

Západočeská univerzita v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Plzeň, 2013

Luboš Smolík



**FACULTY
OF APPLIED SCIENCES**
UNIVERSITY
OF WEST BOHEMIA

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Luboš Smolík

**Analýza dynamických vlastností rotorů
turbodmychadel**

Anotace

Tato práce je motivována problémy dynamiky lehkých rychloběžných rotorů, jako jsou např. rotory turbodmychadel pro automobilové motory. Specifickým prvkem těchto rotorů je uložení pomocí kluzných ložisek s plovoucími volnými kroužky a tedy se dvěma olejovými filmy v jednom ložisku. V práci je podrobně popsáno odvození matematického modelu poddajného rotoru s tuhými kotouči a s kluznými ložisky a jsou shrnuty hlavní typy analýz z oblasti rotordynamiky. Na základě odvozené teorie byl v MATLABu zpracován programový prostředek FEMROT pro řešení úloh rotordynamiky, jehož vybrané výsledky jsou dále srovnávány s výsledky komerčního programového prostředku AVL EXCITE. Důležitou částí práce je popis sestavení výpočtového modelu rotoru reálného turbodmychadla a naladění parametrů sestaveného modelu s ohledem na experimentálně zjištěné vlastní frekvence rotoru. Vzhledem k malé váze rotoru, která ztěžuje využití standardní experimentální modální analýzy, byla navržena a zrealizována metoda měření vlastních frekvencí založená na akustické odezvě rotoru na vhodné buzení. Závěr práce je věnován vlastnímu srovnání výsledků dynamické analýzy reálného turbodmychadla provedené pomocí programů FEMROT a AVL EXCITE. Výsledky jsou zhodnoceny s ohledem na charakter jednotlivých přístupů k modelování a analýze rotoru implementovaných v obou programech.

Klíčová slova: dynamika rotorů, turbodmychadlo, kluzné ložisko, plovoucí kroužek, experimentální modální analýza, ladění parametrů.

Annotation

This thesis is motivated by the problems of lightweight high-speed rotors, e.g. by the problems of turbocharger rotors of automotive engines. Bearings of these rotors are designed as oil-film bearings with floating rings and therefore two fluid films are present in one bearing. Detailed derivation of the mathematical model of a flexible rotor with rigid discs and oil-film bearings is described in the thesis and main types of analyses in rotordynamics are summarized. The FEMROT software was developed in the MATLAB environment on the basis of introduced theory and its chosen results are further compared with the results obtained by the commercial software tool AVL EXCITE. The important part of the thesis is the description of the creation of a real turbocharger rotor model and its parameter tuning with respect to the measured rotor eigenfrequencies. The application of a standard experimental modal analysis can be very difficult for lightweight structures and thus the eigenfrequency measurement based on a rotor acoustic response on a suitable excitation was proposed and performed. The comparison of the results obtained by FEMROT and AVL EXCITE for the real turbocharger is shown in the end of the thesis. The results are evaluated with respect to the properties of particular modelling and analysis approaches implemented in both programs.

Keywords: rotordynamics, turbocharger, oil-film bearing, floating ring, experimental modal analysis, tuning of parameters.

Poděkování

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu diplomové práce Ing. Michalu Hajžmanovi, PhD. za čas strávený konzultacemi, pečlivým revidováním práce i cestováním mezi Plzní, Mladou Boleslaví a Mnichovem, dále Ing. Oldřichu Turečkovi, PhD. za neocenitelnou pomoc při realizaci experimentu a také firmám Škoda Auto s.r.o. za poskytnutí dat, různých podkladů a rotoru turbodmychalda a AVL List GmbH za poskytnutí licence programu AVL EXCITE Power Unit a příkladné vedení školení zaměřeného na ovládání uvedeného softwaru.

Velký dík patří rovněž mým nejbližším — manželce, rodičům a sourozencům. Snad toto poděkování alespoň částečně odčiní to, že jsem s nimi nemohl trávit tolik času, kolik bych chtěl.

Luboš Smolík

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem následující diplomovou práci vypracoval samostatně na základě konzultací s vedoucím práce a s využitím uvedených pramenů a literatury.

Vzhledem k tomu, že část pramenů byla napsána v anglickém jazyce, byl pro sjednocení českých a cizojazyčných termínů použit slovník [16].

V Plzni, 31. května 2013

Luboš Smolík

Obsah

Anotace	2
Annotation	2
Poděkování	3
Prohlášení	4
1 Úvod	7
1.1 Stručná historie oboru a přehled současného stavu	7
1.2 Cíle diplomové práce	10
2 Model rotoru	12
2.1 Modelování rotujících těles v pevném souřadném systému	12
2.2 Lokální matice prvků rotorové soustavy	13
2.2.1 Hřídelový konečný prvek z Kelvin-Voigtova materiálu	13
2.2.2 Tuhé těleso	26
2.2.3 Nehmotný viskoelastický člen	29
2.2.4 Radiální kluzné ložisko s parametry závislými na nominálních otáčkách	30
2.3 Sestavení globálních matic	34
3 Úlohy rotorové dynamiky	36
3.1 Modální analýza	36
3.1.1 Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu	36
3.1.2 Podmínky biortogonality a normování vlastních vektorů	38
3.1.3 Vizualizace vlastních tvarů kmitu	40
3.2 Analýza kritických otáček	41
3.2.1 Campbellův diagram	42
3.2.2 Iterační proces pro výpočet kritických otáček	43
3.3 Odezva na harmonické buzení	44
3.4 Přejížděvací odezva	47
4 Představení programových prostředí AVL EXCITE a FEMROT	49
4.1 AVL EXCITE Power Unit v2013	49
4.2 FEMROT 1.2.3 (Beta)	54
4.3 Základní rozdíly mezi modely rotorů v uvedených programech	56
5 Modelování turbodmychadla	58
5.1 Sestavení modelu rotoru	58
5.2 Experimentální modální analýza	61
5.2.1 Identifikace vlastních frekvencí z akustické odezvy	62

5.2.2	Realizace experimentu	62
5.2.3	Zpracování naměřených dat a odhad nejistoty měření	64
5.3	Ladění modelu podle výsledků experimentu	69
5.3.1	Ladění modelu turbodmychadla v jednoduché konfiguraci	69
5.3.2	Ladění modelu turbodmychadla v plné konfiguraci	70
5.4	Stanovení parametrů radiálních ložisek	76
5.5	Model v AVL EXCITE Power Unit	80
5.5.1	Popis těles	80
5.5.2	Popis vazeb	82
5.6	Příprava dat pro porovnání modelů	83
6	Závěr	84
6.1	Výsledky analýzy v programu FEMROT	84
6.2	Výsledky analýzy v AVL EXCITE Power Unit	85
6.3	Zhodnocení výstupů diplomové práce	90
	Literatura	92

1 Úvod

1.1 Stručná historie oboru a přehled současného stavu

Dynamika rotorových soustav, rotorová dynamika nebo moderněji rotordynamika je stále se rozvíjejícím, specializovaným oborem aplikované mechaniky, který se zabývá diagnostikou a predikcí dynamických vlastností rotorových soustav. Do oblasti rotordynamiky patří nejen výpočty a měření v oblasti energetiky prováděné na všech typech turbín a generátorech, ale i automobilového, leteckého a železničního průmyslu, kde se problémy týkají otáčivých částí motorů, hnacích ústrojí i náprav, dále strojírenství, těžebního průmyslu, počítačového průmyslu, v němž se řeší stabilita ploten pevných disků, a dalších odvětví. V běžném životě se s rotorovou dynamikou můžeme setkat například při vyvažování kol vozidel.

Rotordynamika je relativně starý vědní obor, a proto není jednoduché vystopovat a popsat její původ. Hlavními díly, které mapují vývoj tohoto vědního oboru a z nichž čerpá i tato kapitola, jsou přednáška [19] a příspěvek na Wikipedii [26]. Při sestavování medailonů byly využity různé firemní a univerzitní prospekty a publikace, které v referencích nejsou uvedeny. Některé letopočty uvedené v [19] nemusí souhlasit s letopočty uvedenými zde. Rozdíl je většinou způsobem skutečností, že v [19] jsou obvykle citovány anglické překlady díla, zatímco zde se autor pokusil odkazovat na díla původní.

Základy chování rotujících strojů a některé jevy spojené s provozem těchto zařízení byly pravděpodobně známy už v 1. polovině 19. století, kdy vrcholila průmyslová revoluce. První zaznamenaná analýza rotujícího hřídele ale pochází až z roku 1869, kdy William Rankine¹ sestavil matematický model hřídele o dvou stupních volnosti a na jeho základě predikoval, že při překročení určitých otáček, které nazval krouživé², dojde k nevratnému ohnutí hřídele. Lze ukázat, že deformace hřídele v Rankinově modelu po překročení krouživých otáček roste bez omezení.

Zanedbání některých jevů v Rankinově modelu, např. Coriolisova zrychlení, způsobilo takřka půl století dlouhou stagnaci ve vývoji rotačních strojů, neboť nad každým zařízením, které by mělo být provozováno při vysokých otáčkách, visel Damoklův meč v podobě Rankinových krouživých otáček, jež hrozily zničením rotoru.

V roce 1882 Gustav de Laval³ představil koncept impulzní parní turbíny a o sedm let později provozoval jeden z vyrobených kusů při nadkritických otáčkách. V roce 1894 Stanley Dunkerley⁴ na základě množství měření definoval v [4] pojem kritických otáček a vyslovil do-

¹**William John Macquorn Rankine** (1820 – 1872) byl skotský stavební inženýr a profesor mechaniky na univerzitě v Glasgow, který se proslavil především pracemi z oboru termodynamiky a stál mj. u zrodu lomové mechaniky. Za svůj život sepsal několik set publikací, z nichž největšího věhlasu dosáhly technické manuály vydané na přelomu 50. a 60. let 19. století.

²Anglicky *whirling speed*.

³**Gustav de Laval** (1845 – 1913) byl švédský inženýr a vynálezce, který přispěl k rozvoji energetiky četnými konstrukčními zlepšeními parní turbíny a kluzných ložisek, ale také mlékárenského průmyslu vynálezem Lavalovy odstředivky.

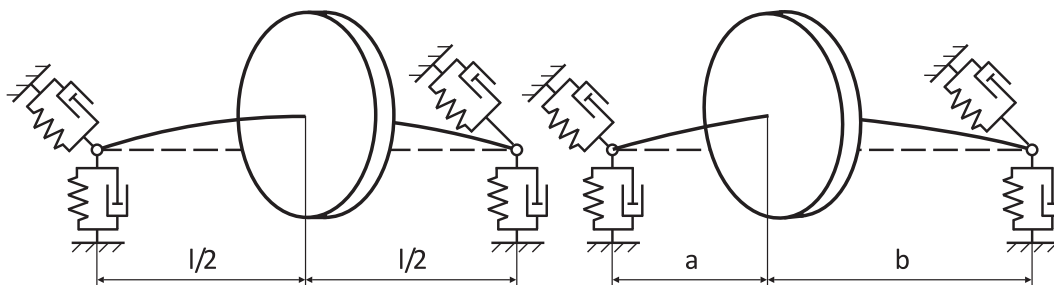
⁴**Stanley Dunkerley** (1870 – po 1919) byl anglický profesor zabývající se experimentální mechanikou, dynamikou a hydraulikou na machesterské univerzitě.

mněnku, že každý rotor má takové otáčky a tyto mohou být vypočteny bez ohledu na složitost systému. V úvodu své práce Dunkerley doslova uvádí:

Je dobře známo, že každý hřídel s jakkoliv malou nevyvážeností poháněný určitou úhlovou rychlostí se ohýbá a pokud není výchylka nějakým způsobem omezena, může se v hřídeli dokonce vytvořit trhlinka, přestože při vyšších otáčkách by se opět otáčel bez vychýlení. Zmíněná určitá úhlová rychlost, nebo též kritické otáčky, závisí na způsobu podepření hřídele, jeho velikosti a modulu pružnosti a na velikostech, hmotnostech a pozicích všech oběžných kol k němu připevněných.

Rok po Dunkerleyem publikoval August Föppl⁵ článek, v němž definuje souběžnou synchronní a protiběžnou asynchronní precesi a předpovídá podmínky, za nichž k uvedeným jevům dochází. I přes svou správnost byly uvedené výpočty a pozorování pozapomenuty a trvalo dalších 21 let, než Královská společnost roku 1916 pověřila Henryho Jeffcotta⁶, aby vyřešil rozpor mezi tehdy stále používanou a uznávanou Rankinovou teorií a experimentálními pozorováními provedenými například W. Kerrem, ukazujícími na existenci druhých kritických otáček, které v Rankinově modelu chyběly.

Jeffcott potvrdil Föpplovu teorii — přičemž o existenci Föpplovy práce pravděpodobně vůbec netušil, protože Föpplovo jméno ani dílo není uvedeno v odkazech na konci pojednání — že pro jednoduchý model rotoru o čtyřech stupních volnosti existuje stabilní řešení v oblasti nadkritických otáček a navíc rozšířil existující model o externí tlumení. Jednoduchý model rotující soustavy sestávající se z hmotného kotouče, který je symetricky nasazen na nehmotném hřídeli se dvěma podporami, viz Obr. 1.1 vlevo, je v anglosaských zemích na Jeffcottovu počest nazýván Jeffcottův rotor, řídice též Lavalův-Föpplův-Jeffcottův rotor. V kontinentální části Evropy se pro tento model vžilo označení Lavalův rotor.



Obrázek 1.1: Vlevo Lavalův rotor, vpravo Stodolův-Greenův rotor. Odvození matematických modelů a jejich detailní řešení je uvedeno např. v [6].

Jeffcottovo dílo, vydané v roce 1919, a také překotně se vyvíjející poválečný průmysl způsobily v oboru rotordynamiky doslova boom. Už v roce 1922 publikoval Aurel Stodola⁷ převratnou knihu *Parní a plynové turbíny*, v níž mj. shrnuje veškeré dosavadní poznatky, včetně

⁵ **August Föppl** (1854 – 1924) byl německý profesor technické mechaniky a grafické statiky na Technické univerzitě v Mnichově. Jedním z jeho synů byl **Ludwig Föppl** (1887 – 1976), strojní inženýr a profesor Technické univerzity v Drážďanech.

⁶ **Henry Homan Jeffcott** (1877 – 1937) byl irský profesor mechaniky a metrologie na univerzitách v Dublinu a Londýně a držitel několika patentů.

⁷ **Aurel Boleslav Stodola** (1859 – 1942) byl slovenský konstruktér, fyzik a vynálezce žijící ve Švýcarsku. Byl průkopníkem technické termodynamiky a jako jeden z prvních diskutoval vliv páry na dynamiku parní turbíny a koncentraci napětí ve vrubech. Vyučoval strojírenství na Švýcarském polytechnickém institutu v Zurichu, kde jedním z jeho žáků byl **Albert Einstein** (1879 – 1955).

dynamiky hřídelů se spojitě rozloženou hmotností, vyvažování rotorů a grafické metody sloužící k určení hodnoty kritických otáček. O dva roky později upravil Jeffcottův model a začal studovat vliv gyroskopického efektu na dynamiku tohoto rotoru, který je zobrazen na Obr. 1.1 vpravo a někdy bývá označen jako Stodolův-Greenův rotor. Vliv gyroskopických jevů však byl plně prozkoumán až po druhé světové válce Greenem (1948), Ludwigem Föppl⁴ (1948) a dalšími.

Ve 20. a 30. letech 20. století byly pozorovány a zaznamenány další jevy jako je nestabilita způsobená vnitřním tlumením (Newkirk, 1924 a Smith, 1933) a axiální asymetrií hřídele (Prandtl, 1918 a Smith, 1933) a asymetrickou tuhostí ložisek (Smith, 1933), nelineární chování kluzných ložisek (Newkirk a Taylor, 1925) a s ním spojené švihání rotoru, což je tekutinou vyvolaná samobuzená dopředná precese s frekvencí blízkou vlastní frekvenci ohybového tvaru rotoru, a samobuzené kmitání způsobené kontaktem rotoru se statorem (Baker, 1933).

Jeffcottův model i se Stodolovými úpravami přestával vyhovovat a to nejen z důvodu, že do něj bylo složité zahrnout některé uvedené úkazy, ale i kvůli rostoucí velikost a hmotnosti hřídelů (a tím pádem nižšímu poměru mezi hmotností nasazeného kotouče a hřídele) a vyššímu počtu podpor nebylo možné mnohé tehdejší rotory popsat a přesně vypočítat jejich vlastnosti jako jsou vlastní frekvence, kritické otáčky a ustálená odezva na buzení nevyvážkem. Zobecněním metody Nilse Myklestada⁸ pro výpočet vlastních frekvencí křídla letadla a obecných nosníkových konstrukcí publikované v 1944 a podobné metody Melvina Prohla⁹ pro stanovení vlastních frekvencí parní turbíny vymyšlené na konci 30. let 20. století, ale publikované až v roce 1945, vznikla tzv. metoda přenosových matic, která je obzvlášť vhodná pro složité systémy s větším množstvím ložisek.

Metoda přenosových matic byla v 60. a 70. letech dále rozvíjena především Jørgenem Lundem¹⁰ a doplněna o četné modely nelineárních jevů — za všechny budiž uveden Aleš Tondl¹¹, který roku 1965 publikoval práci o nelineární rezonanci zapříčiněnou olejovým filmem v kluzných ložiscích — ale se vstupem počítačů do komerčního sektoru začaly být stále častější pokusy o využití metody konečných prvků, která byla poprvé představena již ve 40. letech. Teprve v roce 1972 John F. Booker s Ronaldem L. Ruhllem představili fungující algoritmus pro výpočet 1D kontinua reprezentujícího rotující nosník pomocí MKP, který nicméně nezahrnoval vlivy momentů setrvačnosti, gyroskopických jevů a axiálních sil. Tyto efekty obsahovala až práce H. D. Nelsona and J. M. McVaugh z roku 1976. Vzhledem k tomu, že roku 1975 Robert Gasch vydal svoji *Rotordynamiku*, která shrnovala všechny dosavadní poznatky z oboru včetně vlivu ucpávek, nelineárních ložisek a rotace ohnutého hřídele a hřídele s trhlinou a jež byla v roce 1980 přeložena i do češtiny [7], zdá se, že složité prosazování metody konečných prvků bylo způsobeno především nedostatečnou výpočetní silou a pamětí počítačů a problémy s algoritmizací numerických metod pro výpočet vlastních čísel matic vysokých řádů.

2. polovina 70. a 80. léta přinesla prudký rozvoj výpočetní techniky a s tím spojený vývoj komerčních balíků pro výpočet úloh rotordynamiky, ale také digitalizaci měřicí techniky a první programy umožňující hromadné zpracování naměřených dat a jejich počítačovou vizualizaci. Na tomto místě je nutné zmínit jméno Donalda Bentlyho¹², který pod hlavičkou své firmy Bently

⁸**Nils Otto Myklestad** (1909 – 1985) byl americký fyzik a profesor na Univerzitě v Illinois. Na jeho počest uděluje Americká společnost pro mechaniku (ASME) od roku 1991 cenu N. O. Myklestada za přínos a inovace v oblasti vibrací ve strojírenství.

⁹**Melvin Albert Prohl** (1915 – 2005) byl americký inženýr, který vynikal především v oblasti konstrukce parních turbín. V roce 1999 obdržel cenu N. O. Myklestada za celoživotní přínos v oboru rotordynamiky.

¹⁰**Jørgen W. Lund** (1930 – 2000) byl dánský inženýr pracující část života v USA a průkopník metody přenosových matic. Ke sklonku života získal profesorský titul na Dánské technické univerzitě v Lyngby.

¹¹**Aleš Tondl** (1925 – dosud) je český fyzik, který proslul zejména pracemi v oblasti nelineární dynamiky.

¹²**Donald E. Bently** (1924 – 2012) byl americký inženýr a podnikatel, který se proslavil především jako inovátor

Nevada vyvíjel bezdotykové snímače výchylek a otáček už od 60. let a v roce 1980 představil diagnostický systém ADRE, jehož verze pro Windows z roku 1993 stále slouží jako vzor takřka pro všechny nově vyvíjené diagnostické softwary.

I přes zmíněné nové možnosti ještě v roce 1992 S. H. Crandall napsal, že komerční balíky pro rotorovou dynamiku stále svojí kvalitou i množstvím značně pokulhávají za mnohem robustnějšími programy pro výpočty v oblasti strukturální mechaniky. Zároveň dodal, že rozdíl je pravděpodobně způsoben skutečností, že příslušný trh je podstatně menší a technické problémy jsou mnohem složitější. Tento stav v podstatě trvá do dnešních dní a nově vyvíjené programy se často dostanou pouze k úzké skupině zákazníků. Seznam nejpoužívanějších komerčních řešení je k nalezení v příspěvku [26].

Přelom 20. a 21. století přinesl prohloubení znalosti rotordynamických problémů především díky užší spolupráci anglicky a neanglicky píšících autorů. V této době vycházejí mnohastránková pojednání o současném stavu oboru, za všechny anglicky psané či z němčiny do angličtiny přeložené publikace Krämera z roku 1993 [11], kolektivu autorů vedeným Gaschem, který v roce 2002 přepracoval, rozšířil a vydal [7], a Muszyńské z roku 2005 [14]. V češtině pak v uplynulých letech vyšla např. monografie [2].

V 21. století se stále nevyřešené problémy rotordynamiky už téměř netýkají klasické dynamiky, ale prolínají se s dalšími obory, konkrétně termodynamikou, hydrodynamikou aj. Jedná se o problémy, které jsou spojené s novými typy ložisek, např. magnetickými a kluznými s několika olejovými filmy, s vlivem vysokých teplot na chod zařízení a se studováním rychloběžných rotorů s nominálními otáčkami v řádu stovek tisíc ot/min. Hledají se také cesty umožňující monitorování stavu a chování turbín za chodu v prostředí o teplotě až 600 °C a tlaku až 20 MPa a určování zbytkové životnosti komponent bez nutnosti odstávky.

1.2 Cíle diplomové práce

Cílem této diplomové práce je vytvoření robustních základů, které budou sloužit jako východní bod pro další výzkum v oblasti dynamiky rychloběžných rotorů, jako jsou turbodmychadla pro automobilové motory, a s ní provázanými problémy spojenými s kluznými ložisky s dvěma olejovými filmy oddělenými volně uloženým kroužkem.

Uvedené téma je úzce provázáno s komerční sférou, konkrétně s verifikací výstupů programového balíku AVL EXCITE rakouské firmy AVL List GmbH, který primárně slouží pro navrhování hnacích a převodových ústrojí automobilů a výpočty jejich životnosti, akustické odezvy a chování v časové oblasti. Vzhledem k tomu, že součástí AVL EXCITE jsou algoritmy umožňující řešení nelineárních hydrodynamických vazeb, je program využitelný i pro výpočet rychloběžných rotorů. Takové rotory se jsou ale provozovány při nominálních otáčkách, které až stokrát převyšují provozní otáčky klikové hřídele či převodovky, a z toho důvodu může zanedbání jevů a sil závislých právě na nominálních otáčkách způsobit značné rozdíly mezi modelem a reálných rotorem.

Dalším cílem diplomové práce tedy bude osvojení si prostředí AVL EXCITE a porovnání vybraných modelových úloh s vlastním řešičem postaveným na metodě konečných prvků. Analýza rozdílů mezi výsledky získanými pomocí známé metody a programu, který se v podstatě chová jako černá skříňka — tj. jsou známy vstupy a výstupy, ale algoritmy a matematický model jsou z větší části výhradní znalostí výrobce programu — by měla dopomoci k sestavení

a průkopník v oblasti výroby měřicí techniky pro rotordynamiku. Založil firmu Bently Nevada, která v dnešní době působí celosvětově jako součást korporace GE Energy. V roce 1997 získal cenu N. O. Myklestada.

návodu použitelného při modelování rychloběžných rotorů pomocí AVL EXCITE a seznamu pouček týkajících se speciálního nastavení parametrů modelu, řešičů apod. Součástí tvorby konečněprvkového modelu bude popis ladění materiálových parametrů a geometrie tak, aby se výpočtový model co nejvíce shodoval s popisovaným tělesem.

Seznam cílů diplomové práce

- Odvození modelu rotoru pomocí metody konečných prvků.
- Sestavení vlastního výpočtového softwaru a algoritmizace některých úloh rotordynamiky, např. modální analýzy, výpočtu kritických otáček, ustálené odezvy a přechodové odezvy, sestavení Campbellova diagramu atp.
- Provedení experimentální modální analýzy lehkého rotoru.
- Ladění parametrů konečněprvkového modelu podle výsledků experimentální modální analýzy.
- Porovnání výsledků vybraných modelových úloh získaných vlastním softwarem a programovým balíkem AVL EXCITE.
- Možný úvod do problémů nelineární hydrodynamiky s cílem najít možnosti propojení existujících komerčních či na půdě univerzity vyvíjených řešičů s vlastním výpočtovým softwarem.

2 Model rotoru

Jak bylo naznačeno v předchozí kapitole a vyplývá i z [26], v současnosti nejpoužívanějším postupem pro sestavení matematických modelů rotorů je metoda konečných prvků, případně hybridní metody kombinující metodu konečných prvků s jiným přístupem, tedy např. uvažující spojitě rozloženou tuhost systému s hmotou soustředěnou do diskretních bodů. Přes tři čtvrtiny komerčních výpočtových prostředí specializovaných na rotorovou dynamiku používá model rotoru reprezentovaný 1D kontinuem, který sice plně nevyužívá výpočetní kapacitu, jíž disponují současné počítače, ale je výhodný hned z několika důvodů.

Asi největším kladem 1D modelu je, že při vhodné volbě souřadného systému není rotor ani žádný z jeho elementů unášen rotačním pohybem, díky čemuž v pohybových rovnicích nefigurují síly od Coriolisova zrychlení. Tím pádem lze velmi snadno odvodit a sestavit pohybové rovnice jednotlivých elementů. Další přednosti, jako je krátký výpočetní čas, snadná modifikovatelnost a rychlé nalezení potřebných uzlů, např. z důvodu připojení externích silových účinků, přímo souvisí s použitím 1D kontinua a z toho vyplývajícím nízkým počtem stupňů volnosti. Modelování v jediné dimenzi má i své nedostatky. Asi nejvýraznějšími z nich jsou silně limitovaná znalost napjatosti a poněkud složitější modelování axiálně nesymetrických hřídelů, především v komerčních softwarech — jen málo programů totiž umožňuje používat osově nesymetrické 1D elementy.

V této kapitole je odvozen 1D model rotujícího hřídele doplněný o tuhá tělesa, nehmotné viskoelastické členy a radiální ložiskové vazby.

2.1 Modelování rotujících těles v pevném souřadném systému

Souřadnicový systém, v němž se odvozují rovnice popisující kmitání 1D rotoru otáčejícího se konstantní úhlovou rychlostí, se obvykle volí tak, že jedna z os systému je totožná s osou rotace. Středisko hmotnosti vyváženého symetrického rotoru leží velmi blízko osy, kolem níž se systém otáčí. Je-li vzdálenost mezi osou otáčení a střediskem hmotnosti, tzv. excentricita, zanedbána, není středisko hmotnosti unášeno posuvným pohybem a v modelu se neobjeví Coriolisova síla, kterou lze vyjádřit jako

$$\mathbf{F}_c = m \mathbf{a}_c = -2m \boldsymbol{\omega}_u \times \mathbf{v}_r,$$

kde \mathbf{a}_c je Coriolisovo zrychlení, $\boldsymbol{\omega}_u$ je vektor úhlové rychlosti unášivého pohybu, \mathbf{v}_r je vektor rychlosti relativního pohybu a \times je operátor vektorového součinu.

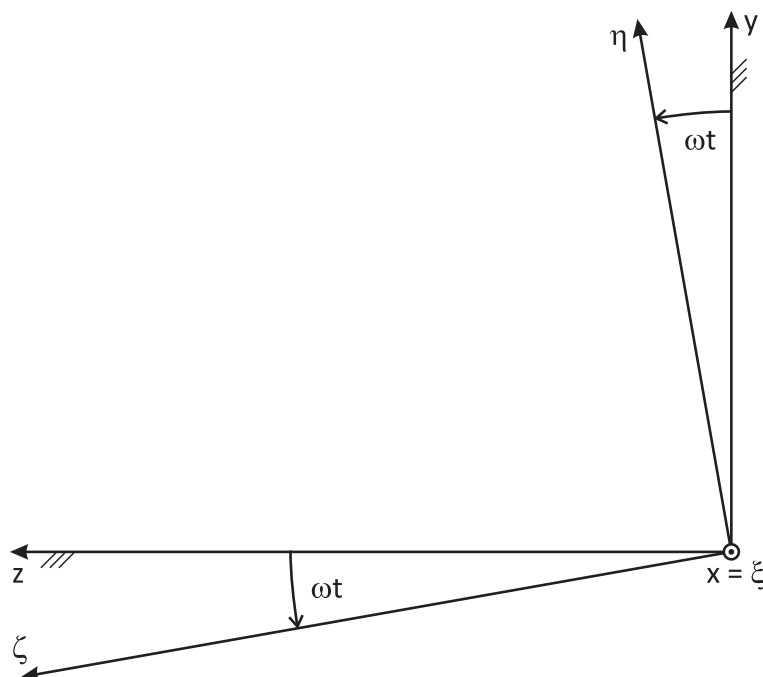
V česky psané a do češtiny přeložené literatuře, např. [2, 5, 7], se osa rotace obvykle ztotožňuje s osou x kartézské pravotočivé soustavy souřadnic x, y, z . Spojí-li se trvale dvě zbývající osy s rotujícím tělesem, nazývá se souřadnicový systém rotující a jednotlivé osy se označují jinými symboly, často řeckými písmeny ξ, η, ζ jako na Obr. 2.1, či symboly s apostrofy x', y', z' .

Vztahy mezi pevnými a rotujícími souřadnicemi mohou být snadno popsány trojicí rovnic

$$\begin{aligned} x &\equiv \xi, \\ y &= \eta \cos(\omega t) - \zeta \sin(\omega t), \\ z &= \eta \sin(\omega t) + \zeta \cos(\omega t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

kde ω je konstantní úhlová rychlost, kterou se otáčí rotující souřadnicový systém a t je čas.

Rotující souřadnicový systém se v komerční sféře příliš nevyužívá, ale své opodstatnění má, neboť umožňuje snadný popis rotujících sil a vnitřních účinků jako materiálového útlumu apod. Na druhou stranu se v něm velmi obtížně modelují anizotropní ložiska, zubové vazby a další vnější účinky. Vzhledem k tomu, že jedním z cílů této práce je analýza kluzných ložisek, je model rotoru odvozen v pevném souřadném systému. Detailní odvození modelu v rotujícím systému a možnosti transformace modelů z jednoho systému do druhého je možné nalézt v [2].



Obrázek 2.1: Pevný souřadnicový systém x, y, z se souřadnicovým systémem ξ, η, ζ rotujícím kolem osy $x \equiv \xi$ konstantní úhlovou rychlostí ω .

2.2 Lokální matice prvků rotorové soustavy

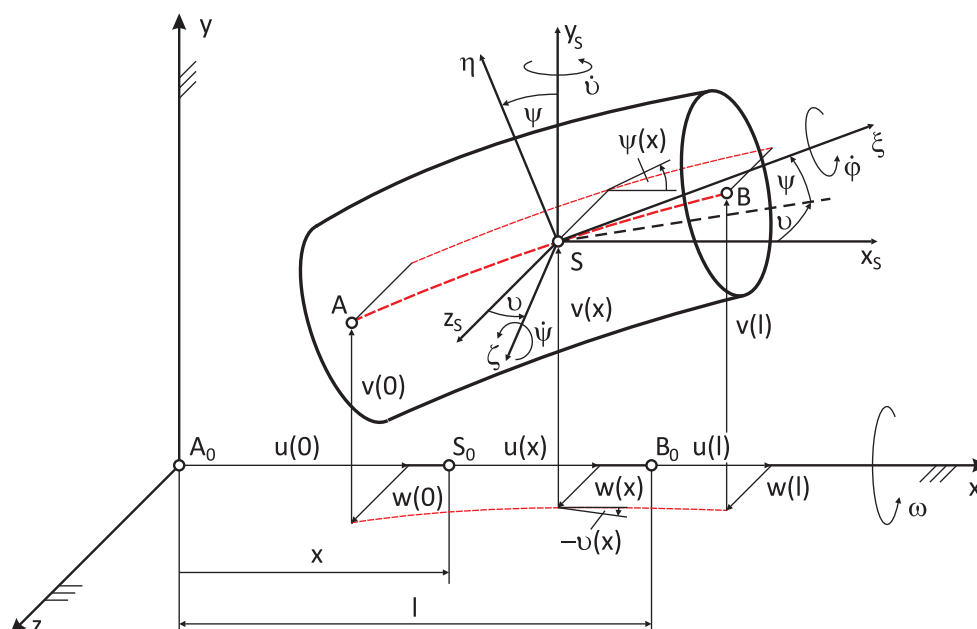
2.2.1 Hřídelový konečný prvek z Kelvin-Voigtova materiálu

Z rotoru otáčejícího se konstantní úhlovou rychlostí ω budiž vyjmut prizmatický element, dále nazývaný hřídelový prvek či hřídel, o délce l s plošným obsahem průřezu A z homogenního izotropního Kelvin-Voigtova materiálu s hustotou ρ , Youngovým modulem pružnosti E , Poissonovou konstantou ν a koeficientem poměrného viskózního útlumu η_v , který je v deformovaném stavu zobrazen na Obr. 2.2. V bodě A_0 počáteční (nedeformované) konfigurace je umístěn lokální pevný souřadnicový systém, jehož osa x je totožná s osou x globálního systému a lokální osy y a z jsou rovnoběžné s příslušnými globálními osami.

Prvek se působením sil deformuje a protože je úloha řešena v jedné dimenzi, lze si tuto deformaci představit jako posuvy nedeformovatelných průřezů a jejich natáčení vůči sobě. Poloha libovolného průřezu určeného bodem S ve vzdálenosti x od levého krajního průřezu je popsána posuvy $u(x)$, $v(x)$ a $w(x)$ a natočeními $\varphi(x)$, $\psi(x)$ a $\vartheta(x)$. Některé posuvy a natočení jsou svázány vazbovými rovnicemi. Ty mohou nabývat různého tvaru, např. podle Rayleighovy teorie platí

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \vartheta &= -\frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\tag{2.2}$$

V rotorové dynamice se kromě Rayleighovy teorie též hojně užívá obecnější Timoshenkova nosníková teorie, která respektuje natočení od smyku a která byla poprvé představena v [20].



Obrázek 2.2: Hřídelový prvek délky l v pevném souřadnicovém systému v deformované konfiguraci. Body s 0 v indexu leží na střednici a znázorňují polohu nedeformovaného prvku, body A a B leží v krajních průřezích a bod S je libovolný bod ve vzdálenosti x od levého okraje elementu.

Červeně je vynesena průhybová křivka a její průměty do rovin xy a xz . Velikosti natočení průřezu elementu ψ a $-\vartheta$ jsou kvůli názornosti nákresu větší, než odpovídá skutečnosti.

Aproximace polohy libovolného bodu hřídelového prvku

Posuv $v(x)$ bodu S z Obr. 2.2 je možné aproximovat pomocí polynomu třetího stupně

$$v(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3$$

a tuto aproximaci zapsat pomocí součinu řádkového a sloupcového vektoru ve tvaru

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \Phi(x) \mathbf{C}_1, \quad (2.3)$$

kde $C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R}$ tvoří vektor koeficientů lineární kombinace \mathbf{C}_1 a $\Phi(x)$ se nazývá matice, příp. řádkový vektor násadových funkcí.

Po dosazení (2.3) do první vazební rovnice (2.2) lze vyjádřit natočení $\psi(x)$

$$\psi(x) = \frac{\partial v}{\partial x} = C_2 + 2C_3x + 3C_4x^2 = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \Phi'(x) \mathbf{C}_1. \quad (2.4)$$

Aby bylo možné vyčíslit $v(x)$ a $\psi(x)$, je potřeba znát vektor koeficientů lineární kombinace. Ten lze dopočítat z geometrických okrajových podmínek hřídelové prvku. Jsou-li posuvy a natočení krajních průřezů elementu libovolné, je možné okrajové podmínky vyjádřit ve tvaru

$$\left. \begin{array}{l} v(0) = C_1 \\ \psi(0) = C_2 \\ v(l) = C_1 + C_2l + C_3l^2 + C_4l^3 \\ \psi(l) = C_2 + 2C_3l + 3C_4l^2 \end{array} \right\} \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Matice z pravé části (2.5) se často označují

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{S}_1 \mathbf{C}_1, \quad (2.6)$$

kde \mathbf{q}_1 je dílčí vektor uzlových souřadnic konečného hřídelového prvku, které popisují posuvy a natočení bodů ležících na střednici krajních průřezů prvku, tzv. uzlů, a \mathbf{S}_1 je konstantní matice násadových koeficientů, jejíž význam bude rozebrán dále. Vektor \mathbf{q}_1 je označen jako dílčí, protože popisuje pouze část posuvů a natočení, kterými je určen deformační stav elementu. Z (2.6) lze vyjádřit vektor \mathbf{C}_1

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 \quad (2.7)$$

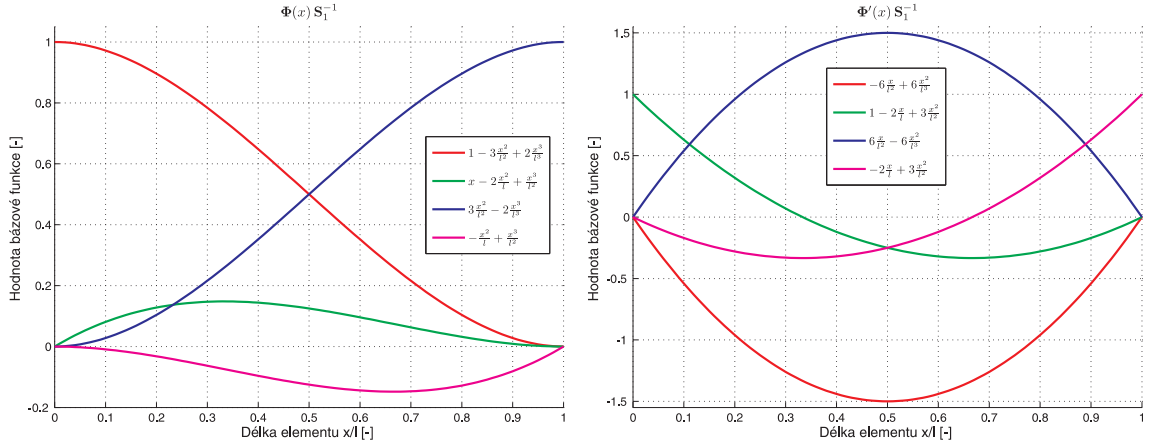
a tento vztah dosadit do rovností (2.3) a (2.4)

$$\begin{aligned} v(x) &= \Phi(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1, \\ \psi(x) &= \Phi'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

čímž jsou aproximace posuvu $v(x)$ a natočení $\psi(x)$ libovolného bodu 1D hřídelového elementu vyjádřeny pomocí výchylek krajních bodů, tzv. uzlů. Součiny $\Phi(x) \mathbf{S}_1^{-1}$ a $\Phi'(x) \mathbf{S}_1^{-1}$ v (2.8) generují tzv. báze funkce, jejichž lineární kombinace aproximuje průběh určité veličiny (zde výchylky a natočení) mezi dvěma uzly. Všechny báze funkce generované uvedenými součiny jsou vyneseny v grafech na Obr. 2.3.

Stejným způsobem, jako byl vyjádřen posuv $v(x)$ v (2.3), lze aproximovat i výchylku $w(x)$

$$w(x) = C_5 + C_6x + C_7x^2 + C_8x^3 = \Phi(x) \mathbf{C}_2, \quad (2.9)$$



Obrázek 2.3: Vlevo jsou báze funkce, jejichž lineární kombinace aproximuje průběh $v(x)$ mezi dvěma uzly, lineární kombinace báze funkcí na grafu vpravo aproximuje průběh $\psi(x)$.

přičemž $C_5, C_6, C_7, C_8 \in \mathbb{R}$ se obecně nerovnjají koeficientům C_1, C_2, C_3 a C_4 .

Dosažením (2.9) do druhé vazební rovnice (2.2) lze vyjádřit natočení $\vartheta(x)$

$$\vartheta(x) = -\frac{\partial w}{\partial x} = -C_6 - 2C_7x - 3C_8x^2 = -\Phi'(x)\mathbf{C}_2. \quad (2.10)$$

Vektor koeficientů lineární kombinace \mathbf{C}_2 lze vyjádřit díky znalosti geometrických okrajových podmínek. Příslušné okrajové podmínky je možné vyjádřit ve tvaru

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= C_5 \\ \vartheta(0) &= -C_6 \\ w(l) &= C_5 + C_6l + C_7l^2 + C_8l^3 \\ \vartheta(l) &= -C_6 - 2C_7l - 3C_8l^2 \end{aligned} \right\} \begin{bmatrix} w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & -1 & -2l & -3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_5 \\ C_6 \\ C_7 \\ C_8 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

V pravé části rovnice (2.11) lze nahradit matici násadových koeficientů \mathbf{S}_2 známou maticí \mathbf{S}_1

$$\mathbf{q}_2 = \mathbf{S}_2 \mathbf{C}_2 = \mathbf{P} \mathbf{S}_1 \mathbf{C}_2 \quad (2.12)$$

za pomoci diagonální matice přechodu \mathbf{P} ve tvaru

$$\mathbf{P} = \text{diag}(1, -1, 1, -1).$$

Tato matice přechodu je ortonormální. Platí tedy

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^\top = \mathbf{P}^{-1} \quad \wedge \quad \mathbf{P}^\top \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^\top = \mathbf{E},$$

kde \mathbf{E} je jednotková matice.

Nyní stačí z (2.12) vyjádřit vektor koeficientů lineární kombinace \mathbf{C}_2

$$\mathbf{C}_2 = (\mathbf{P} \mathbf{S}_1)^{-1} \mathbf{q}_2 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{q}_2 = \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 \quad (2.13)$$

a ten dosadit do rovností (2.9) a (2.10)

$$\begin{aligned} w(x) &= \Phi(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2, \\ \vartheta(x) &= \Phi'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

čímž jsou aproximace posuvu $w(x)$ a natočení $\vartheta(x)$ vyjádřeny pomocí výchylek uzlů elementu. Bázové funkce generované součiny $\Phi(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}$ a $\Phi'(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P}$ odpovídají bázovým funkcím z Obr. 2.3. Matice přechodu \mathbf{P} ale způsobuje, že druhá a čtvrtá bázová funkce mají v případě aproximací $w(x)$ a $\vartheta(x)$ opačné znaménko.

Vazbové rovnice (2.2) nedávají do souvislosti podélné posuvy $u(x)$ a torzní kmity $\varphi(x)$. Vzorce, které tyto výchylky aproximují, se tedy liší od vztahů (2.8) a (2.14). Posuv $u(x)$ může být aproximován pomocí lineární funkce

$$u(x) = C_9 + C_{10} x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix} = \Psi(x) \mathbf{C}_3, \quad (2.15)$$

kde $C_9, C_{10} \in \mathbb{R}$. Neznámý vektor koeficientů lineární kombinace \mathbf{C}_3 lze vyjádřit pomocí okrajových podmínek

$$\left. \begin{array}{l} u(0) = C_9 \\ u(l) = C_9 + C_{10} l \end{array} \right\} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_9 \\ C_{10} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

jako funkci dílčího vektoru uzlových souřadnic \mathbf{q}_3

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{S}_3 \mathbf{C}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_3 = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3. \quad (2.17)$$

Rovnost na pravé straně (2.17) stačí pouze dosadit do (2.15)

$$u(x) = \Psi(x) \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3, \quad (2.18)$$

čímž je odvození aproximace podélných výchylek dokončeno. Bázové funkce generované součinem $\Psi(x) \mathbf{S}_3^{-1}$ jsou lineární polynomy definované na intervalu $x \in \langle 0, l \rangle$ vztahy $y(x) = \frac{x}{l}$ a $y(x) = 1 - \frac{x}{l}$.

Torzní kmity $\varphi(x)$ lze stejně jako posunutí $u(x)$ aproximovat pomocí lineární funkce

$$\varphi(x) = C_{11} + C_{12} x = \Psi(x) \mathbf{C}_4, \quad (2.19)$$

kde $C_{11}, C_{12} \in \mathbb{R}$. Neznámý vektor koeficientů lineární kombinace \mathbf{C}_4 lze opět vyjádřit pomocí okrajových podmínek

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(0) = C_{11} \\ \varphi(l) = C_{11} + C_{12} l \end{array} \right\} \begin{bmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

jako funkci dílčí vektoru uzlových souřadnic \mathbf{q}_4

$$\mathbf{q}_4 = \mathbf{S}_3 \mathbf{C}_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C}_4 = \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \quad (2.21)$$

Rovnost na pravé straně (2.21) pak stačí dosadit do (2.19)

$$\varphi(x) = \Psi(x) \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \quad (2.22)$$

a poslední neznámá aproximace je formulována.

Odvození pohybové rovnice pomocí principu virtuálních prací

Variační princip známý jako princip virtuálních prací vyjadřuje podmínku rovnováhy mechanické soustavy. V [12] je vyjádřen takto:

Virtuální práce vazbových sil je rovna nule.

Ve stejné publikaci je odvozena i slabá (integrální) formulace tohoto principu

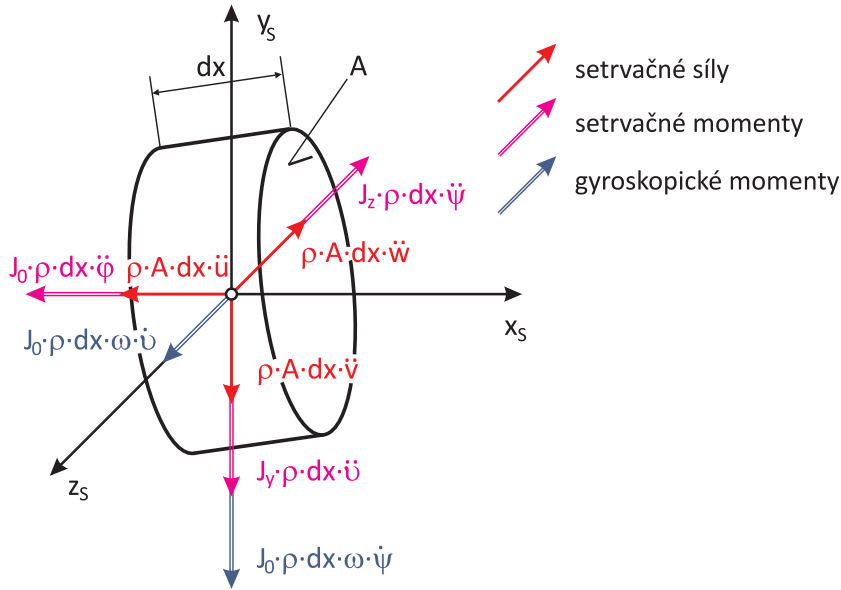
$$\int_{(V)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \boldsymbol{\sigma} dV = \sum_{(i)} Q_i \delta u_i - \int_{(V)} \rho \ddot{u}_i \delta u_i dV, \quad (2.23)$$

kteřá je zde zapsána pomocí maticové notace, v níž $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor virtuálních přetvoření, $\boldsymbol{\sigma}$ je vektor napětí, δu_i je virtuální změna i -té souřadnice, Q_i je i -tý zobecněný silový účinek ve směru i -té souřadnice a \ddot{u}_i označuje druhou časovou derivaci u_i . První integrál z (2.23) představuje virtuální práci deformačních sil. Napětí $\boldsymbol{\sigma}$ v Kelvin-Voigtově materiálu je vyjádřeno vztahem

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} + \eta_v \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (2.24)$$

kde \mathbf{E} je matice tuhosti materiálu. Sumace vyjadřuje celkovou práci vnějších sil a není-li hřídel nijak zatížen, tento člen z rovnice vypadne. A konečně druhý integrál zastupuje práci objemových sil. Je-li zanedbáno působení tíhové síly, která má podle [7] zpravidla jen druhořadý vliv na dynamiku rotoru, je diferenciálně dlouhý výřez hřídele vystaven působení sil zobrazených na Obr. 2.4. Bude-li vektor sil působících na výřez označen $d\mathbf{D}$, je možné slabou formulaci principu virtuálních prací (2.23) při uvažování (2.24) zapsat ve tvaru

$$\int_{(V)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} dV + \eta_v \int_{(V)} \delta \boldsymbol{\varepsilon}^\top \mathbf{E} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} dV = \int_{(V)} \delta \mathbf{u}^\top d\mathbf{D}. \quad (2.25)$$



Obrázek 2.4: Objemové síly (bez tíhové síly) působící na diferenciálně dlouhou část hřídele.

Posunutí obecného bodu hřídele o souřadnicích x, y, z lze za předpokladu malých přetvoření vyjádřit v linearizovaném tvaru [5]

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= u - y\psi + z\vartheta = \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2, \\ u_y(x, y, z) &= v - z\varphi = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Psi}(x) \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4, \\ u_z(x, y, z) &= w + y\varphi = \mathbf{\Phi}(x) \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + y \mathbf{\Psi}(x) \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4, \end{aligned} \quad (2.26)$$

kde při zápisu posuvů $u(x), v(x), w(x)$ a natočení $\varphi(x), \psi(x), \vartheta(x)$ bylo vypuštěno (x) a k vyjádření pravé strany rovností byly použity aproximace (2.8), (2.14), (2.18) a (2.22). Poloha libovolného bodu hřídele je vyjádřena součtem posuvů způsobených nominálním otáčením hřídele a posuvů (2.26). Samotné otáčení hřídel ale nedeformuje, a proto ve vztahu pro celkovou deformaci hřídele budou vystupovat pouze rovnosti (2.26).

Celkovou deformaci v libovolném bodě je možné formulovat pomocí geometrických rovnic pro malé deformace odvozených např. v [12], které při uvažování levých části rovností (2.26) nabývají tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' - y\psi' + z\vartheta' \\ 0 \\ 0 \\ -\varphi + \varphi \\ w' + y\varphi' + \vartheta \\ -\psi + v' - z\varphi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u' - y\psi' + z\vartheta' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ y\varphi' \\ -z\varphi' \end{bmatrix}, \quad (2.27)$$

kde jsou čárkami značeny derivace podle x . Po zanedbání nulových členů a s využitím pravých částí rovností (2.26) lze (2.27) dále upravit do redukovaného, ale z hlediska výsledných pohybových rovnic plnohodnotného tvaru

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 \\ y \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \\ -z \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

V rovnici (2.25) se vyskytuje nejen vektor deformací, ale také vektory virtuálního přetvoření a rychlosti deformace. Vektor virtuálních přetvoření $\delta\boldsymbol{\varepsilon}$ se snadno vyjádří nahrazením dílčích vektorů uzlových souřadnic ve vztahu (2.28) dílčími vektory virtuálních uzlových posuvů

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \delta\mathbf{q}_3 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \delta\mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \delta\mathbf{q}_2 \\ y \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \delta\mathbf{q}_4 \\ -z \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \delta\mathbf{q}_4 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

V případě vektoru rychlosti deformace $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ je situace o něco složitější. Prostou derivací (2.27) podle času lze dojít k rovnosti

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_x \\ \dot{\gamma}_{zx} \\ \dot{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}' - \dot{y}\psi' - y\dot{\psi}' + \dot{z}\vartheta' + z\dot{\vartheta}' \\ \dot{y}\varphi' + y\dot{\varphi}' \\ -\dot{z}\varphi' - z\dot{\varphi}' \end{bmatrix}, \quad (2.30)$$

ve které figurují neznámé a obecně nenulové členy \dot{y} a \dot{z} . Ty je nicméně možné elegantně vyjádřit derivováním posledních dvou transformačních vztahů mezi pevným systémem a souřadnicovým systémem (2.1) rotujícím konstantní úhlovou rychlostí ω podle času

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\eta\omega \sin(\omega t) - \zeta\omega \cos(\omega t) = -\omega(\eta \sin(\omega t) + \zeta \cos(\omega t)), \\ \dot{z} &= \eta\omega \cos(\omega t) - \zeta\omega \sin(\omega t) = \omega(\eta \cos(\omega t) - \zeta \sin(\omega t))\end{aligned}\quad (2.31)$$

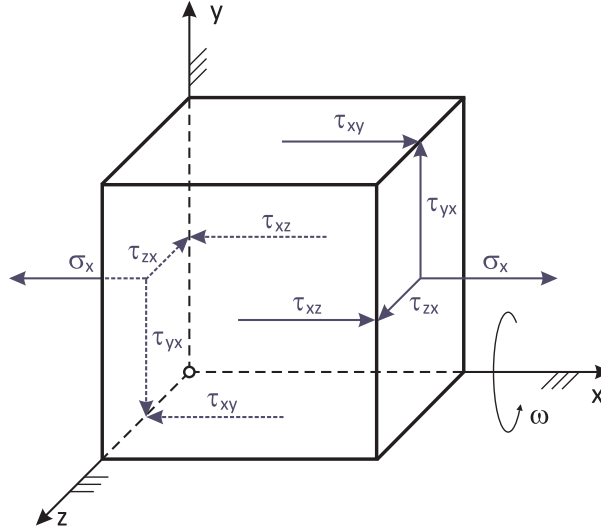
a následným dosazením (2.1) do (2.31)

$$\begin{aligned}\dot{y} &= -\omega z, \\ \dot{z} &= \omega y.\end{aligned}\quad (2.32)$$

Nyní může být vektor rychlosti deformace (2.30) libovolného bodu hřídele vyjádřen s využitím aproximačních vztahů (2.8), (2.14), (2.18) a (2.22) a obou rovností (2.32) jako funkce posuvů uzlů hřídelového prvku a polohy tohoto bodu

$$\dot{\epsilon} = \begin{bmatrix} \Psi' S_3^{-1} \dot{q}_3 + \omega z \Phi'' S_1^{-1} q_1 - y \Phi'' S_1^{-1} \dot{q}_1 - \omega y \Phi'' S_1^{-1} P q_2 - z \Phi'' S_1^{-1} P \dot{q}_2 \\ -\omega z \Psi' S_3^{-1} q_4 + y \Psi' S_3^{-1} \dot{q}_4 \\ -\omega y \Psi' S_3^{-1} q_4 - z \Psi' S_3^{-1} \dot{q}_4 \end{bmatrix}, \quad (2.33)$$

což je výhodné, protože není třeba znát derivace souřadnic určujících polohu bodu podle času.



Obrázek 2.5: Napjatost v elementu vyjmutém z hřídele.

Poslední neznámou na levé straně rovnice (2.25) je matice tuhosti materiálu \mathbf{E} . Za předpokladu, že element vyjmutý z hřídele je namáhán zátěžnými účinky zobrazenými na Obr. 2.5 [21], je možné vyjádřit fyzikální rovnice dávající do souvislosti napětí a deformace ve tvaru

$$\sigma_x = E \varepsilon_x, \quad \tau_{xz} = G \gamma_{xz}, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy}$$

a na základě těchto rovností definovat matici tuhosti materiálu vztahem

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

Integrand na pravé straně slabé formulace principu virtuálních prací (2.25) je tvořen pouze transponovaným vektorem virtuálních posuvů $\delta \mathbf{u}^\top$. Aproximace posuvů libovolného bodu hřídelového prvku byla odvozena již dříve a je vyjádřena pomocí vztahů (2.8), (2.14), (2.18) a (2.22). Vyjádření virtuálního pohybu z uvedených vztahů je analogické k vyjádření diferenciálů, přičemž diferenciování je prováděno podle dílčích vektorů uzlových posuvů $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_4$ a je použito známého pravidla pro diferenciál maticového součinu

$$d(\mathbf{A} \mathbf{x}) = d\mathbf{x}^\top \mathbf{A}^\top$$

kde \mathbf{A} je konstantní matice. Ve výsledných diferenciálech postačí nahradit operátor d operátorem δ a jednotlivé členy vektoru $\delta \mathbf{u}^\top$ pak nabývají tvaru

$$\begin{aligned} \delta u &= \delta \mathbf{q}_3^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \boldsymbol{\Psi}^\top \\ \delta v &= \delta \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Phi}^\top \\ \delta w &= \delta \mathbf{q}_2^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Phi}^\top \\ \delta \varphi &= \delta \mathbf{q}_4^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \boldsymbol{\Psi}^\top \\ \delta \vartheta &= -\delta \mathbf{q}_2^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Phi}'^\top \\ \delta \psi &= \delta \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Phi}'^\top. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Diferenciálem integrálu na pravé straně principu virtuálních prací (2.25) je vektor objemových sil $d\mathbf{D}$, které působí na diferenciálně malý výřez hřídele o objemu $A dx$, zobrazený na Obr. 2.4. V tomto vektoru je zanedbáno působení tíhového zrychlení, ale jsou zde zahrnuty setrvačné účinky a působení gyroskopického efektu, jehož silové vyjádření je odvozeno např. v [7], kde je také diskutován vliv gyroskopického efektu na dynamiku Greenova-Stodolova a letmo uloženého rotoru. Vektor $d\mathbf{D}$ může být opět upraven použitím aproximačních vztahů (2.8), (2.14), (2.18) a (2.22) a pak nabývá tvaru

$$d\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -\rho A dx \ddot{u} \\ -\rho A dx \ddot{v} \\ -\rho A dx \ddot{w} \\ -J_0 \rho dx \ddot{\varphi} \\ -J_0 \rho dx \omega \dot{\psi} - J \rho dx \ddot{\vartheta} \\ J_0 \rho dx \omega \dot{\psi} - J \rho dx \ddot{\psi} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} A \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_3 \\ A \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ A \boldsymbol{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ J_0 \boldsymbol{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_4 \\ J_0 \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 - J_y \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2 \\ J_0 \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2 + J_z \boldsymbol{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 \end{bmatrix} \rho dx, \quad (2.36)$$

kde J_y a J_z jsou kvadratické moment průřezu hřídele k příslušným osám a J_0 je polární moment průřezu daný součtem $J_0 = J_y + J_z$.

Pohybové rovnice popisující kmity konečného prvku je možné získat přímým dosazením rovností (2.28), (2.29), (2.33) a (2.34) – (2.36), což jsou vztahy sestavené z konstantních matic či vektorů závislých na vlastnostech materiálu a geometrii konečného prvku a neznámých posuvů v uzlech tohoto konečného prvku, do slabé formulace principu virtuálních prací (2.25). Ve výsledném vztahu, který je platný pro jakýkoliv virtuální posuv, se postupně zanedbávají všechny virtuální členy kromě jednoho, viz [18]

$$\forall \delta \mathbf{q}_1 \neq \mathbf{0} \wedge \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, \quad i = 2, 3, 4 :$$

$$\begin{aligned} & \int_{(V)} -y \delta \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \boldsymbol{\Phi}''^\top E \left[\boldsymbol{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + \eta_v (\boldsymbol{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_3 + \right. \\ & \left. + \omega z \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - y \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 - \omega y \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - z \boldsymbol{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2) \right] dA dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^l \delta \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{\Phi}^\top (-\rho \mathbf{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_1) dA dx - \int_0^l \delta \mathbf{q}_1^\top \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{\Phi}'^\top (-J_z \rho \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \\
 &\quad + J_0 \omega \rho \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2) dx, \quad (2.37a)
 \end{aligned}$$

$\forall \delta \mathbf{q}_2 \neq \mathbf{0} \wedge \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, i = 1, 3, 4 :$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l -z \delta \mathbf{q}_2^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{\Phi}''^\top E \left[\mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + \eta_v (\mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \omega z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 - \omega y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2) \right] dA dx = \\
 &= \int_0^l \delta \mathbf{q}_2^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{\Phi}^\top (-\rho \mathbf{\Phi} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2) dA dx - \int_0^l \delta \mathbf{q}_2^\top \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{\Phi}'^\top (-J_0 \omega \rho \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \\
 &\quad + J_y \rho \mathbf{\Phi}' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2) dx, \quad (2.37b)
 \end{aligned}$$

$\forall \delta \mathbf{q}_3 \neq \mathbf{0} \wedge \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, 4 :$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l \delta \mathbf{q}_3^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{\Psi}'^\top E \left[\mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 + \eta_v (\mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_3 + \right. \\
 &\quad \left. + \omega z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 - y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 - \omega y \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - z \mathbf{\Phi}'' \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2) \right] dA dx = \\
 &= \int_0^l \delta \mathbf{q}_3^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{\Psi}'^\top (-\rho A \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_3) dx, \quad (2.37c)
 \end{aligned}$$

$\forall \delta \mathbf{q}_4 \neq \mathbf{0} \wedge \delta \mathbf{q}_i = \mathbf{0}, i = 1, 2, 3 :$

$$\begin{aligned}
 &\int_0^l G \delta \mathbf{q}_4^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{\Psi}'^\top \left[(y^2 + z^2) \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 + \eta_v (y^2 \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_4 - 2\omega y z \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 + \right. \\
 &\quad \left. + z^2 \mathbf{\Psi}' \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_4) \right] dA dx = \int_0^l \delta \mathbf{q}_4^\top \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{\Psi}'^\top (-\rho J_0 \mathbf{\Psi} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_4) dx. \quad (2.37d)
 \end{aligned}$$

Vztahy (2.37a) – (2.37d) v podstatě představují pohybové rovnice hřídelového prvku. Jejich tvar je ale poměrně obecný a kvůli své složitosti není vhodný ani pro další výpočty, ani pro případnou algoritmizaci. Přijetím několika předpokladů je možné tyto vztahy velmi zjednodušit.

Naprostá většina provozovaných hřídelů je vyvážených nebo pracují s velmi malý nevývažkem. Osa rotace takových hřídelů je prakticky totožná se spojnicí těžišť jednotlivých průřezů a proto členy obsahující lineární momenty průřezu k osám y a z vypadnou, protože obě uvedené charakteristiky průřezu jsou nulové

$$\begin{aligned}
 U_y &= \int_0^l z dA = 0, & U_z &= \int_0^l y dA = 0.
 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Pro kvadratické momenty kruhových a mezikruhových průřezů platí

$$J_y = \int_{(A)} z^2 dA = J, \quad J_z = \int_{(A)} y^2 dA = J, \quad J_0 = J_y + J_z = 2J \quad (2.39a)$$

$$D_{yz} = D_{zy} = \int_{(A)} yz dA = 0. \quad (2.39b)$$

Požadavek na kruhovitost průřezu prvku se může zdát jako velmi přísný, v praxi se ale ukazuje, že jej splňuje velké množství hřídelů. Tímto způsobem je dokonce možné modelovat i symetrické hřídele, jejichž průřez se od kruhového odchyluje. Příkladem jsou části turbín se závěsy pro oběžná kola nebo mnohé elektromotory. Podmínku (2.39b) splňují dokonce i rotory s oběžnými koly, která mají nenulové deviační momenty. Oběžná kola totiž příliš neovlivňují ohybovou tuhost hřídele, na němž jsou nasazena, a mohou tím pádem být popsána jiným typem elementu, jehož pohybové rovnice jsou odvozeny v oddílu 2.2.2.

Problémem jsou pochopitelně hřídele takových průřezů, jež mají rozdílné ohybové tuhosti ve dvou na sebe kolmých směrech. V takových případech neplatí rovnost kvadratických momentů J_y a J_z a často není splněna ani podmínka nulovosti deviačního momentu D_{yz} . Typickým případem rotoru, u jehož hřídelových elementů nejsou splněny podmínky (2.39a) a (2.39b), je dvoupólový generátor. Dynamikou rotorů s hřídeli nekruhových průřezů se obsírněji zabývají publikace [11, 14] a přímo dynamikou generátorových rotorů dizertační práce [13].

Po aplikaci podmínek (2.38) a (2.39a) nabývají rovnice (2.37a) – (2.37d) kompaktnějšího tvaru

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_1^\top \left(E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + \eta_v E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + \eta_v \omega E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 \right) = \\ = -\delta \mathbf{q}_1^\top \rho \left(A \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_1 + J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_1 + \omega J_0 \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2 \right), \end{aligned} \quad (2.40a)$$

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{q}_2^\top \left(E J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \mathbf{q}_2 - \eta_v \omega E J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{q}_1 + \eta_v E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \dot{\mathbf{q}}_2 \right) = \\ = -\delta \mathbf{q}_1^\top \rho \left(A \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2 - \omega J_0 \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \dot{\mathbf{q}}_1 + J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} \ddot{\mathbf{q}}_2 \right), \end{aligned} \quad (2.40b)$$

$$\delta \mathbf{q}_3^\top \left(E A \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_3 + E A \eta_v \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_3 \right) = -\delta \mathbf{q}_3^\top \rho A \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_3, \quad (2.40c)$$

$$\delta \mathbf{q}_4^\top \left(G J_0 \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \mathbf{q}_4 + G J_0 \eta_v \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \dot{\mathbf{q}}_4 \right) = -\delta \mathbf{q}_4^\top \rho J_0 \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \ddot{\mathbf{q}}_4, \quad (2.40d)$$

kde \mathbf{I}_{ij}^{kl} jsou integrální matice definované vztahem

$$\mathbf{I}_{ij}^{mn} = \int_0^l \frac{\partial^i}{\partial x^i} \cdot [1, x, \dots, x^m]^\top \cdot \frac{\partial^j}{\partial x^j} \cdot [1, x, \dots, x^n] dx. \quad (2.41)$$

Všechny integrální matice z (2.40a) – (2.40d) jsou pro daný prizmatický hřídelový element z Obr. 2.2 symetrické, konstantní, závisí pouze na jeho délce a nabývají tvaru

$$\mathbf{I}_{00}^{11} = \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{11}^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{I}_{00}^{33} = \begin{bmatrix} l & \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} \\ \frac{l^2}{2} & \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} \\ \frac{l^3}{3} & \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6} \\ \frac{l^4}{4} & \frac{l^5}{5} & \frac{l^6}{6} & \frac{l^7}{7} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{11}^{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & l^2 & \frac{4l^3}{3} & \frac{3l^4}{2} \\ 0 & l^3 & \frac{3l^4}{2} & \frac{9l^5}{5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{22}^{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}.$$

Matice parametrů konečného hřídelového prvku

Soustavu rovnic (2.40a) – (2.40d) je možné zapsat v kompaktním tvaru

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e \ddot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t) + (\widetilde{\mathbf{B}}_e + \omega \widetilde{\mathbf{G}}_e) \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e(t) + (\widetilde{\mathbf{K}}_e + \omega \widetilde{\mathbf{C}}_e) \tilde{\mathbf{q}}_e(t) = \mathbf{0}, \quad (2.42)$$

kde $\widetilde{\mathbf{M}}_e$ je matice hmotnosti hřídelového prvku z Obr. 2.2, $\widetilde{\mathbf{B}}_e$ je matice tlumení, $\widetilde{\mathbf{G}}_e$ je matice gyroskopických účinků, $\widetilde{\mathbf{K}}_e$ je matice tuhosti, $\widetilde{\mathbf{C}}_e$ je cirkulační matice a $\tilde{\mathbf{q}}_e$ je kompletní vektor uzlových souřadnic konečného hřídelového prvku. Jednotlivé matice a vektor nabývají tvaru

$$\widetilde{\mathbf{M}}_e = \begin{bmatrix} \rho A \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} + \rho J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \rho A \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} + \rho J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho A \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \rho J_0 \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{00}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.43a)$$

$$\widetilde{\mathbf{B}}_e = \eta_v \cdot \begin{bmatrix} E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E A \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G J_0 \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.43b)$$

$$\widetilde{\mathbf{G}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\rho J_0 \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \rho J_0 \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43c)$$

$$\widetilde{\mathbf{K}}_e = \begin{bmatrix} E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & E A \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & G J_0 \mathbf{S}_3^{-\top} \mathbf{I}_{11}^{11} \mathbf{S}_3^{-1} \end{bmatrix}, \quad (2.43d)$$

$$\widetilde{\mathbf{C}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \eta_v E J \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \eta_v E J \mathbf{P} \mathbf{S}_1^{-\top} \mathbf{I}_{22}^{33} \mathbf{S}_1^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (2.43e)$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}. \quad (2.43f)$$

Transformace vektoru uzlových souřadnic

Deformační stav každého elementu je určen jedním vektorem uzlových souřadnic (2.43f) o 12 stupních volnosti, který je možno označit jako lokální vektor. Je zřejmé, že stav každé rotorové soustavy je popsán tolika lokálními vektory uzlových souřadnic, kolik soustava obsahuje

konečných hřídelových prvků. Jednotlivé lokální vektory uzlových souřadnic a lokální matice parametrů (2.43a) – (2.43e) se po vyčíslení skládají do globálních matic, které popisují dynamické vlastnosti a pohybový stav celé soustavy. Před samotným sestavením globálního modelu, které je diskutováno v podkapitole 2.2, je vhodné změnit pořadí souřadnic v lokálním vektoru uzlových posuvů. Určité výhodné pořadí totiž zajistí snadnou lokalizaci matic parametrů prvku v odpovídajících globálních maticích.

V případě i -tého a $(i + 1)$ -ního prvku, které spolu sousedí a mají společný j -tý uzel, se polovina souřadnic obsažených ve vektoru $\tilde{\mathbf{q}}_i$ musí shodovat s polovinou neznámých parametrů z vektoru $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1}$. V globálním vektoru uzlových posuvů tyto souřadnice zaujmají 6 po sobě jdoucích míst s indexy $[6(j - 1) + 1]$ až $[6j]$. V lokálních vektorech $\tilde{\mathbf{q}}_i$ a $\tilde{\mathbf{q}}_{i+1}$ ale nejsou tyto společné uzlové souřadnice uspořádané odpovídajícím způsobem a proto je vhodné tento vektor nahradit součinem transformační matice a nového lokálního vektoru zobecněných souřadnic

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \mathbf{T} \mathbf{q}_e, \quad (2.44)$$

což je možné při uvažování značení z Obr. 2.2 rozepsat

$$\tilde{\mathbf{q}}_e = \begin{bmatrix} v(0) \\ \psi(0) \\ v(l) \\ \psi(l) \\ w(0) \\ \vartheta(0) \\ w(l) \\ \vartheta(l) \\ u(0) \\ u(l) \\ \varphi(0) \\ \varphi(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \\ \varphi(0) \\ \vartheta(0) \\ \psi(0) \\ u(l) \\ v(l) \\ w(l) \\ \varphi(l) \\ \vartheta(l) \\ \psi(l) \end{bmatrix}. \quad (2.45)$$

Na transformační matici \mathbf{T} lze také pohlížet jako na matici přechodu, která převádí matice parametrů elementu do nové báze, dané přeuspořádaným vektorem lokálních uzlových souřadnic \mathbf{q}_e . Vyjádříme-li například kinetickou energii prvku pomocí maticové formulace

$$E_k^e = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e^\top \tilde{\mathbf{M}}_e \dot{\tilde{\mathbf{q}}}_e = \dot{\mathbf{q}}_e^\top \mathbf{T}^\top \tilde{\mathbf{M}}_e \mathbf{T} \dot{\mathbf{q}}_e = \dot{\mathbf{q}}_e^\top \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{q}}_e, \quad (2.46)$$

ihned obdržíme vztah

$$\mathbf{X}_e = \mathbf{T}^\top \tilde{\mathbf{X}}_e \mathbf{T}, \quad (2.47)$$

pro transformaci lokálních matic parametrů elementu z báze $\tilde{\mathbf{q}}_e$ do báze \mathbf{q}_e , kde \mathbf{X}_e slouží jako hromadné označení matic \mathbf{M}_e , \mathbf{B}_e , \mathbf{G}_e , \mathbf{K}_e a \mathbf{C}_e .

Pomocí transformačního vztahu (2.47) je možné přepsat pohybovou rovnici nezatiženého hřídelového prvku (2.42) do známého tvaru

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e(t) + (\mathbf{B}_e + \omega \mathbf{G}_e) \dot{\mathbf{q}}_e(t) + (\mathbf{K}_e + \omega \mathbf{C}_e) \mathbf{q}_e(t) = \mathbf{0}. \quad (2.48)$$

2.2.2 Tuhé těleso

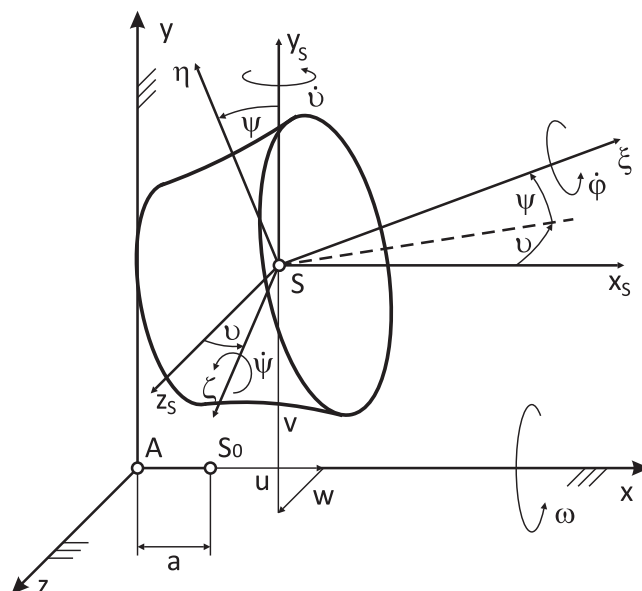
Obecný rotor se neskládá pouze z konečných hřídelových prvků. Součástí sestavy mohou být také oběžná a ozubená kola, lopatky s bandáží, rozpěrky atd. Tato tělesa obvykle nezvyšují ohybovou ani torzní tuhost hřídele, na kterém jsou nasazena, a proto by teoreticky mohla být v modelu reprezentována pouze hmotnostními parametry na příslušných místech globální matice hmotnosti. V takovém případě by ale byly zanedbány gyroskopické efekty, které mohou u hmotných kotoučů a rychle se otáčejících soustav nabývat i značné velikosti, a proto je vhodnější reprezentovat přídatná tělesa speciálním typem prvku s vlastní sadou lokálních matic.

Jedním z nejjednodušších modelů takového tělesa je tuhé těleso z Obr. 2.6 o hmotnosti m a s maticí setrvačnosti

$$\mathbf{I}_S = \begin{bmatrix} I_{x_s} & -D_{x_s y_s} & -D_{x_s z_s} \\ -D_{x_s y_s} & I_{y_s} & -D_{y_s z_s} \\ -D_{x_s z_s} & -D_{y_s z_s} & I_{z_s} \end{bmatrix}$$

vztaženou ke středisku hmotnosti S , které v nedeformované konfiguraci soustavy leží na ose otáčení x . Těleso je pevně spojeno s hřídelem, což znamená, že jeho poloha a natočení jsou určeny polohou a natočením jediného řídicího uzlu, jenž je totožný s některým z řídicích uzlů hřídelových elementů a od něhož může být středisko hmotnosti odsazeno v axiálním směru o vzdálenost a . V hmotnostních parametrech nejsou zahrnuty hmota a momenty setrvačnosti hřídele, protože ty jsou již obsaženy v příslušných maticích hřídelového prvku.

Odsazení střediska hmotnosti od řídicího uzlu se do modelu zavádí, neboť jeho použití je výhodné, je-li tuhé těleso nasazeno na hřídel v místě rozhraní dvou průřezů, ale nesouhlasí-li poloha střediska hmotnosti s polohou rozhraní. Pak odpadne nutnost zanedbání odsazení střediska hmotnosti nebo použití velmi krátkého hřídelového prvku, které může mít neblahý vliv na numerickou stabilitu některých výpočetních metod.



Obrázek 2.6: Obecná poloha obecného tuhého tělesa pevně spojeného s hřídelem v jednom řídicím uzlu.

Odvození pohybové rovnice pomocí Langrangeovy rovnice II. druhu

Výchozím vztahem pro odvození pohybových rovnic výše definovaného tuhého tělesa, které není zatíženo vnějšími silovými účinky, jsou tzv. Lagrangeovy rovnice II. druhu

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_e} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}_e} = \mathbf{0} \quad (2.49)$$

odvozené např. v [18], kde E_k a E_p je celková kinetická a potenciální energie tělesa. Změny potenciální energie jsou v případě konzervativních systémů totožné se změnami deformační energie samotného tělesa, ale také vazeb, které ho spojují se zbytkem soustavy. Vzhledem k předpokladům — těleso je tuhé a pevně spojené s hřídelem — ke změnám deformační energie nedochází a proto je třetí člen v rovnici (2.49) nulový.

Kinetická energie může být podle Königovy věty [18] rozepsána jako součet kinetické energie unášivého a relativního pohybu

$$E_k = E_k^{\text{un}} + E_k^{\text{rel}} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_S^\top \mathbf{v}_S + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{I}_S \boldsymbol{\omega}. \quad (2.50)$$

Zde lze unášivý pohyb ztotožnit s posuvným pohybem po kružnici a relativní se sférickým pohybem. Linearizované vektory rychlostí těchto pohybů mají podle [2] tvar

$$\mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} + a \dot{\psi} \\ \dot{w} + a \dot{\vartheta} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \psi \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.51)$$

který je zde rozšířený o členy závislé na odsazení a představující vliv naklonění tělesa na oběžnou rychlost unášivého pohybu. Díky (2.51) lze snadno vyjádřit celkovou kinetickou energii unášivého pohybu

$$E_k^{\text{un}} = \frac{1}{2} m \left(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2 + 2a \dot{v} \dot{\psi} + a^2 \dot{\psi}^2 - 2a \dot{w} \dot{\vartheta} + a^2 \dot{\vartheta}^2 \right) \quad (2.52)$$

i celkovou kinetickou energii relativního pohybu

$$\begin{aligned} E_k^{\text{rel}} &= \frac{1}{2} \left[I_{x_s} \left(\omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \psi \right)^2 - 2 D_{x_s y_s} \left(\omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \psi \right) \dot{\vartheta} - 2 D_{x_s z_s} \left(\omega + \dot{\varphi} + \dot{\vartheta} \psi \right) \dot{\psi} + \right. \\ &\quad \left. + I_{y_s} \dot{\vartheta}^2 - 2 D_{y_s z_s} \dot{\vartheta} \dot{\psi} + I_{z_s} \dot{\psi}^2 \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \left[I_{x_s} \left(\omega^2 + 2\omega \dot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 + 2\omega \dot{\vartheta} \psi \right) + I_{y_s} \dot{\vartheta}^2 + I_{z_s} \dot{\psi}^2 - 2 D_{x_s y_s} \left(\omega \dot{\vartheta} + \dot{\varphi} \psi \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 D_{x_s z_s} \left(\omega \dot{\psi} + \dot{\varphi} \dot{\psi} \right) - 2 D_{y_s z_s} \dot{\vartheta} \dot{\psi} \right], \end{aligned} \quad (2.53)$$

v níž jsou zanedbány malé členy, což jsou takové součiny, ve kterých se vyskytují minimálně tři činitele představující natočení φ , ψ a ϑ nebo jejich derivace podle času. Pokud by malé členy nebyly vypuštěny, výsledná pohybová rovnice by byla nelineární.

Nyní stačí podle Lagrangeovy rovnice II. druhu (2.53) vypočítat příslušné derivace obou příspěvků kinetické energie

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{\text{un}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} \right) = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & m a \\ 0 & 0 & m & 0 & -m a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -m a & 0 & m a^2 & 0 \\ 0 & m a & 0 & 0 & 0 & m a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}, \quad (2.54a)$$

$$\frac{\partial E_k^{\text{un}}}{\partial \mathbf{q}_e} = \mathbf{0}, \quad (2.54b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k^{\text{rel}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x_s} & -D_{x_s y_s} & -D_{x_s z_s} \\ 0 & 0 & 0 & -D_{x_s y_s} & I_{y_s} & -D_{y_s z_s} \\ 0 & 0 & 0 & -D_{x_s z_s} & -D_{y_s z_s} & I_{z_s} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\vartheta} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ I_{x_s} \dot{\omega} \\ I_{x_s} \omega \dot{\psi} - D_{x_s y_s} \dot{\omega} \\ -D_{x_s z_s} \dot{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.54c)$$

$$\frac{\partial E_k^{\text{rel}}}{\partial \mathbf{q}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{x_s} \omega & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.54d)$$

a formulovat soustavu, která vznikne, maticově

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{q}}_e + \omega \mathbf{G}_e \dot{\mathbf{q}}_e = \mathbf{0}, \quad (2.55)$$

kde \mathbf{M}_e a \mathbf{G}_e jsou matice hmotnosti tuhého tělesa a matice gyroskopických účinků, které je možno zapsat ve tvaru

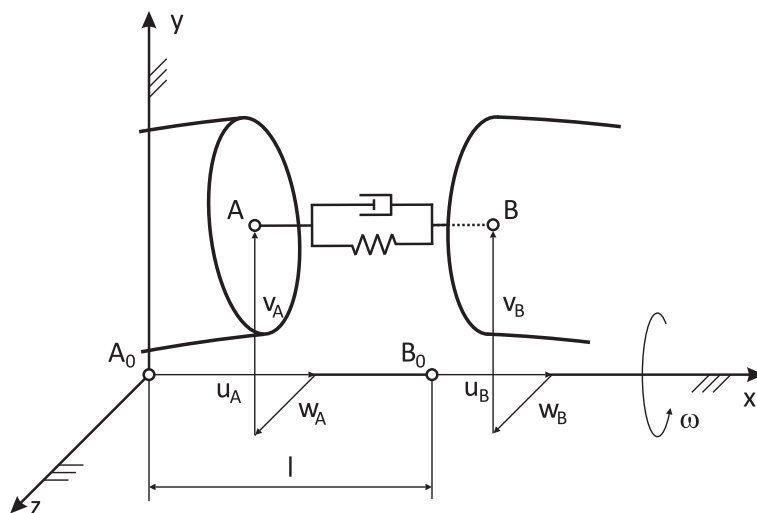
$$\mathbf{M}_e = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 & 0 & m a \\ 0 & 0 & m & 0 & -m a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{x_s} & -D_{x_s y_s} & -D_{x_s z_s} \\ 0 & 0 & -m a & -D_{x_s y_s} & I_{y_s} + m a^2 & -D_{y_s z_s} \\ 0 & m a & 0 & -D_{x_s z_s} & -D_{y_s z_s} & I_{z_s} + m a^2 \end{bmatrix}, \quad (2.56a)$$

$$\mathbf{G}_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{x_s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -I_{x_s} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.56b)$$

Rovnice (2.55) představuje pohybovou rovnici tuhého tělesa pevně nasazeného na hřídel otáčející se konstantní úhlovou rychlostí ω . Tato rovnice je použitelná pro veškeré výpočty, jež předpokládají ustálený provoz rotoru. Pro výpočty v časové oblasti, kde jsou otáčky funkcí času, je ale nutné pohybovou rovnici doplnit o zanedbaný vektor setrvačných účinků ze vztahu (2.54c), který se skládá ze členů závislých na časové derivaci hnacích otáček $\dot{\omega}$.

2.2.3 Nehmotný viskoelastický člen

Nehmotné, diskretní viskoelastické členy se při modelování rotorových soustav nepoužívají často, ale určitý smysl mají. Mohou být např. aplikovány v případech, kdy je třeba zavést jednoduchý model hřídele s různými ohybovými tuhostmi pomocí elementu popsaného maticemi (2.43a) – (2.43e), změnit torzní tuhost nějaké části rotoru nebo modelovat vazbu s rámem, jejíž charakteristika není závislá na nominálních otáčkách.



Obrázek 2.7: Nehmotný viskoelastický člen spojující dva uzly.

Na obrázku Obr. 2.7 je zobrazen viskoelastický člen, dále zkráceně nazývaný prvek, o tuhosti k a s parametrem tlumení b spojující i -tý řídicí uzel A a j -tý řídicí uzel B. Předpokládáme, že prvek váže dvě libovolné n -té souřadnice formálně si odpovídajících vektorů řádu 6, které popisují dynamický stav každého z řídicích uzlů. Pohybová rovnice tohoto prvku může být vyjádřena pomocí upravených Lagrangeových rovnic II. druhu (2.49) uvedených v [2] ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}_e} + \frac{\partial E_p}{\partial \mathbf{q}_e} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\mathbf{q}}_e} = \mathbf{Q}, \quad (2.57)$$

které do výpočtu zahrnují nekonzervativní a disipační síly a kde R je tzv. Rayleighova disipační funkce, což je záporně vzatá polovina výkonu tlumících sil, a \mathbf{Q} je vektor zobecněných sil. Rovnice (2.57) někdy bývají označovány jako Lagrangeovy rovnice obyčejného typu.

Kinetickou energii prvku je možné vzhledem k jeho nulové hmotnosti z rovnice (2.57) vypustit. Za předpokladu, že prvek není namáhán žádnými vnějšími silami, je možné vynechat také člen popisující zobecněnou sílu.

Potenciální energie je rovna deformační energii elastické větve prvku

$$E_p = \frac{1}{2} k ({}_i q_n - {}_j q_n)^2. \quad (2.58)$$

Rayleighova disipační funkce formálně odpovídá vztahu (2.58), je ale závislá na parametrech tlumení a na rychlosti, s jakou se deformuje viskózní větev prvku

$$R = \frac{1}{2} b ({}_i \dot{x}_n - {}_j \dot{x}_n)^2. \quad (2.59)$$

Dosazením (2.58) a (2.59) do (2.57) a provedením příslušných derivací obdržíme soustavu dvou rovnic

$$k(iq_n - jq_n) + b(i\dot{x}_n - j\dot{x}_n) = 0, \quad (2.60a)$$

$$k(jq_n - iq_n) + b(j\dot{x}_n - i\dot{x}_n) = 0, \quad (2.60b)$$

kterou je možno zapsat pomocí maticové notace

$$\begin{matrix} n \\ 6+n \end{matrix} \begin{bmatrix} & n & & 6+n \\ \ddots & \vdots & & \vdots \\ \dots & b & \dots & -b & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & -b & \dots & b & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ i\dot{x}_n \\ \vdots \\ j\dot{x}_n \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & n & & 6+n \\ \ddots & \vdots & & \vdots \\ \dots & k & \dots & -k & \dots \\ & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \dots & -k & \dots & k & \dots \\ & \vdots & & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vdots \\ ix_n \\ \vdots \\ jx_n \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (2.61)$$

Pohybová rovnice (2.61) se dále zjednoduší, leží-li jeden z řídicích uzlů, např. j -tý, na rámu. V takovém případě platí $j\dot{x}_n = jx_n = 0$, protože rám je v prostoru nehybný, a matice tlumení a tuhosti viskoelastického členu je možné plnohodnotně vyjádřit jako čtvercové matice řádu 6, které odpovídají levému hornímu bloku výše odvozených matic řádu 12. Zbývá dodat, že parametry tuhosti a tlumení k a b mohou formálně nabývat záporné hodnoty, což zajistí zmenšení tuhosti nebo tlumících účinků na příslušných místech soustavy.

2.2.4 Radiální kluzné ložisko s parametry závislými na nominálních otáčkách

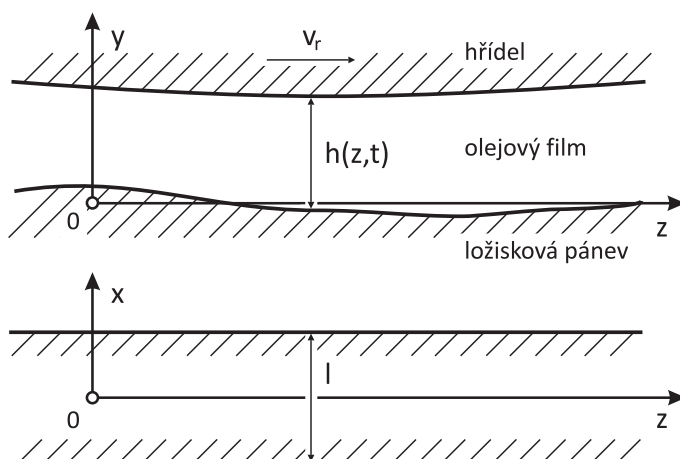
Uložení rotoru v pevné části, tzv. statoru, může být realizováno pomocí nejrůznějších druhů ložisek, která lze rozdělit do tříd podle následujících kritérií:

- Podle *principu fungování* lze ložiska dělit do několika velkých skupin. Nejznámější jsou kluzná, valivá a elektromagnetická ložiska, v hodinových strojích se používají speciální druhy ložisek vyrobených z drahokamů¹ a v 60. letech 20. století vznikla teorie týkající se ložisek², které umožňují pohyb díky velkému ohybu elementů přenášejících zátěžné síly. Ukazuje se, že v mnohých konvenčních ložiscích vznikají jevy, jež jsou dobře popsány právě teorií ložisek s ohýbajícími se díly.
- Dělení v závislosti na *druhu pohybu* umožněného ložiskem zohledňuje charakter relativního pohybu pohyblivé části zařízení vůči statoru a zahrnuje rotaci kolem osy, posuvný pohyb, sférický pohyb, ale také otáčivý pohyb zajištěný kloubem.
- Dělení podle *směru přenášené síly* se uplatňuje především při popisu konvenčních rotorových soustav a člení ložiska do dvou skupin: axiální, která zabraňují posuvům rotorů ve směru osy rotace, a radiální, jež tvoří podpory mezi rotorem a statorem a přenášejí silový účinek kolmý na osu rotace.

Jako podpora lehkých rychloběžných rotorů, mezi něž nepochybně patří i turbodmychadla, se v současnosti téměř výhradně používají hydraulická a pneumatická kluzná ložiska. Tento oddíl se tak omezuje pouze na popis základních vztahů charakterizujících chování kluzných

¹Anglický výraz *jewel bearing* se do češtiny překládá jako rubínové ložisko.

²Anglický výraz *flexure bearing* nemá jednoznačný český ekvivalent.



Obrázek 2.8: Kartézský souřadnicový systém olejového filmu.

ložisek s olejovým filmem, některé obecnější vztahy, u nichž to bude výslovně uvedeno, je však možné použít pro popis libovolného kluzného ložiska.

Pohyb části rotoru uložené v ložisku, tzv. čepu, vůči statoru vykazuje některé specifické vlastnosti, jejichž příčinou je dynamické chování maziva v pouzdře ložiska. Stav olejového filmu popisuje tzv. Reynoldsova rovnice odvozená v [11] ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{h^3}{\eta} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} \right) = 6 v_r \frac{\partial h}{\partial z} + 12 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.62)$$

kde p je tlak newtonské kapaliny, h je tloušťka olejového filmu a η a $v_r = \omega r$ jsou konstanty dynamické viskozity maziva a povrchové rychlosti čepu. Kartézské souřadnice použité v rovnici (2.62) jsou vztaženy k systému naznačenému na Obr. 2.8.

Řešení Reynoldsovy rovnice (2.62), v níž je zanedbán člen bočního výtoku závisející na parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial z}$, protože ložisko je považováno za nekonečně dlouhá, a tloušťka olejového filmu h je uvažována jako konstantní, odvodil jako první Arnold Sommerfeld v roce 1904. Toto řešení je funkcí bezrozměrného Sommerfeldova čísla

$$S = 2 \eta l r \left(\frac{r}{c} \right)^2 \frac{\omega}{F}, \quad (2.63)$$

kde l a r jsou axiální délka a vnitřní poloměr ložiskové pánve, c je výrobní radiální vůle mezi čepem a pánví, ω nominální úhlová rychlost čepu a F radiální zátěžná síla. Sommerfeldovo číslo ve tvaru (2.63) je doménou především anglosaské literatury, mj. [14], naopak němečtí autoři [7, 11] obvykle zapisují Sommerfeldovo číslo v reciprokém tvaru. V česky psané literatuře, např. [2], se často používá anglosaská forma zápisu (2.63).

Dlouhá radiální kluzná ložiska se v moderních strojích vyskytují výjimečně. V případech krátkých ložisek boční výtok maziva podstatně ovlivňuje chování olejového filmu a Sommerfeldovo řešení, které výtok zanedbává, nemůže být použito. Přesto je i v současnosti nízká hodnota Sommerfeldova čísla dobrým indikátorem takových ložisek, které zajišťují stabilitu rotoru. Ukazuje se rovněž, že dynamické chování olejového filmu je ovlivněno charakterem proudění a z toho důvodu se i v hydrodynamice kluzných ložisek závádí Reynoldsovo číslo [11]

$$Re = \frac{\rho v_r c}{\eta}, \quad (2.64)$$

kde ρ je hustota maziva. Při nízkých hodnotách Re převládá laminární proudění maziva, je-li však $Re > 1000$, turbulence vznikající v olejovém filmu by měly být uvažovány.

Uvedený souhrn naznačuje, že modelování a analýza kluzných ložisek je poměrně náročná záležitost a analyticky vyjádřit hydrodynamické síly, případně jejich náhradu je možné pouze u některých modelů ložisek. V [14] je odvozen jeden z obecnějších modelů, po autorech nazývaný nelineární izotropní Bently-Muszyńské model

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 + b(|q_r|) & 2\lambda\omega m_f \\ -2\lambda\omega m_f & b_0 + b(|q_r|) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} k_0 + k(|q_r|) - \lambda^2\omega^2 m_f & \lambda\omega(b_0 + b(|q_r|)) \\ -\lambda\omega(b_0 + b(|q_r|)) & k_0 + k(|q_r|) - \lambda^2\omega^2 m_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.65) \end{aligned}$$

kde v a w jsou souřadnice aktuálního polohy čepu v nerotujícím souřadném systému. Proměnné b_0 , k_0 a m_f představují radiální tlumení, tuhost a hmotnostní parametr olejového filmu ve statické rovnovážné poloze. Všechny tři proměnné jsou funkcemi Sommerfeldova čísla (2.63) [14]. Funkce $b(|q_r|)$ a $k(|q_r|)$ popisují nelineární tlumicí a tuhostní složky hydrodynamické síly v závislosti na radiální výchylce čepu $|q_r| = \sqrt{v^2 + w^2}$ z počáteční polohy. A konečně $\lambda = \frac{v_r}{\omega}$ je poměrná obvodová rychlost olejového filmu, pro kterou platí $\lambda < 1$. Model (2.65) je možné aplikovat pouze na ložiska, jejichž axiální délka je řádově nižší než celková délka rotoru. V takových případech lze zanedbat momentové složky zatížení, které vznikají kvůli natočení čepu v ložisku, a celou ložiskovou vazbu lze redukovat do jediného řídicího uzlu.

Pro malé výchylky a rychlosti rotoru je možné vztah (2.65) mezi hydrodynamickou silou a vibracemi rotoru linearizovat. Bently-Muszyńské model (2.65) pak přejde do klasického tvaru pro radiální izotropní ložiska

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_f & 0 \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 & 2\lambda\omega m_f \\ -2\lambda\omega m_f & b_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} k_0 - \lambda^2\omega^2 m_f & \lambda\omega b_0 \\ -\lambda\omega b_0 & k_0 - \lambda^2\omega^2 m_f \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.66) \end{aligned}$$

kteřý lze v maticové notaci zapsat jako

$$\mathbf{f} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_a) \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_s + \mathbf{K}_a) \bar{\mathbf{q}}, \quad (2.67)$$

kde antisymetrický člen

$$\mathbf{B}_a \dot{\mathbf{q}} = \lambda\omega \begin{bmatrix} 0 & 2m_f \\ -2m_f & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}$$

popisuje gyroskopickou sílu, další antisymetrický člen

$$\mathbf{K}_a \bar{\mathbf{q}} = \lambda\omega \begin{bmatrix} 0 & b_0 \\ -b_0 & 0 \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}$$

vyjadřuje cirkulační sílu, přičemž oba uvedené účinky jsou způsobeny obvodovým prouděním maziva v prostoru mezi čepem a ložiskovou pánví, a konečně symetrický člen

$$-\lambda^2\omega^2 \begin{bmatrix} m_f & \\ 0 & m_f \end{bmatrix} \bar{\mathbf{q}}$$

popisuje odstředivé síly olejového filmu.

Obecné radiální ložisko není zatíženo izotropními silami a v takovém případě nelze uplatnit nelineární izotropní Bently-Muszyńské model (2.65), ani jeho linearizovanou formu (2.66) a je vhodnější použít jiný model. Často používaným vztahem pro popis hydrodynamické síly, která působí na rotor nepřilíš vychýlený z počáteční statické polohy, je lineární maticový model zanedbávající setrvačné síly olejového filmu

$$\begin{bmatrix} F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{yy} & b_{yz} \\ b_{zy} & b_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}, \quad (2.68)$$

kde tlumicí a tuhostní koeficienty olejového filmu b_{ij} a k_{ij} jsou numericky počítány z rovnic dynamické rovnováhy doplněných o klasické Navier-Stokesovy rovnice uvedené např. v [12], nebo o jiné rovnice hydrodynamiky. Do hodnot koeficientů b_{ij} a k_{ij} je často započítán vliv dynamické poddajnosti ložiskové pánve. Stejně jako v případě Bently-Muszyńské modelu i rovnice (2.68) je platná pouze pro ložiska, jejichž axiální délka je řádově nižší než délka rotoru. Formálně shodný vztah s rovnicí (2.68) je možné použít i při modelování linearizovaných valivých [2], kluzných pneumatikových a elektromagnetických ložisek a spárového efektu v ucpávkách turbín [7].

V případě, že momentové účinky nemohou být zanedbány, je možné matice tlumení a tuhosti ve vztahu (2.68) rozšířit o dalších 12 koeficientů a získat tak dvě čtvercové matice řádu 4, které budou vyjadřovat závislost vektoru silových účinků $\mathbf{f} = [F_y \ F_z \ M_y \ M_z]^\top$ na novém vektoru souřadnic $\mathbf{q} = [v \ w \ \vartheta \ \psi]^\top$. Oba zmíněné modely je pak možné zapsat ve tvaru výhodném pro sestavování globálních koeficientových matic

$$\mathbf{f}_e = \mathbf{B}_e(\omega) \dot{\mathbf{q}}_e + \mathbf{K}_e(\omega) \mathbf{q}_e, \quad (2.69)$$

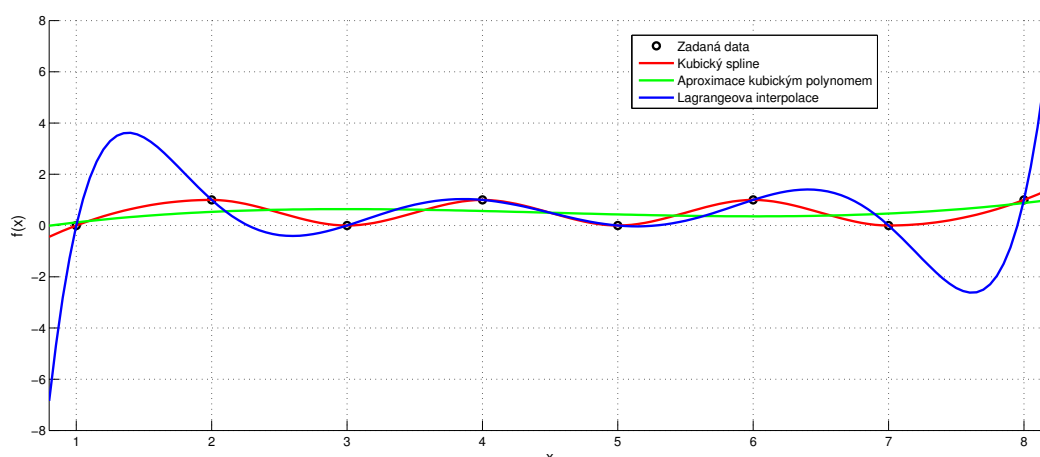
kde lokální koeficientové matice $\mathbf{B}_e(\omega)$ a $\mathbf{K}_e(\omega)$ jsou již řádu 6, přičemž nových 20 prvků v každé z matic je nulových, a vektor souřadnic \mathbf{q}_e koresponduje s vektorem souřadnic z pohybové rovnice tuhého tělesa (2.55).

V případě, že olejový film ložiska netvoří vazbu mezi rotorem a statorem, ale mezi dvěma rotujícími částmi soustavy, což se děje mezi rotorem a ložiskovým kroužkem, který v ložiscích některých rychloběžných rotorů odděluje od sebe dva olejové filmy rotující různou úhlovou rychlostí, nabývají matice tuhosti a tlumení tvaru analogického s (2.61).

Odhad velikosti koeficientů tlumení a tuhosti při libovolných hnacích otáčkách

V praxi se často stává, že koeficienty b_{ij} a k_{ij} jsou známy pouze pro několik diskretních hodnot hnacích otáček. Při sestavování Campbellových diagramů a výpočtu kritických otáček rotorové soustavy je ale nutné znát rovněž hodnoty koeficientů b_{ij} a k_{ij} , které charakterizují ložisko pracující při jiných nominálních otáčkách. Známé hodnoty koeficientů je tedy třeba proložit vhodnou křivkou, která závisí na nominálních otáčkách a jejíž funkční hodnoty se rovnají odhadu hledaných koeficientů. V praxi se známé diskretní body nejčastěji prokládají interpolační křivkou, případně aproximují kvadratickým či kubickým polynomem.

Cílový polynom je nejčastěji hledán pomocí metody nejmenších čtverců [8, 10]. Zásadní nevýhodou této metody je skutečnost, že výsledná regresní křivka obecně neprochází zadanými diskretními body. Regresní křivka získaná pomocí metody nejmenších čtverců má ještě jednu nepříjemnou vlastnost: pás spolehlivosti se na okrajích definičního oboru rozevívá [8]. Jinými slovy, na okrajích definičního oboru a v oblasti extrapolace se křivka může poměrně značně lišit od skutečného průběhu funkce popisující velikost koeficientů.



Obrázek 2.9: Porovnání průběhu kubického splinu, klasické lagrangeovské interpolace a kubické aproximace metodou nejmenších čtverců proložených diskrétními body.

Při výpočtu interpolační křivky se neuvžívá klasických interpolačních algoritmů jako jsou Lagrangeovy a Newtonovy interpolační vzorce, které prokládají všechny diskrétní body jedním polynomem. Známé diskrétní body totiž mohou být nerovnoměrně rozloženy, což se může projevit vznikem tzv. záškmitů interpolační funkce naznačených na Obr. 2.9. Tento problém je možné vyřešit užitím splinů, po částech lineární funkce, či hermitovské interpolace [24], čímž se záškmity v oblasti definičního oboru dají do značné míry eliminovat [10, 24]. Mimo definiční obor se interpolační křivky, stejně jako aproximační funkce, nemusí se skutečným průběhem hodnot koeficientů dobře shodovat.

2.3 Sestavení globálních matic

Celá rotorová soustava se skládá z elementů popsaných některou z pohybových rovnic (2.48), (2.55), (2.61) a (2.69), v případě dalších, výše neodvozených, prvků jinými vztahy, které jsou obvykle formálně shodné s některou z uvedených rovnic.

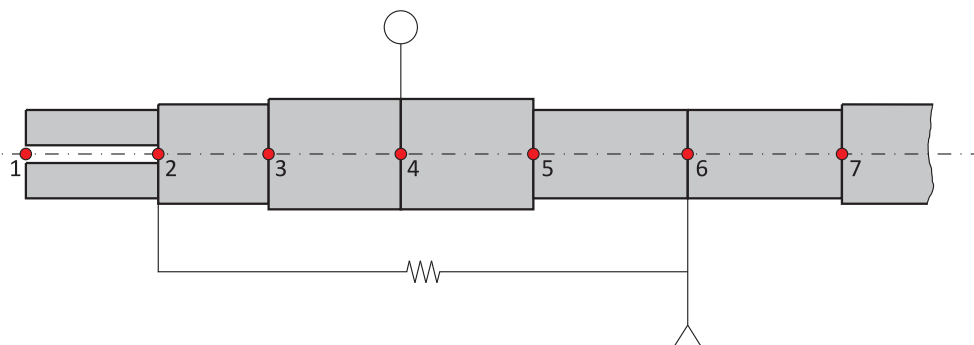
Každý z prvků je reprezentován řídicím uzlem, jenž určuje polohu jeho charakteristických matic v příslušných globálních maticích. Model soustavy je vhodné diskretizovat tak, aby uzly ležely v místech změn průřezů hřídele, připojených těles, viskoelastických členů a ložisek. Velmi dlouhé prizmatické úseky hřídele je možné rozdělit na více prvků, aby model dokázal lépe zachytit ohyb těchto částí. Část modelu sestavená podle těchto pravidel je zakreslena na Obr. 2.10.

Důležité je rovněž číslování uzlů. Vzhledem k zavedenému tvaru pohybových rovnic jednotlivých elementů je nejlepší zvolit posloupnost přirozených čísel, její první člen je přiřazen uzlu nacházejícímu se na jednom z konců hřídele, další nejbližšímu uzlu v axiálním směru atd. Pak je globální systém

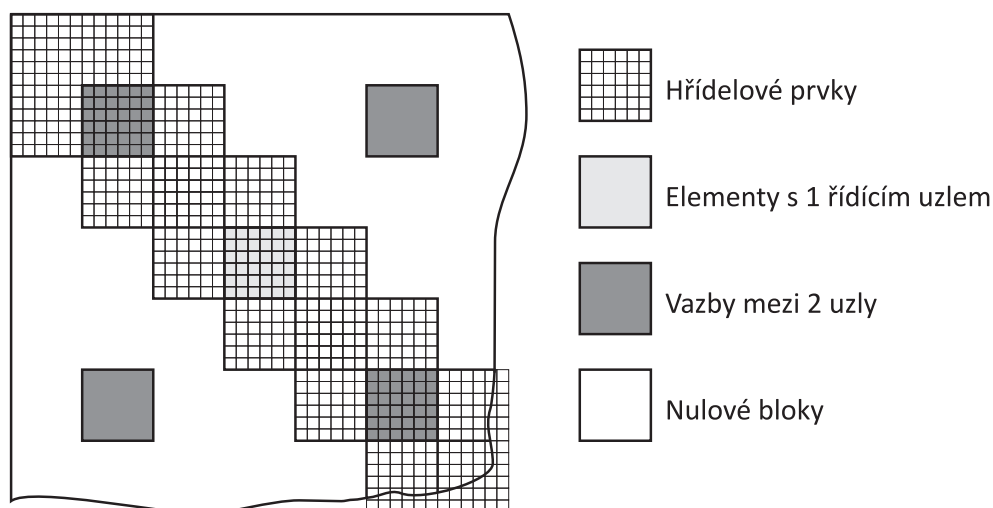
$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_l(\omega) + \omega \mathbf{G})\dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega) + \omega \mathbf{C})\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.70)$$

ve kterém symboly $\mathbf{B}_l(\omega)$ a $\mathbf{K}_l(\omega)$ označují matice tlumení a tuhosti vazeb závislých na nominálních otáčkách rotorové soustavy, tvořen řídkými maticemi, na jejichž diagonále se nacházejí bloky popisující parametry hmotnosti, tlumení nebo tuhosti hřídelů a také matice parametrů,

které náleží prvkům s jediným řídicím uzlem. Mimo bloky na diagonále jsou lokalizovány pouze části matic takových prvků, které spojují dva uzly, jejichž čísla neleží bezprostředně za sebou, jak je ukázáno na Obr. 2.11. Z dříve odvozených prvků jde o viskoelastické členy, příp. o speciální případy ložiskových vazeb.



Obrázek 2.10: Začátek rotoru tvořený 7 hřídelovými prvky (šedé obdélníky), tuhým tělesem připojeným do uzlu 4, nehmotným elastickým členem tvořícím vazbu mezi uzly 2 a 6 a radiálním ložiskem, které podpírá rotor v uzlu 6.



Obrázek 2.11: Lokalizace příspěvků matic jednotlivých elementů rotoru z Obr. 2.10 do globálních matic modelu (2.70). Je důležité si uvědomit, že jednotlivé matice nenabývají striktně naznačeného tvaru: např. elastický člen spojující řídicí uzly 2 a 6 má nulové příspěvky do globální matice hmotnosti a tlumení atd.

3 Úlohy rotorové dynamiky

Homogenní model (2.70) popisuje volné kmity rotorové soustavy. V této kapitole je homogenní model rozšířen o vektor silového buzení a jsou diskutovány problémy, které mohou být řešeny s využitím homogenního modelu a také rozebrány dvě základní metody sloužící k výpočtu odezvy rozšířeného modelu.

3.1 Modální analýza

Modální analýza je jednou ze základních úloh dynamiky. Často se využívá již během návrhu stroje pro ověření vhodnosti konstrukčního řešení, ale je používána rovněž při ladění výpočtového modelu nebo zjišťování vlivu uložení na modální vlastnosti součástí či zařízení. Cílem modální analýzy je určit modální vlastnosti mechanické soustavy, tedy vlastní frekvence a vlastní tvary kmitu. Modální vlastnosti je možné získat vyřešením problému vlastních hodnot konzervativního matematického modelu

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

v němž jsou zanedbány tlumicí účinky a který je přidružen kompletnímu modelu. Nicméně v případě rotorových soustav podepřených obecnými ložisky není vhodné vynechávat členy závislé na vektoru $\dot{\mathbf{q}}$, protože model rotorové soustavy (2.70) je z hlediska klasifikace tlumení silně nekonzervativní [2, 22]. U takových soustav tlumení a další členy závislé na vektoru $\dot{\mathbf{q}}$ znatelně ovlivňují modální vlastnosti. V případě rotorových soustav se navíc velikost těchto členů mění v závislosti na úhlové rychlosti ω , kterou se soustava otáčí, což generuje některé specifické vlastnosti podrobněji probrané v podkapitole 3.2.

3.1.1 Výpočet vlastních frekvencí a vlastních tvarů kmitu

Problém vlastních hodnot silně nekonzervativních soustav se obvykle řeší v tzv. stavovém prostoru [22]. Z klasického konfiguračního prostoru, v němž je odvozen model (2.70), lze do stavového prostoru přejít rozšířením modelu o identitu

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(t).$$

Soustava pak nabývá tvaru

$$\mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(t) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{0} \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_l(\omega) + \omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega) + \omega \mathbf{C}) \mathbf{q}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.2b)$$

který má dvojnásobný počet stupňů volnosti oproti původnímu modelu (2.70) v konfiguračnímu prostoru.

Za předpokladu, že je řešení soustavy (3.2a) – (3.2b) hledáno pro jednu konkrétní úhlovou rychlost ω_0 , nabývají matice tlumení a tuhosti ložisek $\mathbf{K}_l(\omega_0)$ a $\mathbf{B}_l(\omega_0)$ konstantních hodnot a

soustava může být přepsána do maticového tvaru

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{C} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}(t) \\ \mathbf{q}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

jenž se často zapisuje ve zkrácené formě

$$\mathbf{N} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{P} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.4)$$

kde $\mathbf{u}(t)$ je stavový vektor.

Rovnice (3.4) není obecně vhodná pro numerické řešení příslušného problému vlastních hodnot [5] a proto je vhodné zavést jiný tvar tohoto modelu

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = -\mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{u}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{u}(t), \quad (3.5)$$

v němž \mathbf{A} je tzv. systémová matice, která nabývá tvaru

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{B} + \omega_0 \mathbf{G}) & -\mathbf{M}^{-1} (\mathbf{K} + \omega_0 \mathbf{C}) \\ \mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Diferenciální rovnice (3.5) má netriviální řešení ve tvaru

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{\lambda t}, \quad (3.6)$$

kde e je Eulerovo číslo. Dosazením tohoto řešení a jeho časové derivace

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \lambda \mathbf{u} e^{\lambda t} \quad (3.7)$$

zpět do diferenciální rovnice (3.5) je získána rovnost

$$\lambda \mathbf{E} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \mathbf{u} e^{\lambda t},$$

kteřá musí být splněna v libovolném čase $t \geq 0$. Musí tedy platit rovnost

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

známá jako problém vlastních hodnot, v níž \mathbf{E} označuje jednotkovou matici řádu, který odpovídá řádu systémové matice \mathbf{A} . Rovnici (3.8) splňuje určitý počet vlastních čísel λ_ν a vlastních vektorů \mathbf{u}_ν , přičemž jsou hledány takové dvojice vlastních čísel a vektorů, v nichž jsou vlastní vektory netriviální. Platí tedy $\mathbf{u}_\nu \neq \mathbf{0}$ a v rovnici (3.8) musí být nulový výraz v závorce. Ten je roven nulové matici právě tehdy, když je splněna charakteristická rovnice

$$\det(\lambda_\nu \mathbf{E} - \mathbf{A}) = 0. \quad (3.9)$$

Rovnice (3.8) a (3.9) se obvykle řeší numericky. Většinou jsou používány iterační procesy, které rychle konvergují, mají nízké nároky na paměť počítače a nekladou na matici \mathbf{A} požadavky jako jsou symetričnost a pozitivní definitnost. Těmto specifikacím vyhovují např. LR a QR (v anglické literatuře označovaný též QZ) algoritmy [5].

Předpokládejme, že původní homogenní model (2.70) má n stupňů volnosti. Pak rovnici (3.9) řeší kvůli rozšíření homogenního modelu o identitu (3.2a) $2n$ komplexních vlastních čísel λ_ν , která je možno rozdělit do tří skupin

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu + i \beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (3.10a)$$

$$\lambda_{m+\nu} = \alpha_\nu - i \beta_\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, m, \quad (3.10b)$$

$$\lambda_\nu = \alpha_\nu, \quad \nu = 2m + 1, \dots, 2n, \quad (3.10c)$$

kde α_ν a β_ν je reálná a imaginární část vlastního čísla a i je imaginární jednotka. Uvnitř množiny (3.10a) jsou vlastní čísla řazena podle velikosti imaginární části

$$\beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_m,$$

prvky z množiny (3.10b) jsou komplexně sdružené k již seřazeným prvkům z (3.10a) a v množině (3.10c) jsou vlastní čísla řazena podle velikosti reálné části.

Vlastní čísla z množin (3.10a) a (3.10b) nesou informaci o vlastních frekvencích a modálních útlumech příslušných vlastních vektorů \mathbf{u}_ν . Imaginární část vlastního čísla λ_ν odpovídá ν -té vlastní frekvenci tlumené mechanické soustavy v rad/s

$$\Omega_{D,\nu} = \beta_\nu, \tag{3.11}$$

na reálné části vlastního čísla úměrně závisí velikost bezrozměrného parametru tlumení, tzv. poměrného modálního útlumu

$$D_\nu = -\frac{\alpha_\nu}{|\lambda_\nu|} \tag{3.12}$$

udávajícího míru tlumení pro ν -tý vlastní tvar a konečně velikost vlastního čísla odpovídá netlumené vlastní frekvenci v rad/s

$$\Omega_\nu = |\lambda_\nu|, \tag{3.13}$$

kteřou by bylo možné získat modální analýzou přidružené konzervativní soustavy [2, 22].

Po dosazení vlastního čísla λ_ν do řešení (3.6) diferenciální rovnice (3.5) a aplikaci Eulerova vzorce

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{3.14}$$

kde x je libovolné reálné, nebo komplexní číslo, lze konstatovat, že imaginární část vlastního čísla β_ν definuje periodickou část řešení, zatímco reálná část α_ν rozhoduje o charakteru exponenciální části řešení. Odtud i z rovnosti (3.12) vyplývá, že kladné hodnoty α_ν mají na svědomí divergentní řešení pro $t \rightarrow +\infty$. Divergentní řešení bývá v dynamice označováno také jako nestabilní.

Důležité jsou i prvky z množiny (3.10c) zahrnující vlastní čísla příslušná přetlumeným (neperiodickým) vlastním tvarům kmitu a často také nulová vlastní čísla, jejichž počet se odvíjí od kvality uložení soustavy. Množina (3.10c) se skládá vždy ze sudého počtu prvků a její mohutnost je rovná dvojnásobku přetlumených tvarů kmitu a nulových vlastních frekvencí, což je zapříčiněno dvojnásobným počtem stupňů volnosti mechanické soustavy ve stavovém prostoru. V některých pramenech jsou nulová vlastní čísla rovnoměrně rozdělena mezi množiny (3.10a) a (3.10b). Jak ale bude ukázáno v oddílu 3.2.2, takové uspořádání nemusí být vhodné pro použití v iteračních algoritmech sloužících k výpočtu kritických otáček.

3.1.2 Podmínky biortogonality a normování vlastních vektorů

Každému z vlastních čísel λ_ν přísluší komplexní vlastní vektor \mathbf{u}_ν , který je řešením homogenní soustavy (3.8). Aby bylo možné zajistit některé výhodné vlastnosti modálních souřadnic [22], které jsou definovány transformačním vztahem

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \mathbf{x}(t), \tag{3.15}$$

kde $\mathbf{x}(t)$ je vektor modálních souřadnic ve stavovém prostoru a \mathbf{U} je modální matice, jejíž jednotlivé sloupce jsou tvořeny vlastními vektory, rozšiřuje se původní model (3.5) o adjungovaný (transponovaný) model

$$\dot{\mathbf{w}}(t) - \mathbf{A}^\top \mathbf{w}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.16)$$

k němuž je možné způsobem naznačeným v předchozím oddílu odvodit problém vlastních hodnot ve tvaru

$$(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}^\top) \mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (3.17)$$

jehož řešením jsou vlastní čísla λ_ν shodná s vlastními čísly problému (3.8) a levostranné vlastní vektory \mathbf{w}_ν . V kontextu s pojmenováním vektorů \mathbf{v}_ν se často vlastní vektory \mathbf{u}_ν původního modelu označují jako pravostranné.

Předpokládáme nyní znalost všech vlastních čísel, levostranných a pravostranných vektorů libovolného mechanického systému popsaného ve stavovém prostoru modely (3.8) a (3.16). Vyjádříme rovnosti (3.8) a pro j -té a i -té vlastní číslo

$$\begin{aligned} \nu = j : \\ \lambda_j \mathbf{E} \mathbf{u}_j = \mathbf{A} \mathbf{u}_j, \end{aligned} \quad (3.18a)$$

$$\begin{aligned} \nu = i : \\ \lambda_i \mathbf{E} \mathbf{w}_i = \mathbf{A}^\top \mathbf{w}_i \end{aligned} \quad (3.18b)$$

a vynásobíme rovnost (3.18a) transponovaným levostranným vektorem \mathbf{w}_i^\top zleva a rovnost (3.18b) transponovaným pravostranným vektorem \mathbf{u}_j^\top zleva

$$\mathbf{w}_i^\top \lambda_j \mathbf{E} \mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{u}_j, \quad (3.19a)$$

$$\mathbf{u}_j^\top \lambda_i \mathbf{E} \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_j^\top \mathbf{A}^\top \mathbf{w}_i. \quad (3.19b)$$

Z rozdílu (3.19a) a transponovaného vztahu (3.19b)

$$\mathbf{w}_i^\top (\lambda_j - \lambda_i) \mathbf{E} \mathbf{u}_j = 0$$

přímo vyplývá první podmínka biortogonality levostranných a pravostranných vlastních vektorů

$$\mathbf{w}_i^\top \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j. \quad (3.20)$$

Druhou z podmínek biortogonality

$$\mathbf{w}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j \quad (3.21)$$

lze formulovat porovnáním první podmínky (3.20) a rovnosti (3.19a).

Podmínky biortogonality (3.20) a (3.21) se nezabývají případem, kdy se indexy vlastních vektorů rovnají. Je to z důvodu, že vlastní vektory jsou řešením homogenních soustav rovnic a jako takové mohou být vynásobeny jakýmkoliv nenulovým reálným číslem, aniž by přestaly homogenní soustavu řešit. Proto se podmínka (3.20) často rozšiřuje o požadavek

$$\mathbf{w}_i^\top \mathbf{u}_j = \delta_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}, \quad (3.22)$$

ze kterého po porovnání s rovností (3.19a) plyne

$$\mathbf{w}_i^\top \mathbf{A} \mathbf{u}_j = \delta_{ij} \lambda_i, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, 2n\}. \quad (3.23)$$

Podmínky (3.22) a (3.23) jsou souhrnně nazývány podmínkami biortonormality a obvykle se zapisují pomocí modálních matic

$$\mathbf{W}^\top \mathbf{U} = \mathbf{E}, \quad (3.24a)$$

$$\mathbf{W}^\top \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}, \quad (3.24b)$$

kde \mathbf{W} je po sloupcích složena z levostranných vlastních vektorů a \mathbf{U} z jejich pravostranných protějšků.

3.1.3 Vizualizace vlastních tvarů kmitu

Jakmile je vypočtena modální analýza, vyvstává otázka, jakým způsobem vizualizovat vlastní tvary kmitu (též módy) popsané jednotlivými vlastními vektory. U jednoduchých kontinuů, jakým je podélně kmitající nosník, většinou stačí zobrazit reálné části jednotlivých modálních souřadnic ve sloupcovém diagramu, v němž indexy jednotlivých sloupců korespondují s indexy řídicích uzlů modelu. Podobným způsobem je možné zobrazit některé vlastní tvary složitějších kontinuů, jako je model rotoru představený v této práci. Do grafu se v takovém případě vynáší pouze souřadnice odpovídající konkrétním kmitům, např. všechny torzní souřadnice. Pro vizualizaci ohybových módů je ovšem sloupcový diagram nevhodný, protože nevystihuje jejich charakter přesně.

Tvar matic v modelu (2.70) jednoznačně ukazuje na skutečnost, že horizontální a vertikální posuvy určující podobu ohybových kmitů, ale také natočení kolem os ve směrech uvedených posuvů, jsou vzájemně provázané a pro nominální úhlovou rychlost $\omega > 0$ je vazba navíc posílená maticí gyroskopických účinků. Ohybové kmity je možné vizualizovat pouze pomocí střednice rotoru. Poloha střednice je popsána vertikálním a horizontálním posunutím v řídicích uzlech, zatímco natočení udávají orientaci průřezů, na nichž se jednotlivé uzly nacházejí. Je zřejmé, že pro vykreslení deformované střednice plně postačuje znalost posuvů, a proto se natočeními tento oddíl dále nezabývá.

Předpokládejme, že ν -tý nepřetlumený vlastní tvar rotoru je možné popsat komplexní harmonickou funkcí

$$\bar{\mathbf{u}}_\nu(t) = \mathbf{u}_\nu e^{i\beta_\nu t}, \quad (3.25)$$

kde \mathbf{u}_ν je normovaný ν -tý pravostranný vlastní vektor a β_ν je imaginární část ν -té vlastního čísla. Komplexní amplitudy horizontální a vertikální modální výchylky j -tého řídicího uzlu označme

$$u_{6(j-1)+2,\nu} = \bar{v}_j = v_{j,r} + i v_{j,i}, \quad (3.26a)$$

$$u_{6(j-1)+3,\nu} = \bar{w}_j = w_{j,r} + i w_{j,i}, \quad (3.26b)$$

kde jsou indexy r a i na pravé straně rovností použity pro vyjádření reálné a imaginární části vlastního vektoru.

Dosazením vztahu do funkce (3.25) a použitím Eulerova vztahu (3.14) lze vyjádřit přesný průběh jedné z komplexních souřadnic v čase

$$(v_{j,r} + i v_{j,i}) e^{i\beta_\nu t} = v_{j,r} \cos \beta_\nu t + i v_{j,i} \sin \beta_\nu t + i v_{j,r} \sin \beta_\nu t - v_{j,i} \cos \beta_\nu t. \quad (3.27)$$

Je zřejmé, že ostatní členy funkce $\bar{\mathbf{u}}_\nu(t)$ mají analogický tvar.

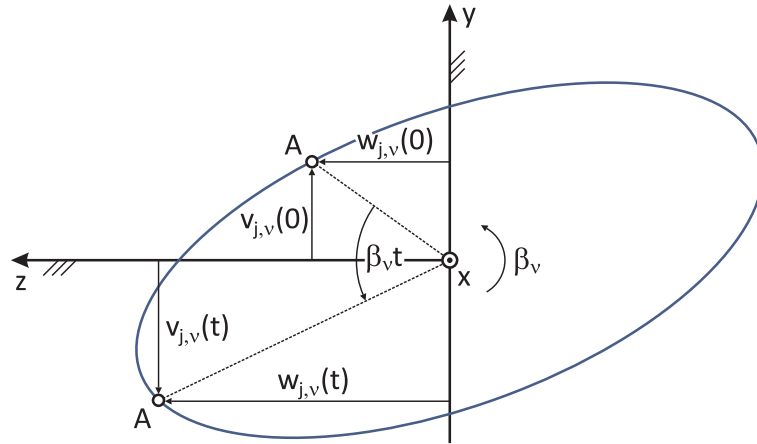
Poloha střednice v j -tém řídicím uzlu je popsána reálnými částmi dvou na sebe kolmých komplexních vektorů (3.27)

$$v_j(\tau) = v_{j,r} \cos \tau - v_{j,i} \sin \tau, \quad (3.28a)$$

$$w_j(\tau) = w_{j,r} \cos \tau - w_{j,i} \sin \tau, \quad (3.28b)$$

což je dokázáno v podkapitole 3.3. Proměnná $\tau = \beta_\nu t$ ve vztazích (3.28a) a (3.28b) je bezrozměrný čas. Je uveden bez indexu, protože každý mód je vizualizován v čase $\tau \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Použití bezrozměrného času τ je výhodné, protože umožňuje vykreslit právě jednu otáčku deformované střednice bez nutnosti předávat vizualizačnímu algoritmu informace o imaginární části vlastního čísla β_ν .

Trajektorie, kterou urazí řídicí uzel během jedné otáčky, je nazývána orbit a je zobrazena na Obr. 3.1. Vlastní tvary kmitu rotoru je zvykem vykreslovat jako sadu orbitů v trojrozměrném kartézském systému s naznačenou polohou střednice v čase $\tau = 0$. Vzhledem k tvaru podmínek biortonormality (3.24a) – (3.24b) je možné velikost orbitů libovolně zvolit, což zajišťuje srozumitelnost vizualizace jednotlivých módů, aniž by byly porušeny podmínky biortonormality.



Obrázek 3.1: Vizualizace orbity j -tého řídicího pro ν -tý vlastní tvar.

3.2 Analýza kritických otáček

Pojem rezonančních kritických otáček definoval již v roce 1894 Dunkerley [4] a jako otáčky rotoru, které se rovnají vlastní frekvenci ohybového tvaru kmitu rotoru vybuzeného nevyvážením je uvádí i Novotný ve slovníku [16]. Pojem kritických otáček nicméně může být chápán i obecněji jako jakýkoliv stav, ve kterém se nominální úhlová rychlost rotoru rovná jedné z jeho vlastních frekvencí a to bez ohledu na to, zdali je takový stav doprovázen rezonančním jevem či nikoliv.

Druhá z definic je výhodná především pro algoritmizaci výpočtu kritických otáček, jelikož pro jejich stanovení pak není třeba počítat odezvu, což se příznivě projeví na délce výpočtu. V zásadě existují dva způsoby stanovení kritických otáček: grafická metoda a iterační proces.

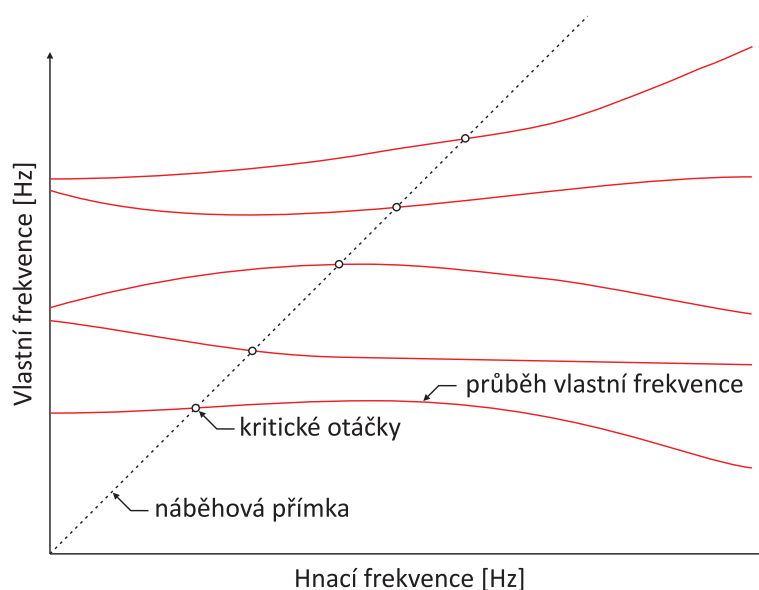
3.2.1 Campbellův diagram

Campbellův diagram lze získat dvěma způsoby: experimentálně a výpočtem. Při experimentu jsou zaznamenávána spektra odezvy jako funkce nominálních otáček rotoru. Diagram se často vykresluje pomocí konturového grafu nazývaného též spektrogram, kde na vodorovné ose jsou nominální otáčky rotoru ω , svislá osa popisuje frekvenci odezvy f a každý bod grafu je vynesena barvou určující velikost amplitudy odezvy. Graf je doplněn o náběhové přímky, které jsou za předpokladu, že ω a f mají stejnou jednotku, dány vztahy

$$f = n\omega, \quad f = \frac{\omega}{n},$$

kde n je přirozené číslo označované jako řád náběhové přímky. Průniky náběhové přímky prvního řádu a amplitud odezvy označují stavy, při nichž dojde k rezonanci. Vzhledem k tomu, že ve spektrech odezvy se projeví pouze výrazné amplitudy a nevýrazné splynou se šumem způsobeným měřicím řetězcem, experimentálně určený Campbellův diagram detekuje pouze rezonanční kritické otáčky. Někdy se namísto konturového grafu používá tzv. kaskádní diagram¹.

Campbellův diagram získaný pomocí výpočtu se sestavuje po provedení určitého počtu modálních analýz. Jednotlivé modální analýzy se provádí pro různé úhlové rychlosti ω , které jsou ekvidistantně rozdělené na předem daném intervalu. Vodorovná osa diagramu určuje úhlovou rychlost, při které je modální analýza provedena, a svislá osa vymezuje hodnotu vlastních frekvencí. Opět se zavádí náběhová přímka prvního řádu, jak je ukázáno na Obr. 3.2.



Obrázek 3.2: Ukázka Campellova diagramu získaného pomocí výpočtu.

Diagram tedy zobrazuje průběh všech vlastních frekvencí v závislosti na otáčkách a s jeho pomocí lze určit přibližný průsečík náběhové přímky a průběhu jistého vlastního čísla, jenž určuje hodnotu kritických otáček. Diagram je taktéž možné vykreslit v bezrozměrném tvaru [2] a průběhy vlastních frekvencí se často doplňují o průběhy poměrných útlumů, resp. reálných částí vlastních čísel, příp. o vizualizaci příslušných tvarů kmitu.

¹Anglicky *waterfall plot*.

3.2.2 Iterační proces pro výpočet kritických otáček

Výchozím vztahem pro výpočet kritických otáček je dříve odvozený model rotorové soustavy ve stavovém prostoru

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{A}(\omega) \mathbf{u}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.29)$$

v němž systémová matice $\mathbf{A}(\omega)$ je funkcí úhlové rychlosti rotoru ω . Obecný krok iteračního procesu sloužícího k nalezení hodnoty j -tých kritických otáček má formálně stejný tvar jako problém vlastních hodnot výchozího modelu (3.29)

$$\left[\lambda^{(i)} \mathbf{E} - \mathbf{A}(\omega^{(i)}) \right] \mathbf{u}^{(i)}(t) = \mathbf{0}, \quad (3.30)$$

přičemž index i označuje pořadí iterace. Výstupem i -tého iteračního kroku (3.30) je množina vlastních čísel $\lambda_\nu^{(i)}$, $\nu = 1, \dots, 2n$, seřazená podle pravidel (3.10a) – (3.10c). Z této množiny je vybráno $(j + d)$ -té vlastní číslo a jsou ověřeny zastavovací podmínky algoritmu

$$\left[\frac{\operatorname{Im}(\lambda_{j+d}^{(i)} - \omega^{(i)})}{\omega^{(i)}} \right]^2 < \varepsilon, \quad (3.31a)$$

$$i = i_{\max}, \quad (3.31b)$$

ve kterých ε je požadovaná relativní přesnost výpočtu a i_{\max} je maximální počet iterací jednoho iteračního cyklu. Hodnota d v indexu vybraného vlastního čísla je rovna počtu divergentních iteračních procesů, tedy procesů, jež byly zastaveny podmínkou (3.31b).

V případě, že ani jedna z ukončovacích podmínek (3.31a) a (3.31b) není splněna, přejde proces k další, $(i + 1)$ -ní iteraci, ve které je úhlová rychlost soustavy vybrána pomocí následujícího pravidla

$$\omega^{(i+1)} = \operatorname{Im}(\lambda_{j+d}^{(i)}). \quad (3.32)$$

Pokud je splněna podmínka (3.31a), doplní se výsledné vlastní číslo λ_{j+d} odpovídající j -tým kritickým otáčkám o vlastní vektor \mathbf{u}_{j+d} , který charakterizuje tvar kmitání v případech, kdy jsou j -té kritické otáčky rezonanční.

Je-li splněna podmínka (3.31b), nebyly j -té kritické otáčky v tomto cyklu nalezeny. K tomu může dojít v případech, kdy se funkce popisující závislost hodnoty určité vlastní frekvence na úhlové rychlosti rotoru neprotíná s náběhovou přímkou prvního řádu. Takové chování je typické i pro nulová vlastní čísla související s uložením rotorové soustavy, která byla v oddílu 3.1.1 zařazena do stejné množiny (3.10c) s ryze reálnými vlastními čísly. Nulová vlastní čísla by teoreticky měla mít s náběhovou přímkou společný bod — počátek souřadnic — ale jeho nalezení je pro numerický iterační proces velmi obtížné a to především kvůli tvaru zastavovací podmínky (3.31a), v níž se v takových případech čitatel i jmenovatel blíží nule. To obvykle způsobuje zastavení iteračního cyklu až díky podmínce maximálního přípustného počtu iterací (3.31b). Při výpočtu kritických otáček je tedy výhodné použít řazení vlastních čísel (3.10a) – (3.10c), protože díky tomuto řazení se iterační algoritmus nemusí nulovými vlastními čísly zabývat, což má příznivý vliv na délku výpočetního času.

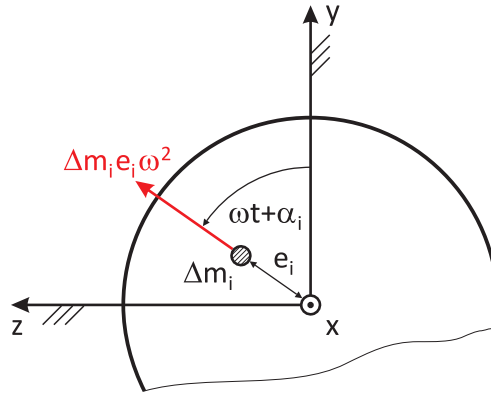
Proces (3.30) obvykle velmi rychle konverguje k přesnému řešení a to i v případech, kdy je zvolena malá hodnota relativní přesnosti ε . Jako počáteční úhlovou rychlost $\omega^{(0)}$ je možné zvolit jakékoliv nenulové číslo. Volba blízká skutečné hodnotě kritických otáček ušetří až několik iteračních kroků.

3.3 Odezva na harmonické buzení

Síly působící na zařízení mají v praxi často podobu harmonických funkcí nebo jejich součtu. V rotorové dynamice je nejčastější příčinou vzniku harmonického buzení nevyváženost rotoru. V této podkapitole je odvozen silový účinek nevyváhy na rotor, ale analogický postup může být použit při výpočtu odezvy na libovolné harmonické buzení.

V podstatě žádný reálný rotor není úplně vyvážený. Zbytková nevyváha je zapříčiněna nerovnoměrným radiálním rozdělením hmotnosti rotorové soustavy, následkem čehož není splněna podmínka shodnosti střednice hmotnosti rotoru s jeho geometrickou střednicí. Je charakterizována axiální polohou, hmotností a excentricitou, viz Obr. 3.3. Axiální poloha je určena řídicím uzlem, k němuž se nevyváha v modelu (3.33) připojuje. Nachází-li se na rotoru nevyvážek více, definuje se i jejich vzájemná úhlová poloha. Při odvozování hřídelových prvků se nevyváženost běžně zanedbává a připojuje se ke klasickému modelu (2.70) ve formě časově proměnné harmonické budící síly $\mathbf{f}(t)$ tak, že platí

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{B} + \mathbf{B}_l(\omega) + \omega \mathbf{G}) \dot{\mathbf{q}}(t) + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_l(\omega) + \omega \mathbf{C}) \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t). \quad (3.33)$$



Obrázek 3.3: Nevývaha o hmotnosti Δm_i s excentricitou (radiální vzdáleností mezi střednicí hmotnosti a geometrickou střednicí) e_i a odstředivá síla, kterou nevyváha způsobí, otáčí-li se hřídel konstantní úhlovou rychlostí ω .

Uvažujme i -tý nevyvážek o hmotnosti Δm_i , excentricitě e_i a počáteční fázi α_i , který je připojený k j -tému řídicímu uzlu. Za předpokladu, že všechny řídicí uzly mají 6 stupňů volnosti a hřídel se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω a při zanedbání tíhové síly, která má podle [7] zpravidla jen druhořadý vliv na dynamiku rotoru, působí na nevyváhu v radiálním směru odstředivá síla o velikosti

$${}_i F_o = \Delta m_i e_i \omega^2,$$

kterou je možné rozložit do směrů os y a z pevného souřadnicového systému pomocí goniometrických funkcí. Příspěvek této odstředivé síly do vektoru buzení $\mathbf{f}(t)$ je pak možné vyjádřit pomocí následujícího vztahu

$$\mathbf{f}(t) = \begin{matrix} 6(j-1)+2 \\ 6(j-1)+3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \omega^2 \Delta m_i e_i \cos(\omega t + \alpha_i) \\ \omega^2 \Delta m_i e_i \sin(\omega t + \alpha_i) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Vektor silových účinků způsobených buzení nevyváhou se skládá pouze z příspěvků (3.34) a proto je možné na něj aplikovat známé součtové vzorce goniometrických funkcí sinus a kosinus. Po úpravě lze vektor buzení $\mathbf{f}(t)$ vyjádřit jako součet sinových a kosinových složek

$$\mathbf{f}(t) = \omega^2 \begin{bmatrix} \vdots \\ \Delta m_i e_i (\cos \omega t \cos \alpha_i - \sin \omega t \sin \alpha_i) \\ \Delta m_i e_i (\sin \omega t \cos \alpha_i + \cos \omega t \sin \alpha_i) \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t. \quad (3.35)$$

Ustálenou odezvu je výhodné počítat pomocí Fourierovy transformace [22] nebo převodem modelu (3.33) do komplexního tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{B}(\omega) \dot{\bar{\mathbf{q}}}(t) + \mathbf{K}(\omega) \bar{\mathbf{q}}(t) = \bar{\mathbf{f}}(t), \quad (3.36)$$

kde $\bar{\mathbf{q}}(t)$ a $\bar{\mathbf{f}}(t)$ jsou komplexní vektory výchylky a buzení. Komplexní vektor buzení $\bar{\mathbf{f}}(t)$ lze formulovat následujícím způsobem

$$\bar{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{f}_c e^{i\omega t} - i \mathbf{f}_s e^{i\omega t} = (\mathbf{f}_c - i \mathbf{f}_s) e^{i\omega t} = \bar{\mathbf{f}} e^{i\omega t}. \quad (3.37)$$

Platí, že reálná část komplexního vektoru buzení je totožná s reálným vektorem buzení, což je možné dokázat jednoduchou úpravou vztahu (3.37) za použití Eulerova vzorce (3.14)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{f}}(t)) &= \operatorname{Re} \left[(\mathbf{f}_c - i \mathbf{f}_s) (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] = \\ &= \operatorname{Re} \left[\mathbf{f}_c \cos \omega t + i \mathbf{f}_c \sin \omega t - i \mathbf{f}_s \sin \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t \operatorname{Re} \right] = \mathbf{f}_c \cos \omega t + \mathbf{f}_s \sin \omega t. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Komplexní vektor $\bar{\mathbf{q}}_p(t)$ partikulárního řešení diferenciální rovnice (3.36) lze vzhledem k tvaru pravé strany (3.37) nalézt velmi snadno pomocí metody odhadu. Partikulární řešení a jeho časové derivace mají tvar

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}_p(t) &= \bar{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}, \\ \dot{\bar{\mathbf{q}}}_p(t) &= i\omega \bar{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}, \\ \ddot{\bar{\mathbf{q}}}_p(t) &= -\omega^2 \bar{\mathbf{q}}_a e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

kde $\bar{\mathbf{q}}_a$ je zatím neznámý vektor komplexních amplitud výchylek, který je možné rozdělit na reálnou a imaginární část

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{q}_r + i \mathbf{q}_i. \quad (3.40)$$

Vektor komplexních amplitud výchylek je možné vyčíslit po dosazení odhadu partikulárního řešení a jeho časových derivací (3.39) do původní diferenciální rovnice (3.36). Výsledný výraz lze zjednodušit vytknutím vektoru $\bar{\mathbf{q}}_a$ na levé straně a vydělením obou stran rovnosti nenulovým výrazem $e^{i\omega t}$ do podoby

$$\left[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}_l(\omega) + \mathbf{K}_l(\omega) \right] \bar{\mathbf{q}}_a = \bar{\mathbf{f}}, \quad (3.41)$$

kde člen v hranatých závorkách definuje matici dynamické tuhosti $\mathbf{Z}(\omega)$. Označíme-li $\mathbf{Z}^{-1}(\omega) = \mathbf{H}(\omega)$, je možné vyjádřit vektor komplexních amplitud výchylek jako součin matice dynamické

poddajnosti $\mathbf{H}(\omega)$, jež se také nazývá matice frekvenčních přenosů, a komplexního vektoru buzení

$$\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{H}(\omega) \bar{\mathbf{f}}. \quad (3.42)$$

Řešení lineární soustavy algebraických rovnic (3.42) jednoznačně určuje partikulární řešení diferenciální rovnice (3.36). Aplikací Eulerova vzorce (3.14) je možné zapsat komplexní partikulární řešení pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus

$$\bar{\mathbf{q}}_p(t) = (\mathbf{q}_r + i \mathbf{q}_i) (\cos \omega t + i \sin \omega t) = \mathbf{q}_r \cos \omega t + i \mathbf{q}_i \sin \omega t + i \mathbf{q}_r \sin \omega t - \mathbf{q}_i \cos \omega t. \quad (3.43)$$

Odtud je zřejmé, že mezi komplexním vektorem partikulárního řešení $\bar{\mathbf{q}}_p(t)$ a jeho reálným protějškem $\mathbf{q}_p(t)$ platí obdobný vztah jako mezi komplexním a reálným vektorem buzení (3.38)

$$\mathbf{q}_p(t) = \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{q}}_p(t)) = \mathbf{q}_r \cos \omega t - \mathbf{q}_i \sin \omega t. \quad (3.44)$$

Podobně jako v případě Campbellova diagramu i výpočty partikulárního řešení je třeba provést pro určitý počet hodnot úhlových rychlostí ω , které jsou ekvidistantně rozděleny na daném intervalu. Jistou nevýhodou, která je specifická pro většinu rotačních strojů, je závislost matice dynamické poddajnosti na úhlové rychlosti ω . V každém kroku výpočtu je tedy nutné tuto matici sestavit a vyčíslit, což především v případech systémů s mnoha stupni volnosti negativně ovlivňuje délku výpočetního času. Výpočtový čas lze ale zkrátit, pokud se vůči ω konstantní matice předem uloží a v jednotlivých krocích se vyčísľují pouze ty matice, u kterých je to nezbytné. Z dříve odvozených matic jde pouze o matice tlumicích a tuhostních parametrů ložisek a ucpávek $\mathbf{B}_l(\omega)$ a $\mathbf{K}_l(\omega)$.

Výsledky výpočtu se obvykle vykresľují v závislosti na úhlové rychlosti ω . Amplitudová charakteristika znázorňuje průběh amplitudy zvolené j -té souřadnice $|\bar{q}_{a,j}|$ z vektoru komplexních amplitud $\bar{\mathbf{q}}_a$, zatímco frekvenční charakteristika vyjadřuje průběh jedné komplexní souřadnice v Gaussově rovině, jak je ukázáno na Obr. 3.4. Každý bod vyneseny do grafu frekvenční charakteristiky nese informaci o tom, ke které úhlové rychlosti ω náleží, proto se někdy frekvenční charakteristika zakresľuje jako křivka v kartézském souřadnicovém systému $\operatorname{Re} \bar{q}_{a,j}$, $\operatorname{Im} \bar{q}_{a,j}$, ω . Amplitudovou charakteristiku několika souřadnic je rovněž možné vykresľit pomocí konturových nebo kaskádních diagramů.

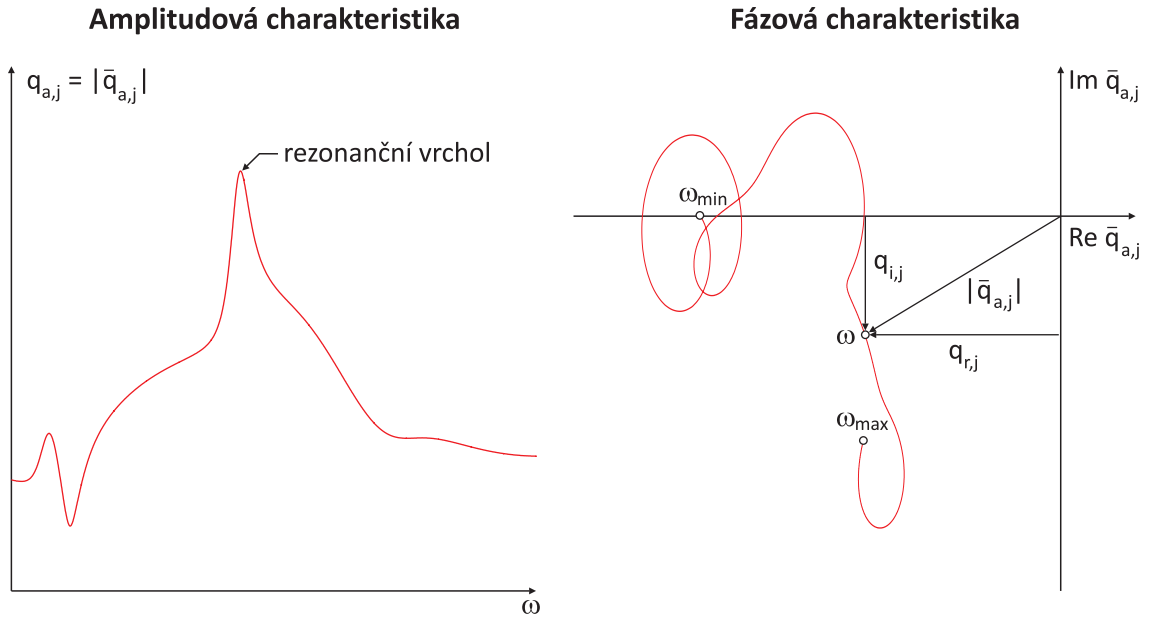
V inženýrské praxi se často používá Bodeho diagram [24], ve kterém jsou ve dvou nad sebou umístěných grafech vykresľeny průběhy fáze a amplitudy v závislosti na otáčkách rotoru. Je zřejmé, že Bodeho diagram nese stejné informace jako graf frekvenční charakteristiky.

Ustálenou odezvu na buzení nevyváhou rotující jednou vybranou úhlovou rychlostí ω_0 je rovněž možné animovat podobně jako vlastní tvar kmitu. Vzájemná poloha orbitů a animace pohybu střednice hřídele mohou napovědět, zdali dochází k precesi. Charakter precesního pohybu v i -tém řídicím uzlu je možné přímo kvantifikovat vyčíslením výrazu [2]

$$\operatorname{sgn}(\operatorname{Re} \bar{w}_i \operatorname{Im} \bar{v}_i - \operatorname{Im} \bar{w}_i \operatorname{Re} \bar{v}_i) \quad (3.45)$$

platného pro $\omega_0 > 0$, kde \bar{v}_i a \bar{w}_i jsou komplexní amplitudy odezvy z vektoru $\bar{\mathbf{q}}_a$ odpovídající výchylkám i -tého uzlu ve směru osy y a z . Je-li výraz (3.45) roven 1, dochází k souběžné precesi, je-li roven -1 , dochází k protiběžné precesi a je-li roven 0, k precesi nedochází.

V případě, že se rotorová soustava sestává z více rotorů spojených mechanickými převody, z nichž alespoň jeden má převodový poměr různý od 1, může na soustavu působit několik odstředivých sil rotujících s různou úhlovou rychlostí. Pak se vektor buzení rozdělí podle jednotlivých harmonických složek a pro každou harmonickou složku je problém ustálené odezvy řešen zvlášť. Dílčí výsledky je pak možné díky linearitě systému a principu superpozice sečíst a získat tak odhad celkové odezvy [22].



Obrázek 3.4: Amplitudová a frekvenční charakteristika j -té souřadnice z vektoru komplexních amplitud $\bar{\mathbf{q}}_a$.

3.4 Přejchodová odezva

Východím vztahem pro výpočet odezvy na obecné buzení je dříve odvozený model rotorové soustavy ve stavovém prostoru rozšířený o vektor popisující buzení. Tento model bývá zapisován ve tvaru

$$\dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{A}(\omega(t)) \mathbf{u}(t) = \mathbf{b}(t, \omega(t)), \quad (3.46)$$

kde systémová matice $\mathbf{A}(\omega(t))$ je funkcí úhlové rychlosti, úhlová rychlost může záviset na čase, tj. $\omega = \omega(t)$, a vektor buzení $\mathbf{b}(t, \omega(t))$ ve stavovém prostoru lze získat vynásobením vektoru budících sil $\mathbf{f}(t, \omega(t))$ zleva inverzní maticí \mathbf{N}^{-1} ze vztahu (3.4)

$$\mathbf{b}(t, \omega(t)) = \mathbf{N}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}(t, \omega(t)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(t, \omega(t)) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Při odvozování pohybových rovnic hřídelových prvků, které jsou nedílnou součástí původního modelu v konfiguračním prostoru (2.70) i odpovídajícího modelu ve stavovém prostoru (3.5), byla úhlová rychlost ω , již hřídel rotuje, uvažována jako konstantní, zatímco ve výše uvedeném modelu (3.46) je explicitně uvedeno, že úhlová rychlost je funkcí času. Zanedbané setrvačné účinky působící na hřídelový prvek je možné odvodit v podobném tvaru, v jakém se objevily v pomocném vztahu (2.54c) sloužícím pro sestavení pohybové rovnice tuhého tělesa.

V případech, kdy je úhlová rychlost v čase nekonstantní, nemůže být při sestavování vektoru budících účinků $\mathbf{b}(t, \omega(t))$ použit vztah (3.35), který popisuje působení odstředivé síly způsobené nevyváhou za konstantní úhlové rychlosti ω . Pokud je totiž úhlové zrychlení $\dot{\omega}$ nenulové, je nutné vektor silových účinků doplnit o další setrvačné účinky působící na nevyvážek. To je důležité především při výpočtu dynamického stavu rychloběžných rotorů při jejich rozběhu, kdy úhlové zrychlení $\dot{\omega}$ může být vyšší než $1000 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$.

Za podmínky, že změna úhlové rychlosti v čase je velmi malá, lze pro výpočty v časové oblasti použít i modely (2.70) a (3.5). Je ale třeba mít na paměti, že získané výsledky jsou ovlivněny zanedbáním členů závislých na úhlovém zrychlení $\dot{\omega}$. Pokud není možné členy závislé na $\dot{\omega}$ vynechat, je třeba je zahrnout do příslušného vektoru buzení.

Soustavu diferenciálních rovnic (3.46) je v zásadě možné řešit dvěma způsoby. První možností je využití transformačního vztahu (3.15), čímž se namísto stavového vektoru stane neznámou vektor modálních souřadnic. Rovnice, v níž jsou stavové vektory nahrazeny modálními souřadnicemi, se zleva násobí transponovanou levostrannou modální maticí

$$\mathbf{W}^\top(\omega(t)) \mathbf{U}(\omega(t)) \dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{W}^\top(\omega(t)) \mathbf{A}(\omega(t)) \mathbf{U}(\omega(t)) \mathbf{x}(t) = \mathbf{W}^\top(\omega(t)) \mathbf{b}(t, \omega(t)), \quad (3.47)$$

protože v případě, kdy jsou levostranné a pravostranné vlastní vektory normované tak, aby splňovaly podmínky biortonormality (3.24a) – (3.24b), se výraz (3.47) zjednoduší na

$$\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{\Lambda}(\omega(t)) \mathbf{x}(t) = \mathbf{W}^\top(\omega(t)) \mathbf{b}(t, \omega(t)). \quad (3.48)$$

Soustava (3.48) představuje $2n$ navzájem nezávislých diferenciálních rovnic ve tvaru

$$\dot{x}_\nu - \lambda_\nu(\omega(t)) x_\nu = \mathbf{w}_\nu^\top(\omega(t)) \mathbf{b}(t, \omega(t)), \quad (3.49)$$

které jsou sice velmi snadno řešitelné analyticky, ale pouze za předpokladu konstantní úhlové rychlosti. V obecném případě musí být řešeny pomocí vhodné metody přímé numerické integrace [5], přičemž algoritmus můž být značně pomalý, protože v každém časovém kroku musí být vyčíslena nejen systémová matice a vektor buzení, ale navíc je nutné vypočítat problém vlastních hodnot adjungovaného modelu příslušejícímu systému (3.46).

Pokud se numericky integruje přímo model (3.46), odpadá nutnost počítat problémy vlastních hodnot, ale jednotlivé diferenciální rovnice v řešené soustavě jsou vzájemně provázané a opět je potřeba v každém časovém kroku sestavit novou systémovou matici i vektor buzení.

Oba algoritmy se často zrychlují provedením vhodné redukce stupňů volnosti [22] často provedené ještě před zavedením uložení, jehož parametry závisí na úhlové rychlosti ω . Cílem redukce je zbavit model vlastních tvarů kmitu o vysokých frekvencích a zároveň co nejméně ovlivnit hodnoty vlastních frekvencí, jimž přísluší vlastní tvary o nízkých modálních číslech. Vysoké vlastní frekvence se zanedbávají, protože negativně ovlivňují maximální délku integračního kroku jednokrokových explicitních numerických integrátorů

4 Představení programových prostředí AVL EXCITE a FEMROT

V této kapitole jsou představeny programy AVL EXCITE a FEMROT, jichž bylo užito při tvorbě této práce. AVL EXCITE je multibody software vyvíjený rakouskou firmou AVL List GmbH¹, který slouží k analýze spalovacích motorů, převodovek a hnacích ústrojí. Pro představení tohoto softwaru a ukázkou základních rovnic byla využita dokumentace [27].

FEMROT² je software vytvořený v programovacím jazyce MATLAB autorem této práce.

4.1 AVL EXCITE Power Unit v2013

První verze AVL EXCITE byla na trh uvedena již na sklonku 20. století. Současné grafické rozhraní bylo vytvořeno v roce 2009 při kompletní revizi programu a je společně s matematickým modelem i nadále upravováno a doplňováno. Nejnovější verze AVL EXCITE byla vydána na začátku roku 2013 a stejně jako verze z roku 2009 se sestává z několika na sobě nezávislých nástrojů:

- *AVL EXCITE Designer* slouží ke statické analýze ložisek tuhých rotorů hnacího ústrojí, jako je kliková hřídel. Je dále schopen optimalizovat návrh rotoru a analyzovat torzní vibrace hnacího ústrojí ve frekvenční oblasti.
- *AVL EXCITE Power Unit* je nástroj zaměřený na vibroakustickou analýzu deformovatelných vázaných mechanických systémů, především pohonných jednotek, v časové oblasti.
- *AVL EXCITE Fatigue* je nadstavba AVL EXCITE Power Unit sloužící k odhadu životnosti ložisek a dalších částí pohonných jednotek.
- *AVL EXCITE Timing Drive* je schopen počítat dynamiku rozvodových řemenů, ventilových rozvodů a řetězů v časové oblasti. Do výpočtu je možné zahrnout i otáčivé části hnacího ústrojí jako tuhé rotory.
- *AVL EXCITE Piston & Rings* slouží k analýze kontaktů pohyblivých částí se statoru, např. pístů a pístních kroužků s motorovým blokem, a jevů, které kontakty doprovázejí, jako je spotřeba oleje při pracovního cyklu motoru. AVL EXCITE Timing Drive a AVL EXCITE Piston & Rings jsou často používány pro předběžné výpočty, jejichž výsledky slouží k odhadu sil působících na otáčivé části hnacího ústrojí a mohou být exportovány jako budící silové účinky do AVL EXCITE Power Unit.

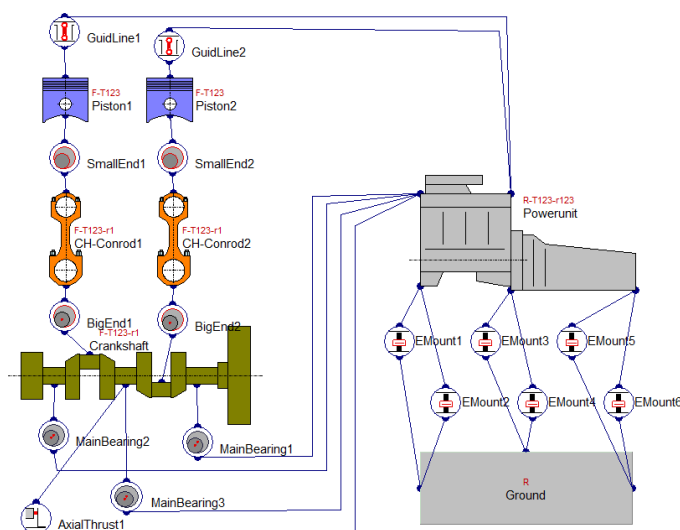
Ideově nejbližší klasickým programům uzpůsobeným pro výpočty rotordynamických úloh je AVL EXCITE Power Unit, který sice nedovoluje explicitně řešit klasické problémy rotordynamiky jako je modální analýza zahrnující vliv ložisek, hledání kritických otáček apod., ale je

¹AVL List je akronym názvu *Anstalt für Verbrennungskraftmaschinen, Prof. Dr. Hans List*.

²FEMROT je akronym pro *Finite Element Method for ROTordynamics*.

plně optimalizován pro výpočty přechodových stavů a dalších dějů odehrávajících se v časové oblasti. S orientací na výpočty časově závislé odezvy vázaných mechanických systémů souvisí způsob, kterým jsou v Power Unit sestavovány výpočtové modely a jenž je výrobcem softwaru označován jako hybridní přístup k modelování. Modelované soustavy jsou totiž reprezentovány dvěma různými, vzájemně propojenými pohledy.

Prvním, dalo by se říci nadřazeným, pohledem je tzv. topologická reprezentace mechanické soustavy nebo též v terminologii AVL 2D model, jehož příklad je uveden na Obr. 4.1. V podstatě jde o funkční schéma, v němž jsou přehledně zakresleny jednotlivé subsystémy soustavy a vazby mezi nimi. 2D pohled na modelovanou mechanickou soustavu umožňuje rychlý přístup k jednotlivým subsystémům a zajišťuje snadnou orientaci i při sestavování složitých modelů.



Obrázek 4.1: Topologický model klikového hřídele a pístů dvouválcového motoru.

Druhým pohledem je tzv. geometrická reprezentace soustavy, což je 3D model připomínající vizualizaci sestavy v CAD softwaru. Vzájemná poloha a jednotlivé vazby mezi subsystémy jsou určeny topologickým modelem. Správnost zadání soustavy v topologickém modelu může být snadno ověřena vizuální kontrolou geometrického modelu a případnou animací pracovního cyklu.

Samotné prostředí AVL Excite nenabízí žádný nástroj pro tvorbu konečněprvkového modelu subsystému vyjma *Shaft Modeleru*, schopného vytvářet jednoduché modely rotorů. Model hřídele sestavený v *Shaft Modeleru* se neskládá z konečných hřídelových prvků odvozených v oddílu 2.2.1, jejichž dynamický stav je určen polohou dvou řídicích uzlů, ale z tuhých těles se šesti stupni volnosti, jejichž hmotnost a momenty setrvačnosti jsou vypočítány z geometrie zadané uživatelem. Střediska hmotnosti těchto tuhých těles jsou vzájemně propojena nehmotnými nosníky, čímž je zajištěna odpovídající ohybová, podélná a torzní tuhost hřídele.

Přídavná tělesa jsou charakterizována podobným způsobem jako části hřídele s tím rozdílem, že mohou mít nulové rozměry a jejich parametry jsou buď zadány přímo, nebo získány z výsledků předběžné analýzy importovaného CAD modelu. Model tělesa s nulovými rozměry by měl být v podstatě shodný s modelem představeným v oddílu 2.2.2. V *Shaft Modeleru* je možné také definovat části rotoru uložené mimo osu rotace, čehož je využíváno např. při modelování nevyvážky nebo axiálně nesymetrických rotorů jako jsou klikové hřídele.

Je zřejmé, že modální vlastnosti popsaného modelu se mohou lišit oproti modálním vlastnostem modelu, jenž byl sestaven pomocí MKP. Přesné rozdíly jsou ukázány a diskutovány v podkapitole 4.3.

Geometrie složitějších subsystémů musí být sestavena v externím programu a následně do AVL EXCITE Power Unit importována. Současná verze programu, tj. v2013, umožňuje importovat konečněprvkové modely z programů Abaqus FEA, ANSYS, NASTRAN a RADIOSS.

Oč jsou nástroje pro vytváření subsystémů v AVL EXCITE chudší, o to bohatší možnosti jsou programem nabízeny pro modelování vazeb mezi subsystémy. Spektrum nabízených vazeb pokrývá potřeby většiny uživatelů a poskytuje možnosti využití různě komplexních modelů v závislosti na požadované délce výpočetního času a cílové přesnosti výpočtu. Vazby mohou tvořit spojení mezi dvěma řídicími uzly, mezi uzlem a povrchem a mezi dvěma povrchy. K hlavním typům vazeb patří:

- lineární viskoelastický člen popsaný např. vztahem (2.61),
- nelineární viskoelastický člen,
- viskoelastická vazba s kontaktem,
- zubová vazba,
- valivé ložisko,
- zjednodušené hydrodynamické ložisko, jehož olejový film je charakterizován rovnicí (4.1),
- hydrodynamické ložisko, jehož olejový film je popsán Reynoldsovo rovnicí, která uvažuje, že rotaci hřídele i ložiskové pánve a formálně odpovídá vztahu (2.62),
- termohydrodynamické ložisko, jehož olejový film je popsán Reynoldsovo rovnicí rozšířenou o členy závislé na termodynamické teplotě,
- posuvná vazba s uvažovaným kontaktem, např. mezi pístem a vložkou válce,
- uložení soustavy s frekvenčně závislou charakteristikou používané jako vazební člen mezi nosnými subsystémy a rámem,
- obecná vazba plně definovaná uživatelem.

Matematické modely uvedených vazeb se opírají o rozsáhlé dílo G. Offnera a H. H. Prieb-sche uvedené v [27] a vydané v 90. letech minulého století a na začátku století nového. V díle jsou uvedeny a v mnohých případech též odvozeny nelineární pohybové rovnice popisující velké pohyby těles a jsou zde diskutována možná zjednodušení rovnic, jejich řešení a algoritmizace.

Offner a Prieb-sche se zabývají nejen metodami numerické integrace a interpolace řešení, ale i linearizace a explicitního vyjádření řešení. To sice způsobuje, že dané řešení je možné použít pouze při splnění určitých předpokladů a současně je třeba počítat s nižší přesností výpočtu, ale na druhou stranu je výrazně zkrácen výpočetní čas.

Příkladem takové explicitní formule vyjadřující hydrodynamický tlak $p(\theta, \bar{x})$ olejového filmu krátkého radiálního kluzného ložiska z Reynoldsovy rovnice (2.62) je vztah

$$p(\theta, \bar{x}) = \frac{-6 \mu \left[\frac{l}{c} \right]^2 \left[\frac{1}{4} - \bar{x}^2 \right] \left[\dot{\varepsilon} \cos \theta + \varepsilon \sin (\dot{\alpha}_\xi - \omega_{prum}) \right]}{H^3 \left[1 + \frac{(\frac{1}{4} - \bar{x}^2) \left(\frac{l}{r} \right)^2}{h(h+1)} \right]}, \quad (4.1)$$

který mimo jiné musí splňovat následující předpoklady:

- Olej proudí laminárně a je možné ho uvažovat jako newtonovskou kapalinu.
- Gradient napětí v Navier-Stokesově rovnici, viz např. [12], je řádově větší než výrazy vyplývající ze zákona zachování hmotnosti.
- Rotující souřadnicový systém pevně spojený s hřídelem je možné transformovat do souřadnicového systému pevně spojeného s ložiskovou pávní.
- Olej odtékající z ložiska je průběžně doplňován, čímž je zachována jeho hmotnost.
- Mezera mezi ložiskovou pávní a hřídelem je řádově menší než axiální a radiální rozměry ložiska a je plně zatopená olejem.
- Tloušťka olejového filmu je funkcí pouze úhlu θ , tj. je konstantní v axiálním směru.

V explicitní formuli (4.1) jsou l a r axiální délka a vnitřní poloměr ložiskové pánve, c je výrobní radiální vůle mezi čepem a pávní, \bar{x} je bezrozměrná axiální poloha daná vztahem $\bar{x} = \frac{x}{l}$, θ je úhel, který mezi sebou svírají souřadnicový systém pevně spojený s pávní a systém pevně spojený s hřídelem, α_ξ je úhel sevřený systémem pevně spojeným s pávní a systémem pevně spojeným s rámem, μ je funkce viskozity oleje nebo konstanta rovnající se dynamické viskozitě oleje η , ε je poměrné vyosení čepu definované rovností $\varepsilon = \frac{e}{c}$, kde e označuje excentricitu čepu, h je tloušťka olejového filmu, kterou je možné vyjádřit jako $h = 1 + \varepsilon \cos \theta$ a konečně ω_{prum} je průměrná úhlová rychlost olejového filmu rovná výrazu $\omega_{prum} = \frac{\omega_h + \omega_p}{2}$, v němž ω_h představuje úhlovou rychlost čepu a ω_p úhlovou rychlost ložiskové pánve.

Pomocí rovnice (4.1) je možné vypočítat tlakové pole v olejovém filmu radiálního ložiska a z toho pak pomocí dalších vztahů určit charakteristiky ložiska jako jsou ztráty, integrální teplota oleje, tuhost a tlumicí koeficient filmu atd. Explicitně lze vyjádřit i další proměnné, které přímo určují velikost silových účinků přenášených vazbami [27].

Pohybová rovnice všech vázaných mechanických systémů lze odvodit z impulsových vět [22] ve tvaru

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{B} \dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) = \mathbf{f}^{(e)}(t) + \mathbf{f}^{(i)}(t) + \mathbf{p}^*(t), \quad (4.2)$$

kde \mathbf{M} , \mathbf{B} , \mathbf{K} jsou matice hmotnosti, tlumení a tuhosti, $\mathbf{q}(t)$ je vektor zobecněných souřadnic, $\mathbf{f}^{(e)}(t)$ je vektor vnějších silových účinků, $\mathbf{f}^{(i)}(t)$ je vektor vnitřních obecně nelineárních (vazebních) silových účinků a $\mathbf{p}^*(t)$ je vektor nelineárních objemových účinků. Matice tlumení \mathbf{B} je většinou definována pomocí koeficientů proporcionálního tlumení α a β a matic hmotnosti a tuhosti vztahem

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}. \quad (4.3)$$

Jsou-li subsystémy modelovány pomocí externích konečněprvkových programů, mají obvykle velké množství stupňů volnosti. Počet stupňů volnosti je vhodné snížit aplikací vhodné kondenzace modelu. Kondenzace modelu zajistí snížení stupňů volnosti aplikováním vhodné transformace souřadnic

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{G}_{fa} \mathbf{q}_a(t), \quad (4.4)$$

kde \mathbf{G}_{fa} je transformační matice a $\mathbf{q}_a(t)$ je vektor zobecněných souřadnic kondenzovaného modelu, který nutně musí obsahovat souřadnice řídicích uzlů, v nichž je hledáno řešení nebo

na které působí osamělé silové účinky. V AVL EXCITE lze využít dva typy redukce stupňů volnosti, v manuálu nazvané *zobecněná dynamická redukce počtu stupňů volnosti (GDR)* a *modální syntéza (CMS)*, které se snaží co nejpřesněji aproximovat vlastní tvary s nízkými modálními čísly a zároveň uvažují vliv vyšších vlastních tvarů [22, 27].

Rovnice (4.2) popisuje chování silně nelineárního systému a jako taková je obtížně řešitelná ve frekvenční oblasti a proto se její řešení hledá v časové oblasti pomocí vhodného numerického řešiče. Numerické řešiče jsou obvykle schopny řešit pouze soustavy obyčejných diferenciálních rovnic prvního řádu. Po zavedení substitucí

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{v}(t), \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{f}^{(e)}(t) + \mathbf{f}^{(i)}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{p}^*(t) = \mathbf{f}^{gyr}(t) - \mathbf{f}^{ttZry}(t) \quad (4.5c)$$

může být soustava obyčejných diferenciálních rovnic druhého řádu (4.2) přepsána na požadovanou soustavu prvního řádu ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \dot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{B} \mathbf{v}(t) + \mathbf{K} \mathbf{q}(t) - \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}^{gyr}(t) + \mathbf{f}^{ttZry}(t) &= 0, \\ \mathbf{v}(t) - \dot{\mathbf{q}}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Rovnost (4.5c) využívá skutečnosti, že vektor vnitřních vazebních účinků $\mathbf{f}^{(i)}(t)$ je možné vyčíslit před vložením do rovnice (4.6). Vektor nelineárních objemových účinků $\mathbf{p}^*(t)$ je v rovnosti (4.5c) rozdělen na vektor nelineárních gyroskopických účinků $\mathbf{f}^{gyr}(t)$ a vektor nelineárních setrvačných účinků $\mathbf{f}^{ttZry}(t)$, který nebere v úvahu možnou poddajnost těles.

Řešení soustavy (4.6) v čase $t = t_{i+1}$ je v AVL Excite hledáno pomocí zpětné diferenční formule ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{v}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+1}^{ttZry} &= \frac{1}{\dot{\tau}_{k,i+1}} \left(\mathbf{f}_{i+1} + \mathbf{f}_{i+1}^{gyr} - \mathbf{B} \mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{K} \mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{M} \hat{\mathbf{v}}_{k,i+1} - \hat{\mathbf{f}}_{k,i+1}^{ttZry} \right), \\ \mathbf{q}_{i+1} &= \frac{1}{\dot{\tau}_{k,i+1}} (\mathbf{v}_{i+1} - \mathbf{q}_{k,i+1}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

v níž je použito následující zkrácené značení

$$\hat{z}_{k,i+1} = \sum_{j=1}^k \dot{\tau}_{k,i+1-j} z_{i+1-j}. \quad (4.8)$$

$\dot{\tau}_{k,i+1-j}(t)$ ve vztazích (4.7) a (4.8) představuje časovou derivaci součinu

$$\tau_{k,i+1-j}(t) = \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j}}^k \frac{t - t_{i+1-l}}{t_{i+1-j} - t_{i+1-l}}, \quad (4.9)$$

pomocí kterého je lagrangeovským přístupem [10] interpolováno již nalezené řešení na k časových hladinách t_{i+1-j} , $j = 1, \dots, k$ předcházejících časovou hladinu t_{i+1} , na které je řešení právě počítáno. Samotná derivace $\dot{\tau}_{k,i+1-j}(t)$ je sumou součinů ve tvaru

$$\dot{\tau}_{k,i+1-j}(t) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^k \frac{1}{t_{i+1-j} - t_{i+1-m}} \prod_{\substack{l=0 \\ l \neq j, m}}^k \frac{t - t_{i+1-l}}{t_{i+1-j} - t_{i+1-l}}. \quad (4.10)$$

Formule (4.10) kromě spojitosti řešení rovněž zohledňuje proměnnou délku časového kroku [27].

4.2 FEMROT 1.2.3 (Beta)

Vývoj programu FEMROT začal v polovině roku 2011. Na samém začátku měl FEMROT sloužit pouze jako grafická nadstavba programu pro sestavení koeficientových matic rotoru a výpočet a vizualizaci jeho kritických otáček, který byl napsán na Západočeské univerzitě v Plzni v roce 2001.

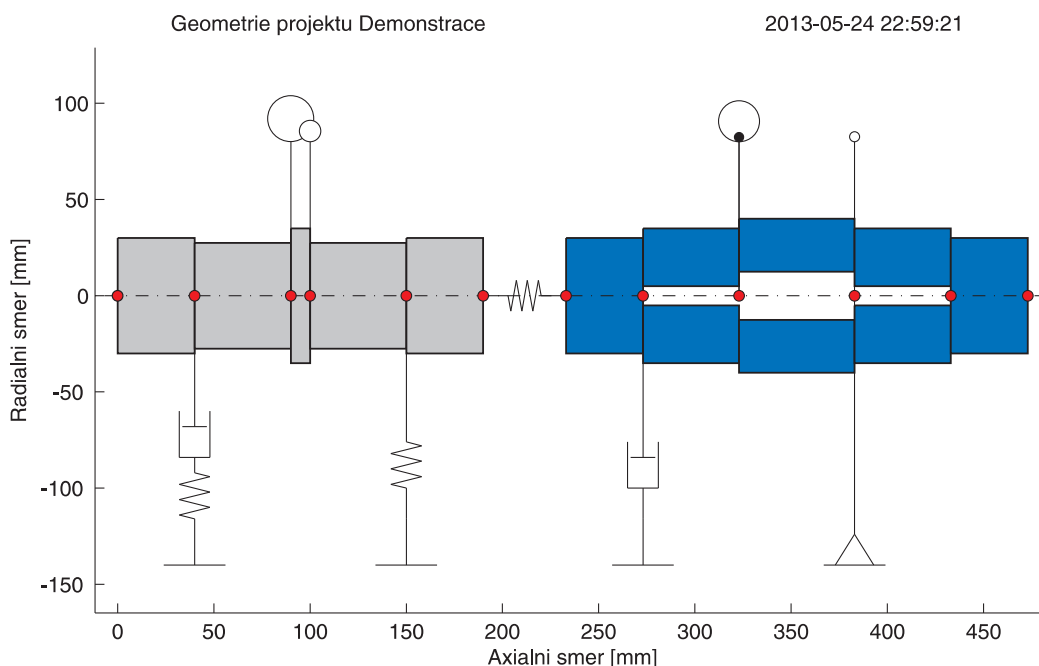
První verze FEMROTu (až do 1.1.7) v podstatě obalovaly vlastními algoritmy původní skript a postupem času začalo být zřejmé, že taková podoba programu není dostatečně pružná a jakýkoliv vážnější zásah do jeho podoby, např. přidání nových analýz, se neobejde bez rozsáhlých a dlouhotrvajících prací. Verze 1.2.0 byla v podstatě celá naprogramovaná od základu, tedy bez použití starého kódu s čestnou výjimkou několika skriptů inicializujících grafické rozhraní. Celý matematický aparát, detailně popsany v kapitolách 2 a 3 této práce, byl znovu odvozen a algoritmován s ohledem na co nejmenší výpočetní a paměťovou náročnost.

Jednotlivé součásti programu byly vytvořeny jako samostatně použitelné zásuvné moduly a uživatelské rozhraní bylo rozděleno na pre-processorovou a post-processorovou část, které jsou programově spojeny řešiči. Těžiště celé práce tkví v grafických a obslužných možnostech programu.

V pre-processoru může uživatel definovat geometrii rotoru, viz Obr. 4.2, a parametry přídavných těles, viskoelastických vazeb, radiálních ložisek a nevyvah. Data není nutné zadávat pouze pomocí grafického rozhraní, ale je možné využít modulu pro import a export dat, který zvládá běžné formáty .CSV, .DAT, .M, .TXT a .XLS a umí také spojit dva rozpracované projekty do jednoho. Ke kontrole dat slouží nástroje, které vizualizují geometrii, viz Obr. 4.3, a charakteristiky ložisek a také uživatele informují o celkové axiální délce a hmotnosti soustavy. Data je možné hromadně upravovat a provádět s nimi základní matematické operace, což je výhodné např. ve chvíli, kdy si neodpovídají jednotky importovaných dat s jednotkami požadovanými programem. K dispozici je rovněž editovatelná databáze materiálů.

Číslo uzlu	Délka [mm]	Vnější průměr [mm]	Vnitřní průměr [mm]	Hustota [kg/m³]	Young [MPa]	Poisson [-]	Poměr vst. útlumu [-]	Materiál	Převod [-]
1	40	60	0	7850	205000	0.29	0	ocel bez tlumení	
2	50	55	0	7850	205000	0.29	0	ocel bez tlumení	
3	10	70	0	7850	205000	0.29	0	ocel bez tlumení	
4	50	55	0	7850	205000	0.29	0	ocel bez tlumení	
5	40	60	0	7850	205000	0.29	0	ocel bez tlumení	
6	40	60	0	7850	218000	0.29	0	ocel 14CrNi6V/Nb...	
7	50	70	10	7850	218000	0.29	0	ocel 14CrNi6V/Nb...	
8	60	80	25	7850	218000	0.29	0	ocel 14CrNi6V/Nb...	
9	10	50	70	7850	218000	0.29	0	ocel 14CrNi6V/Nb...	
10	11	40	60	7850	218000	0.29	0	ocel 14CrNi6V/Nb...	

Obrázek 4.2: Ukázka hlavního okna programu FEMROT se zapnutým pre-procesorem.



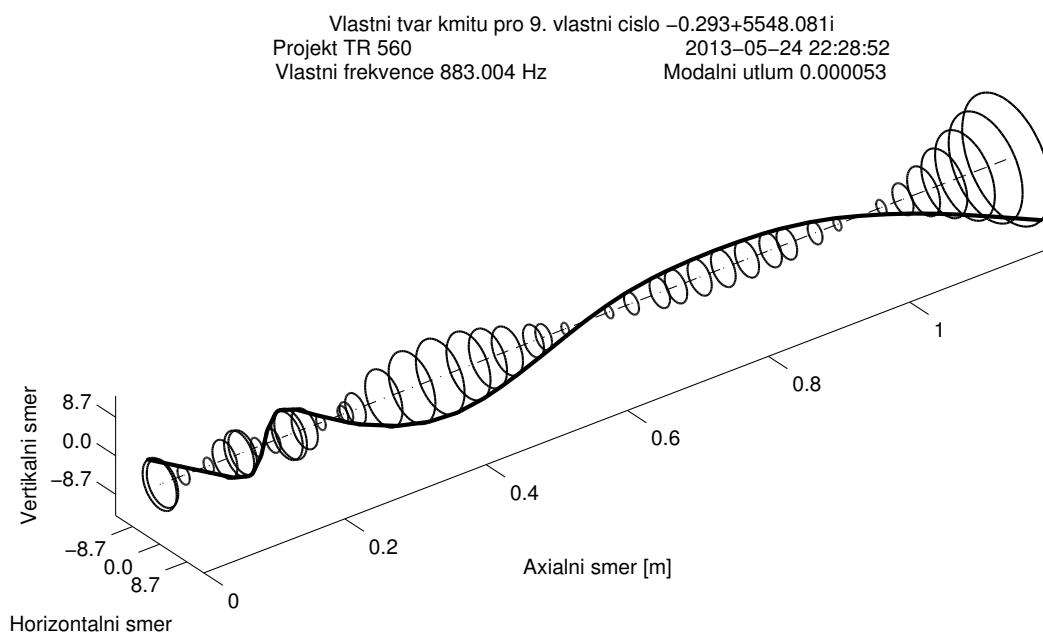
Obrázek 4.3: Demonstrace možností pre-processoru při vykreslení geometrie: velikost kružnic představujících přídavná tělesa a plných kruhů představujících nevyvážky se liší dle hmoty a barva hřídelových prvků záleží na nastavení materiálu v databázi.

Ve verzi 1.2.3 jsou dostupné řešiče modální analýzy, ustálené a přechodové odezvy, je možné sestavit Campbellův diagram a lze spustit iterační algoritmus pro analýzu kritických otáček. Každý z řešičů je možné libovolně nastavit a přizpůsobit tím parametry a přesnost výsledků. Řešiče disponují možností ignorovat některé stupně volnosti, což může být příhodné ve chvíli, kdy uživatel potřebuje provést např. čistě torzní analýzu nebo analyzuje systémy s velkým počtem řídicích uzlů a nezajímá se o torzní a podélné kmity. Ignorováním těchto souřadnic je počet stupňů volnosti snížen o třetinu.

Post-processor slouží výhradně k vykreslení a případnému vypsání výsledků a k jejich exportu. Většina technik, kterých se při vykreslování dat používá, byla popsána v kapitole 3. Z možných výstupů je zde na Obr. 4.4 ukázána animovatelná a plně editovatelná vizualizace vlastního tvaru kmitu rotoru s 45 řídicími uzly.

Mnohé funkce grafů a ovládacích prvků jsou naprogramovány s využitím tzv. nedokumentovaného MATLABu [1]. Pojmem nedokumentovaný MATLAB jsou označovány programovací techniky, které využívají faktu, že na pozadí grafického rozhraní MATLABu běží programovací jazyk Java. Javu a MATLAB je možné jednoduchým způsobem propojit a vytvořené spojení umožňuje editovat vlastnosti objektů, které podle uživatelské příručky MATLABu měnit nelze [24]. Nevýhodou nedokumentovaného MATLABu bývá zpětná a dopředná kompatibilita. Jakékoliv změny ve vlastním kódu MATLABu, do kterých běžný uživatel nevidí, totiž mohou ovlivnit funkčnost nedokumentovaných funkcí, proto je při použití těchto postupů nutné důsledně dbát na odchyťávání chyb za běhu programu.

Ve FEMROTu je přítomnost nedokumentovaných technik patrná díky použití tzv. *spinneru*, komponenty, která umožňuje zadat určitou hodnotu buď pomocí klávesnice nebo kliknutím myši, dále jsou v oknech grafů použity upravené nástrojové lišty, osy, datové kurzory



Obrázek 4.4: Vykreslení vlastního tvaru kmitu v post-procesoru programu FEMROT.

zobrazují popisky závislé na druhu grafu a jsou použity některé techniky zlepšující celkový výkon. I tak je ale uživatelské rozhraní kvůli velkému množství prvků poměrně pomalé. Tento nedostatek by bylo možné odstranit použitím prvku uživatelského rozhraní *uitable*, který má podobu interaktivní tabulky známé například z MS Excel. Tím by ale nebyla zachována zpětná kompatibilita, protože prvek *uitable* byl oficiálně představen až ve verzi MATLAB 2008 [24].



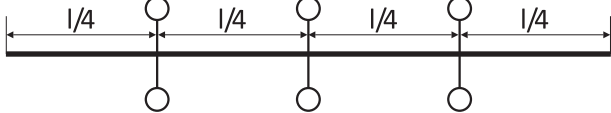
Vzhledem k tomu, že současná verze 1.2.3 je stále ve stadiu beta testování, je v nejbližší budoucnosti nutné odstranit chyby, které vznikly přepracováním mnohých funkcí z verze 1.2.2, odladit chod programu a připravit ho na nasazení do ostrého provozu. Vzdálenější budoucnost programu je ale ambicióznější — v současné době je rozpracována implementace nelineárních zubových vazeb umožňující pokročilou torzně-ohybovou analýzu, je připravován výrazně rychlejší algoritmus pro výpočet přechodové odezvy zahrnující modální kondenzaci modelu a je vymyšlen způsob implementace nápovědy, což je poměrně stěžejní úkol, neboť současná verze programu nápovědu neobsahuje. Připravována je také možnost ovládání programu pomocí příkazové řádky, což by v konečném důsledku umožnilo zpracování dat pomocí dávek.

4.3 Základní rozdíly mezi modely rotorů v uvedených programech

Pro srovnání modálních vlastností modelů rotorů sestavených pomocí AVL EXCITE Shaft Modeleru a FEMROTu byly vybrány tři jednoduché úlohy, ilustrované v Tab. 4.1. První úloha demonstruje způsob, jakým jsou v obou programech popsány prizmatické hřídele kruhového průřezu, druhá postihuje vliv přidavných tuhých kotoučů na modální vlastnosti modelu a třetí se zabývá torzními soustavami. Geometrie hřídele, jeho materiál a parametry kotoučů jsou ve všech případech stejná, úlohy se tedy liší pouze množstvím přidávaných kotoučů a jejich polohou.

Z výsledků modálních analýz uvedených v Tab. 4.1 je zřejmé, že MKP díky spojitě rozložené hmotnosti hřídele lépe vystihuje dynamické vlastnosti ohybového kmitání hřídele a to

i při použití malého množství elementů, zatímco hřídel v AVL EXCITE musí být popsán poměrně velkým množstvím elementů. Torzní vlastnosti hřídele jsou při použití malého množství prvků popsány oběma metodami poměrně nepřesně, ale výsledky analýzy torzní soustavy, ve které jsou dominantní osové momenty setrvačnosti připojených těles, rychle konvergují — stačí pokud je hřídel mezi kotouči modelován alespoň dvěma elementy. Je také zřejmé, že využitím MKP je získán horní odhad vlastních frekvencí, kdežto vlastní frekvence vypočtené pomocí AVL EXCITE Shaft Modeleru odpovídají spodnímu odhadu.

AVL EXCITE Shaft Modeler			FEMROT 1.2.3			
						
Počet elementů	1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]	1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]
3	85,78	203,92	1519,06	91,18	251,76	1664,04
4	88,00	222,58	1550,18	91,03	252,01	1631,88
5	89,03	231,97	1564,71	90,98	251,25	1617,03
10	90,42	245,34	1584,22	90,93	250,52	1597,30
20	90,77	248,86	1589,12	90,93	250,46	1592,39
						
Počet elementů	1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]	1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]
3	70,92	179,98	852,72	74,70	217,49	870,85
4	72,46	193,97	856,32	74,63	216,50	866,53
5	73,19	201,11	857,99	74,60	215,95	864,53
10	74,20	211,44	860,22	74,58	215,49	861,86
20	74,46	214,20	860,78	74,58	215,46	861,19
						
Počet elementů	1. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]	2. torzní mód [Hz]	1. ohybový mód [Hz]	1. torzní mód [Hz]	2. torzní mód [Hz]
4	79,29	460,57	815,51	80,91	459,78	810,46
8	80,44	459,93	811,58	80,86	459,73	810,36
12	80,65	459,81	810,87	80,86	459,72	810,34
20	80,76	459,75	810,52	80,86	459,72	810,32

Tabulka 4.1: Výsledky modálních analýz naznačených modelových úloh pro kruhový hřídel z oceli ($E = 205000$ MPa, $\nu = 0,29$ a $\rho = 7850$ kg · m⁻³) o délce $l = 1$ m a vnějším průměru $d = 0,02$ m. Všechny kotouče mají shodné parametry: $m = 0,5$ kg, $I_o = 5,567 \times 10^{-4}$ kg · m², $I = 2,825 \times 10^{-4}$ kg · m², přičemž I_o je moment setrvačnosti k axiální ose hřídele a I je moment k ose v radiálním směru.

5 Modelování turbodmychadla

Model rotoru založený na lineárních hřídelových prvcích se dvěma řídicími uzly a přídavných účincích, které lze připojit do libovolného uzlu, je třeba správně uchopit, aby získané výsledky byly co možná nejbližší realitě. V ideálním případě by model měl být validován a v případě potřeby upraven na základě porovnání s experimenty, jako je experimentální modální analýza reálného rotoru a měření provozní odezvy při konstantních nominálních otáčkách.

V této kapitole je rozebrán postup při sestavování výpočtového modelu sestávající se z následujících úkonů:

- příprava dat pro výpočtový software,
- získání experimentálních dat,
- naladění modelu podle experimentálních dat,
- určení parametrů ložisek.

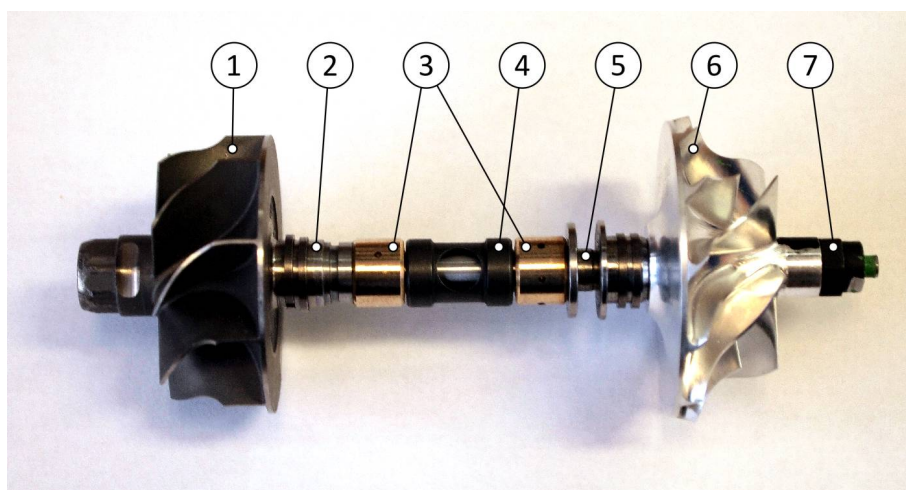
Provedení některých z výše uvedených bodů je v případě lehkých rychloběžných rotorů specifické a může se podstatně lišit od přístupů používaných při modelování rotorů větších velikostí, např. elektrárenských turbosoustrojí.

Dále je provedena dynamická analýza v programech FEMROT a AVL EXCITE Power Unit a je ukázáno zpracování podkladů sloužících pro porovnání výsledků.

5.1 Sestavení modelu rotoru

Základem pro přípravu dat, která jsou použita pro stanovení geometrie jednotlivých konečných prvků modelu, je obvykle výkresová dokumentace. V případě turbodmychadla zobrazeného na Obr. 5.1 však požadavek na modelování dynamického chování rotoru nevedl přímo od výrobce a tak výkresová dokumentace nebyla k dispozici. Rozměry hřídele a hmotnostní parametry oběžných kol tak musely být určeny na základě analýzy CAD modelu, jenž byl vytvořen pomocí 3D skeneru. Případné nerovnosti způsobené nepřesností skenování byly vyhlazeny a velikost jednotlivých průměrů hřídele a další geometrické údaje byly ověřeny pomocí posuvného měřítka. S využitím takto získaných rozměrů mohl být narýsován přibližný výkres rotoru, který sloužil jako zdroj vstupních dat.

Turbodmychadlo z Obr. 5.1 je tvořeno pevnou částí zobrazenou na Obr. 5.2, která se skládá z hřídele a oběžného kola na straně turbíny, nazývaného dále turbínové kolo. Samotný hřídel je možné rozdělit na tři oblasti. Na začátku první části, nacházející se nejbližší k turbínovému kolu, se nalézá svar pevně spojující oběžné kolo s hřídelí. Tato část je charakterizována nekonstantním průřezem s vruby, v nichž jsou umístěny dva pístní kroužky. Další část hřídele slouží k usazení kroužků radiálních kluzných ložisek a poslední, třetí část je použita pro nasazení kompresorového kola a rozpěrky, na níž se nachází axiální ložisko a další dva pístní kroužky. Rozpěrka a kompresorové kolo jsou pevně sevřeny mezi hraničním průřezem druhé části hřídele a samojistnou maticí.



Obrázek 5.1: Fotografie modelovaného turbodmychadla v kompletní konfiguraci:
 1 – oběžné kolo na straně turbíny (pevně spojené s hřídelem),
 2 – část hřídele s pístními kroužky,
 3 – ložiskové kroužky (volné),
 4 – distanční vložka (volná),
 5 – rozpěrka sloužící k uložení axiálního ložiska (upevnění pomocí matice 7),
 6 – oběžné kolo na straně kompresoru (upevnění pomocí matice 7),
 7 – samojistná matice.



Obrázek 5.2: Fotografie pevné části turbodmychadla.

Z Obr. 5.2 je patrné, že třetí část hřídele má v porovnání s předchozími dvěma malý poloměr a tím pádem výrazně nižší ohybovou tuhost. Nasazením rozpěrky a kompresorového kola dojde k vyztužení hřídele, se kterým je důležité počítat při ladění modálních vlastností výpočtového modelu podle experimentálně zjištěných výsledků.

Ve výpočtovém modelu jsou oběžná kola reprezentována tuhými tělesy z oddílu 2.2.2. Tuhé těleso nijak neovlivňuje tuhost v okolí řídicího uzlu, na který je nasazeno, a proto je nutné tuhost upravit buď přidáním nehmotných viskoelastických členů nebo umělým zvětšením průměru hřídele, na němž se těleso nachází. V podkapitole 5.3 je rozebrána druhá z možností. Tento postup zavádí do ladicího procesu nejen nové proměnné parametry, způsobuje ale také to, že meze některých stávajících intervalů nekorespondují s mezemi danými nejistotami měření. Z toho důvodu může být vhodné ladicí proces rozdělit do dvou fází:

- První fáze se zabývá naladěním modelu pevné části rotoru, viz Obr. 5.2.
- V druhé fáze se ladí kompletní rotor, přičemž parametry, které byly nalezeny v předchozím kroku a nesouvisí s vyztužením rotoru od rozpěrky a kompresorového kola, mohou být považovány za konstanty.

Číslo uzlu	l [-]	d_2 [-]	d_1 [-]	ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]	E [MPa]	ν [-]	η_v [-]
1	0,7846	1,4107	0	7910	210000	0,29	0
2	0,3873	1,4441	0	7910	210000	0,29	0
3	0,7646	1,4124	0	7910	210000	0,29	0
4	0,5968	1	0	7910	210000	0,29	0
5	1,874	1	0	7910	210000	0,29	0
6	1,874	1	0	7910	210000	0,29	0
7	0,5968	1	0	7910	210000	0,29	0
8	0,7846	0,6861	0	7910	210000	0,29	0
9	1,0518	0,6861	0	7910	210000	0,29	0
10	1,2003	0,6861	0	7910	210000	0,29	0
11	2,7730	0,6861	0	7910	210000	0,29	0
12	0,9516	0,6861	0	7910	210000	0,29	0
13	0,4174	0,5341	0	7910	210000	0,29	0

Tabulka 5.1: V tabulce jsou uvedeny parametry jednotlivých konečných hřídelových prvků modelu pevné části rotoru, kde číslo uzlu označuje index levého řídicího uzlu, l , d_1 , d_2 jsou bezrozměrná délka, vnitřní a vnější průměr konečného prvku vztaheně k průměru hřídele v oblasti radiálních ložisek, ρ je hustota materiálu, E Youngův modul pružnosti v tahu, ν Poissonovo číslo a η_v je poměrný viskózní útlum, resp. konstanta tlumení Kelvin-Voigtova materiálu.

Číslo uzlu	m [-]	a [-]	I_{x_s} [-]	$I_{y_s} = I_{z_s}$ [-]	$D_{x_s y_s} = D_{x_s z_s}$ [-]	$D_{y_s z_s}$ [-]
1	620,6362	-1,3115	2791,3861	2809,2079	0	-0,0257
2	1	0	1	0,5050	0	0
3	1	0	1	0,5050	0	0

Tabulka 5.2: V tabulce jsou uvedeny parametry jednotlivých tuhých těles v modelu pevné části rotoru. Číslo uzlu označuje index řídicího uzlu, k němuž je těleso připojeno, m je bezrozměrná hmotnost vztahená k nejlehčímu z těles, a je bezrozměrná axiální poloha těžiště tělesa vůči řídicímu uzlu (vztahená k průměru hřídele v oblasti radiálních ložisek) a I_{x_s} , I_{y_s} , I_{z_s} , $D_{x_s y_s}$, $D_{x_s z_s}$, $D_{y_s z_s}$ jsou bezrozměrné kvadratické a deviční momenty setrvačnosti vůči středisku hmotnosti tělesa vztahené k I_{x_s} nejlehčího tělesa.

Geometrie hřídelových prvků použitých v prvním kroku ladění je uvedena v Tab. 5.1. Poloha řídicích uzlů je volena s ohledem na polohu radiálních ložisek a přídavných těles. V oblasti první části, tj. ihned za turbínovým kolem, je vnější průměr hřídelových prvků vypočten pomocí váženého průměru přes délky jednotlivých segmentů a ve dvou místech, kde je vnější průměr reálného hřídele největší a lze předpokládat, že část materiálu nepřispívá k ohybové

tuhosti hřídele, se v modelu nachází dva velmi malé kotoučky, jejichž parametry jsou spolu s parametry kompresorového kola uvedeny v Tab. 5.2 a jejichž objem není do výše uvedeného váženého průměru započítán. Momenty setrvačnosti kotoučků vztažené ke středisku hmotnosti jsou vypočteny pomocí známých vzorců

$$I_{x_s} = \frac{1}{32} \pi \rho l (d_2^4 - d_1^4), \quad (5.1a)$$

$$I_{y_s} = I_{z_s} = \frac{1}{48} \pi \rho l \left[\frac{3}{4} (d_2^4 - d_1^4) + l^2 (d_2^2 - d_1^2) \right], \quad (5.1b)$$

kteřé platí pro silnostěnný dutý válec o výšce l , vnějším průměru d_1 a vnitřním průměru d_2 z materiálu o konstantní hustotě ρ , přičemž osa x je totožná s osou rotační symetrie. Pístní kroužky nebyly v modelu uvažovány, protože nejsou s hřídelem spojeny žádnou vazbou. Bylo předpokládáno, že jejich případný vliv na ohybovou tuhost hřídele vyřeší ladicí proces.

Parametry modelu použitého ve druhém kroku ladicího procesu závisí na výsledcích prvního ladění a proto jsou uvedeny až v podkapitole 5.3.

5.2 Experimentální modální analýza

Vhodným kritériem sloužícím k porovnání výpočtového modelu a jeho reálného protějšku je modální analýza. Vzhledem k tomu, že lehké rotory s malými průměry hřídele, mezi něž bezesporu patří i turbodmychadla, mají vysoko položené frekvence vlastních tvarů kmitu, může být obtížné podrobit je klasické experimentální modální analýze popsané např. v [9]. Výsledky klasické experimentální modální analýzy prováděné na volně zavěšeném rotoru mohou totiž být ovlivněny hned několika faktory:

- Frekvenční spektrum budící síly není dostatečně konstantní v pásmu, v němž jsou očekávány vlastní frekvence testovaného objektu. Pokles síly mezi dolním a horním koncem frekvenčního pásma by neměl být větší než 20 dB.
- Měřicí rozsah použitého snímače odezvy není dostatečný kvůli nízko položené rezonanční frekvenci snímače nebo upnutí snímače. Nejistota měření způsobená mechanickými vlastnostmi snímače a jeho připevnění může být zanedbána v pásmu do $0,3 \cdot f_r$, kde f_r je rezonanční frekvence snímače, resp. jeho upnutí. Vlastní frekvence příslušná druhému ohybovému vlastnímu tvaru je u turbodmychadel zpravidla vyšší než 4000 Hz, což vylučuje použití většiny typů připevnění vyjma montáže pomocí šroubů.
- Vliv vazeb mezi testovaným rotorem a rámem, jako je zavěšení testovaného rotoru, kabel snímače a příp. rameno modálního budiče, nemůže být zanedbán, protože vazby přímo ovlivňují modální vlastnosti rotoru. Vazby o nevhodné tuhosti mění hodnotu vlastních frekvencí, zatímco vazby připojené do určitých bodů mohou způsobit změnu podoby konkrétních vlastních tvarů.

Výše zmíněným problémům je možné se vyhnout, jsou-li pro měření odezvy užity snímače, které nejsou pevně spojeny s povrchem testovaného tělesa, např. laserové snímače výchylky či mikrofony, a je-li měření prováděno metodou, která není závislá na kvalitě budící síly.

5.2.1 Identifikace vlastních frekvencí z akustické odezvy

Použití mikrofonů a následná identifikace vlastních frekvencí z akustické odezvy eliminuje vliv většiny výše zmíněných problémů. Velká část mikrofonů spolehlivě měří i v ultrazvukovém pásmu do 25,6 kHz a menší požadavky na zavěšení rotoru společně s absencí snímačů výrazně sníží počet vazeb s rámem. V závislosti na metodě vyhodnocení naměřených dat a tím ovlivněných snímaných veličinách může být dokonce zrušen požadavek na kvalitu budicí síly.

Ve chvíli, kdy je budicí síla dostatečně kvalitní, tj. konstantní v žádoucím frekvenčním pásmu, je vhodné modální vlastnosti rotoru analyzovat z přenosových funkcí

$$H(f) = \frac{X(f)}{F(f)}, \quad (5.2)$$

kde $X(f)$ a $F(f)$ jsou Fourierovy obrazy funkcí odezvy $x(t)$ a buzení $f(t)$ a f je frekvence. Použití přenosových funkcí je výhodné, protože s nimi pracují veškeré programy pro vyhodnocení experimentální modální analýzy [25].

V případech, kdy budicí síla nedosahuje potřebné kvality, používá se pro vyhodnocení spektrum odezvy $X(f)$, což je v případě akustické odezvy obvykle spektrum hladiny akustického tlaku. Pak jsou hledány tóny, tedy frekvenční špičky s odstupem od pozadí větším než 6 dB. Je zřejmé, že test vyžaduje nízkou hladinu akustického pozadí.

Z uvedeného výčtu by se mohlo zdát, že stanovení modálních vlastností pomocí akustické odezvy je ideální měřicí metoda. To nicméně není pravda, neboť tato metoda není schopna identifikovat podobu vlastních tvarů kmitu ani přesně určit poměrný útlum a může být aplikována pouze na takové objekty, u nichž je předem známé pořadí módů a jejichž vlastní frekvence jsou od sebe dostatečně vzdálené. Metoda navíc předpokládá, že vybuzené vlastní tvary kmitu vyzařují akustickou energii, k čemuž ale nemusí vždy docházet. Uvedená omezení značně zužují množinu objektů, které mohou být pomocí této metody testovány. Lehké rotory však nebývá problém zkoušet, protože pořadí několika prvních vlastních tvarů může být předem vypočítáno např. pomocí MKP nebo analyticky.

5.2.2 Realizace experimentu

Modální analýza pevné části turbodmychadla z Obr. 5.2, jejíž diskretizace je uvedena v Tab. 5.1 a 5.2, stanovuje hodnoty vlastních frekvencí odpovídajících prvním ohybovému módu na 1654,65 Hz a 1654,66 Hz a druhému ohybovému módu na 4799,28 Hz a 4799,30 Hz. Uvedené vlastní tvary kmitu jsou sdružené kvůli axiální symetrii rotoru. Je předpokládáno, že hodnoty vlastních frekvencí zjištěné experimentálně se příliš neliší od výše uvedených hodnot získaných výpočtem. Přidáním hmotného tělesa, tedy kompresorového kola, se hodnoty vlastních frekvencí, které přísluší ohybovým vlastním tvarům kmitu, poněkud sníží. Navíc se v pásmu mezi prvním a druhým ohybovým módem bude vyskytovat první torzní mód, který v případě pevné části má vlastní frekvenci 15522,85 Hz.

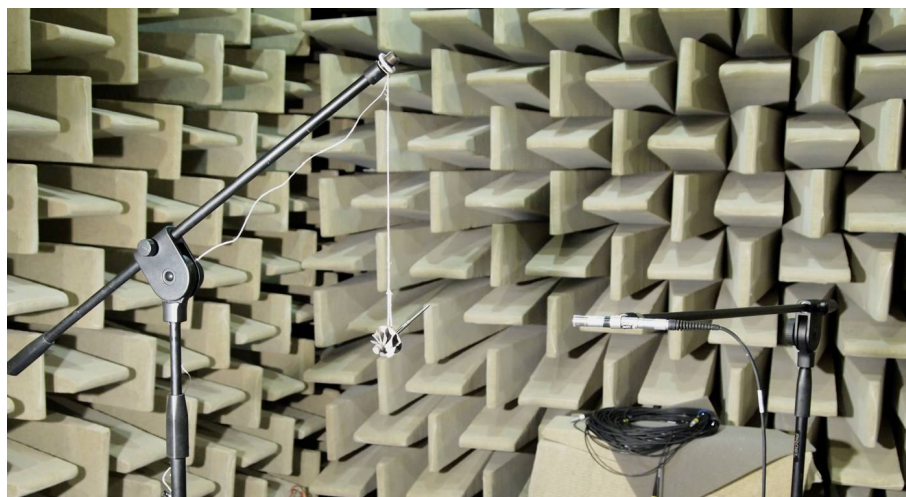
Vypočítaným modálním vlastnostem odpovídá nastavení FFT analyzátoru (frekvenční rozsah 0 – 6,4 kHz a 6401 spektrálních čar) a použitá technika:

- 1/2" mikrofon pro měření ve volném poli Brüel & Kjær, typ 4190 s frekvenčním rozsahem 3,15 Hz – 20 kHz,
- rázové kladívko Brüel & Kjær, typ 8202 s frekvenčním rozsahem až do 7 kHz (rozsah závisí na použitém hrotu kladívka a celkové hmotnosti hlavy) a s vestavěným předzesilovačem Brüel & Kjær, typ 2646 A,

- analyzátor Brüel & Kjær, typ 3560 C PULSE se vzorkovací frekvencí 65,536 kHz a s instalovaným vstupně/výstupním 4/2 kanálovým modulem Brüel & Kjær, typ 3109 a síťovým modulem Brüel & Kjær, typ 7533.

Spínač je nastaven tak, aby nabírání signálu začalo 20 μs před kontaktem mezi hrotem kladívka a testovaným rotorem. Pro časové vážení signálu je použito tzv. přechodové okno, což je speciální varianta obdélníkového (uniformního) okna. Na rozdíl od uniformního časového vážení je u přechodového okna možné nastavit počátek a konec snímání signálu. Vzorky, které se ocitnou mimo okno, jsou považovány za nulové. Přechodové okno je v nejhorším možném případě zatíženo amplitudovou chybou 3,92 dB, ale výrazně zlepšuje odstup signálu od šumu¹, jenž je způsoben vlastnostmi měřicího řetězce [25].

V případě akustických měření je třeba dbát také na hladinu hluku pozadí. Tu je možné redukovat provedením testu v plně bezodrazové komoře², jak je ukázáno na Obr. 5.3. Výhodou měření v bezodrazové komoře je také to, že se její stěny pohltí velké množství akustické energie a jen minimální množství se odrazí zpět do komory. Akustické pole v komoře pak odpovídá tzv. volnému poli, které je vhodné nejen pro měření akustického tlaku, ale i dalších akustických veličin. Testům ve volném poli musí odpovídat použitá měřicí technika.



Obrázek 5.3: Měření akustické odezvy turbodmychadla v bezodrazové komoře.

Při rozboru výsledků měření bývá důležité odhadnout jeho nejistoty, příp. chyby, a také určit, zdali jsou výsledky měření ovlivněny vlastní realizací a zvolenou metodou. Tyto informace je možné získat analýzou dostatečně širokého souboru výsledků. V případě analýzy vlastních frekvencí pomocí měření akustické odezvy je dostatečné množství dat zajištěno volbou několika různých referenčních bodů, ve kterých je realizováno silové buzení, a opakováním buzení v každém z referenčních bodů.

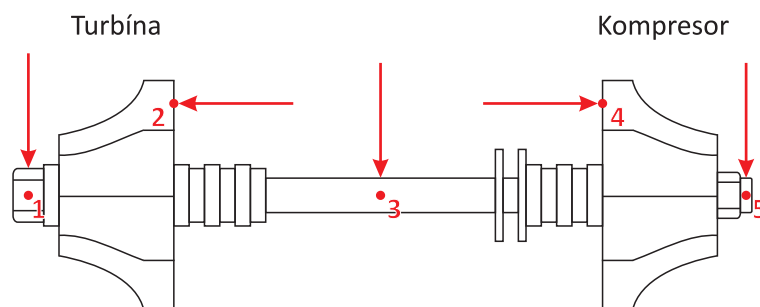
Síť referenčních bodů pro turbodmychadlo z Obr. 5.1 je ukázána na Obr. 5.4. Během měření byl rotor turbodmychadla zbaven ložiskových kroužků a distanční vložky. Tyto části nejsou totiž k rotoru nijak upevněné, tudíž významně neovlivňují ohybovou tuhost hřídele, na němž jsou nasazeny, ale jakékoliv buzení rotoru způsobuje jejich volný pohyb v axiálním směru omezený pouze krajním průřezem první části hřídele a axiálním ložiskem. Jednotlivé volné

¹Anglicky *signal-to-noise ratio*.

²Plná bezodrazová komora má akusticky pohltivý materiál na všech stěnách včetně podlahy.

části při pohybu narážejí do mezních průřezů, ale také do sebe navzájem a nezanedbatelně tak ovlivňují podobu akustické odezvy. Uvedená konfigurace turbodmychadla je dále v textu označena jako *plná konfigurace*. Pevná část turbodmychadla zobrazená na Obr. 5.2 je dále nazývána *jednoduchá konfigurace*. Součástí jednoduché konfigurace není kompresorové kolo a proto příslušná referenční síť má pouze 4 body.

V případě plné konfigurace bylo buzení v každém z referenčních bodů opakováno třikrát, u rotoru v jednoduché konfiguraci pouze dvakrát.



Obrázek 5.4: Síť referenčních bodů s naznačeným směrem buzení.

5.2.3 Zpracování naměřených dat a odhad nejistoty měření

Již během měření bylo jasné, že metodu hledání vlastních frekvencí pomocí přenosových funkcí (5.2) nebude možné použít, protože se nepodařilo zajistit konstantní průběh síly v měřeném frekvenčním pásmu. Vlastní frekvence tak byly ztotožněny s tóny, které se nalézaly ve spektru akustické odezvy.

Při hledání frekvencí jednotlivých tónů nastal problém zdokumentovaný na Obr. 5.5. Jednotlivé tóny byly reprezentovány dvěma a více vrcholy o srovnatelných amplitudách, které se nacházely ve velmi úzkém frekvenčním pásmu. Dva z vrcholů vždy odpovídají dvěma sdruženým módům s podobnou vlastní frekvencí. Za příčinu rozdílných vlastních frekvencí lze označit kombinaci vlivů jako jsou materiálové nehomogenity, výrobní nepřesnosti, zavěšení a směr buzení. Nachází-li se ve spektru odezvy ještě další vrchol, často jde o frekvenční průsak³, známou chybu FFT algoritmů, nebo šum měřicího řetězce nasuperponovaný na snímaný signál [25].

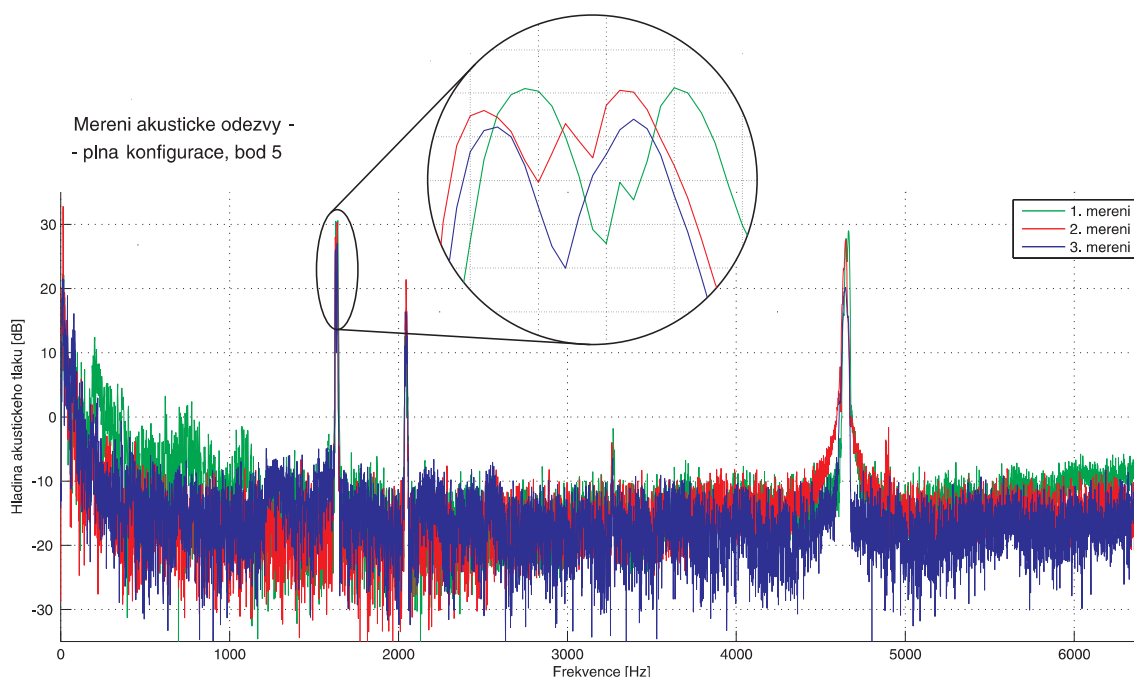
Nadbytečné vrcholy a vliv šumu lze efektivně potlačit tzv. vyhlazováním. Proces vyhlazování předpokládá hladký základní signál, na nějž je nasuperponován jiný signál s charakterem šumu. Vyhlazením je vliv sekundárního signálu potlačen, aniž by byl primární signál nějak zásadně zkreslen. Pokud má sekundární signál jiný charakter, např. jde-li o náhodné velmi úzké impulsy s vysokou amplitudou, vyhlazení značně zkreslí signál, aniž by odstranilo nežádoucí jev [17].

Nejjednodušším vyhlazovacím algoritmem je obdélníkové vyhlazení, nebo též nevážený klouzavý průměr. Tento algoritmus nahradí každý diskrétní bod signálu průměrem m sousedních bodů, kde m je přirozené obvykle liché číslo nazývané vyhlazovací šířka⁴. Např. pro $m = 3$ a signál s ekvidistantně rozloženými body je možné nevážený klouzavý průměr vyjádřit vztahem

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i-1} + X_i + X_{i+1}}{3}, \quad (5.3)$$

³Anglicky *spectral leakage*.

⁴Anglicky *smooth width*.



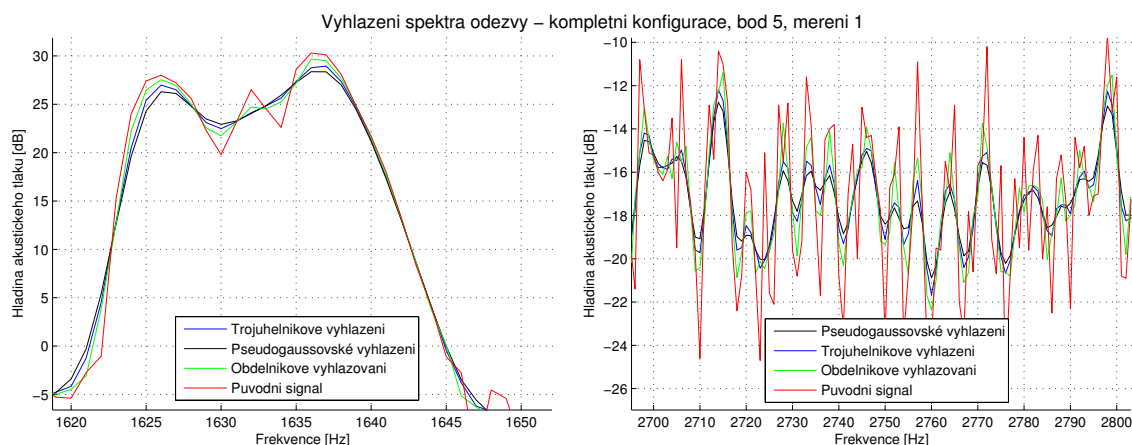
Obrázek 5.5: Typické spektrum hladiny akustického tlaku turbodmychadla v plné konfiguraci buzeného rázovým kladívkem. Výrazný vrchol o frekvenci cca 2050 Hz s největší pravděpodobností přísluší prvnímu torznímu módu, protože v případě jednoduché konfigurace se v okolí této frekvence nevyskytoval žádný vrchol v naměřených spektrech ani vlastní tvar kmitu ve výsledcích výpočtové modální analýzy. Je zajímavé, že se tento vrchol neobjevil ani ve spektrech z 3. referenčního bodu plné konfigurace. Z detailu je patrné, že jednotlivé tóny nejsou tvořeny jedním vrcholem, ale dvěma či třemi, které leží ve velmi úzkém pásmu.

kde \bar{X}_i a X_i jsou i -té body vyhlazeného a původního signálu. V případě spektra akustické odezvy jde o hladiny akustického tlaku, které přísluší i -té spektrální čáře. Je-li signál podroben obdélníkovému vyhlazení (5.3) dvakrát, mohou být body nového, vyhlazeného signálu popsány vztahem

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i-2} + 2X_{i-1} + 3X_i + 2X_{i+1} + X_{i+2}}{9}, \quad (5.4)$$

kterému se také říká trojúhelníkové vyhlazení. Tři obdélníková vyhlazení se nazývají pseudo-gaussovské vyhlazení.

Vyšší řády vyhlazení jsou efektivnější při odstraňování vlivu vysokofrekvenčního šumu, ale snižují amplitudy a rozširují vrcholy. Na polohu vrcholů a dalších význačných atributů nicméně představené vyhlazování vliv nemá, což je zajištěno symetrickým rozložením koeficientů kolem centrálního bodu ve vzorcích (5.3) a (5.4). Každá z tónových složek upraveného signálu je tedy po aplikaci vyhlazovacího algoritmu v ideálním případě redukována na dva velmi blízké vrcholy, které sice mají menší amplitudu než vrcholy originálního signálu, ale zachovávají si svojí polohu, jak je ukázáno na Obr. 5.6. Při vhodné volbě vyhlazovací šířky se oba vrcholy mohou spojit v jeden. Vyhlazovací šířku je doporučeno vybírat tak, aby se rovnala polovině šířky tónových složek [17], která je v případě testovaného turbodmychadla závislá na poloze referenčního bodu a činí 30 – 40 bodů.



Obrázek 5.6: Porovnání různě vyhlazeného signálu s originálními experimentálně získanými daty. Vyhlazovací šířka obdelnikového vyhlazeni je 3, šírky dalších vyhlazeni odpovídaji dvěma a třem průchodům obdelnikového vyhlazeni o šírce 3.

Ve vyhlazeném signálu už je poměrně jednoduché najít vrchol. Stačí např. pomocí centrální diferenciální formule ve tvaru

$$\bar{X}'_i = \frac{\bar{X}_{i+1} - \bar{X}_{i-1}}{2} \quad (5.5)$$

sledovat průběh první derivace a hledat lokální maxima, tedy místa, kde funkce popisující první derivaci signálu nabývá hodnoty 0 a zároveň klesá. Použitím diferenciální formule (5.5) jsou získány hodnoty první derivace v diskrétních bodech. Pomocí vhodné interpolace je možné tyto diskrétní body proložit spojitou funkcí a lokalizovat tak vrcholy, které leží mezi dvěma spektrálními čarami, tedy mezi dvěma známými diskrétními body signálu.

Z Obr. 5.6 je patrné, že lokálních maxim se v signálu nachází velké množství a proto je jejich výběr omezen dvěma konstantami. První z nich je prahová amplituda, která z množiny maxim vyřadí prvky s nízkou hodnotou. Volba prahové amplitudy závisí na charakteru signálu, při jejím stanovení je ale třeba počítat s tím, že vyhlazování velikost amplitud někdy i podstatně snižuje. Rozumná velikost této konstanty je tedy polovina až dvě třetiny velikosti vrcholů. Druhou konstantou je prahová šikmost, která odmítne široké (pomalu rostoucí) vrcholy a obvykle je rovna výrazu $\frac{2}{\sqrt{m}}$, kde m je vyhlazovací šířka [17].

Volba konstant definujících vyhlazovací proces a výběr tónových složek do jisté míry omezuje automatizované použití popsaného algoritmu, protože správná hodnota jednotlivých konstant závisí na charakteru analyzovaného signálu. Dokonce ani v případě analýzy akustické odezvy turbodmychadla nebylo možné použít pro všechna experimentálně získaná data stejné konstanty. Signál byl vždy vyhlazen pouze jednou neváženým klouzavým průměrem (5.3), ale vyhlazovací šířka kolísala mezi hodnotami 15 – 21 a mezní amplituda, která byla ve většině případů stanovena na 20 dB, musela být pro některé konkrétní odezvy snížena na pouhých 10 dB. Přesto nebylo možné frekvenční hodnoty všech vrcholů stanovit. Výsledky tónových analýz jednotlivých spekter akustické odezvy jsou uvedeny v Tab. 5.3.

Hodnoty vlastních frekvencí jsou odhadnuty pomocí prostého aritmetického průměru

$$\hat{f}^j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i^j, \quad (5.6)$$

Referenční bod	Číslo měření	Jednoduchá konfigurace		Plná konfigurace	
		1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]	1. ohybový mód [Hz]	2. ohybový mód [Hz]
1	1	1735,70	4686,84	1633,33	4637,40
	2	1735,66	4690,57	1650,64	4649,86
	3	–*	–	∅**	4643,90
2	1	1737,05	4684,07 4691,20	1624,97	4626,65
	2	1733,37	4693,48	1625,22	4620,37
	3	–	–	1631,79	∅
3	1	1735,65	4691,20	1631,11	4630,51
	2	1733,89	4675,76	1631,57	∅
	3	–	–	1631,21	4622,55
	4	–	–	1632,21	∅
4	1	–	–	∅	4635,70
	2	–	–	1634,19	4660,04
	3	–	–	∅	4638,74 4663,77
5	1	1733,87	4683,02	1634,98	4653,25
	2	1737,58	4687,85 4689,70	1632,03	4647,32
	3	–	–	∅	4645,40
Aritmetický průměr [Hz]:		1735,35	4687,37	1632,77	4641,10
Směrodatná odchylka [Hz]:		1,43	4,97	6,14	12,83
Nejistota při pokrytí 90 % [Hz]:		2,36	8,18	10,1	21,11
Nejistota při pokrytí 95 % [Hz]:		2,81	9,75	12,04	25,15

* Neměřeno.

** Hodnota nebyla stanovena.

Tabulka 5.3: Výsledky tónové analýzy spekter akustické odezvy turbodmychadla. Tónové složky, jejichž frekvenční polohu nebylo možné určit, se sestávaly z tří nebo více dílčích vrcholů, které při volbě nízkých vyhlazovacích šířek nebyly odstraněny a při velkých vyhlazovacích šířkách neprošel získaný vrchol testem na prahovou šikmost. Aby byla zachována co největší přesnost měření, nebyly tónové složky se třemi a více hodnotami brány v úvahu. Z hlediska popsané metodiky a předpokládaných vlastností testovaného turbodmychadla nejsou takové tónové složky přípustné a za jejich vznikem může stát hrubá chyba měření.

kde \hat{f}^j označuje experimentálně určenou vlastní frekvenci odpovídající j -tému ohybovému módu dané konfigurace, f_i^j je frekvence i -tého nalezeného vrcholu odpovídajícího j -tému ohybovému módu⁵ a n je celkový počet nalezených vrcholů odpovídajících j -tému ohybovému módu.

Frekvence f_i^j , $i = 1, \dots, n$ lze chápat jako množinu n náhodných výběrů spojitě náhodné

⁵V ideálním případě, kdy by všechny tónové složky byly vyhlazeny tak, aby měly právě jeden vrchol, by index i odpovídal pořadovému číslu spektra akustické odezvy.

veličiny f^j . Rozdíl mezi náhodnou veličinou f^j a její střední hodnotou je náhodnou chybou, která vzniká při opakovaném měření fyzikální veličiny. Náhodnou chybu je dle zákona chyb možné popsat jako náhodnou veličinu s normálním rozdělením [8]. Z předpokladu, že náhodná chyba je rovna rozdílu náhodné veličiny a její střední hodnoty, přímo vyplývá, že experimentálně zjištěná náhodná veličina se bude řídit stejným rozdělením jako chyba měření.

Normální rozdělení je charakterizováno dvěma parametry: střední hodnotou a rozptylem. Při dostatečném množství provedených experimentů je střední hodnota totožná s aritmetickým průměrem \hat{f}^j a rozptyl je možné odhadnout jako kvadrát výběrové směrodatné odchylky

$$\sigma^j = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (f_i^j - \hat{f}^j)^2}, \quad (5.7)$$

na kterou je zde kvůli malému počtu vzorků aplikována Besselova korekce, což znamená, že namísto celkového počtu nalezených vrcholů n je použit počet stupňů volnosti rozdělení $n-1$ [8].

Normální rozdělení, kterým se řídí náhodná veličina f^j , má hustotu

$$h(f^j) = \frac{e^{-\frac{(f^j - \hat{f}^j)^2}{2(\sigma^j)^2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma^j}, \quad f^j \in \mathbb{R}. \quad (5.8)$$

Je-li měřená veličina považována za náhodnou spojitou veličinu, většinou se neuvažují chyby měření, ale tzv. nejistoty měření. Nejistota opakovaného měření u_A vymezuje interval, ve kterém s určitou pravděpodobností leží výsledek libovolné realizace měření a také skutečná hodnota měřené veličiny. Tomuto intervalu se říká pokrytí a obvykle se volí tak, aby do něj spadalo 90 %, nebo 95 % všech realizací náhodné veličiny. Nejistotu měření pro pokrytí 90 %, označenou v tomto textu jako $u_{A,90}(f^j)$, je možné vypočítat užitím vztahu

$$u_{A,90}(\hat{f}^j) = \frac{Q_{0,95} - Q_{0,05}}{2} = Q_{0,95} - Q_{0,5} = Q_{0,95} - \hat{f}^j, \quad (5.9)$$

kde $Q_{0,95}$, $Q_{0,5}$ a $Q_{0,05}$ jsou kvantily normálního rozdělení s hustotou (5.8). Kvantil Q_α spojitého rozdělení s distribuční funkcí $H(X)$ je taková hodnota náhodné veličiny X , pro kterou platí, že $P(X \leq Q_\alpha) = \alpha$ a tedy $H(Q_\alpha) = \alpha$. Obdobně nejistota měření pro pokrytí 95 % je

$$u_{A,95}(\hat{f}^j) = \frac{Q_{0,975} - Q_{0,025}}{2} = Q_{0,975} - Q_{0,5} = Q_{0,975} - \hat{f}^j. \quad (5.10)$$

V praxi se $u_{A,95}(\hat{f}^j)$ často odhaduje pomocí směrodatné odchylky měření vztahem $u_{A,95}(\hat{f}^j) \approx 2\sigma^j$.

Příslušné kvantily Q_α lze vypočítat z distribuční funkce normálního rozdělení [8]

$$H(f^j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{f^j - \hat{f}^j}{\sigma^j}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad f^j \in \mathbb{R}. \quad (5.11)$$

Nejistoty určování vlastních frekvencí 1. a 2. ohybového módu turbodmychadla pomocí tónové analýzy akustické odezvy uvedené v Tab. 5.3 ukazují, že tato metoda je velmi přesná při měření striktně lineárních mechanických systémů, v tomto případě rotoru v jednoduché konfiguraci. Přidáním kompresorového kola a rozpěrky a utažením samojistné matice je hřídel předepnut a systém se stává nelineárním, konkrétně spektrum akustické odezvy začne záviset na poloze referenčního bodu a nejistota měření řádově vzroste.

5.3 Ladění modelu podle výsledků experimentu

Ve chvíli, kdy je sestaven výpočtový model a jsou známy důležité vlastnosti skutečného rotoru, je možné realizovat ladění parametrů modelu. Ladění je optimalizační proces, při kterém je minimalizována nezáporná cílová funkce, která je obvykle definována ve tvaru

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^m w_i \left(1 - \frac{l_i(\mathbf{p})}{\hat{l}_i} \right)^2, \quad (5.12)$$

kde \mathbf{p} je vektor ladicích parametrů, w_i je i -tý váhový koeficient a $l_i(\mathbf{p})$, \hat{l}_i jsou laděná a požadovaná veličina. Celá závorka na pravé straně výrazu (5.12) představuje relativní chybu $l_i(\mathbf{p})$ proti \hat{l}_i . Vektor ladicích parametrů \mathbf{p} se obvykle sestává z geometrických či hmotnostních parametrů prvků soustavy nebo tuhostí a tlumicích parametrů nehmotných vazebních členů. Posloupnost laděných veličin může obsahovat členy vyjadřující vlastní frekvence, amplitudy ustáleného kmitání, přenášené silové účinky, hmotnosti částí, či celé soustavy, nebo tuhosti vazebních členů.

Minimum cílové funkce (5.12) obvykle není možné najít analyticky a proto se v drtivé většině případů používají numerické iterační algoritmy. Ty se v zásadě rozdělují do tří skupin [3]:

- *Metody nultého řádu* zahrnují metody souřadnicové komparace, simplexové a stochastické metody a další postupy, které porovnávají funkční hodnoty cílové funkce.
- *Metody prvního řádu* využívají první derivaci cílové funkce podle vektoru optimalizačních parametrů. Pomocí derivace je určován směr největšího spádu. Využívané jsou zejména, gradientní metody a metody sdružených směrů.
- *Metody druhého řádu*, jako jsou Newtonova, DFP a BFGS metoda, využívají druhou derivaci cílové funkce podle vektoru optimalizačních parametrů. Často se využívají pro zpřesnění výsledků optimalizace, nebo jsou nasazovány ve chvíli, kdy metody prvního řádu pomalu konvergují.

V této práci je využita funkce *fmincon* z optimalizačního toolboxu MATLABu, která kombinuje metody prvního a druhého řádu [24].

5.3.1 Ladění modelu turbodmychadla v jednoduché konfiguraci

Pro ladění modelu turbodmychadla v jednoduché konfiguraci definovaného v Tab. 5.1 a 5.2 byla použita nevážená cílová funkce ve tvaru

$$\psi(\mathbf{p}) = \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{f_i(\mathbf{p})}{\hat{f}_i} \right)^2, \quad (5.13)$$

kde $f_i(\mathbf{p})$, \hat{f}_i jsou vypočtená a experimentálně určená vlastní frekvence odpovídající i -tému ohybovému módu. Vektor ladicích parametrů \mathbf{p} se skládá z vnějších průměrů d_2^j všech 13 konečných hřídelových prvků, z hmotnosti m^1 , momentů setrvačnosti $I_{x_s}^1$, $I_{y_s}^1$ a nenulového deviačního momentu $D_{y_s z_s}^1$ turbínového kola a z Youngova modulu pružnosti v tahu E , přičemž bylo předpokládáno, že modul je konstantní pro všechny konečné hřídelové prvky. Kvůli ladění turbodmychadla v plné konfiguraci bylo dále požadováno splnění vazební podmínky

$$d_2^{10} - d_2^{11} = 0, \quad (5.14)$$

která byla zadána pomocí lineární algebraické rovnice jako vstupní parametr funkce *fmincon* a jež zajišťovala, že část hřídele pod kompresorovým kolem sestávající se ze dvou konečných prvků bude mít konstantní průměr.

Všechny ladicí parametry byly ještě před vstupem do optimalizačního algoritmu převedeny do bezrozměrného tvaru, takže počáteční hodnoty všech parametrů byly rovny 1. Bezrozměrný tvar vektoru ladicích parametrů byl použit jednak kvůli tomu, že mezi parametry v základních jednotkách byly rozdíly i více než šesti řádů, ale také kvůli jednoduché definici horní a dolní meze jednotlivých ladicích parametrů. Velikost horní a dolní meze vycházela z odhadu přesnosti měření, které sloužilo jako podklad pro přibližný výkres rotoru.

Při měření délek v řádu jednotek milimetrů je možné dosáhnout posuvným měřítkem s nejmenším dílkem stupnice 0,05 mm relativní přesnosti cca 2 %. Přesnost měření rozměrů objektů o velikosti kolem 1 mm použitím 3D skeneru a následným vyhlazením snímku v CAD systému je zhruba stejná. Protože hmotnost závisí na třetí mocnině rozměru a moment setrvačnosti na páté, lze meze bezrozměrných ladicích parametrů zadat ve tvaru

$$\begin{aligned} 0,98 &\leq d_2^j \leq 1,02, & j = 1, \dots, 13, \\ 0,94 &\leq m^1 \leq 1,06, \\ 0,94 &\leq I_j^1 \leq 1,06, & I_j^1 = \{I_{x_s}^1, I_{y_s}^1, D_{y_s z_s}^1\}, \\ 0,95 &\leq E \leq 1,05, \end{aligned}$$

kde meze parametru E zhruba korespondují s intervalem, v němž je udávána hodnota této materiálové konstanty pro oceli. Při použití uvedených mezí nedával optimalizační proces dobré výsledky a tak byly meze pro průměry hřídelových prvků rozšířeny. Upravené intervaly je možné vyjádřit jako

$$\begin{aligned} 0,96 &\leq d_2^j \leq 1,04, & j = 1, \dots, 13, \\ 0,94 &\leq m^1 \leq 1,06, \\ 0,94 &\leq I_j^1 \leq 1,06, & I_j^1 = \{I_{x_s}^1, I_{y_s}^1, D_{y_s z_s}^1\}, \\ 0,95 &\leq E \leq 1,05. \end{aligned} \tag{5.15}$$

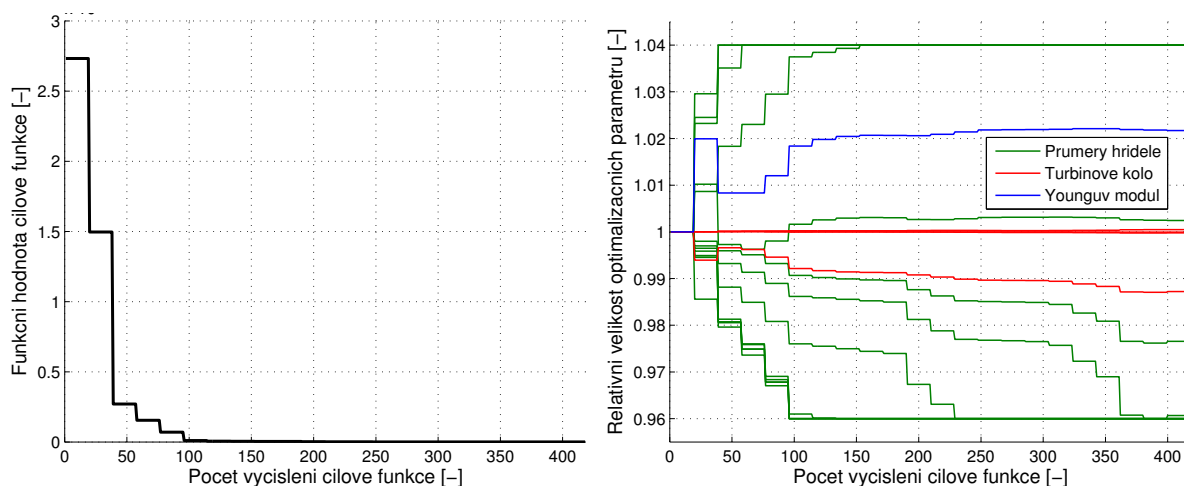
Pro správnou činnost optimalizační funkce *fmincon* bylo důležité zajistit, aby v numerickém modelu byly při každém vyčíslení cílové funkce (5.13) použity aktuální hodnoty ladicích parametrů v základních jednotkách, nikoliv v bezrozměrném tvaru. Průběh ladění je popsán grafy na Obr. 5.7 a 5.8, odkud je patrné, že plných 10 ladicích parametrů nabývá mezní hodnoty a to i přes použití mírnějších podmínek (5.15).

Počáteční, požadované a nalezené hodnoty vlastních frekvencí příslušných 1. a 2. ohybovému módu jsou uvedeny v Tab. 5.4. Je důležité si uvědomit, že hledání požadovaných veličin zadaných s přesností na setiny Hz je z hlediska velikosti nejistot měření uvedených v Tab. 5.3 poněkud zavádějící a vhodnější by bylo použít přístupy známé ze statistické mechaniky. Popis těchto metod je však kvůli svému rozsahu nad rámec tohoto textu.

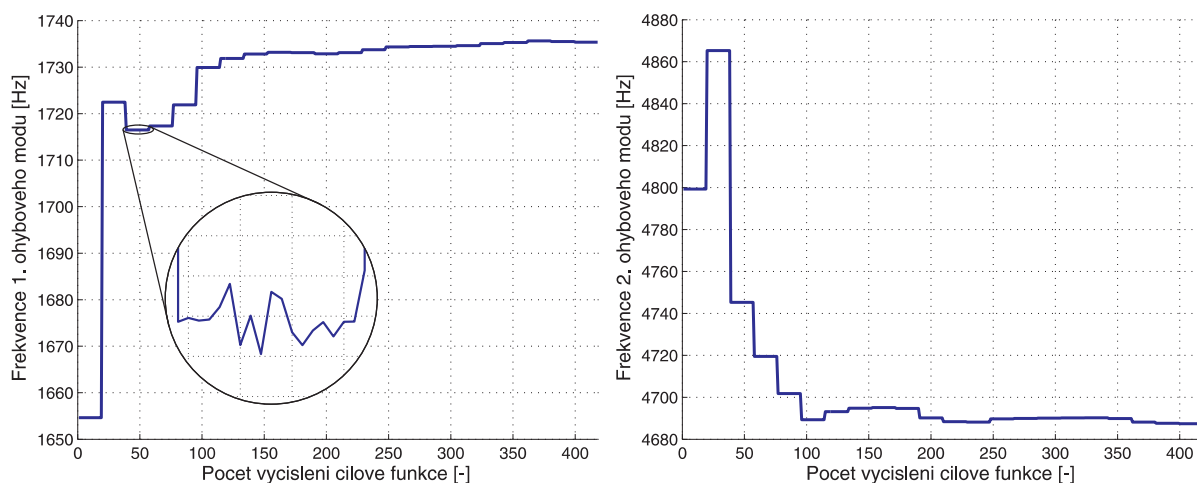
Relativní změna hmotnosti mezi naladěným a nenaladěným modelem činí cca 1 %. Bohužel nebylo možné posoudit správnost váhy modelu, protože nebyla u pevné části změřena.

5.3.2 Ladění modelu turbodmychadla v plné konfiguraci

Základ modelu turbodmychadla v plné konfiguraci je totožný s naladěným modelem turbodmychadla v jednoduché konfiguraci. Co se týče hřídelových konečných prvků, přidány jsou



Obrázek 5.7: Hodnoty cílové funkce a ladicích parametrů při ladění turbodmychadla v jednoduché konfiguraci vykreslené v závislosti na počtu vyčíslení cílové funkce. Červené křivky na pravém grafu znázorňují závislost velikosti hmotnosti, dvou momentů setrvačnosti a nenulového deviačního momentu turbínového kola na počtu vyčíslení cílové funkce.



Obrázek 5.8: Průběh vlastních frekvencí turbodmychadla v jednoduché konfiguraci příslušných 1. a 2. ohybovému módu v závislosti na počtu vyčíslení cílové funkce. V detailu jsou znázorněny difference vlastní frekvence při malé změně jednotlivých ladicích parametrů. V každém iteračním kroku optimalizačního algoritmu je na základě těchto diferencí určen směr největšího spádu a délka iteračního kroku.

dva duté hřídele s řídicími uzly 8 a 9 a s $E = 0$, viz Tab. 5.5, které představují rozpěrku sloužící k uložení axiálního ložiska a vymezující polohu kompresorového kola. Reprezentace rozpěrky hřídelovými prvky je výhodná hned ze dvou důvodů: je zachována spojitě rozložená hmotnost součásti a velmi snadno se ladí příspěvek rozpěrky do tuhosti hřídele. Ladicím parametrem je v tomto případě pouze vnější průměr vnitřního hřídelového prvku (s $E \neq 0$) a vnitřní průměr vnějšího prvku (s $E = 0$) je s ladicím parametrem svázán rovností. Vnější průměr vnějšího prvku se během ladění nemění a celková hmotnost rotoru je tedy zachována.

Dále jsou k modelu připojena 4 tuhá tělesa. Kotouče v uzlech 8 a 9 vymezují polohu

Mód	Počáteční frekvence [Hz]	Hledaná frekvence [Hz]	Konečná frekvence [Hz]
1. ohybový	1654,65	1735,35	1735,34
2. ohybový	4799,28	4687,37	4687,38

Tabulka 5.4: Počáteční, požadované a nalezené hodnoty laděných veličin turbodmychadla v jednoduché konfiguraci. Z tabulky vyplývá, že s pomocí funkce *fmincon* lze dosáhnout velmi přesných výsledků v poměrně krátkém čase — ladění trvalo necelých 8 s (HP EliteBook 8570p se systémem Windows 7 Professional 64bit, s procesorem Intel® Core™ i5 3360M 4×CPU @ 2,80 GHz a s 4,00 GB RAM)

Číslo uzlu	l [-]	d_2 [-]	d_1 [-]	ρ [kg · m ⁻³]	E [MPa]	ν [-]	η_v [-]
1	0,7846	1,3542	0	7910	214560	0,29	0
2	0,3873	1,3873	0	7910	214560	0,29	0
3	0,7646	1,3559	0	7910	214560	0,29	0
4	0,5968	0,9600	0	7910	214560	0,29	0
5	1,874	1,0024	0	7910	214560	0,29	0
6	1,874	1,0400	0	7910	214560	0,29	0
7	0,5968	1,0400	0	7910	214560	0,29	0
8	0,7846	0,7136	0	7910	214560	0,29	0
9	1,0518	0,7136	0	7910	214560	0,29	0
10	1,2003	0,6587	0	7910	214560	0,29	0
11	2,7730	0,6587	0	7910	214560	0,29	0
12	0,9516	0,6587	0	7910	214560	0,29	0
13	0,4174	0,5217	0	7910	214560	0,29	0
8	0,7846	1	0,7136	7910	0	0	0
9	1,0518	1,4875	0,7136	7910	0	0	0

Tabulka 5.5: V tabulce jsou uvedeny parametry jednotlivých konečných hřídelových prvků v modelu turbodmychadla v plné konfiguraci. Číslo uzlu označuje index levého řídicího uzlu, l , d_1 , d_2 jsou bezrozměrná délka, vnitřní a vnější průměr konečného prvku vztažené k průměru hřídele v oblasti radiálních ložisek, ρ je hustota materiálu, E Youngův modul pružnosti v tahu, ν Poissonovo číslo a η_v je poměrný viskózní útlum, resp. konstanta tlumení Kelvin-Voigtova materiálu.

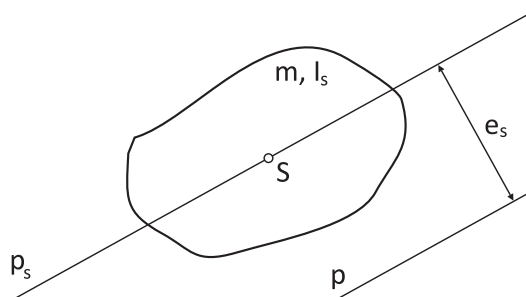
axiálního ložiska a jejich momenty setrvačnosti jsou vypočteny pomocí vztahů (5.1a) a (5.1b). Do řídicího uzlu 11 je připojeno kompresorové kolo, přičemž poloha uzlu je totožná s polohou střediska hmotnosti. Těleso připojené k řídicímu uzlu 12 představuje samojistnou matici. Ta je pro výpočet hmotnosti, polohy střediska hmotnosti a momentů setrvačnosti uvažována jako dva spojené duté válce. Momenty setrvačnosti obou válců jsou opět vyčísleny užitím vztahů (5.1a) a (5.1b), přepočteny ke středisku hmotnosti matice pomocí Steinerovy věty a sečteny. Steinerovu větu lze pro obecné těleso z Obr. 5.9 formulovat ve tvaru

$$I = I_s + m e_s^2, \quad (5.16)$$

kde I je hledaný moment setrvačnosti k libovolné přímce p , I_s představuje moment setrvačnosti tělesa k ose p_s , která je rovnoběžná s přímkou p a prochází střediskem hmotnosti tělesa, m je hmotnost tělesa a e_s je kolmá vzdálenost $|pp_s|$.

Číslo uzlu	m [-]	a [-]	I_{x_s} [-]	$I_{y_s} = I_{z_s}$ [-]	$D_{x_s y_s} = D_{x_s z_s}$ [-]	$D_{y_s z_s}$ [-]
1	620,9342	-1,3115	2791,2046	2773,2696	0	-0,0257
2	1	0	1	0,5050	0	0
3	1	0	1	0,5050	0	0
8	10,8182	0,1002	14,2822	7,2030	0	0
9	10,0475	0	14,2723	7,1782	0	0
11	169,1919	0	903,9604	809,4059	0	0
12	15,5960	0,4641	7,2723	5,8713	0	0

Tabulka 5.6: V tabulce jsou uvedeny parametry jednotlivých tuhých těles v modelu turbodmychadla v plné konfiguraci. Číslo uzlu označuje index řídicího uzlu, k němuž je těleso připojeno, m je bezrozměrná hmotnost vztahená k nejlehčímu z těles, a je bezrozměrná axiální poloha těžiště tělesa vůči řídicímu uzlu (vztahená k průměru hřídele v oblasti radiálních ložisek) a I_{x_s} , I_{y_s} , I_{z_s} , $D_{x_s y_s}$, $D_{x_s z_s}$, $D_{y_s z_s}$ jsou bezrozměrné kvadratické a deviační momenty setrvačnosti vůči středu hmotnosti tělesa vztahované k I_{x_s} nejlehčího tělesa.



Obrázek 5.9: Ilustrace ke Steinerově větě.

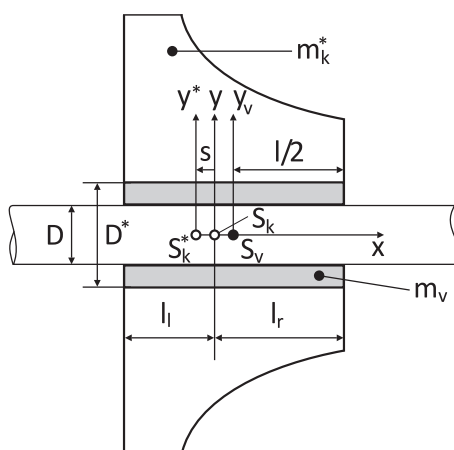
Uvedený model turbodmychadla v plné konfiguraci je výchozím modelem pro ladicí proces, který upraví geometrii takovým způsobem, aby byl respektován vliv rozpěrky a kompresorového kola na ohybovou tuhost hřídele. Minimalizována je opět cílová funkce (5.13) s experimentálně zjištěnými vlastními frekvencemi plné konfigurace turbodmychadla. Vzhledem k tomu, že rozměry hřídele a parametry turbínového kola již byly nalezeny v první fázi ladění, sestává se vektor ladicích parametrů pouze ze čtyř prvků

$$\mathbf{p} = [d_2^8, d_2^9, d_2^{10}, d_2^{11}]^\top, \quad (5.17)$$

přičemž je respektována vazební podmínka (5.14).

Dolní meze intervalů, na kterých jsou hledány hodnoty ladicích parametrů, odpovídají počátečním hodnotám parametrů, protože není předpokládáno, že by přidané součásti tuhost hřídele snížily. Horní meze jsou rovny dvojnásobku počáteční hodnoty s výjimkou parametru d_2^8 , jehož horní mez odpovídá průměru rozpěrky. Matematicky lze meze pro vektor bezrozměrných ladicích parametrů vyjádřit následujícími nerovnostmi

$$\begin{aligned} 1 &\leq d_2^8 \leq 1,4, & j &= 1, \dots, 13, \\ 1 &\leq d_2^9 \leq 2, & & \\ 1 &\leq d_2^j \leq 2, & j &= 10, 11. \end{aligned} \quad (5.18)$$



Obrázek 5.10: Změna parametrů kompresorového kola při vyjmutí části materiálu vyznačeného šedou barvou, který ovlivňuje tuhost hřídele, na němž je kolo nasazeno.

Ve výše definovaném ladicím procesu je důsledně dbáno na zachování celkové hmotnosti rotoru. U dvou konečných prvků, které se nacházejí pod rozpěrkou, byl mechanismus zajišťující zachování hmotnosti představen v prvním odstavci této podkapitoly, v případě prvků pod kompresorovým kolem je ale situace poněkud složitější, protože středisko hmotnosti samotného oběžného kola neleží v axiálním směru uprostřed tělesa, což se v modelu projevuje tak, že prvky pod kompresorovým kolem mají různou axiální délku.

Představme si nyní situaci z Obr. 5.10, kdy je vnější průměr hřídele nacházejícího se pod kompresorovým kolem zvětšen z původní hodnoty D na novou D^* . Původní hmotnost kompresorového kola m_k se tak sníží na hodnotu m_k^* o hmotnost m_v dutého válce o hustotě ρ , zvýrazněného na Obr. 5.10 šedou barvou. Po zavedení bezrozměrného parametru

$$\delta = \frac{D^*}{D} \quad (5.19)$$

totožného s bezrozměrnými ladicími parametry D_2^{10} a D_2^{11} je možné novou hmotnost kola vyjádřit pomocí vztahu

$$m_k^* = m_k - m_v = m_k - \frac{1}{4} \rho \pi (l_l + l_r) D^2 (\delta^2 - 1). \quad (5.20)$$

Obdobným způsobem se sníží i moment setrvačnosti kompresorového kola k ose rotace x

$$I_{k,x}^* = I_{k,x} - I_{v,x} = I_{k,x} - \frac{1}{32} \rho \pi (l_l + l_r) D^4 (\delta^4 - 1), \quad (5.21)$$

kde poslední výraz odpovídá vztahu (5.1a).

Odebráním materiálu se těžiště kompresorového kola přesune z bodu S do nové polohy S^* po orientované úsečce, jejíž délku s lze vyjádřit z rovnice statické rovnováhy

$$m_k^* s = m_v \left(l_r - \frac{l_l + l_r}{2} \right) \Rightarrow s = \frac{m_v (l_r - l_l)}{2(m_k - m_v)}. \quad (5.22)$$

Vztah pro nový moment setrvačnosti $I_{k,y}^*$ k ose y^* je možné odvodit použitím Steinerovy věty (5.16) a upravit do tvaru

$$I_{k,y}^* = I_{k,y} - I_{v,y} - m_v \left(l_r - \frac{l_l + l_r}{2} \right)^2 - m_k^* s^2, \quad (5.23)$$

kde $I_{k,y}$ je původní moment setrvačnosti kompresorového kola k ose y a $I_{v,y}$ je moment setrvačnosti dutého válce k ose y_v , jenž je možné vyjádřit s využitím (5.1b).

Před každým vyčíslením cílové funkce je nutné přepočítat parametry hřídelových elementů pod kompresorovým kolem a kompresorového kola. Důležité je v paměti uchovávat definici původního, nenaladěného modelu z Tab. 5.5 a 5.6, protože rovnosti (5.20) – (5.23) se vztahují k původní geometrii a jejich aplikace na aktuální data — myšleno na geometrii změněnou v průběhu ladění — by vedlo k nesmyslným výsledkům. Při přepočtu dat se nesmí opomenout, že změna polohy těžiště kompresorového kola ovlivňuje i axiální délku hřídelových prvků pod kolem. Změny je možné vyjádřit rovnostmi

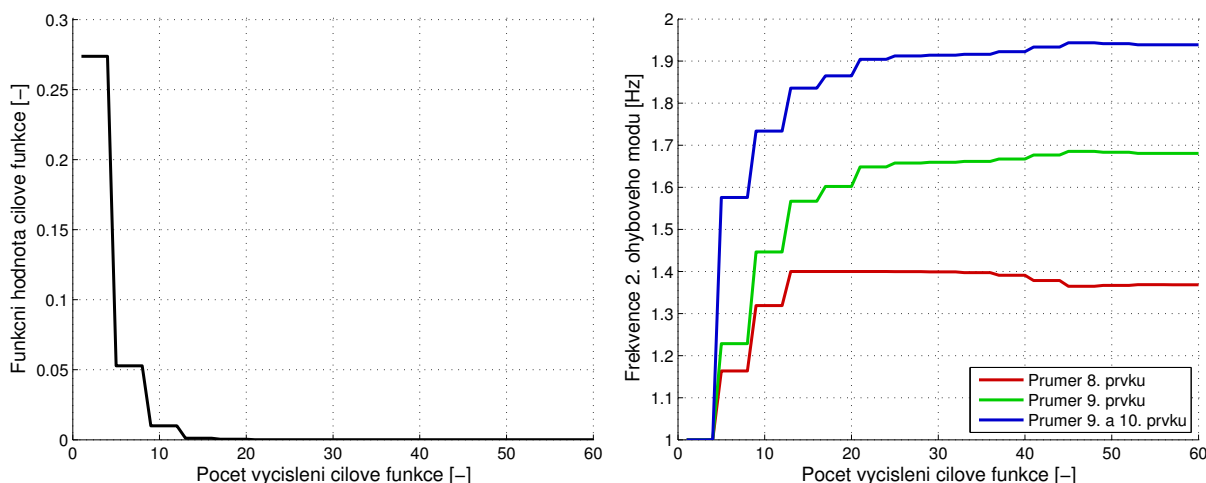
$$l_l^* = l_l - s, \quad (5.24a)$$

$$l_r^* = l_r + s. \quad (5.24b)$$

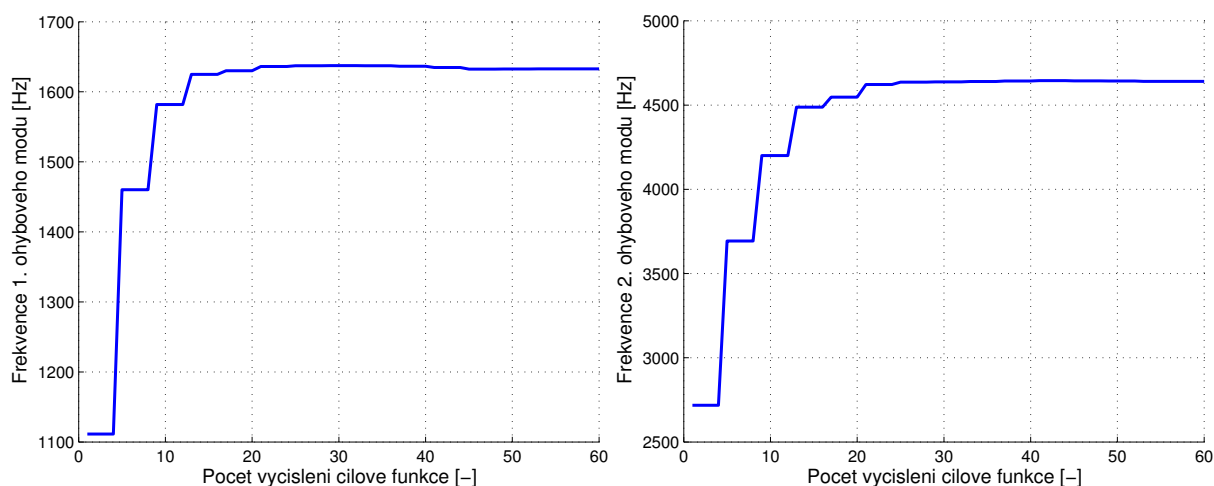
Průběh ladění je popsán grafy na Obr. 5.11 a 5.12. Z pravého grafu na Obr. 5.11 je zřejmé, že žádný z ladicích parametrů (5.17) nenabývá mezních hodnot daných nerovnostmi (5.18). Počáteční, požadované a nalezené hodnoty vlastních frekvencí, které vycházejí z výsledků experimentu prezentovaných v Tab. 5.3, jsou uvedeny v Tab. 5.7.

Geometrie a parametry přídatných tuhých těles naladěného modelu rotoru turbodmychadla až na prvky uvedené v Tab. 5.8, které jsou přímo závislé na ladicích parametrech druhého ladicího procesu, jsou shodné s hřídelovými elementy z Tab. 5.5 a tuhými tělesy z Tab. 5.6. Přestože model nebyl laděn na vlastní frekvenci odpovídající 1. torznímu módu, bylo dosaženo poměrně dobré shody s experimentem. Z Obr. 5.5 lze odhadnout, že uvedenému módu odpovídá v akustické odezvě vrchol o frekvenci cca 2050 Hz. Numerický výpočet stanovuje hodnotu inkriminované frekvence na 2126 Hz, což znamená relativní rozdíl cca 3,7 %.

V tomto bodě je model rotoru hotov a připraven pro závěrečný krok před samotnými výpočty, kterým je stanovení hodnot koeficientů popisujících tuhost a tlumení olejových filmů v radiálních ložiskách v závislosti na úhlové rychlosti rotace. Na Obr. 5.12 je vizualizace naladěného modelu a jsou zde vyznačeny řídicí uzly, ve kterých se nacházejí středy ložisek.



Obrázek 5.11: Hodnoty cílové funkce a ladicích parametrů při ladění turbodmychadla v plné konfiguraci vykreslené v závislosti na počtu vyčíslení cílové funkce.



Obrázek 5.12: Průběh vlastních frekvencí turbodmychadla v plné konfiguraci příslušných 1. a 2. ohybovému módu v závislosti na počtu vyčíslení cílové funkce.

Mód	Počáteční frekvence [Hz]	Hledaná frekvence [Hz]	Konečná frekvence [Hz]
1. ohybový	1111,37	1632,77	1632,77
2. ohybový	2717,67	4641,10	4641,10

Tabulka 5.7: Počáteční, požadované a nalezené hodnoty laděných veličin turbodmychadla v plné konfiguraci.

Číslo uzlu	l [-]	d_2 [-]	d_1 [-]	ρ [$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$]	E [MPa]	ν [-]	η_v [-]
8	0,7846	0,9765	0	7910	214560	0,29	0
8	0,7846	1	0,9765	7910	0	0	0
9	1,0518	1,1994	0	7910	214560	0,29	0
9	1,0518	1,4875	1,1994	7910	0	0	0
10	0,7200	1,2772	0	7910	214560	0,29	0
11	3,2533	1,2772	0	7910	214560	0,29	0

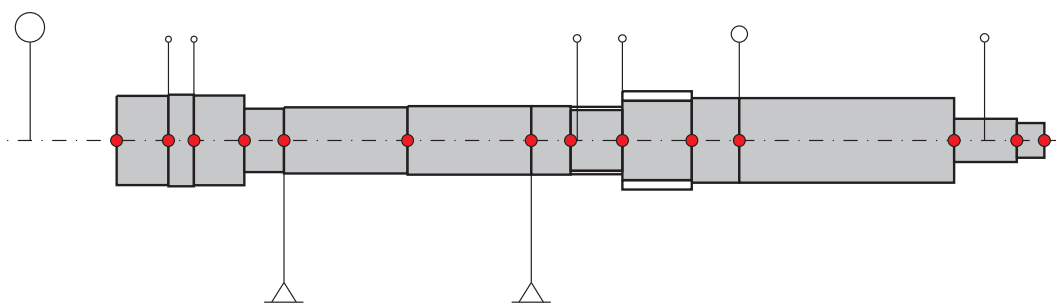
Číslo uzlu	m [-]	a [-]	I_{x_s} [-]	$I_{y_s} = I_{z_s}$ [-]	$D_{x_s y_s} = D_{x_s z_s}$ [-]	$D_{y_s z_s}$ [-]
11	105,0505	0	874,7525	673,7624	0	0

Tabulka 5.8: Bezrozměrné hodnoty definující část modelu ovlivněnou ladicími parametry v druhém kroku ladění. Legendy odpovídají legendám v Tab. 5.5 a 5.6. Hodnoty, které nebyly ovlivněny, zde nejsou uvedeny a jsou shodné s hodnotami ve výše zmíněných tabulkách.

5.4 Stanovení parametrů radiálních ložisek

Přístupů, kterými je možné popsat vliv uložení sestávajícího se z dvou olejových filmů oddělených plovoucím kroužkem na dynamické vlastnosti rotoru, je hned několik.

Nejobecnějším přístupem je přímý numerický výpočet tlakového pole ve filmu pomocí Reynoldsovy rovnice ve tvaru (2.62), nebo v jiném, zjednodušeném tvaru. Jakmile je známé



Obrázek 5.13: Vizualizace naladěného rotoru turbodmychadla programem FEMROT. Na obrázku jsou naznačeny polohy ložisek.

rozložení tlakového pole, je možné sestavit rovnice dynamické rovnováhy a z nich určit polohu čepu a pánve, resp. ložiskového kroužku⁶ a také silové účinky, kterými působí olejový film na čep a pánve. Problémem je, že mezi parametry vstupující do Reynoldsovy rovnice patří i poloha čepu vůči pánvi, která nemusí odpovídat dynamické rovnovážné poloze, získané vyřešením rovnic dynamické rovnováhy. Proto je nutné stav tlakové pole hledat pomocí iteračního algoritmu, který může být analogický např. k procesu popsanému v oddílu 3.1.2. Z uvedeného vyplývá, že tento přístup značně prodlužuje celkový výpočetní čas. Další nevýhodou je relativně vysoká citlivost na přesnost okrajových a počátečních podmínek a vstupních parametrů, jako jsou ložiskové vůle, přírodní tlak maziva, jeho dynamická viskozita atd.

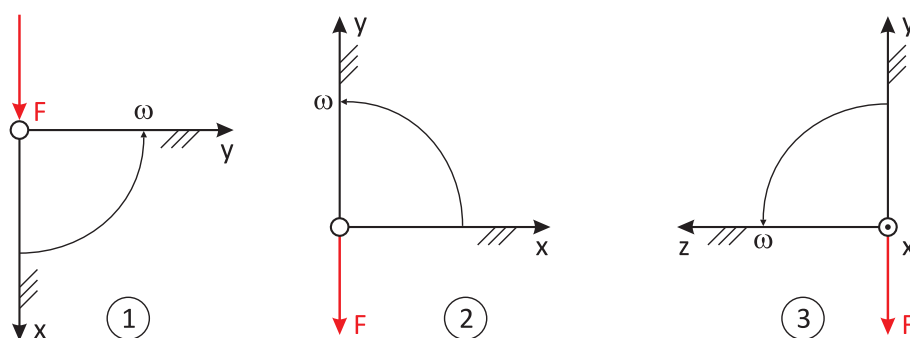
Další možností je využití nelineárního izotropního Bently-Muszyńské modelu (2.65) nebo podobného modelu a výpočet parametrů potřebných k určení silových účinků, jimiž olejový film působí na čep a pánve, pomocí jiných vztahů, než je Reynoldsova rovnice. Potřebné vztahy mohou odpovídat explicitnímu vyjádření některé proměnné, viz např. (4.1), nebo jde o empirické vzorce sestavené na základě velkého souboru pozorování a měření. Tento přístup je ukázán např. v příspěvku [23], kde je na základě teorie z [14, 11, 15] odvozen linearizovaný model kluzného ložiska s kroužkem a je naznačena i formulace nelineárního případu.

Často jsou rovněž využívány softwarové balíky, které jsou schopné stanovit dynamické vlastnosti olejového filmu pro diskrétní hodnoty úhlové rychlosti rotorové soustavy na základě geometrie ložiska a okrajových podmínek. Hodnoty tlumicích a tuhostních parametrů při jiných než počítaných úhlových rychlostech jsou odhadnuty vhodnou aproximací, či interpolací, viz oddíl 2.2.4. Nedostatkem takto získaných parametrů je obvykle předpoklad, že ložisko je provozováno za ustáleného stavu, a výsledky analýz v časové oblasti tak mohou být zatíženy obtížně stanovitelnou nejistotou. Parametry ložisek pro diskrétní úhlové rychlosti také mohou být dodány přímo zadavatelem, což je i případ zde diskutovaného modelu.

Při přejímání parametrů ložisek z dodané dokumentace či externího programového balíku je důležité respektovat orientaci souřadnicového systému, ve kterém byl model ložiska a příslušného olejového filmu odvozen. Pře přechodu z jednoho systému do jiného se totiž kvůli označení kladného směru otáčení čepu a kladného směru provozního zatížení nemusí měnit pouze indexy koeficientů, ale také jejich znaménko, jako je tomu v některých z následujících rovností

$$\begin{aligned} {}^3c_{yy} &= {}^1c_{xx}, & {}^3c_{yz} &= {}^1c_{xy}, & {}^3c_{zy} &= {}^1c_{yx}, & {}^3c_{zz} &= {}^1c_{yy}, \\ {}^3c_{yy} &= {}^2c_{yy}, & {}^3c_{yz} &= -{}^1c_{yx}, & {}^3c_{zy} &= -{}^1c_{xy}, & {}^3c_{zz} &= {}^1c_{xx}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

⁶Poloha pánve ovlivňuje tloušťku olejového filmu a je důležitá u ložisek, která nemají pánve s pevnou geometrií, což jsou např. segmentová ložiska.

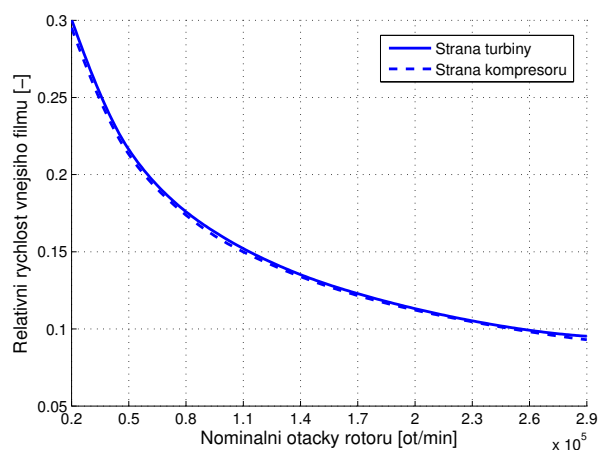


Obrázek 5.14: Souřadnicové systémy, které jsou obvykle využívány pro popis ložisek:
 1 – evropský systém (osy x a y mohou být značeny opačně),
 2 – americký systém,
 3 – systém použitý v programu FEMROT.
 F označuje kladný směr provozního zatížení a ω kladný směr rotace čepu.

kde levé horní indexy odpovídají pořadovým číslům souřadnicových systémů z Obr. 5.14 a c_{ij} zastupuje koeficienty tlumení b_{ij} a tuhosti k_{ij} z rovnice (2.68). Pro přechod mezi jinými souřadnicovými systémy mají převodní vztahy analogický tvar. Jelikož dodané podklady byly vypracovány českou firmou, byly využity vztahy transformující koeficienty ze systému 1 do systému 3.

Jak bylo uvedeno výše, parametry olejových filmů byly známy pouze pro diskrétní úhlové rychlosti. Hodnota koeficientů k_{ij} , b_{ij} $i, j = \{y, z\}$ pro jiné úhlové rychlosti byla odhadnuta pomocí hermitovské interpolace, což je ilustrováno na Obr. 5.16. Hermitovská interpolace je nejméně citlivá k zákmitům a s jejím využitím je možné dobře interpolovat i funkce, které nejsou hladké [24]. Na skutečnost, že některé z parametrů nejsou popsány hladkými funkcemi, ukazují výrazné změny hodnot koeficientů vazební tuhosti k_{yz} a k_{zy} a koeficientů tlumení b_{yy} a b_{zz} .

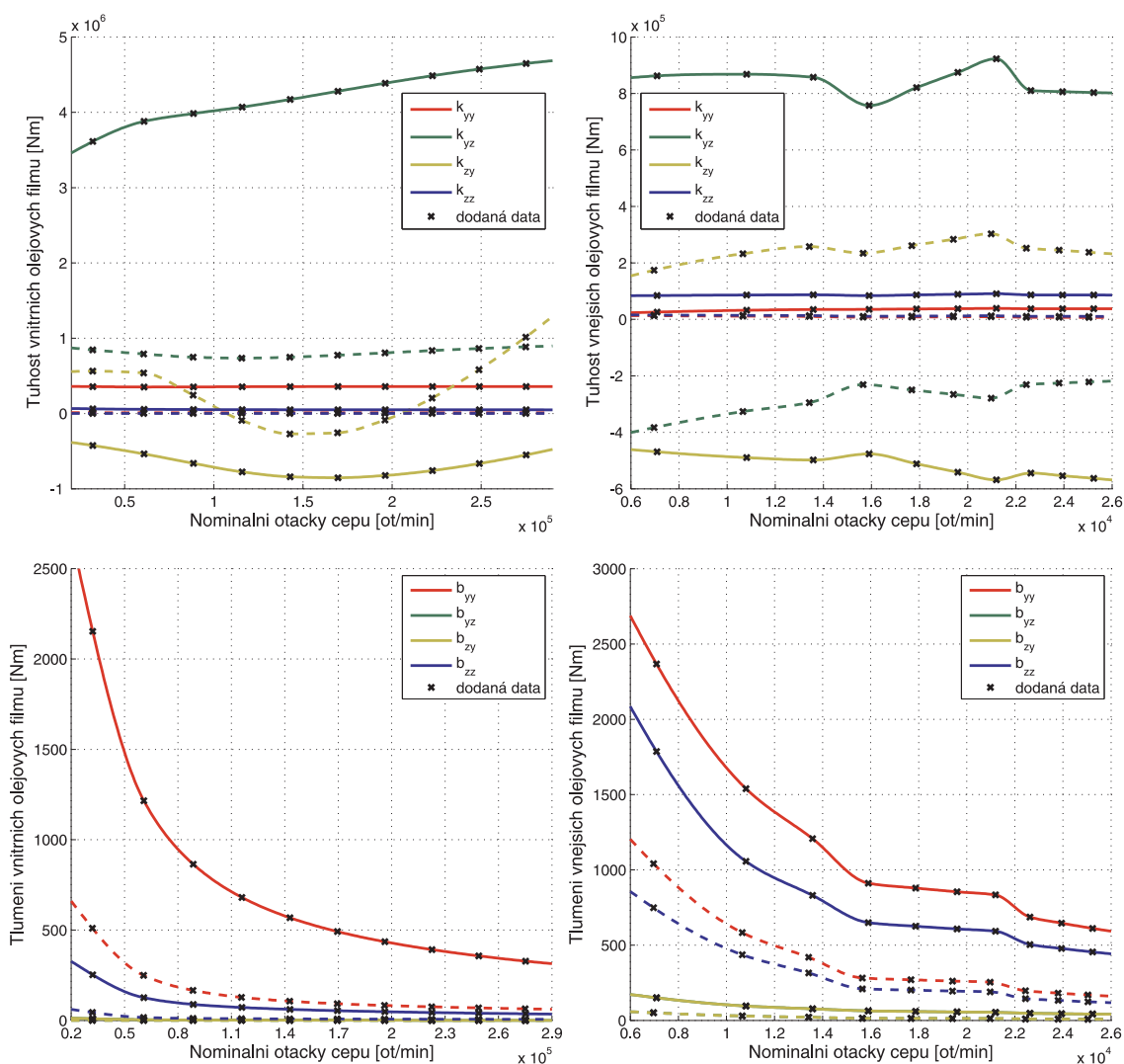
Součástí podkladů byly i údaje o poměrné rychlosti plovoucích kroužků zobrazené na Obr. 5.15 a také parametry ekvivalentní vazby mezi rotorem a statorem, která by měla plnohodnotně nahrazovat oba olejové filmy. Pokud by však byla tato ekvivalentní vazba použita, nebylo by možné do modelu zahrnout vliv plovoucích kroužků. Olejové filmy tak byly mode-



Obrázek 5.15: Poměrná rychlost kroužku zobrazená jako funkce nominální úhlové rychlosti rotoru.

lovány nezávisle a to pomocí rozšířeného modelu ložiskové vazby popsaného v odstavci pod rovnicí (2.68). Parametry vnitřního filmu se řídí relativní úhlovou rychlostí rotoru vůči kroužku [15, 23], což bylo při analýze rovněž zohledněno.

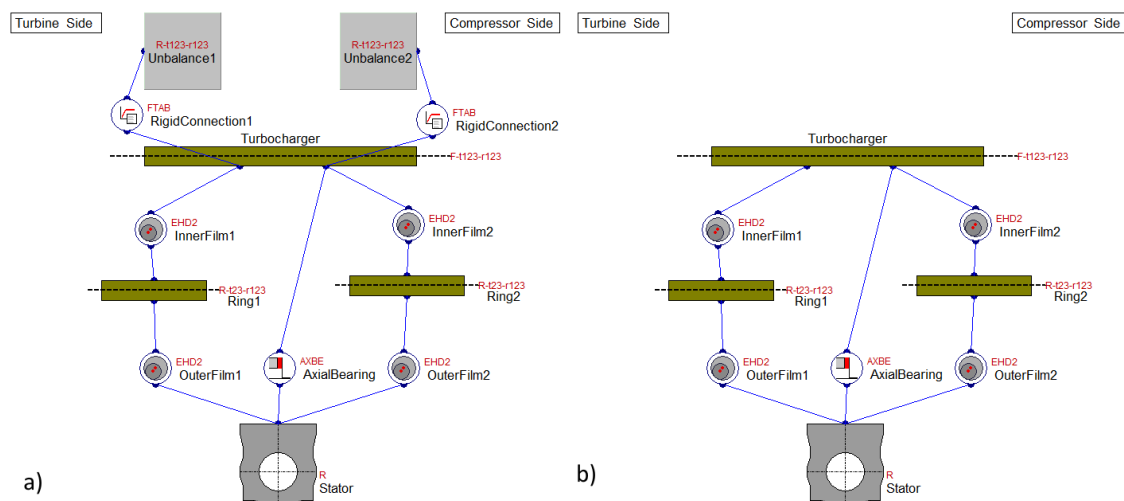
Plovoucí kroužky byly uvažovány jako tuhá tělesa o bezrozměrné hmotnosti 28,2828 vztažené k nejlehčímu přídavnému tuhému tělesu rotorové soustavy, viz Tab. 5.2, a se dvěma stupni volnosti a to horizontální a vertikální výchylkou, tj. posuvy ve směru y a z ve vztahu k Obr. 2.6. Ostatní výchylky a natočení nebyly brány v úvahu, protože podkladová data neumožnila modelovat vazbu přenášející momenty a axiální sílu. Aby nebylo nutné rozšiřovat FEMROT o nový typ elementu, byla pro sestavení globálních matic modelu použita uživatelská funkce spuštěná z příkazové řádky MATLABu a napojená na preprocesor a postprocesor FEMROTu.



Obrázek 5.16: Přehled známých a interpolovaných hodnot koeficientů tuhosti a tlumení obou olejových filmů. Plnou čarou jsou reprezentována data vztahující se k filmům ložiska na straně turbíny, čárkované jsou zobrazena data týkající se ložiska na straně kompresoru.

5.5 Model v AVL EXCITE Power Unit

Prvním krokem při sestavování modelu v AVL EXCITE Power Unit je vytvoření jeho topologické reprezentace. Jednotlivým tělesům a vazbám hotového topologického modelu jsou poté postupně přiřazovány vlastnosti, parametry, nebo geometrické modely. Dvě varianty jednoduchého topologického modelu turbodmychadla popisovaného v této kapitole jsou uvedeny na Obr. 5.17.



Obrázek 5.17: Topologická reprezentace modelu turbodmychadla se skládá z následujících těles: Turbocharger – rotor turbodmychadla (u varianty *b*) zahrnuje i nevyváhy), Ring – plovoucí ložiskové kroužky, Stator – stator turbodmychadla, Unbalance – tuhá tělesa reprezentující nevyváhy (pouze u varianty *a*)).

Jednotlivá tělesa jsou spojena těmito vazbami:

InnerFilm – vnitřní olejové filmy (mezi kroužkem a čepem),

OuterFilm – vnější olejové filmy (mezi čepem a státorem),

AxialBearing – axiální ložisko,

RigidConnection – tuhá vazba mezi rotorem a nevyváhou (pouze u varianty *a*)).

5.5.1 Popis těles

Rotor turbodmychadla je modelován pomocí AVL EXCITE Shaft Modeleru. Jde tedy o deformovatelnou strukturu s kontinuálně rozloženou tuhostí, ale hmotností soustředěnou do diskretních bodů. Při vytváření této struktury je využito poznatků z podkapitoly 4.3 a geometrie naladěného modelu uvedené v Tab. 5.5, 5.6 a 5.8. Model vytvořený v Shaft Modeleru má tedy rozměry, které přibližně odpovídají konečněprvkovému modelu, ale hmotnost je soustředěna celkem do 39 bodů — v konečněprvkovém modelu je rotor reprezentován pouhými 14 uzly. Zmíněné rozdíly spočívají ve vynechání hřídelového elementu s nulovou tuhostí a snížení odsazení turbínového kola z $-1,3115$ na $-1,1519$, které je provedeno kvůli vlastnostem tuhých těles o nenulových rozměrech. Tato tělesa totiž prodlužují axiální délku hřídele, neboť odsazení tuhého tělesa je v Shaft Modeleru ztotožněno s polovinou jeho axiální délky, a určitým dílem, který není v [27] blíže specifikován, přispívají do jeho ohybové, podélné a torzní tuhosti. Pro-

Mód [-]	FEMROT 1.2.3	AVL EXCITE Shaft Modeler	Relativní rozdíl [%]
	Frekvence [Hz]	Frekvence [Hz]	
1. ohybový	1632,77	1612,83	-1,22
1. torzní	2126,00	2082,86	-2,03
2. ohybový	4641,10	4586,67	-1,17

Tabulka 5.9: Vlastní frekvence příslušné vlastním tvarům s nízkými modálními čísly se vzájemně liší o více než 1 %.

dloužení hřídele a lokální změna jeho tuhosti způsobí změnu poměru hodnot vlastních frekvencí příslušných 1. a 2. ohybovému módu. Změna odsazení je tedy zvolena tak, aby byl zachován poměr z Tab. 5.7.

I přes maximální snahu o dosažení co nejmenších rozdílů mezi modálními vlastnostmi konečněprvkového modelu a modelu sestaveného z Obr. 5.18 pomocí Shaft Modeleru se hodnoty vlastních frekvencí, které přísluší prvním dvěma ohybovým vlastním tvarům kmitu, liší o více než 1 %, což je doloženo v Tab. 5.9. Nejde tedy o zcela ideální shodu. Na dynamické chování rotorové soustavy má však stěžejní vliv ložisková vazba, která silně ovlivňuje její modální vlastnosti, a tak je tento rozdíl akceptovatelný.

AVL EXCITE Power Unit umožňuje každému poddajnému tělesu přiřadit určité tlumicí parametry. V případě popisovaného rotoru je uvažováno frekvenčně závislé proporcionální tlumění dané vztahem

$$\mathbf{B} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}, \quad (5.26)$$

kde koeficienty α a β mohou být určeny pomocí rovností [27]

$$\alpha = \frac{4\pi(d_1 f_1 f_2^2 - d_2 f_2 f_1^2)}{f_2^2 - f_1^2}, \quad \beta = \frac{d_2 f_2 - d_1 f_1}{\pi(f_2^2 - f_1^2)},$$

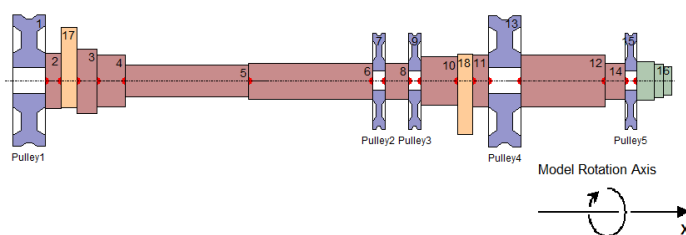
v nichž f_1 , f_2 jsou frekvence v Hz, při nichž poměrný materiálový útlum nabývá hodnot d_1 , d_2 a pro speciální případ $f_1 = f_2$ a $d_1 = d_2$ platí

$$\alpha = 2\pi f_1 d_1, \quad \beta = \frac{d_1}{2\pi f_1}.$$

V popisované úloze je zvoleno $f_1 = 500$ Hz, $f_2 = 2500$ Hz a $d_1 = d_2 = 0,003$, což odpovídá horní mezi materiálového útlumu běžné konstrukční oceli.

Nevývaha rotoru byla modelována dvěma odlišnými způsoby. První varianta spočívala v připojení dvou tuhých těles přímo ke střediskům hmotnosti turbínového a kompresorového kola nelineární vazbou, která silovým přístupem popisovala (téměř) nedeformovatelné spojení nevyvážku a oběžného kola. V druhé variantě byly nevyváhy definovány přímo v Shaft Modeleru. Zde je třeba dbát na to, že přidáním vyšší hmotnosti se změní modální vlastnosti rotoru a tak je při definování nevyváhy důležité vhodně zvolit radiální polohu nevyvážku od osy otáčení.

Na rotor působí kromě odstředivých sil zapříčiněných nevyvážeností také hnací a zátěžné silové účinky. Turbínové kolo je roztáčeno výfukovými plyny, jejichž účinek je možné nahradit harmonickým momentem a konstantní axiální silou, které působí přímo ve středisku hmotnosti kola. Kompresorové kolo stlačuje vzduch vstupující do motoru a je tedy zatíženo harmonickým momentem o jiné amplitudě, než je amplituda momentu působícího na turbínové kolo.



Obrázek 5.18: Model rotoru turbodmychadla v AVL EXCITE Shaft Modeleru. Je zajímavé, že i v Shaft Modeleru je vizualizace rotoru zajištěná topologickou reprezentací modelu a tak rozměry zobrazených prvků lze libovolně měnit, aniž by byla ovlivněna jejich skutečná geometrie.

Plovoucí kroužky ložisek jsou modelovány jako tuhá tělesa s bezrozměrnou hmotností 28,2828, bezrozměrným momentem setrvačnosti k ose otáčení 19,8 a momenty setrvačnosti k příčným osám 15,3465. Hmotnost a momenty setrvačnosti jsou soustředěny do tří uzlů ležících na koncích úsečky bezrozměrné délky 0,7957 a v jejím středu. Víceuzlový model tuhého tělesa je použit na doporučení manuálu [27], protože stav vazby mezi kroužkem a rotorem je počítán pomocí sítě s relativně velkým počtem bodů a soustředění výsledků na straně kroužku do jediného uzlu by nemuselo zajistit správný přenos silových účinků. Protože olejový film v AVL EXCITE přenáší i momenty mají oba kroužky pět stupňů volnosti — zakázán je pouze jejich pohyb v axiálním směru.

Stator je tuhé, nepohyblivé těleso — rám. Uzly, ze kterých se skládá, se nacházejí v místech axiálních a radiálních ložisek, což umožňuje propojení statoru a rotujících částí vazbami.

5.5.2 Popis vazeb

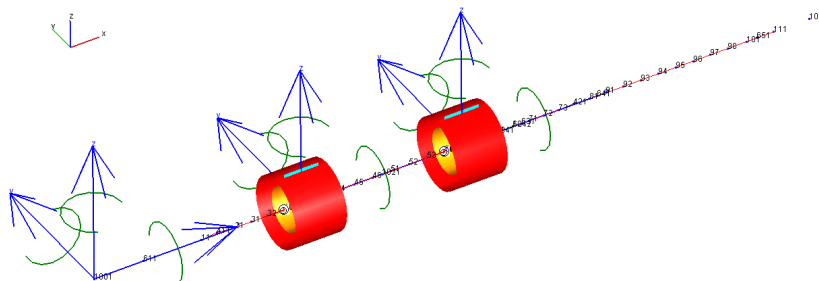
Při výpočtu silových účinků olejových filmů je předpokládáno, že ložisko je plně zatopené mazivem. Toto zjednodušení má velmi malý vliv na kvalitu výsledků a výrazně zrychluje výpočet. Hodnoty přírodního tlaku oleje a okolního tlaku jsou odhadnuty na 3 Pa. Bezrozměrná axiální délka vnitřní plochy kroužku je 0,8013 a jeho vnitřní průměr činí 1,0017. V případě ložiska na straně kompresoru je vnitřní průměr uměle zvětšen na hodnotu 1,01, aby bylo zabráněno případnému kontaktu mezi plochou kroužku a čepem, jehož průměr byl zvětšen během procesu ladění. Vnější plocha kroužku zaujímá výrazně větší plochu — její bezrozměrná axiální délka činí 1,1937 a průměr je 1,5943. Poměr vnější a vnitřní vůle je u ložisek malých a středních motorů obvyklých 5 : 3 [15].

Oba filmy jsou tvořeny standardním olejem SAE 5W-30 o teplotě 100 °C, což zhruba koresponduje s provozní teplotou. Energetickou bilanci, která by teplotu stanovila přesněji, nebylo možné z důvodu nedostatečného množství podkladů do analýzy zahrnout. Sítě o velikosti 12 × 54 (axiální směr × obvodový směr) popisující tlaková pole vnitřních filmů i sítě o velikosti 18 × 54 popisující vnější olejové filmy respektují přítomnost 6 kruhových otvorů o bezrozměrném průměru 0,2, které v radiálním směru vedou skrz oba kroužky, formou okrajových podmínek. Během analýzy je sledován případný vznik kontaktu mezi čepem a kroužkem, resp. kroužkem a státorem a jeho případný vliv je zahrnut do sil přenášených vazbou. Parametry kontaktní úlohy jsou předdefinovány přímo v AVL EXCITE a odpovídají kontaktu dvou kovových součástí o drsnosti $R_q = 1 \mu\text{m}$ [27].

Axiální ložisko je popsáno nemodifikovanou nelineární axiální vazbou a spojuje dva uzly

rotoru nacházející se v místě axiálního ložiska se dvěma odpovídajícími uzly na statoru.

Ve chvíli, kdy jsou popsána všechna tělesa a definovány veškeré vazby, je možné sestavit geometrický model, viz Obr. 5.19, definovat zátěžné účinky a počáteční podmínky a provést jeho kinematický test. Úspěšný kinematický test je dobrým indikátorem funkčnosti modelu.



Obrázek 5.19: Výsledný geometrický model turbodmychadla (varianta b)). Modré souřadnicové systémy jsou pevně spojeny s pohyblivými tělesy — rotorem a plovoucími kroužky — a popisují jejich polohu a natočení. Červené a oranžové plochy znázorňují výpočetní síť vnějších a vnitřních olejových filmů.

5.6 Příprava dat pro porovnání modelů

Srovnání výsledků analýz dynamických vlastností rotoru turbodmychadla provedených pomocí AVL EXCITE Power Unit a programu FEMROT rozšířeného o uživatelskou funkci zahrnující vliv ložiskových kroužků naráží na problémy přímo vyplývající z filozofie uvedených programů. Zatímco FEMROT je přímo uzpůsoben pro výpočty úloh rotordynamiky, které jsou rozebrány v kapitole 3, AVL EXCITE Power Unit neumožňuje přímý výpočet kritických otáček ani s jeho pomocí není možné stanovit funkce popisující hodnotu tlumicích a tuhostních parametrů olejových filmů v závislosti na úhlové rychlosti. Na druhou stranu FEMROT pracuje s předem danými parametry vazeb a nenabízí analýzu ložiskové vůle, vyosení čepu a tribologických vlastností olejového filmu.

Jednou z mála možností, která tak umožňuje porovnání obou modelů, je sestavení Campbellova diagramu. Zatímco ve FEMROTu je Campbellův diagram možno vykreslit po provedení určitého počtu modálních analýz, v AVL EXCITE Power Unit je nutné provést simulaci rozběhu rotoru a z časového průběhu odezvy nabrat dostatečné množství vzorků, z nichž je možné pomocí rychlé Fourierovy transformace (FFT) získat frekvenční spektra odezvy a tato spektra uspořádat do konturového grafu.

Výsledky analýz v AVL EXCITE Power Unit jsou implicitně ukládány v závislosti na jednotce pootočení a analogicky je zadán i iterační krok výpočtu. Výstupem ale může být i závislost dynamických a tribologických vlastností modelu na čase, nebo na frekvenci. Pro vyhodnocení rozběhu je tedy nutné nastavit výstup tak, aby závisel na čase a časový krok Δt byl konstantní a zároveň splňoval Nyquist-Shannonův teorém [24]

$$\Delta t \leq \frac{1}{2 f_{max}}, \quad (5.27)$$

ve kterém f_{max} je maximální frekvence ve spektru, i pro frekvence kolem 5000 Hz. Takové frekvenční pásmo je dostatečně široké na to, aby se v něm nacházely případné rezonanční vrcholy alespoň jednoho z druhých ohybových módů.

6 Závěr

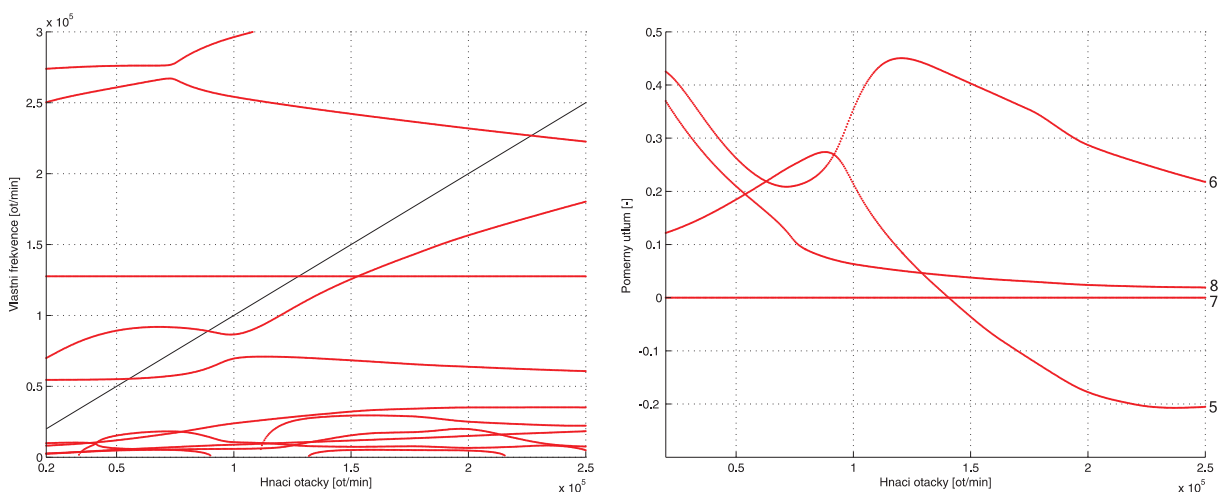
V závěrečné kapitole jsou prezentovány výsledky analýzy dynamické vlastností modelovaného turbodmychadla, jsou nastíněny rozdíly mezi výsledky získanými programovými prostředky FEMROT a AVL EXCITE a stručně rozebrány jejich možné příčiny. V samotném závěru je diskutováno splnění cílů diplomové práce, jež byly definovány v podkapitole 1.2.

6.1 Výsledky analýzy v programu FEMROT

Rotorová soustava, jejíž model je detailně rozebrán v předchozí kapitole, byla analyzována v intervalu 20000 – 250000 ot/min. V tomto intervalu leží provozní otáčky turbodmychadla a je pokryto i široké spektrum stavů, do kterých se rotor turbodmychadla dostane při rozběhu a doběhu. Pásmo 0 – 20000 ot/min není do analýzy zahrnuto, protože v dodaných podkladech nejsou uvedena potřebná data.

V pásmu 20000 – 250000 ot/min se nachází celkem 8 kritických otáček¹, což bylo zjištěno iteračním algoritmem, jehož výsledky jsou uvedeny v Tab. 6.1. Čtyři nulová vlastní čísla, resp. osm po přechodu do stavového prostoru, nebyla při analýze kritických otáček brána v úvahu, aby byla urychlena konvergence iteračního procesu. Nulová vlastní čísla se ve vý-

¹Zde je pojem kritických otáček chápán jako jakýkoliv stav, ve kterém se nominální úhlová rychlost rotoru rovná jedné z jeho vlastních frekvencí bez ohledu na to, zdali je provozní stav doprovázen rezonančním jevem či nikoliv.



Obrázek 6.1: Z Campbellova diagramu s náběhovou přímkou (vlevo) i ze znázornění průběhu poměrných modálních útlumů (vpravo), které přísluší 5. – 8. kritickému tvaru, je zřejmé, že dynamické vlastnosti rotorové soustavy výrazně závisí na nominální úhlové rychlosti rotoru. Příslušnost útlumu k danému tvaru je označena číslem na pravé straně grafu.

Pořadí kritických otáček [-]	Frekvence [ot/min]	Frekvence [Hz]	Poměrný útlum [-]
1	1188,2	19,80	0,128
2	1697,3	28,29	0,048
3	7226,5	120,44	-0,109
4	9301,0	155,02	0,751
5	55293,1	921,55	0,198
6	88984,6	1483,08	0,250
7	127560,8	2126,01	0,000
8	226811,0	3780,18	0,021
9	672565,3	11209,42	0,008

Tabulka 6.1: Seznam prvních devíti kritických otáček a příslušných modálních útlumů získaných pomocí vztahu (3.12). Prvních 8 kritických tvarů je zobrazeno na Obr. 6.2, 9. kritický tvar vizualizován není, protože leží mimo analyzovaný interval otáček.

sledcích modální analýzy objevila kvůli chybějícím vazbám mezi rotorem a statorem v axiálním směru a v rotačním směru kolem všech tří os.

Existence prvních čtyř kritických tvarů kmitu zobrazených na Obr. 6.2 přímo vyplývá z vlastností použitých ložisek [15]. Jde o tvary, pro jejichž charakter je dominantní poddajnost olejových filmů, která dovoluje rotoru kmitat jako tuhému tělesu. Pokud by byla použita ekvivalentní náhrada dvou ložiskových vazeb jedinou, tyto tvary by nebylo možné určit.

Kritické tvary kmitu s pořadovými čísly 5, 6 a 8 mají charakter ohybového kmitání. Z Campbellova diagramu Obr. 6.1 je zřejmé, že vlivem gyroskopického efektu se hodnoty vlastních frekvencí 1. ohybového módu značně rozcházejí a v určitých případech může dojít k tomu, že se ani jedna z funkcí popisující závislost vlastních frekvencí 1. ohybového módu na úhlové rychlosti rotoru neprotíná s náběhovou přímkou [15].

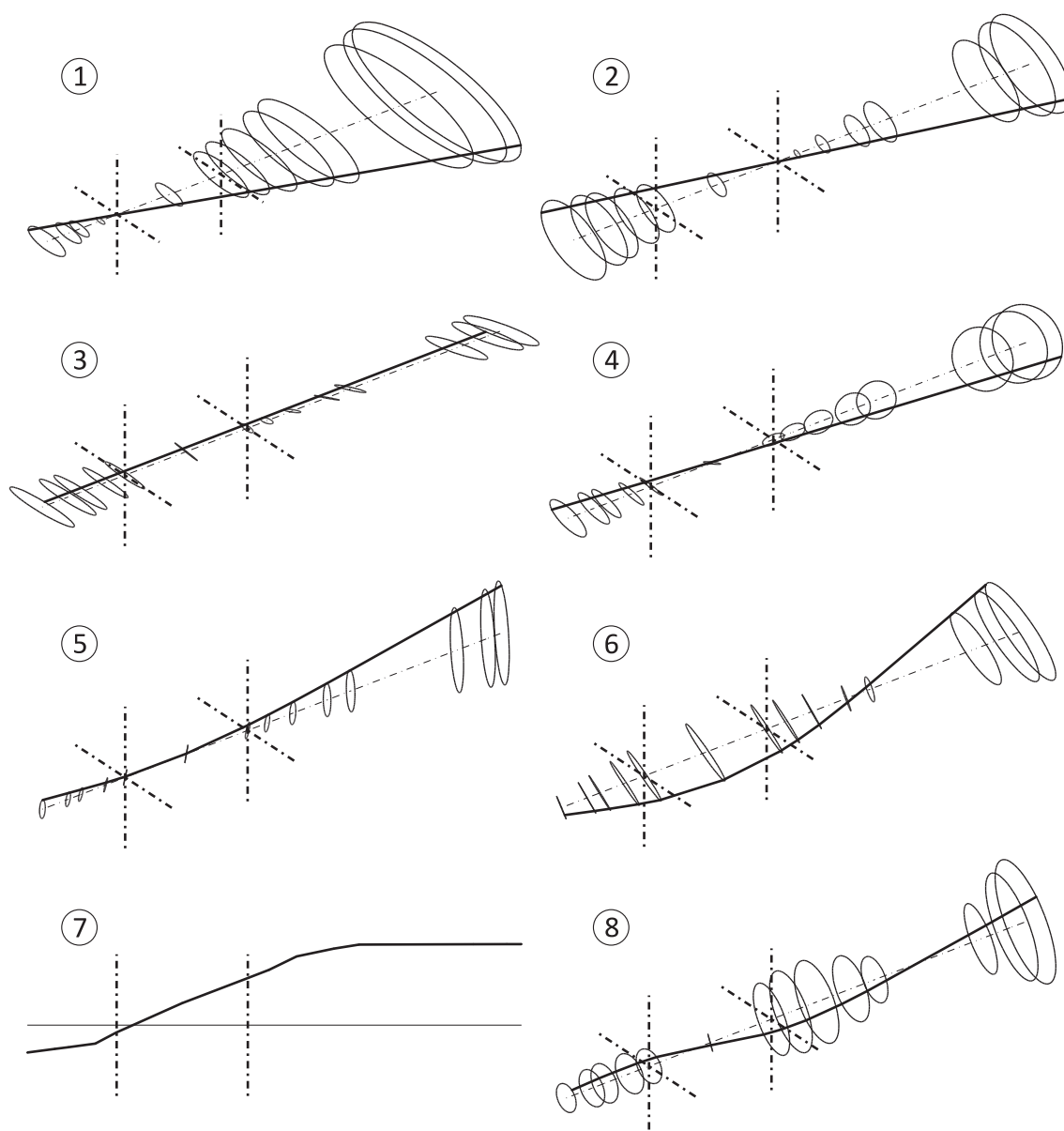
Sedmý kritický tvar má charakter torzního kmitu a jako takový není pro provoz turbodmychadla nebezpečný. Nebezpečné by neměly být ani 8. kritické otáčky a to přestože tyto leží v blízkosti provozních otáček turbodmychadla. Jde totiž o otáčky protiběžné precese a ty se v odezvě projevují málo, pokud se střednice rotoru pohybuje po trajektoriích blízkých kruhu [15], což je podle Obr. 6.2 případ 8. kritického tvaru.

Problémem ale mohou být jakékoliv vlastní tvary, jimž přísluší záporný poměrný modální útlum. Z pravého grafu na Obr. 6.1 je patrné, že jedním z takových tvarů je i 1. ohybový mód v pásmu cca 140000 ot/min a výše a z Tab. 6.1 je možné vyčíst, že záporný poměrný modální útlum má i 3. kritický tvar. Záporné poměrné modální útlumy mohou indikovat dvě různé skutečnosti a to chybu ve vstupních datech nebo možnou nestabilitu rotoru. Teoreticky může za nesprávnými výsledky stát i chyba v odvození modelu či problém v kódu programu.

Ukazuje-li výpočet na možnou nestabilitu, je důležité výsledky ověřit. Přínosná nemusí být pouze kontrola dat, ale také experiment či provedení stejné analýzy v jiném programu nebo odlišným matematickým modelem, je-li to možné.

6.2 Výsledky analýzy v AVL EXCITE Power Unit

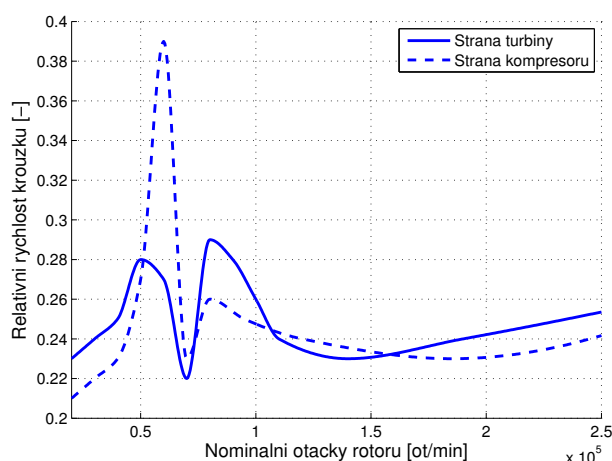
První analýzy provedené v AVL EXCITE sloužily pouze pro stanovení určitých parametrů modelu, jmenovitě ložiskové vůle, nevývahy, počáteční úhlové rychlosti kroužků, poměru



Obrázek 6.2: Vizualizace prvních 8 kritických tvarů kmitu. Kromě 7. kritického tvaru jsou všechny nalezené tvary ohybové. U ohybových tvarů jsou vykresleny orbity a průhybová čára. U torzního tvaru je vykreslen průběh torzní modální souřadnice. Čerchované kříže vyznačují polohu ložisek.

amplitud hnacího a zátěžného momentu a iteračního kroku. Byly rovněž porovnávány oba rozdílné způsoby modelování nevyváhy. Na základě těchto předběžných analýz bylo rozhodnuto, že rozběh rotoru bude počítán pouze na modelu *b*) z Obr. 5.17, v němž jsou nevyváhy součástí rotoru. Tuhé vazby vázající nevyváhu k rotoru v modelu *a*) totiž značně prodlužovaly výpočetní čas a výsledky obou přístupů byly srovnatelné. Také se ukázalo, že poměrná rychlost kroužků vypočtená pomocí AVL EXCITE Power Unit neodpovídá poměrné úhlové rychlosti uvedené v podkladových materiálech, viz Obr. 5.15 a 6.3.

Aby byl výpočet co nejkratší, byl poměr hnacího a zátěžného momentu zvolen tak, aby



Obrázek 6.3: Poměrná rychlost kroužků vypočtená pomocí AVL EXCITE Power Unit zobrazená jako funkce nominální úhlové rychlosti rotoru. Výrazné změny hodnot poměrné rychlosti se nacházejí přibližně v místě kritických otáček od 1. ohybového tvaru.

rozběh z 50000 ot/min na cca 250000 ot/min trval 1 s. Do souborů s výsledky byly ukládány absolutní pohyby plovoucích kroužků, absolutní a relativní² pohyby uzlů v ložiscích a střediscích hmotnosti oběžných kol, síly ve vazbách a základní tribologické vlastnosti olejových filmů v časové oblasti a obdobné údaje ve frekvenční oblasti. Při nabírání vzorků bylo použito Hannovo okno, které je vhodné pro analýzu vibrací rotačních strojů [25].

Samotný výpočet rozběhu trval zhruba 9 hodin procesorového času (v případě modelu b) z Obr. 5.17 byl řešičem procesorový čas odhadnut na 105 hodin). Zde je nutno poznamenat, že veškeré výpočty byly prováděny na notebooku HP EliteBook 8570p se systémem Windows 7 Professional 64bit, s procesorem Intel® Core™ i5 3360M 4×CPU @ 2,80 GHz a s 4,00 GB RAM. Výpočtové časy uvedené v této podkapitole se bez výjimky vztahují k popsané sestavě a jsou přečteny na jedno procesorové jádro, což je důležité, neboť AVL EXCITE nativně podporuje paralelní výpočty.

Výsledky analýzy rozběhu nicméně nebyly použitelné kvůli nedostatečnému vzorkování. Vzhledem k zákonu (5.27) by totiž bylo potřeba nabrat alespoň 10000 vzorků, aby bylo možné obdržet spektrum odezvy v pásmu do 5000 Hz v každém analyzovaném stavu, a zároveň by během nabírání vzorků neměly příliš růst nominální otáčky rotoru. Tato cesta tedy byla kvůli předpokládané časové náročnosti opuštěna.

Namísto toho bylo analyzováno dynamické chování rotorové soustavy během 50 rotačních cyklů při počátečních otáčkách 20000 – 250000 ot/min s krokem 10000 ot/min. Poměr amplitud hnacího a zátěžného momentu byl 1,05 : 1, což zajistilo, že se soustava po několika otáčkách ovlivněných numerickou nestabilitou ustálila, příp. její úhlová rychlost rostla jen málo. Výsledné amplitudy vibrační odezvy v uzlu ve středu ložiska na straně turbíny a ve středisku hmotnosti kompresorového kola jsou ukázány na Obr. 6.4 – 6.7. Výpočtový čas analýz kolísal mezi 24 a 55 minutami, přičemž zhruba platilo, že s vyššími počátečními otáčkami délka výpočtu rostla. Dalších 5 minut zabralo zpracování výsledků, tedy provedení FFT, převod variabilního časového korku na konstantní a vyhodnocení tribologických vlastností ložisek.

Z Obr. 6.4 – 6.7 je patrné, že nejvýraznější frekvenční složka odezvy je tzv. *1. otáčková*

²Jedná se o relativní pohyb uzlu vůči souřadnicovému systému pevně spojenému s tělesem, jehož orientace je patrná na Obr. 5.19.

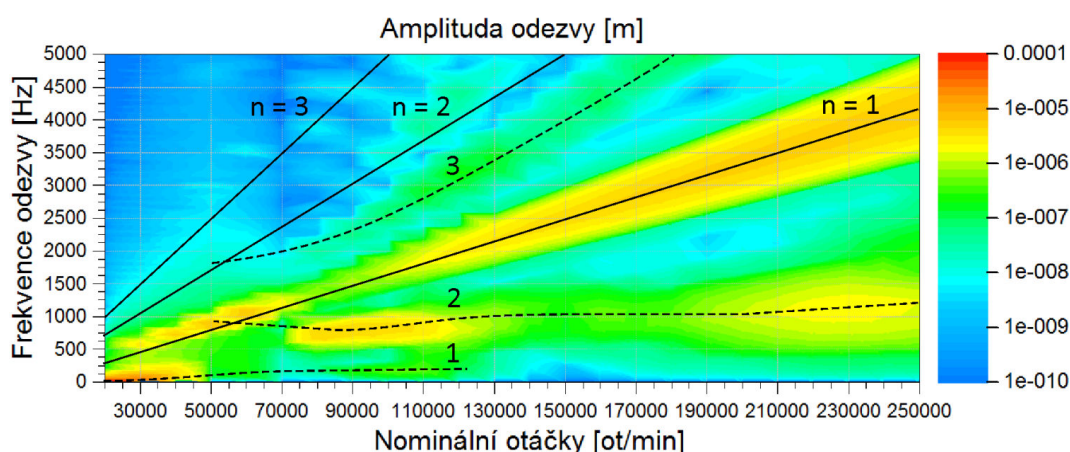
složka označená na obrázcích $n = 1$, která je zapříčiněná nevyváhou a její frekvence odpovídá frekvenci otáčení rotoru. 2. a 3. otáčkové složky odezvy, označené $n = 2$ a $n = 3$ jsou jen málo patrné, přestože stupnice konturových grafů je logaritmická. Složka o frekvenci rovné polovině frekvence rotace není přítomná vůbec. Kolem některých částí otáčkových složek jsou patrné výběžky tvořící jakési hřebeny. Jde o tzv. spektrální průsak, který je způsoben nedostatečným počtem spektrálních čar [25]. V AVL EXCITE jde o chybu, kterou uživatel nemůže příliš ovlivnit, neboť počet spektrálních čar ve spektru není možné v současné verzi programu nastavit.

V pásmu hnacích otáček 20000 – cca 140000 ot/min je v odezvě přítomná složka vynesena čárkovanou linií 1 o frekvenci, která postupně stoupá až na 100 Hz. Tato složka odezvy má při nízkých nominálních otáčkách rotoru dokonce vyšší amplitudu než 1. otáčková a patrně souvisí s vlastnostmi ložisek. V Tab. 6.1 této složce odpovídají jedny nebo více kritických otáček z prvních čtyřicet.

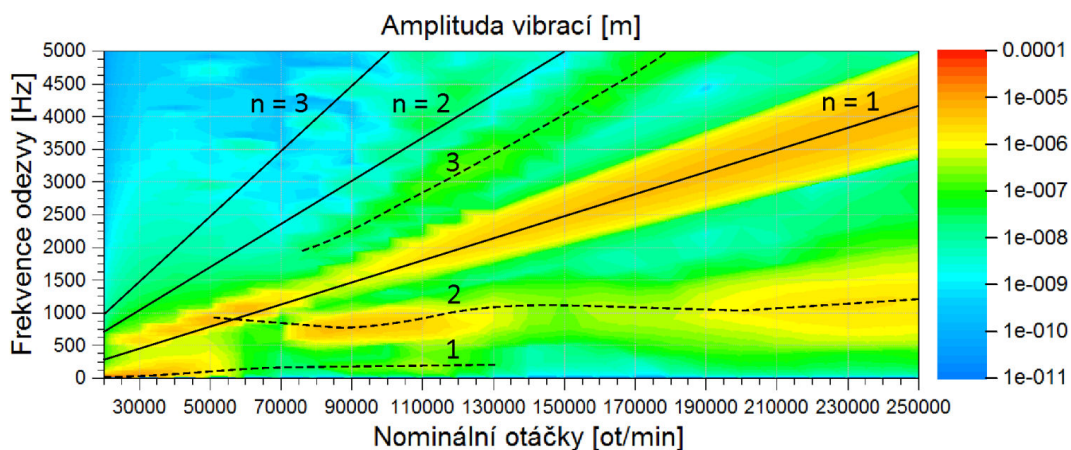
Takřka v celém sledovaném rozmezí hnacích otáček se ve spektru odezvy nachází výrazná špička s frekvencí oscilující kolem hodnoty 1000 Hz označená čárkovanou křivkou 2. Bez pochyby jde o 1. ohybový vlastní tvar, který podle pravého grafu z Obr. 6.1 při určitých nominálních otáčkách rotoru ztrácí stabilitu. Ztráta stability nebyla právě popisovanou analýzou potvrzena, ale byl zaznamenána zvýšená hladina vibrací v horizontálním směru v pásmu hnacích otáček nad 230000 ot/min, viz Obr. 6.6. Tato skutečnost ukazuje na to, že parametry ložisek z Obr. 5.16 jsou špatně určeny nebo nevhodně interpretovány — např. transformační vztah (5.25) může být špatně odvozený.

Mezi 1. a 2. otáčkovou složkou se nachází nevýrazný vrchol vykreslený pomocí čárkované křivky 3, který by teoreticky mohl náležet sdruženému 1. ohybovému módu. To je možné za předpokladu, že se funkce, která popisuje jeho závislost na úhlové rychlosti rotoru, neprotíná s náběhovou přímkou. Jde o další zásadní rozdíl mezi výsledky prezentovanými v této a předchozí podkapitole.

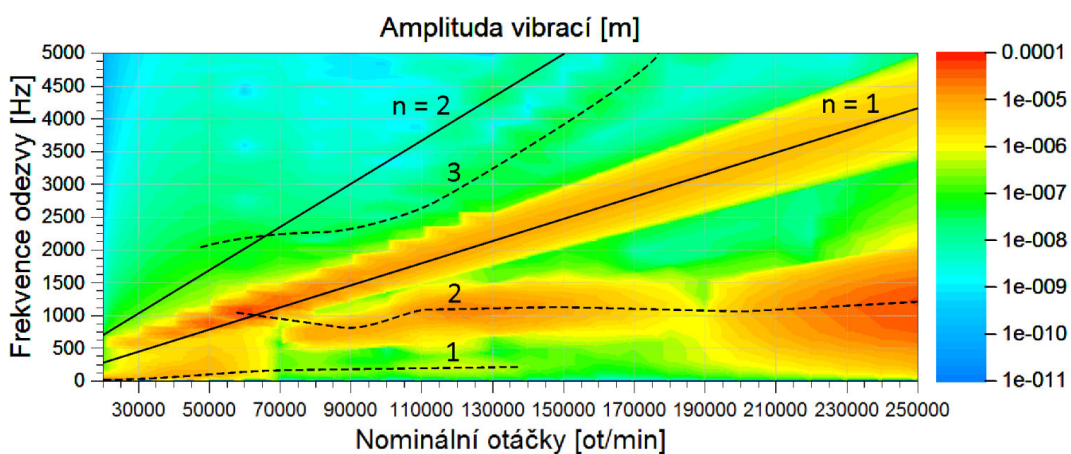
Další analýza odezvy je stížená malým počtem spektrálních čar a relativně vysokým krokem hnacích otáček rotoru. I tak lze konstatovat, že se uvedené výsledky liší kvůli reprezentaci ložiskové vazby v modelu a také, že dodané parametry olejových filmů se dobře neshodují se skutečnými parametry.



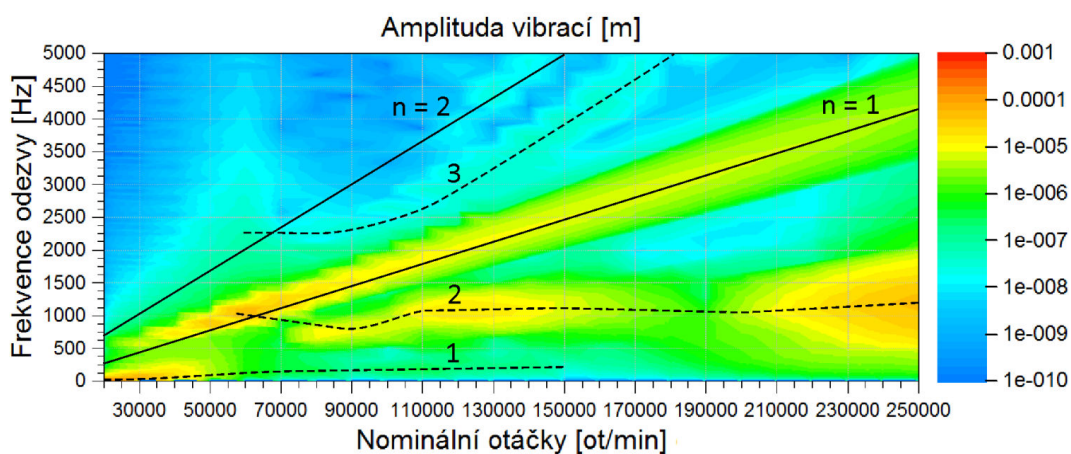
Obrázek 6.4: Spektra absolutní odezvy v horizontálním směru ve středu ložiska na straně turbíny vykreslená v závislosti na nominálních otáčkách rotoru turbodmychadla.



Obrázek 6.5: Spektra absolutní odezvy ve vertikálním směru ve středu ložiska na straně turbíny vykreslená v závislosti na nominálních otáčkách rotoru turbodmychadla.



Obrázek 6.6: Spektra absolutní odezvy v horizontálním směru ve středisku hmotnosti kompresorového kola vykreslená v závislosti na nominálních otáčkách rotoru turbodmychadla.



Obrázek 6.7: Spektra absolutní odezvy ve vertikálním směru ve středisku hmotnosti kompresorového kola vykreslená v závislosti na nominálních otáčkách rotoru turbodmychadla.

6.3 Zhodnocení výstupů diplomové práce

Odvození modelu rotoru

V kapitole 2 byl odvozen model hřídele z Kelvin-Voigtova materiálu se spojitě rozloženou hmotností, který je možné doplnit o přídavná tuhá tělesa, nehmotné viskoelastické členy a ložiskového vazby předpokládající, že axiální délka modelovaného ložiska je řádově menší než délka rotoru. Bylo rovněž vysvětleno sestavení globálních matic modelu a příslušné soustavy obyčejných diferenciálních rovnic, která se kromě matic hmotnosti, tlumení a tuhosti sestává z cirkulační matice a matice gyroskopických účinků.

V následující kapitole byly rozebrány základní úlohy rotordynamiky: modální analýza, analýza kritických otáček a odezva na harmonické buzení. Dále byl nastíněn základní způsob výpočtu přechodové odezvy.

Sestavení vlastního výpočtového softwaru

Představené úlohy byly algoritmovány a společně s odvozeným modelem tvoří matematické pozadí softwaru FEMROT 1.2.3. naprogramovaného v prostředí MATLAB, který je stručně představen v kapitole 4. Současná verze programu zabírá včetně komentářů téměř 9000 programových řádků, na kterých se nachází přes 365000 znaků. Takto rozsáhlý kód nemůže být součástí tištěných příloh této práce a vzhledem k plánovanému využití programu v komerční sféře nebyla uvolněna ani jeho elektronická verze.

Experimentální modální analýza lehkého rotoru

V podkapitole 5.2 je představena speciální experimentální modální analýza, která pro stanovení hodnot vlastních frekvencí nevyužívá vibrační, ale akustickou odezvu. Právě prezentace filozofie zkoušky a detailní popis její realizace a vyhodnocení naměřených dat je jedním z důležitých výstupů této práce.

Uvedená zkouška byla realizována na konkrétním rotoru turbodmychadla a v Tab. 5.3 jsou prezentovány její výsledky a odhadnuty nejistoty měření.

Speciální experimentální modální analýzu nebylo možné porovnat se standardní experimentální modální analýzou, protože připojení jakéhokoliv snímače na zkoušené turbodmychadlo značně změnilo modální vlastnosti součásti a to kvůli vlivu kabelu, který se nepodařilo odstranit. Oba přístupy by nicméně bylo možné srovnat při zkoušení lehkého tělesa upnutého na hmotném přípravku, např. hliníkové kompresorové lopatky držené upínacími kameny.

Ladění parametrů modelu podle výsledků experimentu

V podkapitole 5.3 bylo ukázáno dvoukrokové ladění rotoru turbodmychadla na dvě první vlastní frekvence příslušné ohybovým módům, které respektuje fakt, že se rotor skládá z pevné části — hřídele a oběžného kola na straně turbíny — a přídavných těles. Dále byl navržen způsob volby ladicích parametrů a intervalů, ve kterých jsou hledány jejich hodnoty.

Dvoukroková metoda byla použita z důvodu, že přidáním kompresorového kola a rozpěrky s přípravou pro axiální ložisko a následným utažením samojistné matice je hřídel pod rozpěrkou a kolem předeprnut a ohybová tuhost je pak realizována nejen hřídelem, ale i přidanými tělesy. Nastává tak situace z Obr. 5.10. V práci je ukázáno, jak v takovém případě postupovat aniž by byla změněna celková hmotnost rotorové soustavy.

Porovnání výsledků vlastní analýzy s výsledky získanými programem AVL EXCITE

Prezentací výsledků analýzy pomocí softwaru FEMROT a výsledků získanými programem AVL EXCITE se zabývá první část této kapitoly. Ukazuje se, že i přes rozdílné modely rotorů, viz podkapitola 4.3, a odlišné přístupy k sestavení globálních matic modelu — srovnej (3.3) s (4.6) — si výsledky určitým způsobem odpovídají. Největší rozdíly jsou pravděpodobně způsobeny nesprávně určenými parametry olejových filmů, které byly použity při analýze pomocí FEMROTu. Je také zřejmé, že největší nevýhoda FEMROTu tkví právě v závislosti na datech z externího dokumentu či softwaru, která jsou zatížena neznámou nejistotou.

Potvrzuje se rovněž, že dynamické vlastnosti turbodmychadla jsou určeny především vlastnostmi jeho ložisek a drobné odchylky v modálních vlastnostech rotoru nemají na výsledky zásadní vliv.

Úvod do problémů nelineární hydrodynamiky

Přestože v oddílu 2.2.4 byly ukázány základní nelineární vztahy popisující rozložení tlaku v olejovém filmu kluzného ložiska a jeho mechanické vlastnosti a další teorie byla diskutována v podkapitole 4.1, byly pro dynamickou analýzu turbodmychadla pomocí programu FEMROT použity parametry olejových filmů z dodaných podkladů.

Součástí této práce je alespoň představení jednoduchého způsobu modelování turbodmychadlových ložisek v podkapitole 5.4, který respektuje vliv plovoucích kroužků a za předpokladu, že jsou dobře určeny vlastnosti olejových filmů, dává dobré výsledky.

Literatura

- [1] ALTMAN, Yair M. *Undocumented Matlab* [online]. [Ganey Tikva (Izrael)], © 2009-2013 [cit. 2013-05-16]. Dostupné z: <http://www.undocumentedmatlab.com/>
- [2] BYRTUS, Miroslav, Michal HAJŽMAN a Vladimír ZEMAN. *Dynamika rotujících soustav*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2010. ISBN 978-80-7043-953-1.
- [3] BULÍN, Radek. *Optimalizace pomocí částicových hejn v problémech mechaniky*. Plzeň, 2011. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/stag?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=43601>. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [4] DUNKERLEY, Stanley. On the Whirling and Vibration of Shafts. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A (1887-1895)*. London (Anglie): Royal Society, 14. 8. 1894, 279 – 360. Journal-volume: 185. DOI: 10.1098/rsta.1894.0008. Dostupné z: <http://www.archive.org/details/philtrans08637228>
- [5] DUPAL, Jan. *Výpočtové metody mechaniky*. 3. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. ISBN 80-7043-339-6.
- [6] DYK, Štěpán. *Dynamika Lavalova a Stodola-Greenova rotoru*. Plzeň, 2011. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/stag?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=43603>. Bakalářská práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [7] GASCH, Robert a Herbert PFÜTZNER. *Dynamika rotorů*. Praha: SNTL, 1980. Typové číslo L12-B3-IV-41/22685.
- [8] HRON, Karel a Pavla KUNDEROVÁ. *Základy počtu pravděpodobnosti a metod matematické statistiky*. Olomouc: Vydavatelství Univerzity Palackého, 2013. ISBN 978-80-244-3396-7.
- [9] IRRETIER, Horst. Mathematical foundations of experimental modal analysis in rotor dynamics. In: *Mechanical Systems and Signal Processing*. 1999, XXIII. Nr. 2., pp. 183-191.
- [10] PŘIKRYL, Petr a Marek BRANDNER. *Numerické metody II*. Plzeň: Západočeská univerzita, 2000. ISBN 80-7082-699-1.
- [11] KRÄMER, Erwin. *Dynamics of Rotors and Foundations*. Berlin (Německo): Springer-Verlag, 1993. ISBN 0-387-55725-3.
- [12] KŘEN, Jiří a Josef ROSENBERG. *Mechanika kontinua*. 2. upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2002. ISBN 80-7082-908-7.
- [13] KURUC, Tomáš. *Analýza generátorových rotorů*. Plzeň, 2008. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/stag?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=23354>. Dizertační práce. Západočeská univerzita v Plzni.

-
- [14] MUSZYŃSKA, Agnieszka. *Rotordynamics*. Boca Raton (Florida): Taylor & Francis, 2005. ISBN 0-8247-2399-6.
- [15] NGUYEN-SCHÄFER, Hun. *Rotordynamics of Automotive Turbochargers: Linear and Nonlinear Rotordynamics, Bearing Design, Rotor Balancing*. Berlin (Německo): Springer-Verlag, 2012. ISBN 978-3-642-27517-3.
- [16] NOVOTNÝ, Jiří. *Anglicko-český terminologický slovník mechaniky strojů* [online]. [Praha]: Český národní komitét IFToMM, Česká společnost pro mechaniku, © 2009 [cit. 2013-03-27]. Dostupné z: <http://slovnikiftomm.it.cas.cz>
- [17] O'HAVER, Thomas C. *Signal Processing Tools for Scientists and Engineers* [online]. College Park (Maryland), © 2006-2013 [cit. 2013-05-16]. Dostupné z: <http://terpconnect.umd.edu/~toh/spectrum/SignalProcessingTools.html>
- [18] ROSENBERG, Josef. *Teoretická mechanika*. 2. upr. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2003. ISBN 80-7082-938-9.
- [19] TIWARI, Rajiv. *A Brief History and State of the Art of Rotor Dynamics* [online]. Guwahati (Indie): Indian Institute of Technology, 2008 [cit. 2013-03-26]. Dostupné z: <http://www.iitg.ernet.in/engfac/rtiwari/resume/rtiwari01.pdf>
- [20] TYMOSHENKO, Stephen P. On the Correction Factor for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibrations of Bars of Uniform Cross-section. In: *Philosophical Magazine*. 1921, č. 41, s. 744-746.
- [21] VLAS, Richard. *Problémy stability a existence periodického řešení vibrací nesymetrických rotorů*. Plzeň, 2012. Dostupné z: <https://portal.zcu.cz/stag?urlid=prohlizeni-prace-detail&praceIdno=46943>. Diplomová práce. Západočeská univerzita v Plzni.
- [22] ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. *Kmitání mechanických soustav*. 2. vyd. Plzeň: Západočeská univerzita, 2004. SBN 80-7043-337-X.
- [23] ZEMAN, Vladimír a Zdeněk HLAVÁČ. Modelling of the Turbocharger Vibrations. In: *19th International Conference Engineering Mechanics 2013: Conference Proceedings* [CD-ROM]. Igor Zolotarev. Praha: Institute of Thermomechanics AS CR, 2013, 673 – 682. ISBN 978-80-87012-47-5.
- [24] *MathWorks – MATLAB and Simulink for Technical Computing: Documentation Center* [online]. Natick (Massachusetts): MathWorks © 1984-2013 [cit. 2013-05-02]. Dostupné z: <http://www.mathworks.com/help/matlab/index.html>
- [25] PULSE Help. In: *Brüel & Kjær – PULSE LabShop Version 15.1.0.15* [software]. [Nærum (Dánsko)]: Brüel & Kjær Sound & Vibration Measurement A/S, 8. 11. 2010.
- [26] Rotordynamics. In: *Wikipedia: the free encyclopedia* [online]. San Francisco (Kalifornie): Wikimedia Foundation, 2001- [cit. 2013-03-28]. Dostupné z: <http://en.wikipedia.org/wiki/Rotordynamics>
- [27] Software Documentation. In: *AVL EXCITE Power Unit v2013* [software]. [Graz (Rakousko)]: AVL Group, 25. 1. 2013.