

Západočeská univerzita v Plzni

FAKULTA PEDAGOGICKÁ

Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy

JORDANŮV TVAR MATICE

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Radka Antošová

Přírodovědná studia, Matematická studia

Vedoucí práce: *doc. RNDr. Jaroslav Hora, CSc.*

Plzeň 2013

Prohlašuji, že jsem bakalářskou práci vypracovala samostatně
s použitím uvedené literatury a zdrojů informací.

Plzeň 25. února 2013

.....

vlastnoruční podpis

Děkuji mému vedoucímu bakalářské práce doc. RNDr. Jaroslavu Horovi, CSc.,
za jeho cenné rady, připomínky a metodické vedení práce.

Obsah:

ÚVOD	6
1 ČTVERCOVÉ MATICE NAD TĚLESEM.....	8
1.1. TRANSPONOVÁNÍ MATIC	10
1.2. OPERACE S MATICEMI.....	11
1.3. HODNOST MATICE.....	13
1.4. DETERMINANT A SUBDETERMINANT	14
1.5. INVERTIBILITA A INVERZNÍ MATICE	17
2 CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM ČTVERCOVÉ MATICE NAD TĚLESEM T....	20
3 PODOBNOST MATIC	25
3.1. METODA ZJIŠTĚNÍ PODOBNOSTI MATIC.	26
4 JORDANŮV KANONICKÝ TVAR MATICE	30
4.1. DIAGONALIZOVATELNOST MATICE	32
4.2. METODA NALEZENÍ JORDANOVA KANONICKÉHO TVARU A TRANSFORMAČNÍ MATICE T.	32
4.3. ZOBECNĚNÉ VLASTNÍ VEKTORY	37
4.4. REÁLNÁ JORDANOVA MATICE.....	43
4.5. ZOBECNĚNÉ VLASTNÍ VEKTORY A REÁLNÁ MATICE J_R	48
ZÁVĚR.....	52
RESUMÉ.....	53
SEZNAM LITERATURY A INTERNETOVÝCH ZDROJŮ.....	54
SEZNAM OBRÁZKŮ.....	55

Úvod

Již v 18. století se zabývali astronomové, fyzici a matematici problematikou nebeské mechaniky, jejíž matematické vyjádření vedlo na soustavy lineárních diferenciálních rovnic. Při řešení těchto soustav hrají důležitou roli charakteristický polynom, vlastní čísla, k nim příslušné vlastní vektory. S touto důležitou částí teorie matic jsou úzce spjaty kanonické tvary.

Jedním z těchto kanonických tvarů je rovněž Jordanův tvar matice, o kterém pojednává tato bakalářská práce. V druhé polovině 19. století se vedle C. M. E. Jordana tomuto problému věnovali další významní matematici jako K. T. Weierstrass, L. Kronecker, ale také český matematik Eduard Weyr. Problematika charakteristické rovnice a kanonických tvarů se stala důležitou součástí teorie matic, která se začala rozvíjet v 20. století. Dnes pojmy charakteristického polynomu a vlastních čísel a kanonického tvaru matice, pomocí nichž se řeší soustavy lineárních diferenciálních rovnic, mají uplatnění v mnoha vědních oborech, např. fyzice a kybernetice.

Tato bakalářská práce je rozdělena do čtyř kapitol, které jsou pro přehlednost členěné podkapitolami. První kapitola pojednává o čtvercových maticích nad tělesem, které jsou předmětem této práce. V tomto oddílu jsou definovány základní pojmy a operace maticového počtu. V podkapitolách 1.1 až 1.3 jsou definice a věty týkající se matic spíše připomenuty, a proto zde není detailně ukázána např. Gaussova eliminační metoda, anebo její užití při řešení soustav lineárních rovnic. Přestože značná část je vymezena pro matice nad tělesem T typu (m, n) , všechny příklady se týkají pouze čtvercových matic řádu n .

Druhá kapitola, která je nazvaná Charakteristický polynom čtvercové matice nad tělesem T , se věnuje určení tohoto polynomu, výpočtu jeho kořenů, vlastních čísel, a k nim příslušných (vlastních) vektorů.

Tyto pojmy jsou zásadní pro pochopení tématu této bakalářské práce. Příklady jsou seřazeny podle obtížnosti a doplněny pro porovnání o výpočty matematického programu Mathematica[®] 7. Podobnosti matic se věnuje třetí kapitola. Podobnost matic se již úzce dotýká problematiky kanonických tvarů, mezi něž patří také Jordanova matice, neboť čtvercová matice A nad tělesem T má Jordanův kanonický tvar, jestliže existuje matice J taková, že matice A a J jsou podobné.

O samotném Jordanovu tvaru matice pojednává poslední čtvrtá kapitola. Neodmyslitelnou součástí algoritmu pro výpočet Jordanovy matice je nalezení transformační matice \mathbf{T} složené z vlastních vektorů. S otázkou lineární nezávislosti vlastních vektorů souvisí další vlastnost Jordanova tvaru matice, diagonalizovatelnost a pojem zobecněných vlastních vektorů. Příklady v této kapitole jsou uspořádány podle jednotlivých podkapitol a obtížnosti. Rovněž počítačové výpočty, které příklady doplňují, obsahují postupně užitečné příkazy. Většina příkladů počítá s čtvercovými maticemi řádu 3 nad tělesem \mathbb{C} .

1 Čtvercové matice nad tělesem.

Za zrod teorie matic můžeme považovat zveřejnění Cayleyova článku *A memoir on the theory of matrices* v časopise *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* roku 1858. Ve své slavné práci charakterizoval Arthur Cayley matice jako *a set of quantities arranged in the form of a square* (soubor hodnot uspořádaných ve tvaru čtverce), zavedl termín *matrix* (mn. číslo *matrices*) a téměř současný symbol – kulaté závorky u prvního řádku, které pokračují svislými čarami u řádků ostatních. Velká část práce se týká čtvercových matic (*square matrix*). Teprve na necelých třech posledních stránkách se A. Cayley věnoval maticím obdélníkovým; tuto partii je však možno považovat za jakýsi nepřilíš významný dodatek, který žádné závažné výsledky nepřináší.

V matematice hrají důležitou roli matice nad tělesy, neboť pro takovéto matice je možné rozumným způsobem definovat sčítání a násobení matic. Příkladem tělesa T je množina racionálních čísel \mathbb{Q} , množina reálných čísel \mathbb{R} , nebo množina komplexních čísel \mathbb{C} . V celé této práci budeme předpokládat, že matice uvedené v příkladech jsou matice nad tělesem komplexních čísel \mathbb{C} .

Definice. 1.1.

Soubor

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

prvků z tělesa T nazýváme maticí typu (m, n) , (nad tělesem T). Aritmetický vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ z T^n nazýváme i -tým řádkem matice \mathbf{A} a aritmetický vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ z T^m nazýváme j -tým sloupcem matice \mathbf{A} .

Součtem dvou matic téhož typu (m, n)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

rozumíme matici

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} a + b_{11} & \cdots & a + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a + b_{m1} & \cdots & a + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Je-li $r \in T$ libovolný prvek, pak r -násobkem matice \mathbf{A} rozumíme matici

$$r\mathbf{A} = \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} se rovná matici \mathbf{B} , právě když $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. O prvcích $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$ matice \mathbf{A} typu (m, n) , kde $k = \min(m, n)$, říkáme, že leží na (hlavní) diagonále, nebo že tvoří diagonálu matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{A} sestávající ze samých nul, tj. taková, že $a_{ij} = 0$ pro všechna $i = 1, 2, \dots, m$ a $j = 1, 2, \dots, n$, se nazývá nulová matice. Matice \mathbf{A} typu (n, n) se nazývá čtvercová matice stupně¹ n . Čtvercová matice stupně n , která má mimo hlavní diagonálu samé 0, tj. $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$, se nazývá diagonální. Diagonální matice $\mathbf{E} = (e_{ii})$ stupně n taková, že $e_{ii} = 1$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$, se nazývá jednotková matice stupně n (4, s. 40 – 41).

Příklad. 1.1.

a) čtvercová matice stupně 3, b) diagonální matice, c) jednotková matice \mathbf{E}

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dalšími pojmy, které se týkají matic a které je třeba si definovat, jsou opačná matice, trojúhelníková a symetrická matice.

Definice. 1.2.

Opačnou maticí k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) nad tělesem T budeme rozumět matici stejného typu $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$ pro každé $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$.

¹ též řádu, typu

Definice. 1.3.

Matrice \mathbf{A} typu (m, n) nad tělesem T je horní (resp. dolní) trojúhelníková matice, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i > j$ (resp. $i < j$) je $a_{ij} = 0$. Řekneme, že čtvercová matice \mathbf{A} řádu n nad tělesem T je symetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ je $a_{ij} = a_{ji}$. Čtvercová matice \mathbf{A} řádu n nad tělesem T se nazývá antisymetrická, jestliže pro každé $i, j = 1, 2, \dots, n$ je $a_{ij} = -a_{ji}$.

Příklad. 1.2.

a) horní trojúhelníková matice řádu n , b) dolní trojúhelníková matice řádu n

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 8 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 7 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

c) čtvercová matice symetrická, d) čtvercová matice antisymetrická

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix} \quad d) \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

1.1. Transponování matic

Definice. 1.4.

Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) nad tělesem T . Transponovanou maticí k matici \mathbf{A} rozumíme matici $\mathbf{A}^T = (a_{ji})$ typu (n, m) , kde pro každé $i = 1, \dots, m$ a $j = 1, \dots, n$ je $a_{ji} = a_{ij}$.

Příklad. 1.3.

Transponovaná matice \mathbf{A}^T ke čtvercové matici \mathbf{A} řádu $n = 3$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 7 \\ -9 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Transponovaná matice vznikne záměnou řádků a sloupců. Následující věta 1.1 popisuje vlastnosti, které plynou již z definice 1.3.

Věta. 1.1.

1. Matice \mathbf{A} je symetrická právě tehdy, když $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.
2. Pro každou matici \mathbf{A} platí: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$ (9, s. 20).

1.2. Operace s maticemi

V definici 1.1 jsme zároveň definovali sčítání matic a násobení matic číslem. V následujících dvou větách shrneme vlastnosti těchto operací s maticemi.

Věta. 1.2. (sčítání matic)

Jestliže \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , $\mathbf{0}$ jsou matice stejného typu nad tělesem T ($\mathbf{0}$ je nulová matice), potom platí:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,
2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,
3. $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$,
4. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ (9, s. 21).

Věta. 1.3. (násobení matice číslem)

Jsou-li matice \mathbf{A} , \mathbf{B} matice stejného typu (m, n) nad tělesem T , $\mathbf{0}$ nulová matice typu (m, n) , $r, r_1, r_2 \in T$, potom, platí:

1. $0\mathbf{A} = \mathbf{0}$,
2. $r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B}$,
3. $(r_1 + r_2)\mathbf{A} = r_1\mathbf{A} + r_2\mathbf{A}$,
4. $(r_1r_2)\mathbf{A} = r_1(r_2\mathbf{A})$,
5. $1\mathbf{A} = \mathbf{A}$,
6. $(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T$,
7. $(-1)\mathbf{A} = -\mathbf{A}$, kde $-\mathbf{A}$ je matice opačná k matici \mathbf{A} ,
8. $\mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = \mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Definice. 1.5.

Bud' $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu (m, n) a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ matice typu (n, p) nad tělesem T . Součinem \mathbf{AB} těchto matic (v tomto pořadí!) rozumíme matici $\mathbf{C} = (c_{ij})$ typu (m, p) , kde

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \quad \text{pro všechna } i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, p \quad (4, \text{ s. } 42).$$

Součin \mathbf{AB} je definován jen pro případ, že počet sloupců matice \mathbf{A} se rovná počtu řádků matice \mathbf{B} . V jiném případě nelze matice nad tělesem T vynásobit. Čtvercové matice \mathbf{A} řádu n a \mathbf{B} řádu n splňují podmínku, že počet sloupců první matice \mathbf{A} se rovná počtu řádků matice \mathbf{B} . Je dokonce definován i součin \mathbf{BA} . Ovšem neplatí rovnost $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, tedy součin čtvercových matic nad tělesem T není komutativní.

Příklad. 1.4.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 16 & 15 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti násobení matic si shrneme v následující větě 1.4.

Věta. 1.4.

Pro každé tři matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} nad tělesem T a pro libovolný prvek $r \in T$ platí, kdykoli alespoň jedna strana rovnosti je definována:

1. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
3. $\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$,
4. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$,
5. $(r\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(r\mathbf{B}) = r(\mathbf{AB})$.

Pro jednotkovou matici \mathbf{E} a nulovou matici $\mathbf{0}$ a pro každou matici \mathbf{A} nad tělesem T platí, kdykoliv levá strana rovnosti je definována:

$$6. \mathbf{AE} = \mathbf{A}, \mathbf{EA} = \mathbf{A},$$

$$7. \mathbf{A0} = \mathbf{0}, \mathbf{0A} = \mathbf{0}.$$

1.3. Hodnost matice

Definice. 1.6.

Nechť \mathbf{A} je matice typu (m, n) nad tělesem T . Hodností $h(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} budeme rozumět dimenzi vektorového prostoru generovaného sloupci matice \mathbf{A} (jako vektory prostoru T^n).

Můžeme také říci, že hodnost $h(\mathbf{A})$ matice \mathbf{A} typu (m, n) je číslo udávající maximální počet jejich lineárně nezávislých řádkových vektorů.

Definice. 1.7.

Při práci s maticemi budeme sloupcovými elementárními úpravami rozumět:

- (i) vynásobení nějakého sloupce nenulovým prvkem $b \in T$;
- (ii) přičtení b -násobku nějakého sloupce k jinému sloupci (přitom $b \in T$).

Podobně budeme řádkovými elementárními úpravami rozumět:

- (i) vynásobení nějakého řádku nenulovým prvkem $b \in T$;
- (ii) přičtení b -násobku nějakého řádku k jinému řádku (přitom $b \in T$).

Elementární úpravy (jak sloupcové, tak řádkové) matice nemění její hodnost. Z nejčastěji používaných metod výpočtu hodnosti matice je Gaussova eliminační metoda.

Věta. 1.5.

Čtvercovou matici \mathbf{A} řádu n nazveme regulární právě tehdy, když platí $h(\mathbf{A}) = n$.
Není-li čtvercová matice \mathbf{A} regulární, říkáme, že je singulární.

Příklad. 1.5.

- a) regulární matice \mathbf{A} řádu 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h(\mathbf{A}) = 3 = n$$

b) singulární matice \mathbf{A} řádu 3

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$h(\mathbf{A}) = 2 \neq 3$, tedy matice \mathbf{A} není regulární, je singulární.

Do této chvíle byly definovány pojmy a operace, které se týkaly všech matic typu (m, n) nad tělesem T . Čtvercové matice řádu n byly pouze specifickým případem těchto matic. Další podkapitoly budou věnovány podstatné části studia čtvercových matic řádu n nad tělesem T .

1.4. Determinant a subdeterminant

Než zavedeme pojem determinantu matice, připomeňme nejdříve permutaci.

Permutace konečné množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je prosté zobrazení množiny M na sebe. Jestliže v permutaci π je $\pi(i) = r_i$ pro každé $i \in M$, potom zapisujeme

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix} \text{ nebo zkráceně } \pi = (r_1, r_2, \dots, r_n) \quad (9, \text{ s. } 30).$$

Permutaci, v níž vzájemně zaměníme dva členy a všechny ostatní členy ponecháme beze změny pořadí, nazýváme transpozicí původní permutace (1, s. 161).

Na množině, která má n prvků, je $n!$ permutací. Protože každá permutace je zobrazení, můžeme permutace skládat. Permutace se nazývá sudá, je-li složením sudého počtu transpozic. permutace se nazývá lichá, je-li složením lichého počtu transpozic. Znaménko permutace je 1, je-li permutace sudá, -1, je-li permutace lichá. Píšeme $zn(\pi) = 1$, je-li permutace π sudá a $zn(\pi) = -1$, je-li permutace π lichá (9, s. 30 a s. 32).

Množina všech permutací na množině $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je vzhledem k operaci násobení permutací grupa řádu $n!$. Tato grupa se nazývá symetrická grupa permutací stupně n a značí se S_n (4, s. 55).

Definice. 1.8.

Bud'

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

čtvercová matice stupně n nad tělesem T . Determinantem matice \mathbf{A} rozumíme prvek $\det \mathbf{A} = \sum_{\pi \in S_n} \text{zn}(\pi) a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \dots a_{n\pi_n}$ tělesa T , kde sčítáme přes všechny permutace

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{pmatrix}$ množiny $M = \{1, 2, \dots, n\}$. Determinant matice \mathbf{A} budeme též

značit symbolem $\det \mathbf{A}$ nebo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (4, \text{s. } 63).$$

Věta. 1.6.

Pro libovolnou čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ stupně n nad tělesem T platí determinant $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$, kde \mathbf{A}^T je matice transponovaná k matici \mathbf{A} .

Determinant trojúhelníkové matice \mathbf{A} je roven součinu prvků hlavní diagonály a_{ii} . V speciálním případě $\det \mathbf{E}$ (determinant jednotkové matice) je roven 1 a $\det \mathbf{0}$ (determinant nulové matice) je roven 0.

Metody výpočtu determinantu

Definice determinantu je poměrně jednoduchá, ale je nevhodná pro praktický výpočet. Metody výpočtu determinantu lze rozdělit podle řádu n čtvercové matice.

Pro $n = 2$ existují dvě permutace, kterým odpovídají součiny prvků $a_{11}a_{22}$ a $a_{12}a_{21}$. Druhý součin $a_{12}a_{21}$ bude se znaménkem -1 ,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \cdot$$

Je patrné, že determinant matice řádu $n = 2$ se vypočte vynásobením prvků hlavní diagonály a odečtením součinu prvků vedlejší diagonály.

Pro $n = 3$ existuje již $n!$ permutací, tedy $3! = 6$. Determinant čtvercové matice třetího řádu se vypočte pomocí metody, která se nazývá Sarrusovo pravidlo, tj.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Metoda výpočtu determinantu čtvercové matice řádu n nad tělesem T se nazývá rozvoj determinantu podle řádku. Nejdříve je ovšem nutné vymezit pojmy subdeterminantu a algebraického doplňku².

Definice. 1.9.

Subdeterminantem (minorem) k -tého řádu matice \mathbf{A} typu (m, n) ³ nazýváme determinant takové matice, která vznikne z matice \mathbf{A} po vypuštění tolika řádků a sloupců, aby z ní zbyla čtvercová matice k -tého řádu (dílní čtvercová matice řádu $n - k$). Speciálně pro $k = 1$ získáme subdeterminant řádu $n - 1$, M_{ik} (první minor) příslušný prvku a_{ik} matice \mathbf{A} řádu n jako determinant matice, kterou dostaneme z matice \mathbf{A} , vynecháme-li v ní i -tý řádek a k -tý sloupec. Algebraickým doplňkem A_{ik} prvku a_{ik} matice \mathbf{A} řádu n nazýváme součin subdeterminantu M_{ik} a čísla $(-1)^{i+k}$.

Determinant $\det \mathbf{A}$ čtvercové matice \mathbf{A} řádu n se rovná součtu součinů, které získáme, vynásobíme-li každý prvek některé řady jeho algebraickým doplňkem. Tomuto postupu výpočtu determinantu $\det \mathbf{A}$ říkáme rozvoj determinantu podle jedné řady.

² Těto metody lze využít pro libovolnou matici řádu n , prakticky je vhodná pro matice vyššího řádu.

³ Matice \mathbf{A} nemusí být nutně čtvercová.

Rozvoj determinantu podle i -tého řádku lze zapsat

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik}, \text{ pro všechna } i = 1, 2, \dots, n.$$

Analogicky lze dostat rozvoj determinantu podle k -tého sloupce

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{ik} A_{ik}, \text{ pro všechna } k = 1, 2, \dots, n.$$

Definice. 1.10.

Adjungovaná matice $\text{adj}\mathbf{A}$ ⁴ ke čtvercové matici \mathbf{A} řádu n se nazývá taková matice, která je transponovaně složená z algebraických doplňků matice \mathbf{A} .

1.5. Invertibilita a inverzní matice

Tato podkapitola je věnovaná inverzní matici, která je opět důležitou součástí tématu čtvercových matic nad tělesem T .

Definice. 1.11.

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n nad tělesem T , pak čtvercová matice \mathbf{A}^{-1} řádu n se nazývá inverzní maticí k matici \mathbf{A} , jestliže $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$. Matice \mathbf{A} řádu n , ke které existuje inverzní matice, se nazývá invertibilní.

Věta. 1.7.

Ke čtvercové matici \mathbf{A} řádu n nad tělesem T může existovat nejvýše jedna inverzní matice \mathbf{A}^{-1} řádu n .

Z věty 1.7 vyplývá, že ke každé čtvercové matici neexistuje inverzní matice. Čtvercová matice, k níž existuje inverzní matice, je regulární matice. Následující věta vysvětluje vztah mezi invertibilní a regulární, resp. singularní maticí.

Věta. 1.8.

Jestliže je čtvercová matice řádu n invertibilní, tj. existuje k této matici inverzní matice, pak je také regulární. Jestliže matice není invertibilní, pak je singularní.

⁴ Adjungovaná matice se též značí \mathbf{A}^A , nebo $\bar{\mathbf{A}}$.

Pro výpočet inverzní matice se používá tzv. Gaussova metoda konstrukce inverzní matice. Tato metoda je založena na tom, že regulární čtvercová matice \mathbf{A} společně s jednotkovou maticí \mathbf{E} pomocí elementárních úprav (definice 1.7) je převedena na jednotkovou matici \mathbf{E} a jednotková matice na inverzní matici \mathbf{A}^{-1} . Vedle této metody je možné inverzní matici získat pomocí adjungované matice $\text{adj}\mathbf{A}$ a determinantu $\det\mathbf{A}$.

Věta. 1.9.

Je-li čtvercová matice \mathbf{A} řádu n regulární, potom $\mathbf{A}^{-1} = (\det \mathbf{A})^{-1} \text{adj}\mathbf{A}$ (9, s. 84)⁵.

Příklad. 1.6.

Určeme inverzní matici ke čtvercové matici \mathbf{A} třetího řádu, jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve je nutné určit determinant matice \mathbf{A} , který lze vypočítat rozvojem determinantu podle prvního řádku⁶, nebo Sarrusovým pravidlem, neboť matice \mathbf{A} je čtvercová matice třetího řádu. V tomto příkladě bude také počítaná adjungovaná matice $\text{adj}\mathbf{A}$, proto volbou je rozvoj determinantu podle prvního řádku.

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (0 - 4) + (-2) \cdot (0 - 3) + 3 \cdot (0 + 6) = -4 + 6 + 18 = 20 \end{aligned}$$

Nyní zbývá vypočítat zbylé algebraické doplňky pro prvky druhé a třetí řady.

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-12) = 12, A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-9) = -9,$$

⁵ Z tohoto vztahu je zřejmé, že determinant se nesmí rovnat 0.

⁶ Rozvoj determinantu podle prvního řádku je nejčastější volba.

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-2) = 2, A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 8 = 8,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 = -1, A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) = -2.$$

Nyní lze složit adjungovanou matici $\text{adj}\mathbf{A}$,

$$\text{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 3 & -9 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{A} je regulární, protože determinant této matice se nerovná 0. Pak existuje také inverzní matice \mathbf{A}^{-1} ,

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \text{adj}\mathbf{A} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 3 & -9 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ověřit si tento výsledek je možné Gaussovou metodou konstrukce inverzní matice:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -9 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 20 & 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 10 & 0 & 0 & -2 & 6 & 4 \\ 0 & -20 & 0 & -3 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-2}{10} & \frac{6}{10} & \frac{4}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{20} & \frac{-9}{20} & \frac{-1}{20} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} & \frac{-1}{10} \end{array} \right). \end{aligned}$$

Tedy inverzní matice \mathbf{A}^{-1} pomocí Gaussovy metody inverze matic se objevila na místě jednotkové matice \mathbf{E} . Po vytknutí $1/20$ inverzní matice \mathbf{A}^{-1} vypadá takto:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 12 & 8 \\ 3 & -9 & -1 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

2 Charakteristický polynom čtvercové matice nad tělesem T

Důležité myšlenky maticového počtu jsou spjaty s metodami výpočtu pohybu planet a jejich satelitů. J. Keplerův popis sluneční soustavy a jejího chodu byl postaven na geometrickém základě. Během 18. století upřesňovali astronomové, fyzici a matematici teorii pohybu jednotlivých těles sluneční soustavy a postupně budovali její matematický model. Pohyb planet a jejich satelitů je ovlivněn nejen přitažlivostí Slunce, ale i přitažlivostí ostatních těles sluneční soustavy. Vzájemná gravitační působení jednotlivých těles způsobují menší či větší odchylky jejich drah od ideálních eliptických orbitů. Závažnou otázkou, která se v této souvislosti objevila, byla stabilita sluneční soustavy. V druhé polovině 18. století byla zkoumána zejména dlouhodobá periodicitá odchylek, která se stabilitou sluneční soustavy úzce souvisí. Matematický popis této problematiky vedl na řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic. Při řešení těchto soustav hraje důležitou roli tzv. charakteristická rovnice příslušné matice. Astronomové, fyzici a matematici ji nazývali sekulární rovnice. Jednalo se o rovnici

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0,$$

kde matice \mathbf{A} je sestavena z čísel daných studovaným problémem a matice \mathbf{E} je jednotková. Polynom stojící v této rovnici na levé straně se nazývá charakteristický polynom matice \mathbf{A} , jeho kořeny jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} , s každým vlastním číslem matice \mathbf{A} jsou spjaty vlastní vektory. Problém charakteristické rovnice se objevil již v 18. století, ještě dříve než existovala teorie matic. Výše zmíněnými problémy nebeské mechaniky se zabývali L. Euler, J. – B. le Rond d'Alembert, J. L. Lagrange, P. S. Laplace (3, s. 199 – 200).

Po nahlédnutí do historie pojmu charakteristického polynomu nebude složité pochopit ani současnou definici.

Definice. 2.1.

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice nad tělesem T a číslo $\lambda \in T$. Charakteristickou maticí matice \mathbf{A} budeme rozumět λ -maticí $\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}$, charakteristickým polynomem matice \mathbf{A}

determinant její charakteristické matice, tj. $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$. Kořeny charakteristického polynomu matice \mathbf{A} se nazývají vlastní čísla matice \mathbf{A} . Násobností vlastního čísla budeme rozumět jeho násobnost jako kořene charakteristického polynomu. Spektrem matice \mathbf{A} budeme nazývat soubor utvořený z vlastních čísel; každé vlastní číslo se v něm vyskytuje právě tolikrát, kolik činí jeho násobnost (2, s. 219).

V definici zazněly již v úvodu zmíněné pojmy. U charakteristického polynomu matice \mathbf{A} je možné počítat determinant z λ -matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$, aniž by se změnilo jeho kořeny, tj. vlastní čísla, které pak tvoří spektrum matice \mathbf{A} . Těleso T určuje, jak spektrum matice \mathbf{A} bude vypadat.

Příklad. 2.1.

Určete vlastní čísla čtvercové matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nejprve vytvoříme λ – matici $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$:

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{pmatrix}.$$

Nyní když máme charakteristickou matici matice \mathbf{A} , vypočteme její determinant:

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -3 & -3 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)(\lambda + 3).$$

Vlastní čísla jsou pak kořeny charakteristického polynomu $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$, tedy $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = -3$.

Pro porovnání jak výsledků, tak časové náročnosti příklad 2.1 vypočteme pomocí matematického programu Wolfram Mathematica^{®7} (obr. 1). Nejdříve si ukážeme, jak vypočítat charakteristický polynom.

Obrázek 1

```
In[2]:= CharacteristicPolynomial [{{-1, -3, -3}, {2, -1, 2}, {-2, 3, 0}}, x]
Out[2]:= 6 + 5 x - 2 x2 - x3
```

Zadání příkazu se skládá z názvu `CharacteristicPolynomial[m, x]`, kde m je matice \mathbf{A} rozepsaná po jednotlivých řádkových vektorech a proměnná x , která představuje číslo λ .

Výsledek matematického programu je tedy $p_A(x) = 6 + 5x - 2x^2 - x^3$ a výsledek, ke kterému se došlo písemným postupem, je $p_A(\lambda) = \lambda^3 + 2\lambda^2 - 5\lambda - 6$.

Rozdíl ve znaménkách výsledků je způsoben výpočtem charakteristické matice. Matematický program bere za výchozí charakteristickou matici $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$, u druhého výsledku jsme vycházeli z λ -matice $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}$. Tento rozdíl ovšem nehraje žádnou roli pro výpočet vlastních čísel. O tom se přesvědčíme opět pomocí programu Mathematica[®] 7 (obr. 2) a vstupu `Eigenvalues [m]`:

Obrázek 2

```
In[3]:= Eigenvalues [{{-1, -3, -3}, {2, -1, 2}, {-2, 3, 0}}]
Out[3]:= {-3, 2, -1}
```

Věta. 2.1.

Vlastní čísla horní, resp. dolní trojúhelníkové matice \mathbf{A} řádu n jsou rovna prvkům hlavní diagonály, neboť charakteristický polynom má tvar

$$p_A(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

V této kapitole byly také zmíněny vlastní vektory, které závisí na vlastních číslech charakteristického polynomu.

Definice. 2.2

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n nad tělesem T a $\lambda \in T$ její vlastní číslo. Vlastním vektorem matice \mathbf{A} , který přísluší vlastnímu číslu λ , budeme rozumět každý nenulový vektor $\mathbf{x} \in T^n$, pro který platí $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T = \lambda \cdot \mathbf{x}^T$ (1, s. 230).

Rovnost $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T = \lambda \cdot \mathbf{x}^T$ znamená rozepsaná po složkách toto:

$$\begin{aligned}(\lambda - a_{11})x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (\lambda - a_{nn})x_n &= 0.\end{aligned}$$

Tedy vlastní vektor \mathbf{x} je řešením homogenní soustavy lineárních rovnic s λ -maticí $\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}$.

Příklad. 2.2.

V předešlém příkladu jsme určili vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Byla to čísla $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ a $\lambda_3 = -3$. Nyní určíme vlastní vektory náležející těmto vlastním číslům. Pro $\lambda_1 = 2$ řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic ve tvaru $(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}_1 = 0$:

$$\begin{aligned}(2\mathbf{E} - \mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -3 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} &\sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Získali jsme rovnice $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_2 = 0$, zvolme $x_3 = 1$, pak $x_1 = -1$. Vlastní vektor \boldsymbol{x} je libovolný nenulový násobek k vektoru $(-1, 0, 1)$. Vlastní vektor pro λ_1 může být například $\boldsymbol{x}_1 = (-1, 0, 1)$.

Stejným postupem spočítáme vlastní vektory $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ pro $\lambda_2 = -1$ a pro $\lambda_3 = -3$, které se rovnají například $\boldsymbol{x}_2 = (-1, -1, 1)$, $\boldsymbol{x}_3 = (0, -1, 1)$.

Program Mathematica[®] 7 je opět rychlý a poměrně jednoduchý, pro zadání postačí matice \mathbf{A} rozepsaná na řádkové vektory (obr. 3).

Obrázek 3

```
In[1]= Eigenvectors[{{-1, -3, -3}, {2, -1, 2}, {-2, 3, 0}}]
Out[1]= {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, -1, 1}}
```

Tento matematický program nabízí i funkci Eigensystem [m], která již vypočte nejen vlastní čísla, ale také k nim náležející vlastní vektory (obr. 4):

Obrázek 4

```
In[2]= Eigensystem[{{-1, -3, -3}, {2, -1, 2}, {-2, 3, 0}}]
Out[2]= {{-3, 2, -1}, {{0, -1, 1}, {-1, 0, 1}, {-1, -1, 1}}}
```

V první složené závorce se nacházejí vlastní čísla a v další složené závorce vlastní vektory k těmto vlastním číslům. Je nutné dodržet pořadí vlastních čísel a vektorů, tedy pro $\lambda_1 = -3$ je vlastní vektor \boldsymbol{x}_1 roven $(0, -1, 1)$, pro $\lambda_2 = 2$ vlastní vektor $\boldsymbol{x}_2 = (-1, 0, 1)$ a poslední $\lambda_3 = -1$ má vlastní vektor $\boldsymbol{x}_3 = (-1, -1, 1)$.

Vlastní čísla a vlastní vektory mají některé vlastnosti, které lze shrnout takto:

Věta. 2.2.

Nechť \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou čtvercové matice téhož řádu nad tělesem T .

- (i) Jestliže λ je vlastní číslo matice \mathbf{A} a \boldsymbol{x} příslušný vlastní vektor, potom pro každé přirozené číslo k je λ^k vlastní číslo matice \mathbf{A}^k a \boldsymbol{x} je příslušný vlastní vektor.

- (ii) Matice \mathbf{AB} a \mathbf{BA} mají stejná vlastní čísla.

Věta. 2.3.

Nechť \mathbf{A} je matice řádu n nad tělesem T . Jsou-li X_1, \dots, X_k lineárně nezávislé množiny vlastních vektorů příslušných po řadě navzájem různým vlastním číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ matice \mathbf{A} , je množina $X = X_1 \cup \dots \cup X_k$ lineárně nezávislá. (2, s. 234)

3 Podobnost matic

Velmi důležitou částí teorie matic tvoří poznatky o podobnosti matic, které úzce souvisejí s problematikou kanonických tvarů. Velký význam v této části zaujímají vlastní čísla a vlastní vektory.

Definice. 3.1.

Nechť \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou čtvercové matice téhož řádu nad tělesem T , pak budeme říkat, že matice \mathbf{A}, \mathbf{B} jsou podobné, jestliže existuje regulární matice \mathbf{C} nad tělesem T , taková, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}.^7 \text{ (2, s. 235)}$$

Relace podobnosti matic je ekvivalence. Je totiž reflexivní, symetrická a tranzitivní. Můžeme také psát $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$, tedy:

- i) reflexivní ($\mathbf{A} \cong \mathbf{A}$),
- ii) symetrická ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{B} \cong \mathbf{A}$),
- iii) tranzitivní ($\mathbf{A} \cong \mathbf{B} \wedge \mathbf{B} \cong \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{A} \cong \mathbf{C}$).

Věta. 3.1.

Jsou-li matice \mathbf{A} a \mathbf{B} podobné, pak

- i) jsou stejného řádu,
- ii) hodnoty obou matic jsou totožné,
- iii) determinanty obou matic jsou totožné,

⁷ Nezáleží, zda v této definici píšeme inverzní matici vlevo nebo vpravo, tj. $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$.

- iv) charakteristické polynomy obou matic jsou totožné, tj. $p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$,
- v) vlastní čísla obou matic jsou stejná.⁸

1.1. Metoda zjištění podobnosti matic.

Naším úkolem je zjistit, zda jsou matice **A** a **B** řádu n podobné a v kladném případě najít nějakou regulární matici **C**, pomocí které se podobnost matic realizuje.

Rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$ je ekvivalentní s rovnicí $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$, pokud matice **C** je regulární. Prvky matice **C** bereme jako neznámé. Maticová rovnost $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$ po vynásobení přejde v soustavu n^2 lineárních rovnic o n^2 neznámých. Při řešení této soustavy musíme mít na paměti, že hledaná matice **C** musí být regulární. Stačí najít jediné řešení, tedy nemusíme najít všechny matice **C**, pro které platí rovnost $\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{C}$.

Příklad. 3.1.

Zjistěme, zda reálné matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}$$

jsou podobné, a pokud ano, nalezneme regulární matici **C**.

Charakteristické polynomy matic **A** a **B** jsou:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 2)(\lambda - 3),$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 10 & 4 \\ -26 & \lambda - 11 \end{vmatrix} = (\lambda + 10)(\lambda - 11) + 104 = (\lambda + 2)(\lambda - 3).$$

Obě λ -matice mají stejný charakteristický polynom a také vlastní čísla. Matice **A** a **B** mohou být podobné. Nyní musíme najít matici **C**:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

⁸ Tato tvrzení jsou nutné podmínky podobnosti matic, ne však postačující.

$$\mathbf{CA} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x & x+3y \\ -2z & z+3t \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{BC} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10x-4z & -10y-4t \\ 26x+11z & 26y+11t \end{pmatrix}.$$

Pak získáváme soustavu lineárních rovnic:

$$-2x = -10x - 4z,$$

$$x + 3y = -10y - 4t,$$

$$-2z = 26x + 11z,$$

$$z + 3t = 26y + 11t.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme soustavu dvou rovnic:

$$x + 3y + 4t = 0,$$

$$2x + z = 0.$$

Při řešení této soustavy lineárních rovnic nesmíme zapomenout, že hledané prvky x , y , z , t matice \mathbf{C} musí být zvoleny tak, aby matice \mathbf{C} byla regulární. Tedy

$$x = -\frac{1}{2}z,$$

zvolíme $z = 2$, pak $x = -1$. Pro druhou rovnici

$$t = \frac{1-13y}{4}$$

vyhovuje zvolené $y = 1$ a $t = -3$.

Matice \mathbf{C} a k ní inverzní matice \mathbf{C}^{-1} jsou

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Snadno lze ověřit, že matice \mathbf{C} je regulární⁹ a pro tuto matici platí rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{C}$.

Na tomto příkladu si můžeme také ověřit, že skutečně nezáleží na tom, z které strany matici \mathbf{B} násobíme inverzní maticí \mathbf{C}^{-1} . Pak řešíme rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$. Tato rovnost je ekvivalentní s rovností $\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}\mathbf{B}$. Matice \mathbf{C} je pro nás opět neznámá s prvky x , y , z , t a dostáváme soustavu lineárních rovnic:

$$-2x + z = -10x + 26y,$$

$$-2y + t = -4x + 11y,$$

$$3z = -10z + 26t,$$

$$3t = -4z + 11t.$$

Po jednoduchých úpravách dostáváme soustavu dvou rovnic:

$$z = 2t,$$

$$4x - 13y = -1.$$

Zvolíme $t = 1$, pak $z = 2$. Pro druhou rovnici volíme $y = 1$ a $x = 3$. Matice \mathbf{C} a k ní inverzní matice \mathbf{C}^{-1} jsou

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matice \mathbf{C} je regulární, neboť její determinant je roven jedné. Nyní si můžeme ověřit rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1}$. Máme matice \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{C}^{-1} :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -10 & -4 \\ 26 & 11 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

⁹ Determinant matice \mathbf{C} se nesmí rovnat nule.

Tímto jsme se přesvědčili, že matice \mathbf{A} a matice \mathbf{B} jsou podobné.

*Zásadní větou týkající se podobnosti matic je Cayleyova – Hamiltonova věta. Tato věta byla nejzávažnějším výsledkem Cayleyovy práce *A memoir on the theory of matrices* (Memoár teorie matic) z roku 1858. V Memoáru teorie matic chyběl však důkaz. 19. listopadu 1857 byl uveřejněn dopis, který napsal A. Cayley J. J. Sylvestroví. Začíná slovy *I have just obtained a theorem which appears to me very remarkable* (Právě jsem získal větu, která se mi zdá velmi významná.) a právě v tomto dopise Cayley uvedl svůj důkaz pro matici druhého řádu a ukázal dokonce zobecnění tohoto tvrzení.*

Věta. 3.2. Cayleyova – Hamiltonova¹⁰

Každá matice řádu n vyhovuje svému charakteristickému polynomu (anuluje svůj charakteristický polynom), tj. platí $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{0}$ (4, s. 32).

Příklad. 3.2.

Je dána matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Její charakteristický polynom je

$$p_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + 7\lambda - 10,$$

$$\text{pak } p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^3 - 2\mathbf{A}^2 + 7\mathbf{A} - 10\mathbf{E}.$$

Jednoduchými výpočty získáme matice \mathbf{A}^3 , \mathbf{A}^2 ,

$$\mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -8 \\ -19 & 6 & 7 \\ 12 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 7 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Po dosazení do rovnosti pro $p_{\mathbf{A}}(\mathbf{A})$ dostáváme

¹⁰ Věta nese Hamiltonovo jméno, neboť vyjádřil obdobnou větu.

$$\begin{aligned}
p_A(\mathbf{A}) &= \begin{pmatrix} -9 & 9 & -8 \\ -19 & 6 & 7 \\ 12 & -1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 & 2 & 6 \\ 2 & -4 & 14 \\ -2 & 6 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -7 & 14 \\ 21 & 0 & 7 \\ -14 & 7 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4 Jordanův kanonický tvar matice



Camille Marie Ennemond Jordan (1838 – 1922)

C. M. E. Jordan byl francouzský matematik, který významně zasáhl do vývoje lineární algebry. V roce 1855 nastoupil jako student matematiky na École Polytechnique a od roku 1873 zde také začal přednášet. Od roku 1916 byl prezidentem Akademie věd. C. Jordan zavedl kanonický tvar. Matice, která jeho kanonickému tvaru odpovídala, byla složena z buněk, které měly na hlavní diagonále příslušné vlastní číslo a na rovnoběžné linii pod ní totéž vlastní číslo (místo obvyklých jedniček). Současný kanonický tvar nese Jordanovo jméno až po jeho smrti jako ocenění práce tohoto matematika.

Definice. 4.1.

Čtvercová matice tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

se nazývá Jordanova buňka¹¹ (na diagonále je prvek λ , na rovnoběžné linii pod diagonálou jsou jedničky). Diagonální bloková matice, jejíž bloky na diagonále jsou Jordanovy buňky, se nazývá Jordanova matice.

¹¹ též Jordanův blok, Jordanovo pole

Jordanovu matici je možné definovat jako matici tvaru

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ e_1 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e_2 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e_{n-1} & \lambda_n \end{pmatrix},$$

kteřá splňuje tyto dvě podmínky: pro každé $i = 1, \dots, n - 1$ je

- i) $e_i = 0$ nebo $e_i = 1$;
- ii) jestliže $e_i = 1$, potom $\lambda_i = \lambda_{i+1}$.

Jordanovu buňku dostaneme v případě, kdy $e_1 = e_2 = \dots = e_{n-1} = 1$.

Příklad. 4.1.

Matice jsou Jordanovy matice, první je tvořena dvěma Jordanovými buňkami, druhá třemi:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Definice. 4.2.

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice nad tělesem T . Jestliže existuje Jordanova matice \mathbf{J} nad tělesem T , taková, že matice \mathbf{A} a \mathbf{J} jsou podobné, potom říkáme, že matice \mathbf{A} má nad tělesem T Jordanův kanonický tvar¹² \mathbf{J} (2, s. 245).

Věta. 4.1.

Nad algebraicky uzavřeným tělesem má každá matice Jordanův kanonický tvar. (2, s. 245)

¹² Kanonický tvar je tvar, který jednoznačně prezentuje daný objekt.

Věta 4.1 říká, že matice \mathbf{A} nemusí mít Jordanův kanonický tvar nad tělesem T , ale potom má Jordanův kanonický tvar nad nějakým nadtělesem T' tělesa T .

4.1. Diagonalizovatelnost matice

Definice. 4.3.

Matice \mathbf{A} řádu n se nazývá diagonalizovatelná, právě když existuje regulární matice \mathbf{T} taková, že platí $\mathbf{A} = \mathbf{TDT}^{-1}$, kde \mathbf{D} je diagonální matice (5, s. 37).

Věta. 4.2.

Matice \mathbf{A} řádu n je podobná diagonální matici právě tehdy, když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů (9, s. 136).

Věta. 4.3. (Postačující podmínka diagonalizovatelnosti)

Jsou-li $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ vesměs různá vlastní čísla matice \mathbf{A} řádu n , pak příslušné vlastní vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé a tudíž matice \mathbf{A} je podobná matici diagonální (5, s. 37).

Věta. 4.4.

Každá matice \mathbf{A} řádu n je podobná některé Jordanově matici, tj. platí

$$\mathbf{A} = \mathbf{TJT}^{-1}, \text{ kde } \det \mathbf{T} \neq 0.$$

4.2. Metoda nalezení Jordanova kanonického tvaru a transformační matice \mathbf{T}

V této podkapitole se budeme postupně věnovat příkladům hledání Jordanova kanonického tvaru a zároveň transformační matice \mathbf{T} .

Věta. 4.5.

Nechť čtvercová matice \mathbf{A} řádu n má navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Ke každému vlastnímu číslu λ_i zvolme vlastní vektor \mathbf{h}_i . Potom matice $\mathbf{J} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ a matice \mathbf{T} má sloupce $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$.

Musíme si uvědomit, že počet lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných ke všem navzájem různým vlastním číslům matice \mathbf{A} je roven počtu buněk jejího

Jordanova kanonického tvaru. Počet lineárně nezávislých vlastních vektorů zjistíme pomocí určení hodnosti matice $(\lambda_i \mathbf{E} - \mathbf{A})$, kde $i = 1, 2, \dots, n$.

Příklad. 4.2.

Určeme Jordanův kanonický tvar a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom matice \mathbf{A} je roven:

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 1)(\lambda + 2).$$

Vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Vlastní vektory náležející těmto vlastním číslům nalezneme řešením homogenních soustav lineárních rovnic

$$(3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_1^T = \mathbf{o}^T, (\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_2^T = \mathbf{o}^T, (-2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_3^T = \mathbf{o}^T.$$

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ výpočet vlastního vektoru vypadá takto:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Řád λ -matice n je roven 3 a $h(\mathbf{A}) = 2$, z toho vyplývá, že pro λ_1 existuje jeden lineárně nezávislý vlastní vektor ($n - h(\mathbf{A}) = 1$). Řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic $2h_1 - 3h_3 = 0$, $10h_3 = 0$. Potom složky h_1 a h_3 vlastního vektoru se rovnají 0 a složku h_2 můžeme zvolit např. 1. Vlastní vektor \mathbf{h}_1 pro vlastní číslo $\lambda_1 = 3$ může být $(0, 1, 0)$. Vlastní vektory nikdy nesmí být nulové vektory. Stejný postup zopakujeme i pro další vlastní číslo $\lambda_2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Opět pro vlastní číslo $\lambda_2 = 1$ lze najít jeden lineárně nezávislý vektor a řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic $2h_1 - 2h_2 + 7h_3 = 0, -3h_3 = 0$. Pak složka $h_3 = 0$, za h_2 zvolíme 1 a složka $h_1 = 1$. Vlastním vektorem je libovolný nenulový k -násobek vektoru $\mathbf{h}_2 = (1, 1, 0)$. Zbývá vypočítat poslední vlastní vektor \mathbf{h}_3 pro číslo $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 7 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

I pro poslední vlastní číslo λ_3 existuje jen jeden lineárně nezávislý vlastní vektor, který získáme výpočtem soustavy rovnic $2h_1 - 5h_2 + 7h_3 = 0, -5h_2 + 5h_3 = 0$. Pokud zvolíme složku $h_3 = 1$, pak dostaneme $h_2 = 1$ a složku $h_1 = -1$. Vlastní vektor \mathbf{h}_3 pro vlastní číslo $\lambda_3 = -2$ je vektor $(-1, 1, 1)$. Jordanova matice \mathbf{J} a transformační matice \mathbf{T} vypadají takto:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Jordanova matice \mathbf{J} v tomto příkladu je také diagonální matice. Zda Jordanův tvar matice bude diagonální, závisí na počtu nalezených lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Přestože příklad 4.2 byl jedním z nejjednodušších výpočtů Jordanovy matice a transformační matice, časově je již náročný a to díky stále opakovanému postupu pro jednotlivá vlastní čísla. Matematickému programu Mathematica[®] 7 tento výpočet trvá pouhou chvílí. Pomocí jedné funkce `JordanDecomposition [m]` lze získat nejen Jordanův tvar matice, ale také transformační matici (obr. 5).

Obrázek 5

```
In[6]:= JordanDecomposition[{{1, 0, 3}, {-2, 3, -7}, {0, 0, -2}}]
Out[6]:= {{{-1, 1, 0}, {1, 1, 1}, {1, 0, 0}}, {{-2, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 3}}}
```

```
In[7]:= Map[MatrixForm, %]
Out[7]:= { $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ }
```

Pro přehlednost nabízí tento program příkaz, kterým je možné jednotlivé řádkové vektory obou matic přepsat v maticovém tvaru (Input [7], obr. 5).

Příklad. 4.3.

Určeme Jordanův kanonický tvar a matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice je roven $p_A(\lambda) = \lambda(\lambda + 3)^2$. Vlastní čísla pak jsou $\lambda_1 = 0$ a násobné $\lambda_{2,3} = -3$. Vlastní vektory pro tato vlastní čísla nalezneme řešením homogenních soustav lineárních rovnic:

1. $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_1^T = \mathbf{o}^T$,
2. $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_{2,3}^T = \mathbf{o}^T$.

ad 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Řád matice \mathbf{A} n , resp. matice $(0\mathbf{E} - \mathbf{A})$ je roven 3 a $h(0\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 2$, z toho vyplývá, že pro vlastní číslo 0 existuje jeden lineárně nezávislý vlastní vektor. Nyní řešíme tuto homogenní soustavu lineárních rovnic: $2h_1 - h_2 - h_3 = 0$, $h_2 - h_3 = 0$. Zvolíme $h_3 = 1$ a získáme $h_2 = 1$ a $h_1 = 1$. Vlastní vektor pro vlastní číslo 0 je $\mathbf{h}_1 = (1, 1, 1)$.

ad 2. Zopakujeme postup pro násobné vlastní číslo -3 ,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož řád matice $(-3\mathbf{E} - \mathbf{A})$ je roven 3 a hodnost matice $h(-3\mathbf{E} - \mathbf{A}) = 1$, existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory.

Nyní řešíme lineární rovnici $-h_1 - h_2 - h_3 = 0$. Pro volbu $h_3 = 0$, $h_2 = -1$ dostáváme $h_1 = 1$. Vlastní vektor je tedy $\mathbf{h}_2 = (1, -1, 0)$. Pro volbu $h_3 = -1$ a $h_2 = 0$ dostáváme $h_1 = 1$. Pak vlastní vektor je $\mathbf{h}_3 = (1, 0, -1)$. Jelikož jsme našli tři lineárně nezávislé vektory, Jordanovu matici tvoří tři Jordanovy buňky. Pak Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matice \mathbf{T} vypadají takto:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Na příkladu 4.3 je patrné, že Jordanova matice \mathbf{J} může být diagonální i tehdy, když matice \mathbf{A} má násobná vlastní čísla (viz věta 4.3). Ještě poznamenejme, že v matici \mathbf{J} lze zvolit pořadí vlastních čísel na diagonále libovolně, ale této volbě musí odpovídat skladba vlastních vektorů v matici \mathbf{T} .

Pro kontrolu příkladu 4.3 opět lze použít Mathematica[®] 7 (obr. 6).

Obrázek 6

```
In[8]:= JordanDecomposition[{{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}}]
Out[8]:= {{{-1, -1, 1}, {0, 1, 1}, {1, 0, 1}}, {{-3, 0, 0}, {0, -3, 0}, {0, 0, 0}}]

In[9]:= Map[MatrixForm, %]
Out[9]:= {
  {
     $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,
     $\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 
  }
}
```

Vlastní vektory pro násobné číslo -3 neodpovídají znaménkem, neboť pro určení těchto vektorů záleží na volbě složek a vlastní vektor je libovolný nenulový k násobek vektoru $(-1, 0, 1)$ a rovněž $(-1, 1, 0)$. V tomto příkladě vlastními vektory jsou také vektory, jejichž násobek k je roven -1 .

Přesvědčit se o tomto tvrzení můžeme díky programu Mathematica[®] 7 (obr. 7). Vstup [1] je zadání pro výpočet inverzní matice \mathbf{T}^{-1} (Výstup [1]) k transformační matici \mathbf{T} . Vstup [6] je rozepsaný vzorec $\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$. Vzhledem k tomu, že Jordanova matice \mathbf{J} je podobná matici \mathbf{A} , součin se musí rovnat původní matici \mathbf{A} (Výstup [6]).

Obrázek 7

```

In[1]:= Inverse[{{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1, 0, -1}}]
Out[1]:= {{1/3, 1/3, 1/3}, {1/3, -2/3, 1/3}, {1/3, 1/3, -2/3}}
In[6]:= {{1, 1, 1}, {1, -1, 0}, {1, 0, -1}}.
        {{0, 0, 0}, {0, -3, 0}, {0, 0, -3}}.{{1/3, 1/3, 1/3}, {1/3, -2/3, 1/3}, {1/3, 1/3, -2/3}}
Out[6]:= {{-2, 1, 1}, {1, -2, 1}, {1, 1, -2}}

```

4.3. Zobecněné vlastní vektory

V této podkapitole se budeme věnovat případům, kdy čtvercová matice řádu n má k -násobné vlastní číslo λ , pro které nelze pomocí homogenní soustavy lineárních rovnic určit k lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Věta. 4.6

Nechť \mathbf{A} je matice řádu n nad tělesem T a $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ Jordanův kanonický tvar matice \mathbf{A} . Matice \mathbf{A} je maticí nějakého endomorfismu f prostoru $V = T^n$ vzhledem ke kanonické bázi tohoto prostoru, matice \mathbf{T} je maticí přechodu od nějaké báze $N = \{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k\}$ ke kanonické bázi prostoru V , matice \mathbf{J} je maticí endomorfismu f vzhledem k bázi N .

Definice. 4.4.

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n . Matice \mathbf{A} je podobná matici

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \text{ resp. } \mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$

tj. $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$, kde matice \mathbf{J} je Jordanova buňka a matici \mathbf{T} skládáme po sloupcích z vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ právě tehdy, když matice \mathbf{A} má k -násobné vlastní číslo λ . Uspořádaná k -tice vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ se nazývá řetězec zobecněných vlastních vektorů matice \mathbf{A} příslušný vlastnímu číslu λ , jestliže platí

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_k^T &= \mathbf{o}^T, \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_{k-1}^T &= \mathbf{h}_k^T, \\
&\vdots \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_2^T &= \mathbf{h}_3^T, \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_1^T &= \mathbf{h}_2^T,
\end{aligned}$$

resp.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_1^T &= \mathbf{o}^T, \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_2^T &= \mathbf{h}_1^T, \\
&\vdots \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_{k-1}^T &= \mathbf{h}_{k-2}^T, \\
(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{h}_k^T &= \mathbf{h}_{k-1}^T.
\end{aligned}$$

Vektor \mathbf{h}_k je vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu, pro každé $j = 1, 2, \dots, k$ se vektor \mathbf{h}_j nazývá j -tý zobecněný vlastní vektor matice \mathbf{A} příslušný vlastnímu číslu λ . Počet vektorů v řetězci, tj. číslo k , se nazývá délka řetězce.

Věta. 4.7.

Nechť \mathbf{A} je čtvercová matice řádu n a $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ řetězec zobecněných vlastních vektorů příslušný vlastnímu číslu λ . Potom množina vektorů $\{\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k\}$ je lineárně nezávislá (9, s. 144).

Vztah, který platí pro řetězec zobecněných vlastních vektorů, vychází z věty 4.6. Jde o přepis do maticového tvaru vztahu vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$ báze N a jejich obrazů $f(\mathbf{h}_1), f(\mathbf{h}_2), \dots, f(\mathbf{h}_k)$:

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{h}_k) &= \lambda \mathbf{h}_k, \\
f(\mathbf{h}_{k-1}) &= \lambda \mathbf{h}_{k-1} + \mathbf{h}_k, \\
&\vdots \\
f(\mathbf{h}_1) &= \lambda \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2.
\end{aligned}$$

Tento vztah lze analogicky zapsat pro Jordanovu buňku \mathbf{J} , která má jedničky na rovnoběžné linii nad diagonálou.

Příklad. 4.4.

Nalezněme matici \mathbf{J} a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve určíme charakteristický polynom, tedy vypočteme $\det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$,

$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

Vlastní čísla matice \mathbf{A} pak jsou dvojnásobné vlastní číslo 1 a 2. Nyní určíme lineárně nezávislé vlastní vektory příslušné vlastnímu číslu 1, následovně pro vlastní číslo 2. Zprvč řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic pro $\lambda_{1,2} = 1$: $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{h}_3^T = \mathbf{o}^T$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dostáváme soustavu dvou rovnic: $h_2 + h_3 = 0$, $h_3 = 0$. Složka $h_3 = 0$, pak $h_2 = 0$ a např. $h_1 = 1$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 1 je např. vektor $\mathbf{h}_2 = (1, 0, 0)$. Pro násobné číslo $\lambda_{1,2}$ jsme pomocí homogenní soustavy lineárních rovnic získali pouze jeden vlastní vektor. Druhý vlastní vektor \mathbf{h}_1 dostaneme ze vztahu pro řetězec zobecněných vlastních vektorů $(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{h}_1^T = \mathbf{h}_2^T$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Dostáváme soustavu dvou lineárních rovnic: $h_2 + h_3 = 1$, $h_3 = 0$. Pak $h_3 = 0$, $h_2 = 1$ a např. $h_1 = 0$. Určili jsme druhý vlastní vektor $\mathbf{h}_1 = (0, 1, 0)$.

Jelikož jsme získali pro dvojnásobné vlastní číslo zobecněné vlastní vektory $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$, řetězec zobecněných vlastních vektorů o délce 2, bude Jordanův kanonický tvar:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Nyní již zbývá určit vlastní vektor \mathbf{h}_3 pro vlastní číslo $\lambda_3 = 2$. Vycházíme opět z homogenní soustavy lineárních rovnic $(\mathbf{A} - 2\mathbf{E})\mathbf{h}_3^T = \mathbf{o}^T$,

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nyní určíme jednotlivé složky vektoru \mathbf{h}_3 , $-h_1 + h_2 + h_3 = 0$, $-h_2 + h_3 = 0$. Zvolíme složku $h_3 = 1$, pak složka $h_2 = 1$, $h_1 = 2$. Vektor $\mathbf{h}_3 = (2, 1, 1)$ je vlastní vektor příslušný číslu $\lambda_3 = 2$. Transformační matice \mathbf{T} poskládaná z vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$ po sloupcích vypadá takto:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

V matematickém programu Mathematica[®] 7 (obr. 8):

Obrázek 8

```
In[1]:= JordanDecomposition[{{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 2}}]
Out[1]:= {{{1, 0, 2}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}, {{1, 1, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 2}}]

In[2]:= Map[MatrixForm, %]
Out[2]:= { $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ }
```

Také na tomto příkladu jsme se přesvědčili, že především záleží na tom, aby vlastní vektory složené po sloupcích matice \mathbf{T} odpovídaly příslušnému vlastnímu číslu λ .

Přestože u výpočtu vlastních čísel matice \mathbf{A} řádu n se může vycházet z charakteristického polynomu $p_A(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})$, nebo $p_A(\lambda) = \det(\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A})$, u řetězce

zobecněných vlastních vektorů je třeba toto zohlednit. Pak vztah přepsaný do maticového tvaru je

$$\begin{aligned}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_k^T &= \mathbf{o}^T, \\(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_{k-1}^T &= -\mathbf{h}_k^T, \\&\vdots \\(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_2^T &= -\mathbf{h}_3^T, \\(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_1^T &= -\mathbf{h}_2^T.\end{aligned}$$

Příklad. 4.5.

Nalezneme Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom určíme jako $\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})$, $p_A(\lambda) = (\lambda + 2)^3$. Nalezli jsme trojnásobné vlastní číslo $\lambda_{1, 2, 3} = -2$. Nyní se pokusíme určit vlastní vektory příslušné násobnému vlastnímu číslu -2 pomocí homogenní soustavy lineárních rovnic, tj. $(-2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}^T = \mathbf{o}^T$,

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Jelikož řád λ -matice je roven 3 a hodnost této matice je 1, nalezneme dva lineárně nezávislé vektory a Jordanova matice \mathbf{J} má dvě buňky, tj.

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Začneme s nalezením vlastního vektoru \mathbf{h}_3 , tedy řešíme rovnici $-\mathbf{h}_1 + 2\mathbf{h}_2 = \mathbf{0}$. Například zvolíme $h_3 = 1$ a $h_2 = 0$, pak $h_1 = 0$ a vlastní vektor $\mathbf{h}_3 = (0, 0, 1)$. Pomocí stejné rovnice určíme také vlastní vektor \mathbf{h}_2 . Zvolíme $h_3 = 0$ a $h_2 = 1$, pak $h_1 = 2$ a vlastní vektor

$\mathbf{h}_2 = (2, 1, 0)$. Poslední vlastní vektor bychom měli určit pomocí nehomogenní soustavy lineárních rovnic $(-2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_1^T = -\mathbf{h}_2^T$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

Vidíme, že tato soustava lineárních rovnic nemá řešení. To ovšem neznamená, že zobecněný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu -2 neexistuje. V tomto případě je třeba jako pravou stranu této soustavy vzít lineární kombinaci vlastních vektorů $\mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3$, například $\mathbf{t} = a\mathbf{h}_2 + b\mathbf{h}_3 = a(2, 1, 0) + b(0, 0, 1) = (2a, a, b)$. Pak řešíme soustavu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2a \\ -1 & 2 & 0 & -a \\ -1 & 2 & 0 & -b \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+2b \end{array} \right).$$

Pak řešíme $2b - 2a = 0$, zvolíme např. $b = 1 = a$. Dosazením jsme získali vektor $\mathbf{t} = (2, 1, 1)$. Nyní nalezneme zobecněný vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu -2 pomocí soustavy lineárních rovnic $(-2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_1^T = -\mathbf{t}^T$,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Pro rovnici $-h_1 + 2h_2 = -1$ zvolíme například $h_3 = 0, h_2 = 0$, pak složka $h_1 = 1$ a vlastní vektor $\mathbf{h}_1 = (1, 0, 0)$. Transformační matici \mathbf{T} poskládáme po sloupcích z vektorů \mathbf{h}_1, \mathbf{t} , a \mathbf{h}_3 . Výsledkem jsou matice

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Při tomto postupu jsme zvolili vlastní vektor $\mathbf{h}_3 = (0, 0, 1)$. Pokud bychom ovšem vybrali za vlastní vektor $\mathbf{h}_3 = (2, 1, 0)$, dostali bychom jinou transformační matici \mathbf{T} . Také tato matice \mathbf{T} musí splňovat dvě důležité podmínky:

1. Matice \mathbf{T} je regulární,
2. Její sloupcové vektory (vlastní vektory) musí odpovídat příslušným vlastním číslům Jordanova kanonického tvaru.

Výsledkem mohou být také matice:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{J} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Příklad 4.5 je již značně komplikovaný na výpočet, přestože se jedná jen o matici třetího řádu, tak tomu ovšem není u matematického programu (obr. 9). Program Mathematica[®] 7 nabízí další variantu transformační matice \mathbf{T} , kde vlastní vektory příslušné trojnásobnému číslu $\lambda_{1,2,3} = -2$ jsou $\mathbf{h}_3 = (-2, -1, 0)$, $\mathbf{h}_2 = (0, 0, -1)$, $\mathbf{t} = (-2a, -a, -b) = (-4, -2, -2)$, $\mathbf{h}_1 = (0, 1, 0)$.

Obrázek 9

```
In[2]:= JordanDecomposition[{{0, -4, 0}, {1, -4, 0}, {1, -2, -2}}]
Out[2]= {{{-2, -4, 0}, {-1, -2, 1}, {0, -2, 0}}, {{-2, 0, 0}, {0, -2, 1}, {0, 0, -2}}]

In[3]:= Map[MatrixForm, %]
Out[3]= {
  {
    (-2 -4 0)
    (-1 -2 1)
    0 -2 0
  },
  {
    (-2 0 0)
    0 -2 1
    0 0 -2
  }
}

In[4]:= Inverse[{{-2, -4, 0}, {-1, -2, 1}, {0, -2, 0}}]
Out[4]= {
  {-1/2, 0, 1},
  {0, 0, -1/2},
  {-1/2, 1, 0}
}

In[5]:= {{-2, -4, 0}, {-1, -2, 1}, {0, -2, 0}}.
  {{-2, 0, 0}, {0, -2, 1}, {0, 0, -2}}.{{-1/2, 0, 1}, {0, 0, -1/2}, {-1/2, 1, 0}}
Out[5]= {{0, -4, 0}, {1, -4, 0}, {1, -2, -2}}
```

4.4. Reálná Jordanova matice

Tento podnadpis je věnován reálné čtvercové matici, která má komplexní vlastní čísla. Tato vlastní čísla jsou čísla komplexně sdružená, neboť charakteristický polynom je reálný. V těchto případech se také mluví o reálné Jordanově matici, která však již není diagonální.

Věta. 4.8.

Jestliže \mathbf{A} je reálná matice řádu n , pro kterou existuje n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$, pak \mathbf{A} je podobná Jordanově matici $\mathbf{J} = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n]$, kde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ jsou vlastní čísla matice \mathbf{A} , matice \mathbf{T} se skládá po sloupcích z vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n$. Jestliže matice \mathbf{A} má k dvojic komplexně sdružených vlastních čísel, potom matice \mathbf{A} je podobná reálné matici \mathbf{J}_R . Necht' vlastní čísla matice \mathbf{A} jsou

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha_1 + \beta_1 i, \lambda_2 = \alpha_1 - \beta_1 i, \\ \lambda_3 &= \alpha_2 + \beta_2 i, \lambda_4 = \alpha_2 - \beta_2 i, \\ &\dots\dots\dots \\ \lambda_{2k-1} &= \alpha_k + \beta_k i, \lambda_{2k} = \alpha_k - \beta_k i, \end{aligned}$$

kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pro každé $j = 2k + 1, \dots, n$, necht' příslušné vlastní vektory máme ve tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_1 &= r_1 + z_1 i, \mathbf{h}_2 = r_1 - z_1 i, \\ \mathbf{h}_3 &= r_2 + z_2 i, \mathbf{h}_4 = r_2 - z_2 i, \\ &\dots\dots\dots \\ \mathbf{h}_{2k-1} &= r_k + z_k i, \mathbf{h}_{2k} = r_k - z_k i, \end{aligned}$$

kde \mathbf{h}_j je reálný vlastní vektor pro každé $j = 2k + 1, \dots, n$. Pro matici \mathbf{A} platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \mathbf{T}_R^{-1}$, kde matici \mathbf{T}_R vytvoříme po sloupcích z vektorů $\mathbf{r}_1, z_1, \mathbf{r}_2, z_2, \dots, \mathbf{r}_k, z_k, \mathbf{h}_{2k+1}, \dots, \mathbf{h}_n$ a matice \mathbf{J}_R je ve tvaru

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha_k & \beta_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_k & \alpha_k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda_{2k+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(9, s. 139 – 140).

Příklad. 4.6.

Určeme Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Nejdříve určíme vlastní čísla matice \mathbf{A} :

$$\det(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 1 \\ -10 & \lambda - 5 \end{vmatrix} = (\lambda - 2 - i)(\lambda - 2 + i).$$

Vlastní čísla matice jsou komplexně sdružená čísla $\lambda_1 = 2 + i$ a $\lambda_2 = 2 - i$. Pro λ_1 určíme vlastní vektor řešením homogenní soustavy rovnic:

$$[(2+i)\mathbf{E} - \mathbf{A}]\mathbf{h}^T = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 3+i & 1 \\ -10 & -3+i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 3-i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$10h_1 + (3-i)h_2 = 0.$$

Zvolíme-li h_2 rovno 10, potom h_1 musí být rovno $-3 + i$. Vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_1 = 2 + i$ je libovolný nenulový k -násobek vektoru $\mathbf{h}_1 = (-3 + i, 10) = (-3, 10) + i(1, 0)$. Stejným postupem získáme i vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu $\lambda_2 = 2 - i$,

$$[(2-i)\mathbf{E} - \mathbf{A}]\mathbf{h}^T = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 3-i & 1 \\ -10 & -3-i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 10 & 3+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$10h_1 + (3+i)h_2 = 0.$$

Zvolíme-li $h_2 = 10$, pak $h_1 = -3 - i$. Tedy vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ_2 je libovolný nenulový násobek vektoru $\mathbf{h}_2 = (-3 - i, 10) = (-3, 10) + i(-1, 0)$. Nyní již můžeme napsat, že Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a matice \mathbf{T} jsou

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} -3+i & -3-i \\ 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

Podle věty 4.8 je možné určit také reálnou Jordanovu matici \mathbf{J}_R a k ní transformační matici \mathbf{T}_R , které vypadají takto:

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix},$$

i v tomto případě platí $\mathbf{A} = \mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \mathbf{T}_R^{-1}$. Za povšimnutí také stojí, že vlastní vektor \mathbf{h}_1 pro vlastní číslo λ_1 , které je komplexně sdružené s vlastním číslem λ_2 , je komplexně sdružený vlastnímu vektoru \mathbf{h}_2 příslušný vlastnímu číslu λ_2 . Nyní se ještě přesvědčíme, že platí rovnost $\mathbf{A} = \mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \mathbf{T}_R^{-1}$:

$$\mathbf{T}_R \cdot \mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 20 & 10 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \cdot \mathbf{T}_R^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 20 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -10 & -10 \\ 100 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{A}.$$

Řešení příkladu 4.6 pomocí matematického programu Mathematica[®] 7 je obdobné (obr. 10). V nabídce tohoto matematického programu je také zajímavý příkaz, kterým lze zkontrolovat, zda platí rovnost pro podobnost $\mathbf{A} = \mathbf{T} \mathbf{J} \mathbf{T}^{-1}$. Vstupem je zadání výroku $m == s \cdot j \cdot \text{Inverse}[s]$, kde m je čtvercová matice, s transformační matice, j Jordanova matice. Výstupem je odpověď, že výrok je pravdivý (True) nebo nepravdivý (False).

Obrázek 10

```
In[3]:= JordanDecomposition[{{-1, -1}, {10, 5}}]
Out[3]= {{{{- 3/10 - I/10, - 3/10 + I/10}, {1, 1}}, {{2 - I, 0}, {0, 2 + I}}}}
In[5]:= {{-1, -1}, {10, 5}} == {{{{- 3/10 - I/10, - 3/10 + I/10}, {1, 1}},
      {{2 - I, 0}, {0, 2 + I}}}.Inverse[{{{- 3/10 - I/10, - 3/10 + I/10}, {1, 1}}}}
Out[5]= True
```

Příklad. 4.7.

Určeme Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} ,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom λ -matice $\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}$ je

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda^2 - 6\lambda + 10) = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda - 3 - i) \cdot (\lambda - 3 + i).$$

Pro násobné vlastní číslo $\lambda_{1,2} = 2$ pomocí homogenní soustavy lineárních rovnic nalezneme pouze jeden lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{h}_1 = (1, 0, 0, 0)$. Vlastní vektor \mathbf{h}_2 získáme z nehomogenní soustavy lineárních rovnic: $(2\mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{h}_2 = \mathbf{h}_1$,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$-2h_4 = 0, \quad -2h_3 - 2h_4 = 0, \quad -h_2 + h_3 + 3h_4 = -1.$$

Ze soustavy rovnic vyplývá, že vlastní vektor $\mathbf{h}_2 = (1, 1, 0, 0)$. Pro vlastní číslo $\lambda_3 = 3 + i$ řešíme homogenní soustavu lineárních rovnic:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1+i & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i-1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1+i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1+i & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1+i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

$$(i-1)h_3 - 2h_4 = 0, \quad (1+i)h_2 + h_3 = 0, \quad (1+i)h_1 - h_2 + h_3 + 3h_4 = 0.$$

Vektor \mathbf{h}_3 může být například vektor $(i, 1, -1-i, 1) = (0, 1, -1, 1) + i(1, 0, -1, 0)$. Pro komplexně sdružené vlastní číslo $\lambda_4 = 3 - i$ bude komplexně sdružený (vlastnímu vektoru \mathbf{h}_3) vlastní vektor $\mathbf{h}_4 = (-i, 1, -1 + i, 1)$. Řešením jsou Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matice \mathbf{T}

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-i \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i & -i \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-i & -1+i \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

V oboru reálných čísel je možné psát

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.5. Zobecněné vlastní vektory a reálná matice \mathbf{J}_R

Následující věta 4.9 říká, jak se vytváří reálná Jordanova buňka čtvercové matice sudého řádu $n = 2k$, jestliže má k -násobné vlastní číslo $\bar{\lambda}$, které je komplexně sdružené k -násobnému vlastnímu číslu λ .

Věta. 4.9.

Nechť \mathbf{A} je reálná čtvercová matice řádu $n = 2k$, necht' charakteristický polynom $p_A(\lambda) = (\lambda - \alpha - \beta i)^k (\lambda - \alpha + \beta i)^k$, necht' vlastnímu číslu $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ přísluší řetězec zobecněných vlastních vektorů délky k , vektory $\mathbf{h}_1 = r_1 + z_1 i, \mathbf{h}_2 = r_2 + z_2 i, \dots, \mathbf{h}_k = r_k + z_k i$. Potom komplexně sdruženému číslu $\bar{\lambda}_1 = \alpha - \beta i$ přísluší řetězec zobecněných vlastních vektorů délky k , který je komplexně sdružený řetězci $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k$. Matice $\mathbf{A} = \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$, kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \bar{\lambda}_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \bar{\lambda}_1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \bar{\lambda}_1 \end{pmatrix},$$

matice \mathbf{T} se skládá po sloupcích z vektorů $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_k, \bar{\mathbf{h}}_1, \bar{\mathbf{h}}_2, \dots, \bar{\mathbf{h}}_k$. V reálném oboru je $\mathbf{A} = \mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \mathbf{T}_R^{-1}$, kde

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix},$$

matice \mathbf{T}_R se skládá po sloupcích z vektorů $r_1, z_1, r_2, z_2, \dots, r_k, z_k$. Matice \mathbf{J}_R se nazývá reálná Jordanova buňka řádu $2k$ příslušné dvojici komplexně sdružených vlastních čísel a značí $\mathbf{J}_R^k(\alpha \pm \beta i)$.

V následujícím příkladu 4.8 si ukážeme také analogické řešení pro Jordanovu buňku, která má číslo 1 v rovnoběžné linii pod hlavní diagonálou.

Příklad. 4.8.

Určeme matici \mathbf{J} a transformační matici \mathbf{T} matice \mathbf{A} , jestliže

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice je

$$p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)^2 = (\lambda - 2 - i)^2 (\lambda - 2 + i)^2.$$

Pro vlastní číslo $\lambda_1 = 2 + i$ získáme dva vlastní vektory takto:

1. Řešením homogenní soustavy $[(2+i)\mathbf{E} - \mathbf{A}]\mathbf{h}_1^T = \mathbf{o}^T$,

$$\begin{pmatrix} i & -2 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 \\ -1 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -2 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} i & -2 & 0 & 1 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$ih_1 - 2h_2 + h_4 = 0, \quad ih_2 + h_3 = 0, \quad 2h_3 = 0.$$

Složku h_4 lze zvolit zcela libovolně, např. $h_4 = 1$. Pokud bychom zvolili $h_4 = 0$, pak by vektor \mathbf{h}_1 byl nulový vektor a to nelze. Z rovnic vyplývá, že $h_3 = 0$, $h_2 = 0$ a složka vektoru $h_1 = i$. lineárně nezávislý vlastní vektor $\mathbf{h}_1 = (i, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 1) + i(1, 0, 0, 0)$. Druhý vlastní vektor získáme řešením nehomogenní soustavy $[(2+i)\mathbf{E} - \mathbf{A}]\mathbf{h}_2 = -\mathbf{h}_1^T$, vektor \mathbf{h}_2 bude zobecněný vlastní vektor,

$$\left(\begin{array}{cccc|c} i & -2 & 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & i & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} i & -2 & 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2i \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} i & -2 & 0 & 1 & -i \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right),$$

$$ih_1 - 2h_2 + h_4 = -i, \quad ih_2 + h_3 = 0, \quad 2h_3 = 2.$$

Zobecněný vlastní vektor se např. rovná $\mathbf{h}_2 = (1, i, 1, 0) = (1, 0, 1, 0) + i(0, 1, 0, 0)$. Komplexně sdruženému vlastnímu číslu $\bar{\lambda}_1$ potom přísluší např. komplexně sdružené vlastní vektory $\bar{\mathbf{h}}_1 = (-i, 0, 0, 1)$ a $\bar{\mathbf{h}}_2 = (1, -i, 1, 0)$. Řetězec zobecněných vlastních vektorů má délku 2. Pak Jordanův kanonický tvar \mathbf{J} a transformační matice \mathbf{T} jsou

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2+i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2-i \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} i & 1 & -i & 1 \\ 0 & i & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

V reálném oboru existují tyto matice

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

nebo analogicky

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 2+i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2-i \end{pmatrix}, \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & -i \\ i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{J}_R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{T}_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Abychom se přesvědčili, že platí tvrzení $\mathbf{A} = \mathbf{T}_R \mathbf{J}_R \mathbf{T}_R^{-1}$, použijeme matematický program Mathematica[®] 7 (obr. 11).

Obrázek 11

```
In[1]:= {{2, 2, 0, -1}, {0, 2, -1, 0}, {0, 1, 2, 0}, {1, 0, 0, 2}} =  
        {{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}}.  
        {{2, 1, 0, 0}, {-1, 2, 0, 0}, {1, 0, 2, 1}, {0, 1, -1, 2}}.  
        Inverse[{{1, 0, 0, 1}, {0, 1, 0, 0}, {1, 0, 0, 0}, {0, 0, 1, 0}}]  
Out[1]= True
```

Závěr

Bakalářská práce pojednávala nejen o Jordanovu tvaru matice, ale také s ním úzce spjatých pojmech spektrální teorie matic, tj. charakteristickém polynomu, vlastních číslech a vlastních vektorech. Přestože otázka charakteristické (sekulární) rovnice se objevila v 18. století, kdy hrála důležitou roli při výpočtu pohybu planet a odchylek od eliptických drah, teprve koncem 19. století byly závěry této problematiky formulovány pomocí matic.

Teorie matic se rozšířila a byla všeobecně uznána až ve 20. století, kdy hlavním tématem byla otázka speciálních typů matic. V souvislosti s jejím rozšířením se objevila v učebnicích také část obsahující spektrální teorii a kanonické tvary. Tato součást lineární algebry je i dnes stále živá. Příkladem užití Jordanova tvaru matice je řešení soustav lineárních diferenciálních rovnic, kterým se zabývá matematická analýza.

Tato bakalářská práce se věnovala podstatným pojmům pro pochopení výpočtu Jordanovy matice. Některých otázek se dotýkala pouze okrajově. Na příklad v druhé kapitole se hovořilo o charakteristické matici (viz definice 2.1), kterou se rozumí λ -matice. Každá λ -matice nad tělesem T je sestavena z polynomů neurčité λ , proto se také nazývá polynomiální matice. Problematika tohoto typu matice je spojena vedle charakteristického polynomu s invariantními polynomy a minimálním polynomem.

Ačkoliv algoritmus potřebný pro výpočet Jordanova tvaru matice se nezdá příliš komplikovaný, je zdlouhavý, jak je patrné na uvedených příkladech (viz příklad 4.2). Pro počítačový program Mathematica[®] 7 není problém Jordanovu matici včetně transformační matice vypočítat během krátké doby, a to nejen kanonický tvar čtvercové matice třetího řádu. Program Mathematica je schopný řešit matice mnohonásobně vyššího řádu. Takový počítačový výpočet trvá neporovnatelně kratší dobu, než je schopen zvládnout člověk. Za nevýhodu tohoto programu považují formu zadávání matice po jednotlivých řádkových vektorech, také výsledné řešení ve formě řádkových vektorů ztrácí na přehlednosti.

Resumé

This thesis treats a canonical form of the matrix that is termed by the meaningful French mathematician, Jordan's form of the matrix. For computation this form is necessary to determinate roots, the Eigenvalues, of the characteristic polynomial of the given matrix. Diagonal form problem is solved using the Eigenvectors, which belong to the Eigenvalues and from which is built the transformational matrix. This algorithm is possible to obtain thanks to the mathematical program Mathematica[®] 7 incomparably faster to human labor.

Seznam literatury a internetových zdrojů

- (1) BARTSCH, H.: Matematické vzorce, 3. vyd., Mladá fronta, Praha 2000, ISBN 80-204-0607-7
- (2) BEČVÁŘ, Jindřich: Lineární algebra, 4. vyd., MATFYZPRESS, Praha, 2010, ISBN 978-80-7378-135-4
- (3) BEČVÁŘ, Jindřich: Z historie lineární algebry, 1. vyd., MATFYZPRESS, Praha 2007, ISBN 978-80-7378-036-49 (edice Dějiny matematiky, 35. svazek)
- (4) BICAN, Ladislav: Lineární algebra a geometrie, 2. vyd., Nakladatelství Academia, Praha 2009, ISBN 978-80-200-1707-9
- (5) HOLENDÁ, Jiří: O maticích, 1. vyd., Vydavatelský servis, Plzeň, 2007, ISBN 978-80-86843-16-2
- (6) PROSKURJAKOV, I. V.: Sbornik zadač po linejnoj algebre, Nauka, Moskva 1970
- (7) SERRE, D.: Matrices: Theory and Applications, 2nd ed., Springer, 2010
- (8) STRANG, G.: Linear algebra and Its Applications, 4th ed., Cengage, 2006
- (9) TESKOVÁ, Libuše: Lineární algebra, 3. vyd., Západočeská univerzita, Plzeň, 2010
- (10) TAUFER, J., NAGY, J.: Algebra, 1. vyd., ČVUT, Praha, 1997, ISBN 80-01-01618-8
- (11) <http://articles.gourt.com/cs/Camille%20Jordan>
- (12) <http://leccos.com/index.php/clanky/jordan-marie-ennemond-camille>
- (13) <http://www.aprender-mat.info>

Seznam obrázků

Obrázek 1	22
Obrázek 2	22
Obrázek 3	24
Obrázek 4	24
Obrázek 5	34
Obrázek 6	36
Obrázek 7	37
Obrázek 8	40
Obrázek 9	43
Obrázek 10	46
Obrázek 11	51