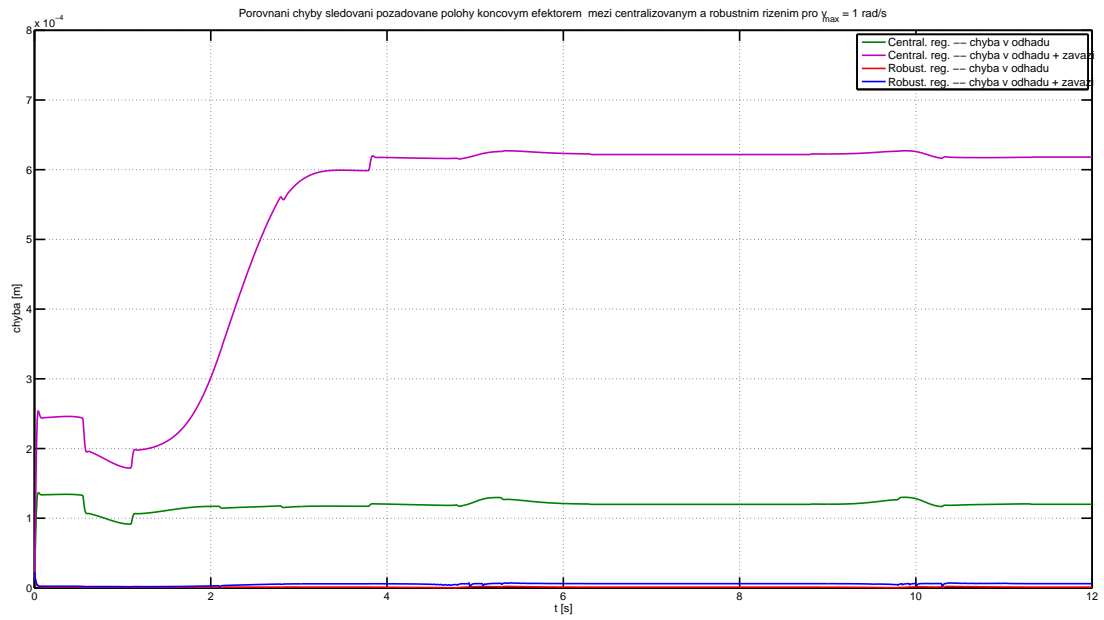
Obrázek 64: Porovnání decentralizovaného a centralizovaného řízení – pomalá trajektorie.



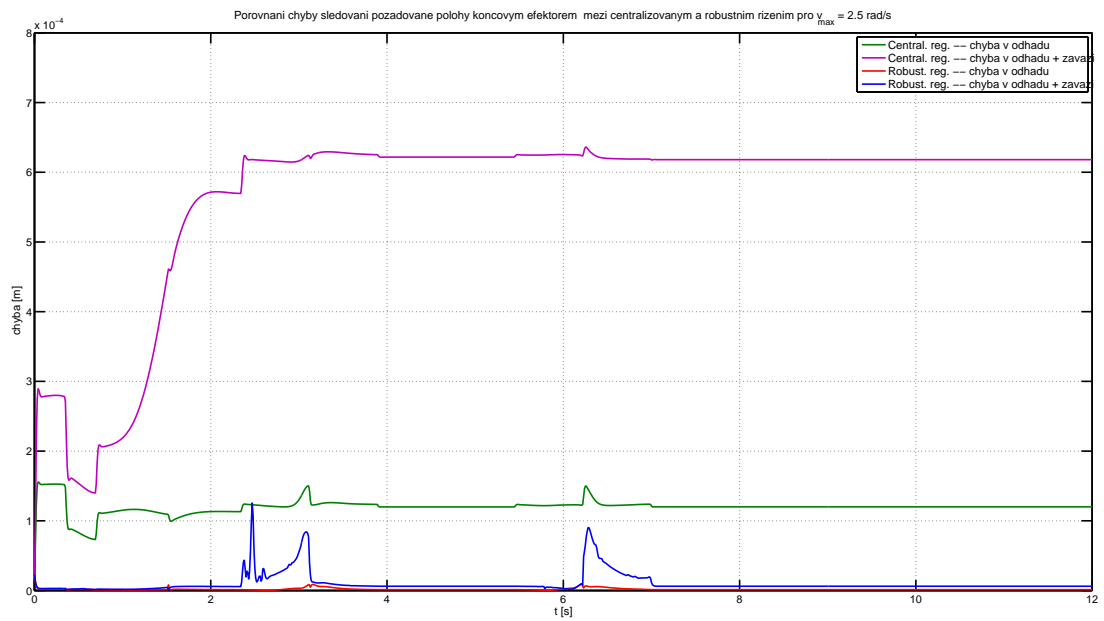
Obrázek 65: Porovnání decentralizovaného a centralizovaného řízení – rychlá trajektorie.



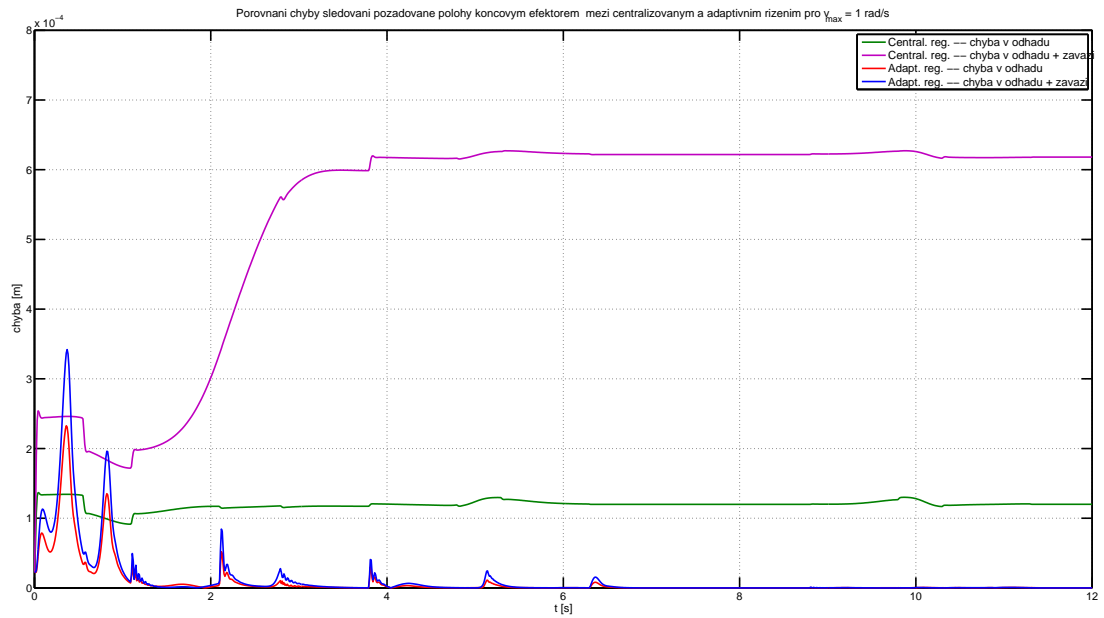
Obrázek 66: Porovnání centralizovaného řízení pro rychlou a pomalou trajektorii.



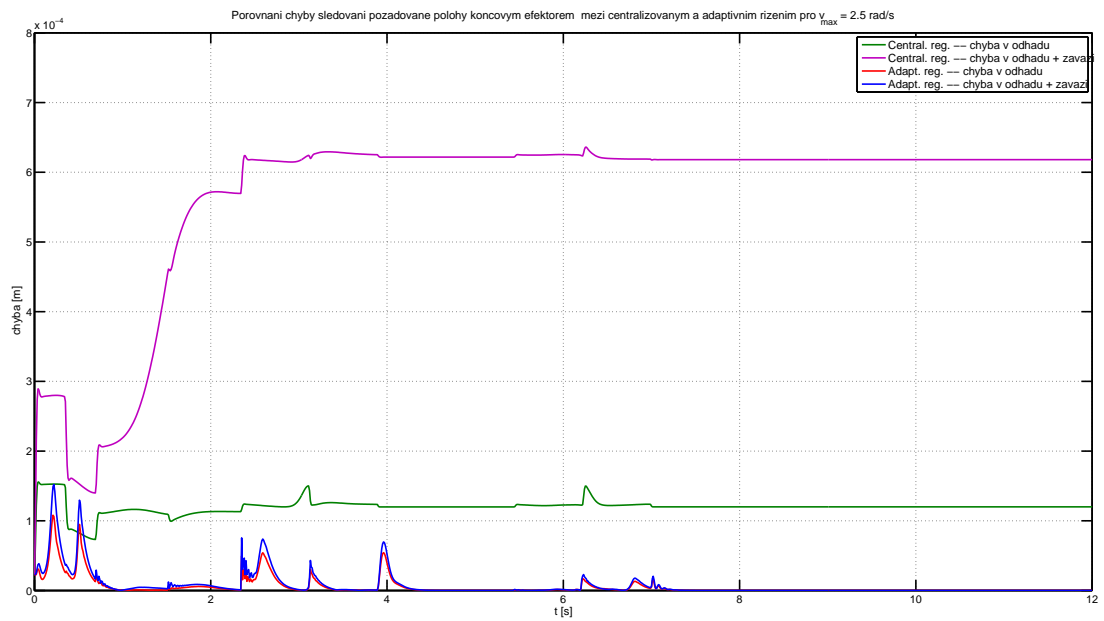
Obrázek 67: Porovnání centralizovaného a robustního řízení – pomalá trajektorie.



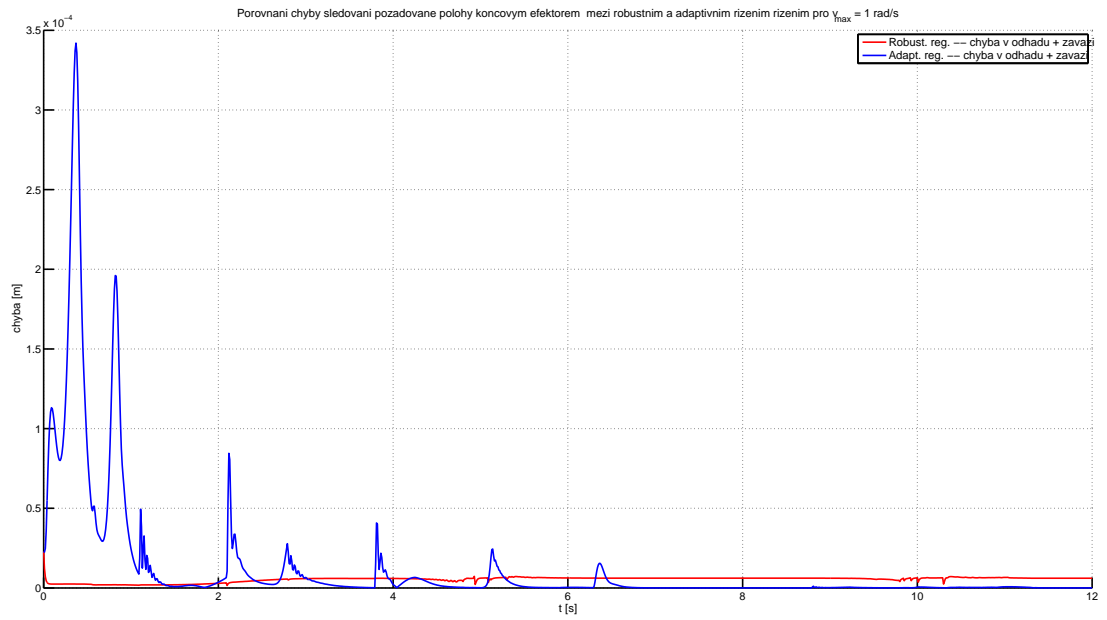
Obrázek 68: Porovnání centralizovaného a robustního řízení – rychlá trajektorie.



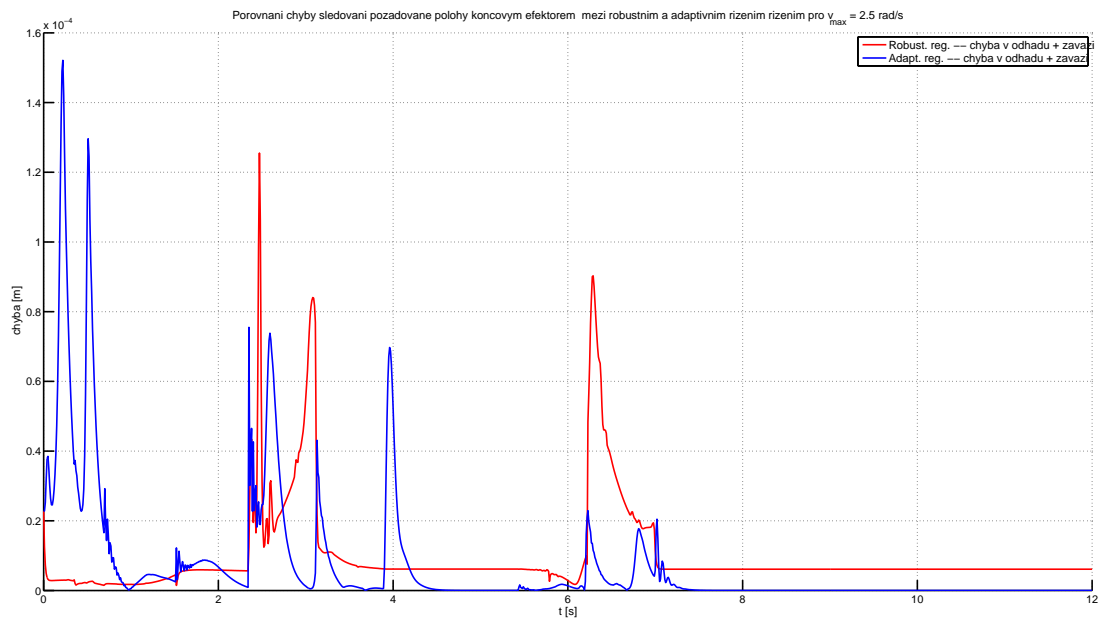
Obrázek 69: Porovnání centralizovaného a adaptivního řízení – pomalá trajektorie.



Obrázek 70: Porovnání centralizovaného a adaptivního řízení – rychlá trajektorie.



Obrázek 71: Porovnání robustního a adaptivního řízení – pomalá trajektorie.



Obrázek 72: Porovnání robustního a adaptivního řízení – rychlá trajektorie.

Použité metody ještě prozkoumáme z hlediska přesnosti orientace efektoru, tedy budeme vyhodnocovat chybu mezi skutečným a požadovaným natočením manipulátoru. Grafy pro tuto chybu již nebudeme uvádět, protože poskytují stejné závěry jako porovnání chyby vzdálenosti.

Kromě uvedených grafů ještě provedeme určení maximální chyby a průměrné kvadratické chyby (RMS) pro průběh chyby vzdálenosti a chyby polohování. V Tab. 21, 22, 23 a 24 jsou uvedeny tyto chyby pro decentralizované, centralizované, robustní a adaptivní řízení. Z tabulek je zřejmé, že hodnoty určených chyb odpovídají již výše uvedenému komentáři.

Druh trajektorie	Chyba vzdálenosti		Chyba orientace	
	Max. chyba [$10^{-4} m$]	RPM [$10^{-4} m$]	Max. chyba [$10^{-4} rad$]	RPM [$10^{-4} rad$]
pomalá traj.	17.9150	6.9480	7.5831	2.4467
pomalá traj. + závaží.	19.0560	7.0100	8.6848	2.7298
rychlá traj.	57.6380	18.5450	22.4063	7.3249
rychlá traj. + závaží	176.7210	35.6870	120.7029	22.1165

Tabulka 21: Získané výsledky decentralizované metody.

Druh trajektorie	Chyba vzdálenosti		Chyba orientace	
	Max. chyba [$10^{-4} m$]	RPM [$10^{-4} m$]	Max. chyba [$10^{-4} rad$]	RPM [$10^{-4} rad$]
pomalá traj.	0.2274	0.0081	0.0735	0.0026
pomalá traj. + chyba odhadu	1.3708	1.1937	0.7844	0.2425
pomalá traj. + chyba odhadu a závaží	6.2717	5.5934	6.8022	5.6583
rychlá traj.	0.2274	0.0110	0.0735	0.0032
rychlá traj. + chyba odhadu	1.5611	1.2027	0.9581	0.3120
rychlá traj. + chyba odhadu a závaží	6.3601	5.5952	6.7750	5.6066

Tabulka 22: Získané výsledky centralizované metody.

Druh trajektorie	Chyba vzdálenosti		Chyba orientace	
	Max. chyba [$10^{-4} m$]	RPM [$10^{-4} m$]	Max. chyba [$10^{-4} rad$]	RPM [$10^{-4} rad$]
pomalá traj. + chyba odhadu	0.2274	0.0147	0.0735	0.0034
pomalá traj. + chyba odhadu a závaží	0.2274	0.0555	0.0735	0.0556
rychlá traj. + chyba odhadu	0.2274	0.0259	0.0735	0.0043
rychlá traj. + chyba odhadu a závaží	1.2550	0.2057	7.0663	0.7172

Tabulka 23: Získané výsledky robustní metody.

Druh trajektorie	Chyba vzdálenosti		Chyba orientace	
	Max. chyba [$10^{-4} m$]	RPM [$10^{-4} m$]	Max. chyba [$10^{-4} rad$]	RPM [$10^{-4} rad$]
pomalá traj. + chyba odhadu	2.3270	0.2792	0.3520	0.0417
pomalá traj. + chyba odhadu a závaží	3.4196	0.4108	0.6738	0.0731
rychlá traj. + chyba odhadu	1.0801	0.1758	0.3240	0.0322
rychlá traj. + chyba odhadu a závaží	1.5211	0.2472	0.3135	0.0580

Tabulka 24: Získané výsledky adaptivní metody.

13 Závěr

V této práci byl nejprve odvozen úplný kinematický popis – tedy přímá a inverzní kinematika pro polohu, rychlost a zrychlení. Dále byly určeny pohybové rovnice manipulátoru pomocí Lagrangeovy metody.

Prostřední část práce se zabývala problematikou identifikace dynamického modelu a to zejména určením linearity v dynamickém modelu mezi určitými parametry. Zde se ukázalo, že volba těchto parametrů není jednoznačná a ne každá volba poskytuje korektní výsledky. Dále byly diskutovány možnosti použití různých vstupních signálů. Jako nejuniverzálnější se ukázalo použití součtu harmonických funkcí. Tento signál dokáže dobře vybudit dynamiku manipulátoru a jeho periodických vlastností lze využít při určování rychlosti a zrychlení. Tímto problémem se zabývá závěr této kapitoly. Pro identifikaci je totiž nutné znát průběhy poloh, rychlostí a zrychlení, kdy zejména zrychlení je obtížně měřitelné. Zde je uvedena možnost použití derivačních filtrů a dále možnost derivace ve frekvenčním spektru nebo provedení derivace pomocí určení koeficientů Fourierovy řady. Poslední dvě metody jsou ovšem použitelné pouze pro zmíněný signál ve formě součtu harmonických funkcí. V závěru je zmíněna zajímavá metoda pro identifikaci s názvem DIDIM, která potřebuje pro identifikaci měřit pouze průběh točivých momentů motorů a poskytuje velmi přesné výsledky.

Závěrečná část práce je věnována problematice řízení manipulátorů. Nejprve je odvozeno v praxi běžně používané decentralizované kaskádní řízení. Dále jsou uvedeny metody pro centralizované řízení, které využívají identifikovaný dynamický model. Ze závěrečného porovnání metod se ukázalo, že decentralizovaná regulace poskytuje uspokojivé výsledky pouze pro pomalé pohyby manipulátoru. Pokud bychom vyžadovali rychlejší pohyby, tak by bylo potřeba použít centralizovanou metodu řízení. Ta je ovšem závislá na přesné znalosti dynamického modelu, jinak se začne projevovat trvalá regulační odchylka, kterou není schopen použitý PD regulátor odregulovat. Odstranění tohoto problému by mohlo spočívat v doplnění integrátoru, tedy použití PID regulátoru místo PD regulátoru. My jsme se ale zabývali jinými možnostmi odstranění neurčitosti, a to robustním a adaptivním řízením.

Robustní řízení vychází z centralizované metody, kdy je pouze doplněn člen zajišťující dodatečné reléové řízení. Pro pomalou trajektorii je takřka odstraněna trvalá regulační odchylka. Pro rychlou trajektorii byly výsledky obdobné, pouze v případě velkých změn v rychlosti, resp. zrychlení, kdy je nutné dodatečným reléovým řízením odstranit větší chybu v dynamice, chyba vzroste, ale stále je menší než při centralizovaném řízení.

Adaptivní metoda pak poskytovala také velmi dobré výsledky. Nepříjemnost této metody ale spočívala v mírném počátečním kmitání při ladění určovaných parametrů. Po nalazení je již chyba minimální a srovnatelná nebo mírně lepší než robustní řízení.

Literatura

- [1] SCIAVICCO, L., SICILIANO, B., *Modelling and Control of Robot Manipulators*, Springer, London, 2005
- [2] ŠIMANDL, M., *Identifikace systémů a filtrace*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 1995
- [3] SWEVERS, J., VERDONCK, W., DE SCHUTTER, J., *Dynamic Model Identification for Industrial Robots*, IEEE CONTROL SYSTEM MAGAZINE, October 2007
- [4] GAUTIER, M., JANOT, A., VANDANJON, P., *DIDIM: A New Method for the Dynamic Identification of Robots from only Torque Data*, IEEE International Conference on Robotics and Automation Pasadena, CA, USA, May 19–23, 2008
- [5] MELICHAR, J., *Lineární systémy 1*, Západočeská univerzita v Plzni, Plzeň, 2010
- [6] LEWIS, F., DAWSON, A., ABDALLAH, Ch., *Robot Manipulator Control: Theory and Practice*, Taylor & Francis Inc, New York, 2004
- [7] <http://www.rexcontrols.cz/manipulator-agebot-1>, Řídicí systém manipulátoru pro chemicky agresivní prostředí (EuroTec JKR, ZČU)

Přílohy

$$m_1(\Theta) = \begin{bmatrix} J_{t_1} + m_1 l_{t_1}^2 + J_{t_2} + m_2(l_1^2 + l_{t_2}^2 + 2l_1 l_{t_2} c_2) + J_{t_3} + m_3(l_1^2 + l_2^2 + l_{t_3}^2 + 2l_1 l_2 c_2 + 2l_1 l_{t_3} c_2 c_3 - 2l_1 l_{t_3} s_2 s_3 + 2l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_1 l_{t_2} c_2) + J_{t_3} + m_3(l_2^2 + l_{t_3}^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1 l_{t_3} c_2 c_3 - l_1 l_{t_3} s_2 s_3 + 2l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_3} + m_3(l_{t_3}^2 + l_1 l_{t_3} c_2 c_3 - l_1 l_{t_3} s_2 s_3 + l_2 l_{t_3} c_3) \end{bmatrix}$$

$$m_2(\Theta) = \begin{bmatrix} J_{t_2} + m_2(l_{t_2}^2 + l_1 l_{t_2} c_2) + J_{t_3} + m_3(l_2^2 + l_{t_3}^2 + l_1 l_2 c_2 + l_1 l_{t_3} c_2 c_3 - l_1 l_{t_3} s_2 s_3 + 2l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_2} + m_2 l_{t_2}^2 + J_{t_3} + m_3(l_2^2 + l_{t_3}^2 + 2l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_3} + m_3(l_{t_3}^2 + l_2 l_{t_3} c_3) \end{bmatrix}$$

$$m_3(\Theta) = \begin{bmatrix} J_{t_3} + m_3(l_{t_3}^2 + l_1 l_{t_3} c_2 c_3 - l_1 l_{t_3} s_2 s_3 + l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_3} + m_3(l_{t_3}^2 + l_2 l_{t_3} c_3) \\ J_{t_3} + m_3 l_{t_3}^2 \end{bmatrix}$$

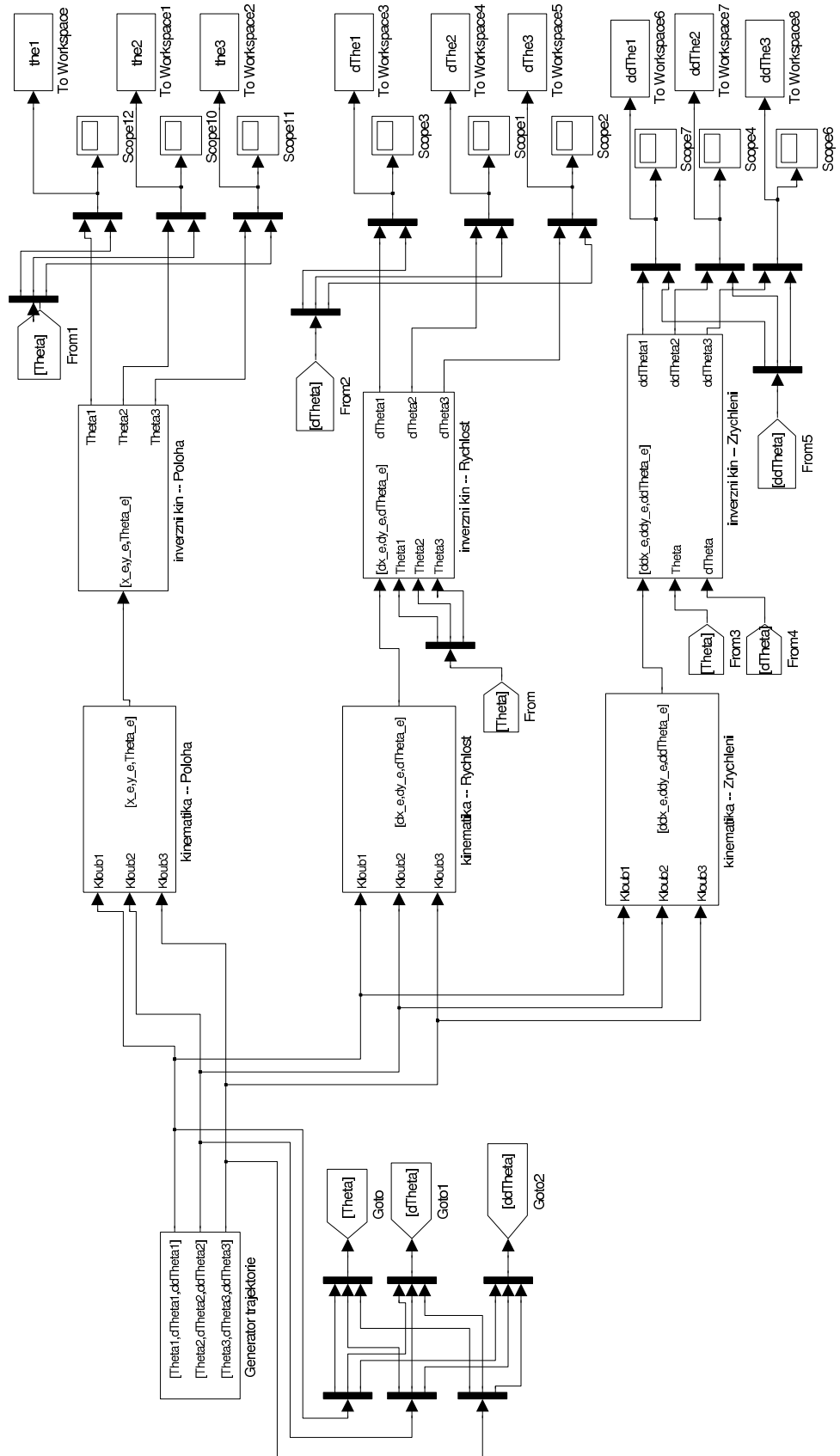
$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 & | & m_2 & | & m_3 \end{bmatrix}$$

$$C(:, :, 1)(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_{t_2} s_2 - m_3 l_1 l_2 s_2 - m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 & -m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 - m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \\ -m_2 l_1 l_{t_2} s_2 - m_3 l_1 l_2 s_2 - m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 & -m_2 l_1 l_{t_2} s_2 - m_3 l_1 l_2 s_2 - m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 & -m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 - m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \\ -m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 - m_3 l_2 l_{t_3} s_3 & -m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 - m_3 l_2 l_{t_3} s_3 & -m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 - m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 - m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \end{bmatrix}$$

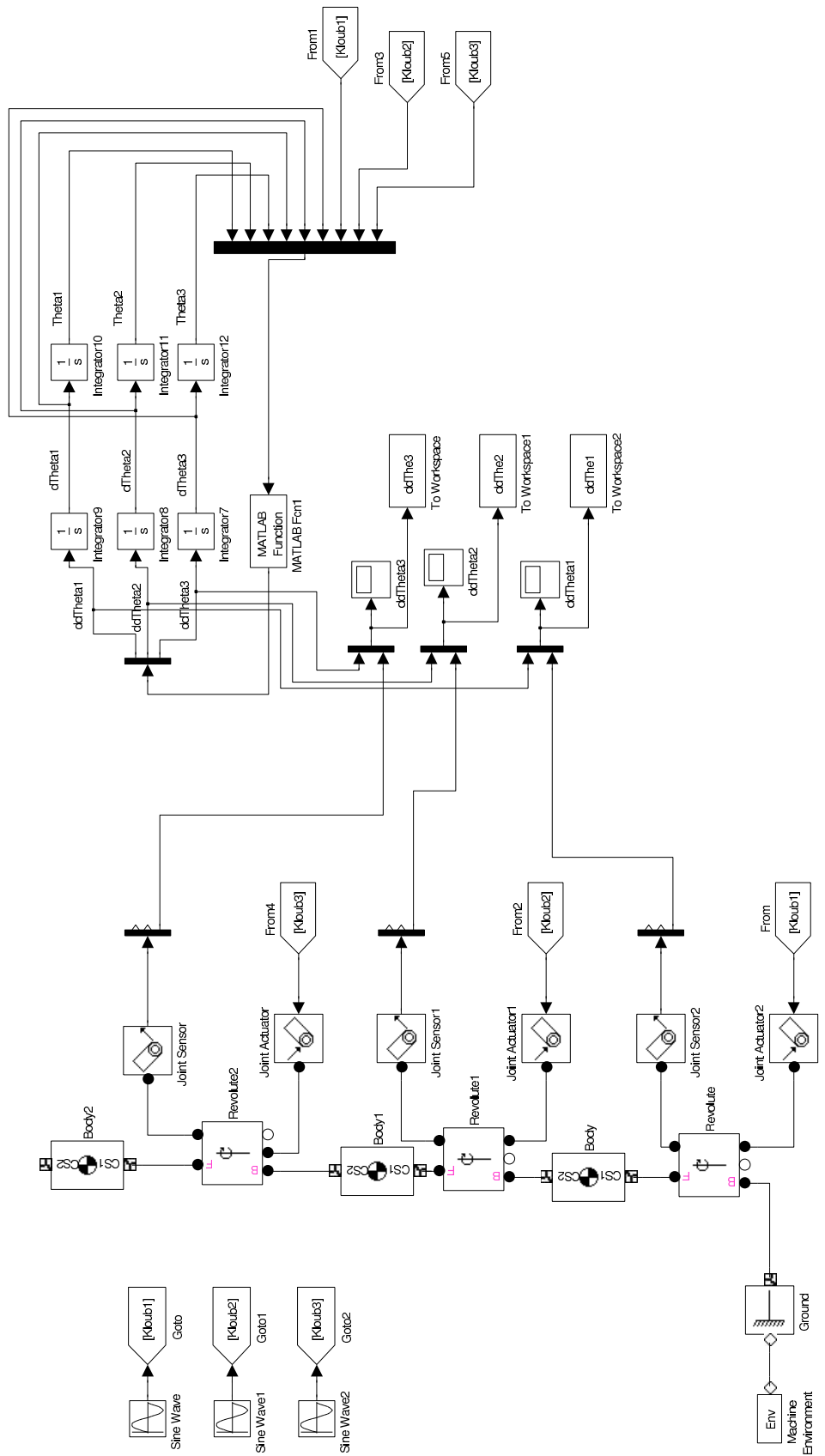
$$C(:, :, 2)(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_1 l_{t_2} s_2 + m_3 l_1 l_2 s_2 + m_3 l_1 l_{t_3} s_2 c_3 + m_3 l_1 l_{t_3} c_2 s_3 & 0 & -m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \\ 0 & 0 & -m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \\ -m_3 l_2 l_{t_3} s_3 & -m_3 l_2 l_{t_3} s_3 & -m_3 l_2 l_{t_3} s_3 \end{bmatrix}$$

$$C(:, :, 3)(\Theta) = \begin{bmatrix} m_3 l_2 l_{t3} s_3 + m_3 l_1 l_{t3} s_2 c_3 + m_3 l_1 l_{t3} c_2 s_3 & m_3 l_2 l_{t3} s_3 & 0 \\ m_3 l_2 l_{t3} s_3 & m_3 l_2 l_{t3} s_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_{t1} + m_2 l_1 + m_3 l_1) g s_1 + (m_2 l_{t2} + m_3 l_2) g s_{12} + m_3 l_{t3} g s_{123} \\ (m_2 l_{t2} + m_3 l_2) g s_{12} + m_3 l_{t3} g s_{123} \\ m_3 l_{t3} g s_{123} \end{bmatrix}$$



Obrázek 73: Schéma pro ověření kinematické transformace.



Obrázek 74: Schéma pro ověření dynamického modelu.

